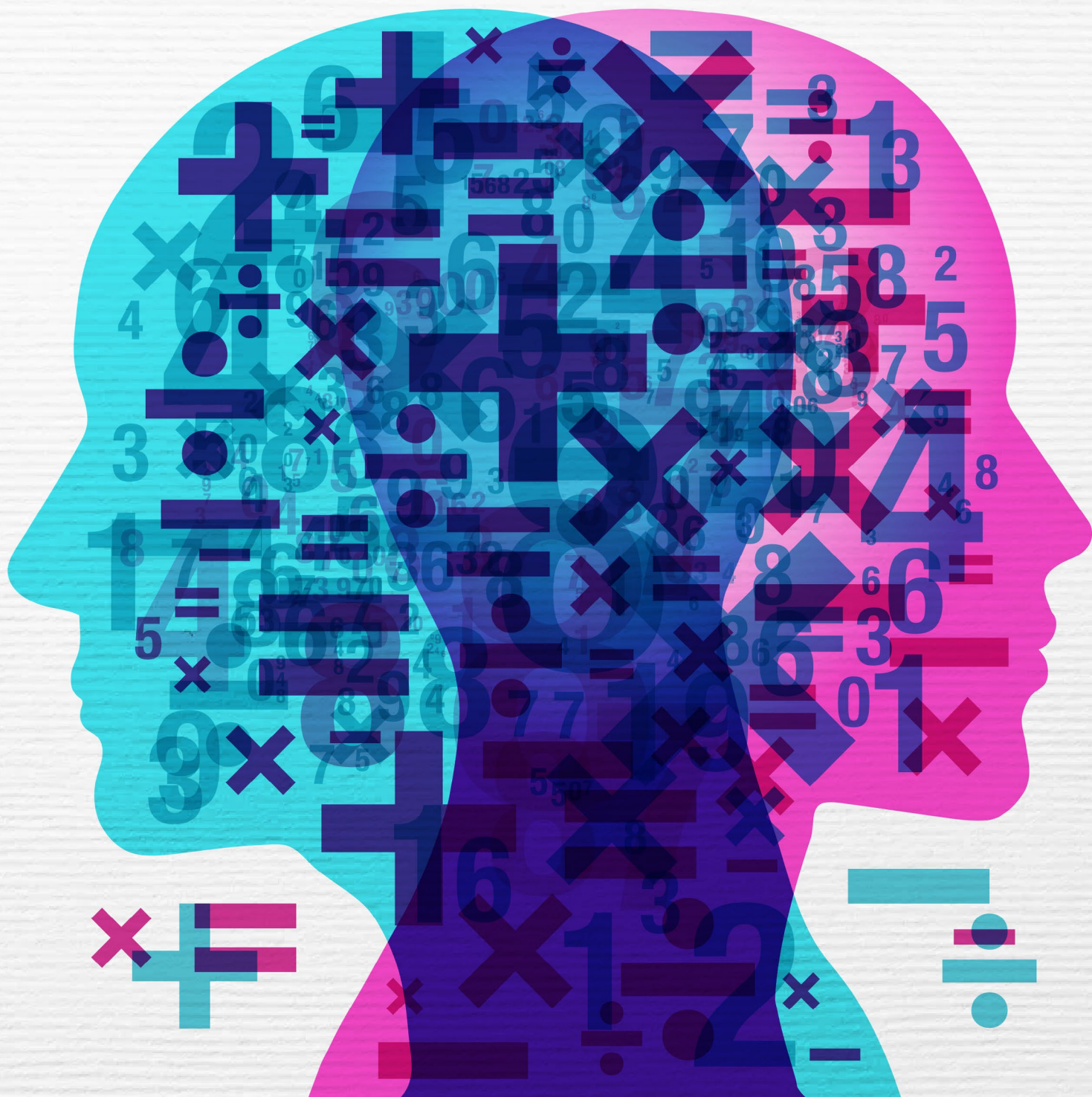


מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 10 | נובמבר 2023 | כסלו תשפ"ד



”

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 10

כסלו תשפ"ד – נובמבר 2023

”

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):

ד"ר מארק אפלבראם	מכללת קיי - המכללה האקדמית לחינוך, באר שבע
פרופ' דוד בן-חיים	מינהלת מל"מ - הטכניון, חיפה
פרופ' הגר גל	שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
ד"ר בועז זילברמן	דוד ילין - המכללה האקדמית לחינוך, ירושלים
פרופ' אילנה לבנברג	המרכז לטכנולוגיה חינוכית
פרופ' טלי נחליאלי	האקדמית גורדון, חיפה
ד"ר אלכס פרידלנדר	מכללת לוינסקי לחינוך, תל אביב-יפו
ד"ר אמאל שריף-רסלאן	מכון ויצמן למדע, רחובות
פרופ' עטרה שריקי	המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה
פרופ' דינה תירוש	אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון
	אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

שמות הכותבים:

ענת אבן-זהב	המחלקה להוראת המדעים, אקדמיית אלקאסמי
אורית אלגאוי-הרשלר	החוג לגיל הרך, מכללת אפרתה - המכללה האקדמית לחינוך, ירושלים; התואר השני לנוירופדגוגיה, המכללה האקדמית אחוה, ערוגות.
עוזי אשר	רופא בתחום רפואת נשים. לשעבר מנהל המרכז לבריאות האישה של קופת חולים כללית.
יניב ביטון	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
משה בן-עמי	סגן הדקן ללימודים קליניים, הפקולטה לרפואה ע"ש עזריאלי, אוניברסיטת בר-אילן, צפת.
מירלה וידר	החוג למתמטיקה, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
אילנה ווייסמן	החוג למתמטיקה, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
סמי חדד	לשעבר מנהל יחידת אולטרא-סאונד, מחלקת נשים ויולדות, מרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה).
פירחה חמו	החוג לגיל הרך, מכללת אפרתה - המכללה האקדמית לחינוך, ירושלים.
דינה חסידוב	החוג למתמטיקה, תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך, חולון.
הדס כהן רוזנברג	בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב; היחידה לקידום ההוראה, מכללת סמינר הקיבוצים, תל-אביב-יפו; החוג לפסיכולוגיה, המכללה למנהל.
מארק לייקין	החוג לחינוך מיוחד וחוג ללקויות למידה, הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה.
רוזה לייקין	חוג לחינוך מתמטי וחינוך מחוננים, הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה.
נצה מובשוביץ-הדר	הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
דורית נריה	מנהלת תחום דעת מתמטיקה ביסודי ובקדם יסודי במשרד החינוך.
רובא סברי אבן עבד	רופאה בתחום רפואת נשים. עובדת במרכז בריאות האישה של קופת חולים כללית, מוקביילה, נוף הגליל, קריית טבעון ועפולה.
אנה ספרד	החוג לחינוך מתמטי, הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה.
תקוה עובדיה	החוג להוראת מתמטיקה, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.
יורי פרליץ	מנהל מערך נשים ויולדות, מרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה).
לאונרדו קסלמן	מנהל המרכז לבריאות האישה של קופת חולים כללית, נוף הגליל.
קרני שיר	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.

עריכת לשון: יפעת פישר, מכללת שאנן

עימוד והבאה לדפוס: תאיר גז-שכטמן, מכללת שאנן

עיצוב וצילום תמונת שער: תאיר גז-שכטמן, מכללת שאנן

עיצוב וצילום תמונת תוכן העניינים: תאיר גז-שכטמן, מכללת שאנן

מכללת שאנן - הוצאה לאור

ISSN 2311-5483

כתובת המערכת:

רח' הים התיכון 7, ת"ד 906, קריית שמואל, חיפה 2610901

טלפון: 04-8780000 פקס: 04-8714445

Email: laor@shaanan.org

כתובת אינטרנט של כתב העת http://shaanan.ac.il/?page_id=4244

קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי"

קול קורא

אנו מזמינים את כל העוסקים בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים ואת כל העוסקים במחקר בחינוך מתמטי, טי, לשלוח מאמרים מחקריים בתחום החינוך המתמטי, או מאמרים העוסקים בדרכי הוראה ובתובנות שעולות מהכשרת מורים למתמטיקה ובהתפתחות מקצועית של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי בכל הרמות האקדמיות. במערכת של כתב העת מכהנים נציגים מהמוסדות השונים להכשרת מורים למתמטיקה בארץ, והוא נחשב כתב עת שפיט.

כתב העת הוא יוזמה מבורכת של נשיא שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, פרופ' יחיאל פריש, והוא יוצא בחסות המכללה ובמימונה.

יוצא לאור בקביעות מאז שנת 2014.

הנחיות למחברים

כתבי היד של מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" צריכים להיכתב בשפה העברית ולהכיל לכל היותר 25 עמודים. ב-25 עמודים אלו ייכללו כל התקצירים, הטבלאות, האיורים ורשימת המקורות. אם המאמר כולל טבלאות או איורים, יש לשבץ אותם בטקסט במקום שבו הם אמורים להופיע במאמר.

יש להגיש את המאמר בגופן David גודל 12, רווח כפול, יישור דו-צדדי, ולשלוח את המאמר כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת yanivb@cet.ac.il

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100–200 מילים, ורשימה של 3–5 מילות מפתח.

המאמרים נשלחים אנונימית לשיפוט מקצועי, לכן במאמר יהיה עמוד שער ובו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושיוכו האקדמי, המקצועי או אחר של המחבר.

כדי לשמור על אנונימיות הכותבים בתהליך ההערכה והשיפוט, אין לציין את שמות הכותבים בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותבים.

כתבי היד של מאמרים המוערכים כרלוונטיים לאופיו של כתב העת, מועברים לשיפוטם של קוראים המתמחים בנושא המאמר ועוברים תהליך שיפוט על פי שיטת "העיוורון הכפול": זהות המחברים אינה ידועה לקוראים, וזו של הקוראים אינה ידועה למחברים.

המחברים מתבקשים להקפיד על הדפסת מקורות המידע שבסוף המאמר לפי הכללים שנקבעו בידי ארגון APA.

מאמרים שיתקבלו לפרסום יעברו עריכה מדעית ולשונית. לאחר העריכה הגרסה הסופית תישלח למחברים לאישור ותוחזר בהקדם.

אין לשלוח מאמר אם הוא כבר התפרסם או עומד להתפרסם במקום אחר, או שהוא מצוי בתהליך שיפוט בכתב עת אחר. יש להתעדכן באתר כתב העת טרם שליחת מאמרים. כרגע לא מקבלים מאמרים חדשים.

תוכן עניינים

דבר העורך

יניב ביטון

7

על נירופדגוגיה והשלכותיה להוראה ולמידה ריאיון עם פרופסור יצחק פרידמן

קרני שיר ומירלה וידר

8

הספר "נירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים" מאת אורית אלגאוי-הרשור

הדס כהן רוזנברג

12

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

16

מוח ומתמטיקה: תובנות לאנשי חינוך לגיל הרך

אורית אלגאוי-הרשור ופירחה חמו

22

השפעת פעילות מתמטית של האישה ההרה על מוח העובר

דינה חסידוב, עוזי אשר, משה בן-עמי, יורי פרליץ, לאונרדו קסלמן,
רובא סברי אבן עבד וסמי חדד

35

**פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית בגאומטרייה
בתלמידים בעלי רמות שונות של יכולת**
אילנה וייסמן, מרק לייקין ורוזה לייקין

44

**תרגול שליפה, תרגול מרווח ותרגול משולב
בהוראת מתמטיקה**
דורית נריה

60

**רווחה מקצועית של מורים מומחים למתמטיקה ולמדעים
בתוכנית פיתוח מקצועי יעילות**
מירלה וידר וענת אבן-זהב

68

**שופכים אור על אוריינות מתמטית
מה משתנה במעבר מהוראת מתמטיקה לפיתוח מקצועי**
אנה ספרד

84

להרחיב את השביל ולהרחיק את הגבול
ניסיונות ליישום רעיונות תאורטיים מפסיכולוגיה חינוכית וקוגניטיבית
בהוראת מתמטיקה (M.Ed.) בהכשרה להוראה ובתוכניות לתואר שני
תקוה עובדיה

98

Mooc: מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההווה האנושית
בועז זילברמן

122

תקצירים באנגלית

125

דבר העורך

יניב ביטון

ד"ר יניב ביטון

מרצה בכיר בחוג למתמטיקה במכללת שאנן ומנהל אשכול STEM במרכז לטכנולוגיה חינוכית. מחקריו מתמקדים בהערכה ובשילוב טכנולוגיה בחינוך מתמטי.



כתב העת מחקר ועיון בחינוך מתמטי יוסיף ללוות את המגמות והחידושים בשדה התאורטי והמעשי בתחום.

ברצוני להודות לנשיא מכללת שאנן פרופ' אבי לוי על תמיכתו המקצועית והנדיבה בהוצאה לאור של הגיליון; לצוות ההוצאה לאור של מכללת שאנן ולעורכת הראשית גב' יפעת פישר; לסוקרי המאמרים והמדורים ובפרט לד"ר אורית אלגאוי־הרשור - מדענית מוח ואשת חינוך, מחלוצי התחום המתהווה של הנירור־חינוך בישראל ומחברת הספר "נירורפדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים" שיסופר עליו גם בגיליון חגיגי זה, על הייעוץ והשותפות המקצועית בקריאת המאמרים; למחברי המאמרים והמדורים - בלי מסירותם לא היה גיליון זה בידכם.

אני מקווה שהעיון במאמרים ובמדורים המגוונים בתחום מרתק זה יהיה מהנה, פורה ויתרום לקידום קהילת החינוך המתמטי בתחום.

להתראות בגיליון הבא.

שלכם,
יניב

אני גאה ונרגש להביא לפניכם את גיליון 10 של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי". גיליון חגיגי העוסק בחיבור בין מדעי המוח ללמידת מתמטיקה.

בשנת הלימודים תשפ"ב זכיתי להיות אחד מבין בוגריו של המחזור הראשון של התמחות בנירורפדגוגיה יישומית מבית מכון מופ"ת.

הנירורפדגוגיה יוצרת חיבורים בין מדעי המוח, הפסיכולוגיה והפדגוגיה כדי להיטיב את דרכי ההוראה והלמידה. הנירורפדגוגיה מאפשרת להבין טוב יותר את האופן שאנו לומדים ומלמדים, לשפר באמצעות מדע וממצאים אמפיריים את הפיתוח של שיטות הוראה ואסטרטגיות למידה, ועל פיהן להתוות מדיניות חינוכית.

כבר במהלך התמחותי עלה בקרבי הרצון העז לקדם גיליון ייחודי שיעסוק בקשר בין מדעי המוח ללמידת מתמטיקה. אני שמח שקהילת החינוך המתמטי וכלל אנשי החינוך זוכים לגיליון העוסק בתחום.

בגיליון הנוכחי מגוון מאמרים ומדורים המדגישים את הצורך להעמיק ולהמשיך את המחקר בתחום. היכרות עם כללי פעולתו של המוח האנושי ואופן עיבוד המידע בו מהווה את הבסיס להוראה ולמידה מיטביות שיביאו לידי עלייה ברמת ההישגים ולקשר טוב יותר בין התלמידים למורים.

על נירופדגוגיה והשלכותיה להוראה ולמידה

ריאיון עם פרופסור יצחק פרידמן

ד"ר קרני שיר

חברת סגל ומרצה בחוג למתמטיקה במכללה האקדמית הדתית לחינוך שאנן ומרצה נלווה במרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט. בעלת תואר שלישי במסלול ישיר מתואר ראשון בחינוך מתמטי מהפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ותואר B.Sc. בהצטיינות יתירה - גם הוא מהטכניון. שימשה מנחה ומדריכת מורים בתוכנית "מצוינות 2000" - תוכנית העשרה במתמטיקה ומדעים המיועדת לילדים ובני נוער, וחוקרת בפרויקט "הבזקים" מטעם הפקולטה למתמטיקה בטכניון.



ד"ר מירלה וידר

בעלת תואר שלישי בחינוך מתמטי מהפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון - המכון הטכנולוגי הישראלי, תואר M.A. בחינוך ופסיכולוגיה מהאוניברסיטה הפתוחה בישראל ותואר B.Sc. במתמטיקה מאוניברסיטת תל-אביב. בשנים האחרונות מרצה לקורסים מתמטיים וחינוך מתמטי במכללה האקדמית הדתית לחינוך שאנן, חיפה, ולאחרונה מונתה לתפקיד ראש החוג למתמטיקה. נוסף על כך היא עוסקת במחקר בחינוך מתמטי על רקע תפקידה כיועצת אקדמית במכון ויצמן למדע, רחובות.



על נויירופדגוגיה והשלכותיה להוראה ולמידה ריאיון עם פרופסור יצחק פרידמן

קרני שיר
מראיינת אורחת: מירלה וידר



פרופ' פרידמן עבד במשך 20 שנה בערך בתפקידים רבים במשרד החינוך: סמנכ"ל ראש מנהל החינוך העל-יסודי, ראש אגף תלמידים ועוד. הוא ניהל במשך 25 שנה את מכון הנרייטה סאלד ובו בזמן היה חבר סגל בבית הספר לחינוך של האוניברסיטה העברית בירושלים. כשפרש הצטרף למכללת אחוה כראש התוכנית למנהל מערכות החינוך וראש המרכז לנוירופדגוגיה.

פרופ' פרידמן נשוי באושר 60 שנה ואבא לשלושה בנים וסב לנכדות. הוא יליד ירושלים ורוב חייו גר עם אשתו ושלושת ילדיו בעיר זו, ולאחרונה המשפחה עברה לגור במודיעין.

מהי נויירופדגוגיה?

נוירופדגוגיה היא תאוריה חדשנית של הוראה המשלבת בין פסיכולוגיה לממצאים מתחום מדעי המוח ופועלת ליישומם בשדה החינוכי כדי ליצור פדגוגיה חדשה וגישה פורצת דרך בעולם החינוך. זה כ-40 שנה משמשות תאוריות פסיכולוגיות רבות לביסוס חקר החינוך והלמידה. התפתחות חקר המוח מאפשרת אישוש ופיתוח של תאוריות אלו. בשנים האחרונות הולכת וגוברת ההבנה שתהליך הלמידה מורכב ממאפיינים אישיותיים, רגשיים וקוגניטיביים כמו שפה, רגשות, קשב, תכנון

פרופ' יצחק פרידמן הינו מומחה בתורת המבחנים, וכן במדידה, הערכה וסטטיסטיקה. בעבר היה מנהל מכון הנרייטה סאלד וחבר סגל בבית הספר לחינוך באוניברסיטה העברית בירושלים. נוסף על כך היה ממייסדי האגודה הפסיכומטרית הישראלית, ממייסדי מנהל החינוך הקהילתי ויועץ לשרת החינוך ולמנכ"לית המשרד בנושאי רפורמה בחינוך העל-יסודי וצמצום מספר התלמידים בכיתה, יועץ למתודולוגיה במחקר ובהערכה במכון הנרייטה סאלד וראש התוכנית לתואר שני במנהל מערכות חינוך במכללת אחוה. כיום הוא ראש התוכנית לתואר שני בנוירופדגוגיה במכללת האקדמית אחוה.

בשנת 2016 יזם והקים במכללת אחוה את המרכז לנוירופדגוגיה, ובו הוא אחראי לגיבוש תחום הנוירופדגוגיה המקשר בין תחומי הפסיכולוגיה ומדעי המוח לפדגוגיה, ומנגיש את ממצאי חקר המוח לחינוך, להוראה וללמידה. הוא פיתח את הקורס "נוירופדגוגיה – חקר המוח לשיפור ההוראה והלמידה", שהוא קורס ייחודי וחלוצי בנושא זה בישראל, וכיום הוא מלמד אותו. בשנת 2020 הקים בשיתוף פעולה עם סגל מורים ממכללת אחוה, מכללת לוינסקי ומוסדות אקדמיים אחרים קבוצת לימוד ומחקר בנוירופדגוגיה יישומית וגם קורס להכשרת נויירופדגוגים בשיתוף עם המכללה האקדמית לוינסקי ומכון מופ"ת.

רקע אישי

פרופ' פרידמן למד בבית ספר עיוני לבגרות מלאה, ובד בבד למד בערבים טכנאות רדיו ועבר את הבחינות של משרד העבודה בתחום. הוא התגייס לגולני ובהמשך שירת כמדריך בקורס מפקדי כיתות.

לאחר שהשתחרר, עסק בתחום של מכונאות רכב, עבר מבחני מקצוע והוסמך למכונאי רכב ואפילו אישור לניהול מוסך, אך החיים שלו התגלגלו למסלול אחר לגמרי. הוא התחיל ללמוד לתואר ראשון בפסיכולוגיה, סטטיסטיקה ומדעי המדינה באוניברסיטה העברית בירושלים, והמשיך לתואר השני והשלישי. לאחר מכן הוא נסע לאוניברסיטת קולומביה ועשה שני פוסט-דוקים: אחד בתחום הפסיכולוגיה הקלינית והפסיכופתולוגיה, והשני בתחום תורת המבחנים, סטטיסטיקה, מדידה והערכה.



ויבין את הקשיים של התלמידים. הניסיונות לפעול לא בהתאמה לשעון הביולוגי של הילדים צריכים להיעשות בהירות רבה מאוד.

במסמך שהם עומדים לפרסם, נוסף על הדוגמאות הקונקרטיות לשימוש בהוראה, יתוארו גם השלבים למיניהם של יישום העקרונות הניורונים בהוראה, משלב ההיכרות עם העיקרון אל המטרה הרצויה של השגת הישגים לימודיים משופרים באמצעות הוראה שמשמשת בעקרונות האלה ויוצרת אסטרטגיות מתאימות של הוראה.

דגש נוסף שאליו מתייחס פרופ' פרידמן הוא הרגש שנמצא ביסוד הקוגניציה, משום שכל למידה מתנהלת באמצעות הרגש. הוא משתף אותנו כי רגשות קשורים למערכת הלימבית, שהיא מערכת מרכזית במוח המעורבת ביותר ברגשות החל מריח, דרך רגשות של אימה ופחד ועד לרגשות של הנאה וביטחון. המערכת הלימבית קשורה קשר הדוק אל האונה הקדמית במוח, האחראית לחשיבה ולתפקודים הניהוליים, כמו למשל הלמידה. הקשר בין הרגש לקוגניציה הוא בלתי נפרד. אם אין לי רגש חיובי כלפי נושא שרוצים ללמד אותי – אין שום סיכוי שאני אצליח ללמוד אותו, ואם אין לי רגש חיובי כלפי המורה שמלמד אותי נושא מסוים – אין שום סיכוי שאני אצליח ללמוד אותו היטב. התלמיד מרגיש ולכן הוא לומד... קודם כול התלמידים מתייחסים למורה כאדם, ורק אחר כך למורה כמלמד. מתוך כך מוסיף פרופ' פרידמן כי מורה לחיים חייב להיות בראש ובראשונה נירופדגוג המודע לפעולה של מוח הלומדים ולשלב טכניקות מבוססות חקר המוח בהוראה שלו.

פרופ' פרידמן מציין כי הנירופדגוגיה אף מבקשת לפזר את הערפל סביב קשיי למידה מגוונים. יש מחקרים בנושא המקום במוח שבו יושבת הדיסקלקוליה או המבנים במוח הקשורים בהפרעת קשב וריכוז, ממחקרים אלו ניתן ללמוד באילו תרגילים אפשר להיעזר כדי להתמודד טוב יותר עם התופעה. חשוב לציין שיש עקרונות נירופדגוגיים שהם בלתי נפרדים מהפרקטיקה המקצועית של מורים מנוסים והם פועלים לפיהם, אם כי לא תמיד במודעות מלאה, או שאינם מכירים את החשיבות, לפעמים הקריטית, של העקרונות האלה להוראה מוצלחת.

ניורוני המראה

לפני 30 שנה בערך חשפה את ניורוני המראה קבוצה של חוקרים איטלקים, שבראשם עמדו ריזולאטי (Rizzolatti) וקראיג'ירו (Craigheo). הניורונים האלה נחשפו בעת מחקרים שעשו על קופים. באונה הקדמית של המוח

פעולות, קבלת החלטות והתנהגות חברתית. לכן הקשר בין תפקוד המוח האנושי להוראה ולמידה הפך לאחד מהענפים המסקרנים ביותר בחקר החינוך.

למידה נעשית במוח ויוצרת למעשה שינוי מערך הקשרים של הניורונים במעגלים במוח. בשל החשיפה לסביבה חדשה, נקלט מידע חדש ולכן המוח משתנה. על פי פרופ' פרידמן, בהיכרות עם כללי הפעולה האלה ואופן עיבוד המידע במוח יש בסיס להוראה יעילה שתביא לידי עלייה ברמת ההישגים וגם לתחושות טובות יותר של הלומדים, קשר טוב יותר בין התלמידים למורים ומורים מרוצים יותר מעבודתם.

את שילוב הנירופדגוגיה בהכשרת מורים התחיל פרופ' פרידמן לפני כ-10 שנים במהלך הוראת קורס שנתי המיועד למורים הלומדים לתואר שני במכללת אחוה. בהמשך נפתח קורס בנושא למורי מורים במכון מופ"ת כדי שיוכלו לשלב עקרונות נירופדגוגיים בהכשרת מורים ובקורסי ההשתלמות שאותם הם מלמדים.

קבוצת המחקר של פרופ' פרידמן פירסמה בשנת 2016 חוברת המתארת את הפרקטיקה של הנירופדגוגיה, ובימים אלה הם עובדים על הכנת מסמך חדש שיכלול 16 דוגמאות קונקרטיות של עקרונות נירופדגוגיים ליישום בהוראה, וגם סיכום מידע על האופן שהמוח מתפקד ויוצר את השינוי במוח הלומדים.

לדוגמה נדרש זמן למידע חדש כדי שייטמע במוח. מסיבה זו קורסים מזורזים שניתנים בנושאים מסויימים לא מסייעים ללמידה. המידע לא נקלט, לא מסתדר, לא מתארגן, ובסופו של דבר לא עובר אל מחוזות הזיכרון ולכן אין בהם למידה משמעותית.

דוגמה נוספת היא חשיבות השינה. המוח לא ישן, המוח לפעמים אפילו עובד קשה מאוד בזמן השינה. הוא מארגן את עצמו בזמן שאנחנו ישנים, עושה סדר, מחבר וכו', ובלי שינה טובה כל התהליכים האלה לא יוכלו לקרות.

דבר נוסף שחשוב להיות מודעים אליו הוא השעון הביולוגי של התלמידים. השעון הביולוגי שלנו רגיש לכמויות האור שאנחנו נחשפים אליו ומווסת את הערות ואת השינה שלנו. לאנשים בגילים אחרים יש מסלול ערות אחר. למתבגרים יש מערכת הורמונלית פעילה מאוד שאחראית לשעון הביולוגי. שיעורים ולמידה שאינם מתואמים עם השעון הביולוגי כמו "שעת אפס" יכולים להיות בעייתיים ביותר עבור התלמידים. מומלץ לא לקיים לימודים בשעות המוקדמות של הבוקר, ואם כן יש לימודים מוקדמים, חשוב שהמורה יהיה מודע



יש אזור קדם-מוטורי שלפני עשיית פעולה מתוכננת בונה את סדרת הפעולות הנדרשת לעשיית הפעולה. סדרת פעולות אלו מועברת לאזור המוטורי של המוח, והא מתפעל את הפעולות האלה. החוקרים ראו שבזמן שהנסיין עשה פעולה שהקופים מכירים, הנזירונים באזור הקדם-מוטורי של הקופים פעלו כאילו הקופים עצמם עושים את הפעולה. במחקרים אחרים בנושא עלה כי הנזירונים האלה, אם הם מכירים רצף מסוים של פעולות והם רואים אחרים עושים את הפעולות האלה, אז הם מרגישים כאילו הם עצמם עושים את הפעולה, דבר שבא לידי ביטוי בפעילות המוחית באזור הקדם-מוטורי. יש נזירוני מראה גם באזור הסנסורי שיוצר מערכת 'אמפתית' שמתחילה לפעול בתגובה על תחושות של הזולת והזדהות עם רגשות כגון כעס, שמחה ועצב. אם נרצה לנצל היטב את המערכת הנזירנית הזו בכיתה, חשוב שנראה דפוסים התנהגות או ביטויים של מציאות מסוימת או משימות מוגדרות כמה פעמים, התלמיד יכיר את סדרת הפעולות הנדרשת לביצוע המשימה, ובהמשך נזירוני המראה שלו יקלטו כיצד הם עושים את המשימה, וכך תהיה למידה. נזירוני המראה באזור הסנסורי יכולים גם הם לבוא לידי ביטוי בכיתה. למורה נמרץ ומלא חיוכים יש יכולת רבה להשרות על התלמידים אותן תחושות, ותחושות הפוכות יבואו לידי ביטוי בכיתה של מורה זעוף או עייף.

יש חשיבות רבה להצגת ממצאי המחקרים העוסקים ברגשות ובהשפעתם על הלמידה לפני מורים ומורי-מורים. חשוב שאלו יהיו מודעים שרגשות משפיעים על האופן שמתעצבות מחשבות הלומד, על יכולת הזכירה ועל קבלת ההחלטות שלו. נוסף על המודעות לרגשות שמביאים תלמידים לכיתה, חשוב שהמורים ידעו לעורר רגשות חיוביים התומכים בלמידה (עניין, סקרנות, ציפייה, מוטיבציה) ויימנעו מיצירת רגשות שליליים הגורמים ללחץ בשיעורים (עומס יתר, חוסר אונים, חרדה ופחד, כעס, תחושות נטישה ואובדן וכדומה).

בכניסה הבאה שלנו לכיתה, צריך לנסות להשאיר את הכעסים והתחושות הרעות מאחור, לנשום עמוק ולהיכנס לכיתה בגישה חיובית ועם אמפתיה כלפי הלומדים.

המלצה על הספר "נוירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים" מאת אורית אלגאוי-הרשור

הדס כהן רוזנברג

פסיכולוגית חינוכית מומחית העוסקת גם בהוראת מתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה. מרצה ומנחה מורים ופרחי הוראה ביחידה להכשרה להוראה באוניברסיטת תל אביב ובסמינר הקיבוצים, וכן מרצה בחוג לפסיכולוגיה במכללה למנהל. מעבירה קורסים והשתלמויות העוסקים בחיבור שבין תכנים פסיכולוגיים להוראה.



המלצה על הספר "נירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים" מאת אורית אלגאוי-הרשלר

הדס כהן רוזנברג



נירופדגוגיה היא תחום חדש יחסית המהווה בין מדעי המוח, חינוך ופסיכולוגיה כדי להעמיק תובנות פדגוגיות ולשפר את ההוראה. התחום בעל פוטנציאל אדיר לקידום ההוראה והחינוך, אך על אף חשיבותו והיכולת המרובה לתרום ידע בתחום, מועט המידע עליו הנגיש לקוראים שאינם חוקרי מוח, ובוודאי בעברית. הספר נועד לשנות מצב זה, והוא מיועד לאנשי חינוך: מורים, מורי מורים, קובעי מדיניות חינוכית וצוותים מלווים.

בספר הידע הביולוגי מובא בשפה פשוטה וברורה ומלווה בידע פסיכולוגי וחינוכי כדי להסביר נושאים החשובים עבור הוראה ולמידה. לאורכו מוצגים ממצאים ממחקרים עדכניים על היישומים של הידע הזה לשדה החינוכי. כדי להדגים את היישום של ידע נירופדגוגי, המחברת שוזרת בספר סיפורים ודוגמאות רבים שיסייעו הן בהבנה הן בהפנמת הידע והשימוש בו. סגנון הכתיבה מעורר סקרנות ופותח צהרים לנושאים רבים, והמחקרים הרבים המתוארים (בצירוף המובאות המפורטות בו) מעשירים את ההבנה ויכולים לכוון את הקוראים הסקרנים להמשך חקירה ולמידה של התחום. כל פרק מסתיים במסקנות והשלכות לשדה החינוכי, כלומר בהבהרה ובהדגשה של הקשר בין הידע התאורטי למצבים המוכרים מעולם הלמידה וההוראה ובכלים פרקטיים ויישומיים. עוד הפרקים נחתמים בשאלות למחשבה שיכולות לעזור למורים, לקהילות מקצועיות לומדות, ואף להורים לראות את הקשר בין הכתוב בספר לתלמידיהם או ילדיהם ולדעת איך להתמודד איתם מבחינה חינוכית.

בתחילת הספר מתואר הסיפור של המורה מזל חסון, מחנכת כיתה ג' בחינוך המיוחד, שלמדה נירופדגוגיה. מזל לימדה את תלמידיה על פעולות המוח, על תאי עצב ועל גמישות מוחית, ומתוך כך נתנה לתלמידים שלה ידע ומוטיבציה ללמידה. בכך מתומצתת החשיבות של הספר – ההבנה של המוח שברמות מסוימות מתאימה לכולם, מורים ותלמידים, ויכולה לקדם למידה הן במובנים הרגשיים הן במובנים הקוגניטיביים.

בספר יש שלושה שערים המאורגנים לפי העקרונות של מודל העיצוב העולמי ללמידה (UDL, Universal Design for Learning). את המודל

הזה פיתח באוניברסיטת הרווארד פרופסור דוד רוז כדי לארגן את השיח בין הממצאים ממדעי המוח לפרקטיקה חינוכית באמצעות שלוש שאלות עיקריות: למה ללמוד (מערכות הרגש), מה ללמוד (מערכות התפיסה והלמידה) ואיך ללמוד (מערכות הבקרה והניהול). כל שאלה קשורה לאזורים שונים במוח האנושי, והספר עוקב בקווים כלליים אחר חלוקה זו.

בפרק הראשון של הספר, "הזמנה למפגש", מפורט ההקשר ההיסטורי של המפגש בין מדעי המוח לחינוך, תיאור בסיסי של מבנה ותפקוד המוח האנושי והסבר מפורט של מודל UDL. לבסוף יש תיאור של מחקרים עדכניים, מסקרנים, העוסקים בדמיון ובסנכרון שבין מוחות של אנשים שונים זה מזה, ודיון בשאלה מה חשוב



יותר בהתפתחות המוח: תורשה או סביבה?

השער הראשון, **מערכות הרגש**, דן בקשרים בין מערכת הרגש ללמידה וההתנהגות. כפי שכתבה המחברת, במשך שנים הבחינו חוקרים בבירור בין רגש לקוגניציה, ואולם בשני העשורים האחרונים מחקרי מוח מראים שרגשות מצויים בבסיס כל תפקוד מוחי. בשער זה שלושה פרקים הדנים בחיבור הזה. בפרק הראשון מתוארות הדרכים שבהן רגשות מתווכים למידה, הפרק השני דן בהשפעת הקשר לזולת על המוח וההתנהגות, ואילו הפרק השלישי דן בשאלת המוטיבציה: מה מניע אותנו?

שער זה מכיר לנו את המערכת הלימבית, "מערכת הרגש" של המוח, והשפעתה על הלמידה וההתנהגות. אנו לומדים איך האמיגדלה, גרעין קטן יחסית במרכז המוח, יכול להשתלט על המוח והגוף, וכיצד אפשר למתן את השפעתה בעזרת כלים מסוימים המגובים במחקרים מוחיים. השער מסביר למה למוח יש גם צורך בעניין ובאתגר מיטבי לפיתוח יכולת התמדה, נושא שלעיתים נשמט מהדיון החינוכי.

הפרק השני בחלק זה של הספר דן בנוירוביולוגיה חברתית, החוקר תהליכים כמו קוגניציה חברתית, אינטרוספקציה, אמפתיה, דחייה חברתית ותקשורת בין-אישית. אנו לומדים על נוירוני המראה ועל רשת ברירת המחדל, רשת של אזורים ברחבי המוח שבין השאר עוסקים בקוגניציה חברתית. מתוארות גם ההשפעות המוחיות של עקה חברתית לעומת תחושת שייכות חברתית, ומוסבר הצורך הרב באישור חברתי, יחס חם וסגנונות הוראה הכוללים תמיכה נבונה.

הפרק האחרון בשער **מערכות הרגש** דן בתהליכי מוטיבציה במוח האנושי, ומתמקדת במערכת הדופמינגית, המחברת בין מערכת הרגש לשאר המוח כדי להניע אותנו לפעול – או להימנע מפעולה. מתוארים בו המנגנון המוחי של "רישום תגמולים", המכוון למוטיבציה או להיעדרה, והעמקה נוירוביולוגית בתאוריית ההכוונה עצמית כמודל מרכזי להבנת מוטיבציה. פרק זה דן גם בנושא השפעת הסקרנות על המוח, והקשר בינה למוטיבציה ולמידה.

השער השני, **מערכות התפיסה והלמידה**, עוסק במדעי הלמידה ומתאר כיצד תאי עצב מייצרים ומחזקים קשרים, וכיצד חיבורים של ידע ממדעי המוח ומדעי הפסיכולוגיה מקדמים עקרונות ושיטות למידה יעילות במיוחד. בשער זה שני פרקים.

הפרק הרביעי, "ללמוד זה לחבר", מסביר מדוע למידה מתורגמת במוח לחיזוק ויצירה של קשרים עצביים. אנו פוגשים את האפליזיה, חילזון הים, שעזרה לחוקר המוח

אריק קנדל לזכות בפרס נובל על תגליותיו על המנגנון הנוירוביולוגי שעומד בבסיס הלמידה. אנו לומדים על המבנה של תאי העצב ועל הקשרים ביניהם, ובפרק מתוארות מסקנות חשובות על תחום החינוך. עוד מוסבר מדוע חשוב לעסוק במשמעות של המידע, מדוע עלולה להיות הפרעה לגיבוש המידע בזיכרון וכיצד אפשר להתמודד איתה, ועל חשיבותם של רמזים לשליפה ושל תרגול רב בשליפה.

בפרק החמישי, "המדע של הלמידה" אנו פוגשים בין השאר את ג'ושוע פור, עיתונאי אמריקאי, שהפך לאלוף זיכרון, ואנו לומדים על חלק מהשיטות החזקות לשיפור הזיכרון. בפרק זה מוצגים ומוסברים ארבעת שלבי תהליך הזכירה (קידוד, גיבוש, שליפה וגיבוש מחדש). בשני הפרקים יחד מצאתי תובנות וכלים רבים שמועילים ללמידה, כמו הצורך בחזרות עם הפסקות שבהן מתרחשת דווקא שכחה קלה, התרומה של בחנים ללמידה, היתרון של תרגול לסירוגין של נושאים מגוונים, חשיבה על משמעות התכנים (ולא רק שינון) ושימוש בשיטות מנמוניקה לשיפור הזיכרון. גם אם כמה מכלים אלה מוכרים, ההבנה מדוע הם יעילים הנשענת על הבנת תהליכי למידה במוח, עוזרת לי ליישם בדרך נכונה יותר ולהתמיד בכך (גם בעניין התנגדויות של תלמידים והורים – למשל לנושא הבחנים).

השער השלישי, **מערכות הניהול**, דן בתפקודים ניהוליים וביכולת האנושית לשאוף, לזום ולתכנן, או במילים אחרות המוח מכון למטרה. הוא מתמקד באונה המצחית המכונה מרכז הבקרה של המוח ובתפקידיה. בשער זה שלושה פרקים המתארים כיצד האונה המצחית מאפשרת תפקודים כמו קשב, הבנה מתמטית או חשיבה יצירתית. מתואר הקשר של האונה המצחית למערכת הלימבית, וכיצד היא מאפשרת חיבור בין רצונות לתוכניות פעולה. כמו כן דנים במרכיבים של התפקוד הניהולי בין השאר. מיקוד בזיכרון העבודה – "שולחן העבודה של המוח" ההכרחי לכל פעילות מחשבתית ולתכנון ההתנהגות. בשער זה יש גם עיסוק בתהליכי חשיבה ורשתות מוח רחבות המנוהלות בידי האונה המצחית, כגון קשב, חשיבה יצירתית וחשיבה מתמטית.

בעיון הספציפי במתמטיקה מתוארות בספר שלוש מערכות מתמטיות תומכות: הראשונה טבעית ומאפשרת הבחנה גסה בין כמויות למספרים, השנייה נרכשת ומאפשרת תפיסה מדויקת של כמויות ומספרים והשלישית כוללת אזורי זיכרון המשפיעים על שליפת עובדות וחוקים מתמטיים. תפקוד מתמטי תקין תלוי בשיתוף הפעולה בין שלוש המערכות האלו, בפיקוח התקין של האונה



המצחית. בהמשך מתואר מה אפשר לעשות כדי לחזק את המערכות השונות האלו ועולה הנחה שכולם (למעט חריגים קיצוניים) יכולים ללמוד מתמטיקה.

ד"ר אורית אלגאוי-הרשלר, מחברת הספר, היא חוקרת מוח ואשת חינוך. היא מלמדת במכללת אפרתה, במכללת אחוה ובמכללת הרצוג, וחברה בצוות המוביל של התמחות לנורופדגוגיה יישומית במכון מופ"ת – היכן שלמדתי והכרתי אותה. במהלך הספר ניכר אופייה של אורית כחוקרת ומרצה עתירת ידע ורגישות, השוזרת בכל מעשיה אהבה אמיתית לאנשים ולחינוך, הבנה נרחבת בעולמות המוח, תשוקה לידע חדש ויכולת נהדרת לספר סיפורים. לכן כשספרה יצא השנה לאור ניגשתי לקריאתו בשמחה ובציפייה, ואלה לא נכזבו.

שמחתי על יציאת הספר הייתה כפולה – כמורה למתמטיקה הוא חידד נקודות רבות למחשבה ולדיוק ההוראה שלי. כמרצה, הוא יוכל לשמש בעבורי ובעבור מרצים אחרים העוסקים בהכשרה להוראה ובליווי מורים, מקור מידע נגיש המסביר "בגובה העיניים" את התחום, ושאפשר להיעזר בו בקורסים מסוימים העוסקים בממשק בין פסיכולוגיה להוראה. בין השאר מצאתי כי הדיון בגמישות המוחית יכול להועיל רבות בשיחות עם תלמידים, הורים ומורים ולהעלות את תחושת המסוגלות בעניין לימודי המתמטיקה ופיתוח תודעת הצמיחה שמתואר בשער השני של הספר. כמו כן התחזקה אצלי ההבנה שחשוב לעבוד על תפקודים ניהוליים בשיעורי המתמטיקה, כמו ניהול זמן, גם במבחנים. התעוררה בי המחשבה כיצד להקל על הקשב בשיעורים ועל זיכרון העבודה – שני רכיבים מהותיים בלמידת המתמטיקה – ושמחתי לראות תימוכין לצורך בתרגול של מיומנויות עד לרמה של אוטומטיות הנותן חיזוק לדרך ההוראה שלי במתמטיקה.

הספר יצא לאור בפברואר 2023 בהוצאת מכון מופ"ת. יש בו 286 עמודים והוא מיועד למורים, מורי ומדריכי מורים, סטודנטים להוראה, הורים, תלמידים ושאר סקרנים. הוא יכול להועיל רבות למורים ותיקים, מורים צעירים ופרחי הוראה, וכן לעוסקים בהכשרה להוראה, שכן הוא דן בשאלות ובנושאים רבים המעסיקים הן את המלמדים הן את הלומדים. נהניתי מאוד לקרוא אותו ובטוחה שכל מי שיקרא יהנה ויפיק ממנו תועלת מרובה כמוני.

מדור חדשות מתמטיות

פרופ' (אמריטוס) נצה מובטוביץ־הדר



חברת סגל בטכניון משנת 1975. כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הייתה מורה למתמטיקה במשרה מלאה 12 שנה ובתוך כך נשלחה מטעם הפיקוח לאוניברסיטת קולומביה בניו יורק כדי להביא לישראל את "תוכנית קולומביה". הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים "חשבון פשוט" ועליהן קיבלה הטלוויזיה החינוכית פרסים בין־לאומיים. פרופ' מובטוביץ־הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר. הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. מאז צאתה לגמלאות היא מתמסרת לפיתוח הבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהמשך פיתוח אתר "רמזור למורה".

לאחרונה פיתחה עבור "קמפוס 10" קורס מוק בשם "מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההווה האנושית" עם צוות מט"ח.

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוויץ-הדר

אי אפשר למצוא את הפתרון לחידת סודוקו מבלי לנסות תחילה אפשרויות רבות. האם יכול להיות שהסיבוכיות הנראית לעין של בעיות מסוימות ב- NP היא רק אשליה ולכל בעיה ב- NP יש אלגוריתם כלשהו שיכול למצוא לה פתרון (ואז $P=NP$) או שמא יש בעיות שלכאורה הן פתירות ואפשר לבדוק כל ניחוש, אבל למעשה הן יישארו לנצח מחוץ לתחום ההישג של השכל האנושי? מסגרת המחקר היא תורה חדשה יחסית שנקראת **תורת הסיבוכיות** (complexity theory). למרות עשרות שנים של מאמצים של חוקרים בתחום תורת הסיבוכיות החישובית (computational complexity) – התחום העוסק בחקר שאלות על הקושי הפנימי הטמון בבעיות לסוגיהן – פתרון לשאלת P לעומת NP עדיין לא נראה בר השגה. אף כי הנטייה הגורפת היא להאמין ש- $P \neq NP$ אינן קבוצות שוות, כלומר שיש בעיות ב- NP שאינן ב- P , אפילו לא ברור איך יכולה להתחיל הוכחה לכך. נראה שהניסיון להוכיח שבעיות חישוביות מסוימות אינן "קלות" לפתרון הוא משימה קשה. אבל למה זה קשה כל כך? וכמה זה קשה? שאלות אלו מניעות את התחום קדימה באמצעות הפניית העדשות של תאוריית הסיבוכיות חזרה אל תוך עצמה. זוהי בעצם סיבוכיות-על.

במאמר **מומלץ ביותר** שכותרתו "המסע בן 50 שנה של תורת הסיבוכיות אל גבולות הידע" והתפרסם באוגוסט 2023 בעיתון האינטרנטי Quanta Magazine, הציג בן ברובייקר (Ben Brubaker) בקצרה ובחן רב את סיפורה של הדרך הארוכה והמפותלת בת 50 שנה בערך שהחלה מהמחקר על בעיית P לעומת NP והתקדמה עד אל המחקר העכשווי על סיבוכיות-על. זה לא היה מסע קל. הדרך הייתה זרועה במכשולים ובחסימות, וחזרה על עצמה שוב ושוב. עם זה בעבור חוקרי סיבוכיות-על, המסע עצמו אל חבל ארץ פראי ובלתי נודע הוא מקור לסיפוק רב.

חוקרים התעניינו בשאלה של גבולות החשיבה המתמטית הפורמלית זמן רב לפני שהבעיה P לעומת NP הועלתה לראשונה. בשנת 1921, זמן רב לפני תחילת התקופה של מדעי המחשב המודרניים, הציע המתמטיקאי דייוויד הילברט (David Hilbert) שהתמודד עם אותה שאלה, תוכנית מחקר לביסוס המתמטיקה בוודאות מוחלטת על יסודות איתנים. הוא קיווה להתחיל מהנחות פשוטות אחדות,

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-125,000 פריטים המתפרסמים ב-650 כתבי עת מתמטיים למאגר המידע הבין-לאומי המנוהל בידי החברה המתמטית האמריקאית MathSciNet: AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info. רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות ב-97 ענפי המתמטיקה לסוגיהם.

מדור החדשות בגיליון זה שהוא גיליון העשור ומוקדש לחשיבה מתמטית, מתמקד הפעם בשלוש שאלות הקשורות לכך: מדוע קשה להוכיח שבעיות מתמטיות הן קשות להוכחה? האם הוכחת השערת פרמה בידי אנדרו וויילס לפני 30 שנה הייתה סוף הדרך? איך חשיבה מחוץ לקופסה הביאה לאחרונה לתגלית מתמטית בתחום הריצופים?

מדוע קשה להוכיח שבעיה מתמטית היא קשה להוכחה? על תורת הסיבוכיות וסיבוכיות-על

הבעיה "האם P שווה ל- NP ?" היא אחת משבע הבעיות שנודעו בשם **בעיות המילניום** והיא מעסיקה כבר עשרות שנים את הקהילייה העוסקת במחקר מתמטי. בבעיה זו P ו- NP הם סמלים של שתי קבוצות של בעיות מתמטיות חישוביות, אולי השתיים המפורסמות ביותר, באוסף הולך וגדל של מאות קבוצות של בעיות מתמטיות שהחוקרים ממיינים לכל מיני מחלקות מבחינת הקושי לפתור אותן. בלשון פשוטה, הקבוצה P היא אוסף של כל הבעיות שאפשר לפתור אותן בעזרת אלגוריתם (הליך) ידוע, למשל, לעשות רשימה ארוכה של שמות לפי סדר אלף-בית של האות הראשונה או למצוא שורש של מספר ממשי בקירוב רצוי. הבעיות האלה נחשבות ל"קלות". הקבוצה NP היא אוסף של כל הבעיות שאם יש הצעה לפתרון, אפשר לבדוק אותו בקלות ולדעת אם הוא נכון או שגוי, כמו למשל פתרון לחידת סודוקו, אבל לא ידוע אלגוריתם שמאפשר למצוא להן פתרון. מכיוון שקל לבדוק גם את פתרון של כל הבעיות הנחשבות קלות לפתרון, כל בעיה ב- P היא גם ב- NP . השאלה היא האם כל בעיה ב- NP היא גם ב- P (ואז שתי הקבוצות שקולות) או שיש בעיות מסוימות ב- NP שאינן ב- P , כלומר אין אלגוריתם שמאפשר למצוא להן פתרון. למשל ככל הנראה



מגבלות יסוד על מה שאפשר להוכיח ועל מה שאפשר לחשב. אבל עם זה, במהלך ההתפתחות של המחשבים מרעיונות תאורטיים מופשטים למכונות של ממש, הבינו החוקרים שההבחנה שיצר טיורינג בין בעיות פתירות לבעיות בלתי פתירות, הניחה למעשה שאלות רבות ללא מענה. לכן עד שנות השישים של המאה העשרים, פיתחו מדעני המחשב אלגוריתמים מהירים למדי לצורך פתרון של בעיות מסוימות, בעוד עבור בעיות רבות אחרות האלגוריתמים היחידים שהיו ידועים היו איטיים עד מאוד. השאלה שהציקה לא הייתה רק **האם** אפשר לפתור את הבעיה, אלא **עד כמה קשה** לפתור אותה. לעיתים הבדלים קטנים בין שתי בעיות משפיעים השפעה רבה על רמת הקושי לפתור אותן.

כדי להמחיש זאת, ברובייקר בוחן במאמר הנזכר לעיל צמד בעיות דומות שעוסקות בגרפים. כאן גרפים הם רשתות של נקודות המחוברות בקווים. כל נקודה נקראת צומת וכל קו נקרא צלע או קשת. מדעני מחשב משתמשים בגרפים כדי לבנות מודלים לכל דבר כמעט, החל בחישוב קוונטי ועד לזרימת התעבורה (המתעניינים מוזמנים לקרוא על פרדוקס התעבורה באתר "**רמזור למורה**").

שתי הבעיות עוסקות במציאת מסלול שעובר **בכל צימת** או **בכל צלע** של הגרף פעם אחת ויחידה. להלן הבעיה הראשונה: נניח שנותנים לך גרף קטן ופשוט ומבקשים אותך למצוא משהו שנקרא מסלול המילטון – מסלול שעובר בכל צומת פעם אחת ורק אחת. די ברור שאפשר לפתור את הבעיה הזאת כי יש רק מספר סופי של מסלולים אפשריים, כך שבמקרה הכי גרוע אפשר פשוט לבדוק כל אחד מהם. אך מה אם יש הרבה צמתים? עבור גרפים גדולים יותר, האפשרויות הרבות הופכות את האלגוריתם הפשוט שלנו (בדיקת כל האפשרויות) לחסר תועלת. אומנם יש אלגוריתמים מתוחכמים ויעילים יותר למציאת מסלול המילטון, אבל גם הזמן הדרוש בשבילם למציאת פתרון גדל גדילה מעריכית (אקספוננציאלית) עם גודל הגרף. במילים אחרות, מיטב האלגוריתמים הידועים לא יצליחו למצוא מסלול בפרק זמן 'סביר' (כשהכוונה ב'סביר' היא ל"לפני שהיקום יבוא אל קיצו..."). לבעיית מסלול המילטון יש תכונה מעניינת נוספת. אם מישוהו טוען שמצא מסלול המילטון על גרף מסוים, הוא יכול לבדוק במהירות אם הפתרון אכן נכון, גם אם הגרף גדול מאוד. כל מה שצריך לעשות הוא לעקוב אחר המסלול, לסמן את הצמתים בזה אחר זה, ולוודא שאף צומת לא מסומן פעמיים. אם בסוף הבדיקה לא חסרים צמתים, המסלול הוא אכן מסלול המילטון. הזמן הדרוש לביצוע אלגוריתם לבדיקת פתרונות הוא פרופורציונלי לגודל

כלומר אקסיומות, ולפתח תורה מתמטית מאוחדת שעומדת בשלושה תנאים מרכזיים: עקביות, שלמות וכריעות.

התנאי הראשון של הילברט, **עקביות**, היה הדרישה החיונית שמתמטיקה תהיה נקייה מסתירות. שהרי אם אפשר להוכיח שתי טענות הצהרתיות שסותרות זו את זו על בסיס אותן אקסיומות, התורה כולה תלך לאבדון. אבל תורה יכולה להיות נקייה מסתירות ועדיין מוגבלת בטווח שלה. זה היה המניע לתנאי השני של הילברט, **שלמות**: זוהי הדרישה שאפשר להוכיח כל טענה מתמטית הצהרתית נכונה מתוך מערכת האקסיומות. התנאי השלישי, **כריעות**, דרש קיום של אלגוריתם שיאפשר להכריע, כלומר לקבוע קביעה חד־משמעית אם טענה מתמטית כלשהי היא אמת או שקר. בנאום בוועידה ב-1930, הכריז הילברט: "הסיסמה שלנו תהיה: 'אנחנו חייבים לדעת, אנחנו נדע' ("We must know, we will know")."

שנה בלבד לאחר מכן הנחית הלוגיקן קורט גדל (Kurt Gödel) את המכה הראשונה על חלומו של הילברט. הוא הוכיח שמתוך כל מערכת של אקסיומות אפשר להסיק טענה שסותרת את עצמה. נתייחס למשל אל הטענה האומרת: "את הטענה הזאת אי אפשר להוכיח". אם אכן אי אפשר להוכיח טענה זאת, אז היא מעידה על כך שהתורה אינה שלמה, ואילו אם אפשר להוכיח אותה, אז ההוכחה מראה על נכונות הטענה שאי אפשר להוכיח את הטענה, ומתוך כך נסתם הגולל על העקביות של התורה – תוצאה גרועה עוד יותר. באותו מאמר הוכיח גדל גם ששום תורה מתמטית לא תוכל להוכיח את העקביות של עצמה. עדיין חוקרים קיוו למצוא תורה מתמטית כריעה, גם אם לא שלמה. הם קיוו שיוכלו לפתח שיטות וכלים לזיהוי כל הטענות שכן אפשר להוכיחן מתוך התרחקות מהצעות בעייתיות כמו זו שהציע גדל. הצרה הייתה שאיש לא ידע איך לפתח כלים כאלה בשיטתיות.

ואז בשנת 1936 סטודנט לתואר שני בן 23 ששמו אלן טיורינג (Alan Turing) ניסח מחדש את תנאי הכריעות של הילברט בשפת החישוביות שהייתה חדשנית אז והנחית עליו מכה אנושה. טיורינג הציע מודל מתמטי – הידוע כיום בשם מכונת טיורינג – שיכול לייצג כל אלגוריתם שיש. הוא הראה שאילו ההליך שחיפש הילברט היה קיים, היה אפשר לייצג אותו בעזרת מכונת טיורינג, ואז השתמש בשיטות דומות לאלו של גדל (הפניה עצמית) כדי להוכיח את קיומן של טענות שאי אפשר להכריען או בלשון שקולה, קיומן של בעיות שאי אפשר לחשב אותן בשום חישוב וששום אלגוריתם לא יכול לפתור.

התוכנית של הילברט הייתה לעיי חורבות: לנצח יהיו



מסוימת שיש לה תכונה מוזרה, היא "אוניברסלית". זוהי בעיה שאם ימצא אלגוריתם פולינומיאלי שיכול לפתור אותה, הוא יכול לפתור גם כל (!) בעיה אחרת במחלקה NP . במילים אחרות די לפצח את הבעיה הזאת וכל שאר הבעיות ב- NP יפתרו איתה. הבעיה האוניברסלית של קוק כנראה הפרידה את הבעיות הקשות לכאורה מהבעיות הקלות. אבל קוק הבין שלמצוא אלגוריתם פולינומיאלי כזה שיפתור את הבעיה האוניברסלית שזיהה, זה אתגר גדול ורחוק מאוד מלהיות עניין של מה בכך.

בערך באותו זמן זיהה לאוניד לוי (Leonid Levin), סטודנט לתואר ראשון בברית המועצות, כמה וכמה בעיות אוניברסליות וגילה תוצאה דומה לתוצאה של קוק. שנה לאחר מכן גילה החוקר ריצ'רד קארפ (Richard Karp) כי תכונה זו שנקראה לימים NP -completeness, מאפיינת כמעט כל בעיית NP שעבורה טרם נמצא אלגוריתם פולינומיאלי.

משמעות הדבר היא שכל הבעיות שהן NP -complete – בעיית מסלול המילטון, סודוקו ואלפי אחרות – הן שקולות במובן הכי מדויק. מתברר כמעשה כשפים שכל הבעיות המגוונות האלו הן בעצם וריאציה על אותה בעיה, אבל עדיין אנחנו לא יודעים אם הבעיה האחת הזאת היא פתירה או לא, האם יש בעבורה אלגוריתם פולינומי או לא. כעת כל מה שנשאר לעשות בתורת הסיבוכיות הוא לפתור בעיה אחת: האם $P = NP$ או לא?

כדי להוכיח שמתקיים השוויון $P = NP$, יצטרכו החוקרים למצוא אלגוריתם מהיר (פולינומיאלי) לפתרון בעיה כלשהי באוסף NP -complete. לא ידוע אם יש פתרון כזה ואין ערובה לכך שזה יקרה בזמן הקרוב. עד כה התגלו אלגוריתמים גאוניים לפתרון בעיות שנראו לכאורה קשות (אם כי לא ב- NP -complete) וזה דרש עשרות שנים של עבודה.

כדי להוכיח שמתקיים $P \neq NP$, חוקרים של תורת הסיבוכיות יצטרכו לקבוע שאין ולא יכול להיות אלגוריתם מהיר (פולינומיאלי) לפתרון בעיה כלשהי באוסף NP -complete ולמעשה לסכל את המאמצים של כל מי שמנסה להוכיח ש- $P = NP$.

עדיין השאלה נשארה בלי מענה. יש המשווים חשיבה על השאלה 'מה אפשר לחשב?' לניסיון למיפוי גאוגרפי של שטח עצום שאין יכולת לראות את כולו. אנחנו נמצאים בתחתית ההר ולא יכולים לתצפת מפסגתו על הנוף, אלא במקרה הטוב לקפוץ למעלה ולמטה כדי לקבל תצפית טובה קצת יותר. אי-הידעה מאיפה להתחיל היא חלק מהבעיה. אבל זה לא שחוקרים לא ניסו. במהלך עשרות

הגרף ולכן הוא ישים בזמן סביר גם כשמדובר בגרפים גדולים. זוהי דוגמה לאלגוריתם פולינומיאלי, כלומר כזה שזמני ההרצה שלו גדל כפונקציה פולינומיאלית של גודל הגרף. צמיחה פולינומיאלית היא מרוסנת בהשוואה לצמיחה מעריכית, ולכן אלגוריתמים פולינומיאליים הם בני ביצוע בזמן סביר גם כשמדובר בגרפים גדולים. הם יעילים במידה ניכרת יותר מאלגוריתמים שזמן ההרצה שלהם גדלים כפונקציה מעריכית של גודל הגרף.

ובכן, בבעיית מסלול המילטון יש הבדל גדול בין אימות של פתרון לעומת איתור של פתרון. אפשר לאמת פתרון באמצעות אלגוריתם פולינומיאלי מהיר, אבל כדי למצוא פתרון נחוץ אלגוריתם מעריכי איטי. הדבר לא אמור להפתיע. הרי יותר קל לזהות יצירת מופת אומנותית מאשר ליצור יצירה כזאת, יותר קל לבדוק הוכחה מתמטית להשערה נתונה מאשר למצוא לה הוכחה. ובכל זאת, לא לכל הבעיות החישוביות יש תכונה כזאת. למעשה בעיה דומה מאוד למציאת מסלול המילטון מתנהגת אחרת לגמרי.

זוהי הבעיה השנייה: נניח ששוב נותנים לך גרף, אבל עכשיו עליך למצוא בין נקודותיו "מסלול אוילר", מסלול שעובר על כל צלע פעם אחת ורק אחת. שוב, יש אלגוריתם פולינומיאלי לבדיקת פתרונות אפשריים, אבל בניגוד לבעיית מסלול המילטון, כאן יש גם אלגוריתם פולינומיאלי לאיתור פתרון לבעיה בגרף בכל גודל, בתנאי שמדובר בגרף קשיר (כלומר יש מסלול בין כל שני צמתים בגרף) ושכל צומת יוצא מספר זוגי של צלעות – אחרת המסלול עלול להיתקע בצומת שממנו יוצא מספר אי-זוגי של צלעות. מותר שיהיו בדיוק שני צמתים עם מספר אי-זוגי של צלעות, ואלו יהיו נקודת ההתחלה והסיום של המסלול. תורת הסיבוכיות מראה שמסלולים מסוימים נראים קלים לאיתור יותר מאחרים.

גם בעיית מסלול המילטון וגם בעיית מסלול אוילר נמצאות במחלקה NP הכוללת את כל הבעיות שאפשר לבדוק את פתרונותיהן באמצעות אלגוריתמים פולינומיאליים. בעיית מסלול אוילר שייכת גם למחלקה P מכיוון שידוע אלגוריתם פולינומיאלי לפתרונה, אבל ככל הנראה זה לא המצב בבעיית מסלול המילטון. מדוע שתי הבעיות הדומות האלה שונות כל כך זו מזו? – זו המהות של בעיית P לעומת NP .

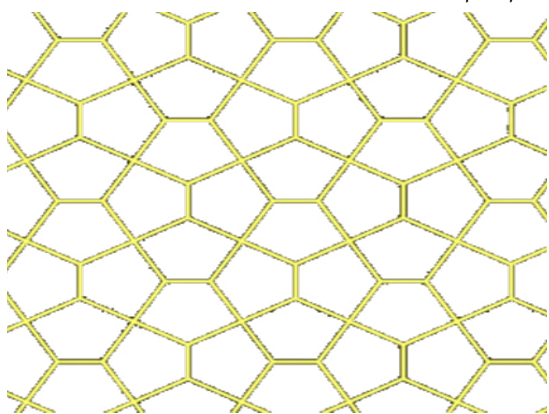
בדומה למה שעשינו בשתי הדוגמאות לעיל, המיון של בעיות חישוב לפי שייכותן ל- NP או ל- P נראה שימושי ומבטיח. בשנת 1971 פרסם החוקר סטיבן קוק (Stephen Cook) תוצאה יוצאת דופן. הוא זיהה בעיית NP



כלשהם. עם השנים נמצא שיש לעקומים אליפטיים קשר לאובייקטים מתמטיים בעלי סוגים רבים מאוד של סימטרייה – תבניות מודולריות (modular forms). בשנות השישים גרמו תבניות אלו למתמטיקאי הקנדי רוברט לנגלנדס (Robert Langlands) לשער השערות מרחיקות לכת, המתוות רשת של קשרים מפתיעים ביותר בין תחומי מתמטיקה למיניהם כגון אריתמטיקה ואנליזה. רשת זאת נקראת כיום "תוכנית לנגלנדס" (Langlands Program)⁴. בקרב מתמטיקאים רבים וגדולים, בהם אנדרו ויילס, היא נחשבת לפרויקט הגדול ביותר של המתמטיקה בת־זמננו ואפילו בתור העתיד של המתמטיקה.

פריצת דרך בנושא הריצופים - פתרון בעיית הריצוף הלא רגולרי

במדור החדשות של גיליון 4 (כאן, עמ' 4–11)⁵ כתבתי על בעיית הריצוף במחומשים שהמחקר עליה היה מסקרן. הריצופים באריחים שמתחברים צלע־אל־צלע וקודקוד־אל־קודקוד המוכרים לנו, רובם ככולם הם מחזוריים, כלומר יש להם סימטרייה של הזזה, יש וקטור הזזה שגורם לריצוף (האינסופי) להתלכד עם עצמו. במילים אחרות, יש אריח יסודי או יחידה כלשהי של אריחים צמודים שחוזרת על עצמה. לדוגמה, לריצוף המחומש האינסופי שחלקו מופיע באיור 1 יש שלושה וקטורי הזזה שיכולים לגרום לו להתלכד עם עצמו (מה כיווניהם?). באופן טבעי עולה השאלה: האם יש ריצופים לא מחזוריים? כלומר ריצופים שאין להם וקטור הזזה כזה? התשובה היא כן – יש אינסוף ריצופים כאלו.



איור 1

4. מומלץ בחום ולצפות בווידאו שבו המתמטיקאי אלכס קנטרוביץ, פרופסור באוניברסיטת ראטגרס, השוקד על הנגשת המתמטיקה בת זמננו לציבור, מנחה את הצופים בדרך ידידותית וציורית לצורך היכרות עם התוכנית (כאן). כמו כן מומלץ לקרוא על modular forms כפעולה הבסיסית החמישית של המתמטיקה (נוסף על ארבע פעולות החשבון) במאמר שהופיע בספטמבר 2023: <https://www.quantamagazine.org/ behold-modular-forms-the-fifth-fundamental-operation-of-math-20230921>

5. כאן אציין ואומר שבגיליון הקודם נפלה טעות במילה ממשיים והכוונה לשלמים.

השנים תקפו החוקרים את הבעיה מזוויות רבות ונתקלו שוב ושוב במבוי סתום.

כשיש לפנינו תופעה כל כך עמידה, אנחנו רוצים מאוד הסבר כלשהו לכך. מומלץ ביותר לקרוא כאן את כל הסיפור שברובייקור¹ פורס לפני הקוראים של Quanta Magazine, על הדרך רבת המכשולים וההישגים שהושגו עד ימינו בניסיון להבין את גבולות הידע המתמטי.

מלאו 30 שנה להוכחת השערת פרמה. מה הלאה?

הנטייה הטבעית שלנו היא לחשוב שכאשר השערה עיקשת זוכה להוכחה, נחתם בכך פרק מתמטי שהמתין זמן ממושך להשלמת הפיתוח שלו. מה שקרה להשערת פרמה בשלושים השנה שעברו מאז הוכחתה בשנת 1993 בידי המתמטיקאי הבריטי יליד 1953, אנדרו ויילס (Andrew Wiles), מראה שההפך הוא הנכון. בעיה שנפתרה מעלה בדרך כלל אוסף של שאלות חדשות שמאתגרות את המתמטיקאים להמשיך במחקרם. זהו טבעה האמיתי, עתיר היצירה הבלתי נלאית, של התפתחות המתמטיקה בכלל ותורת המספרים בפרט.

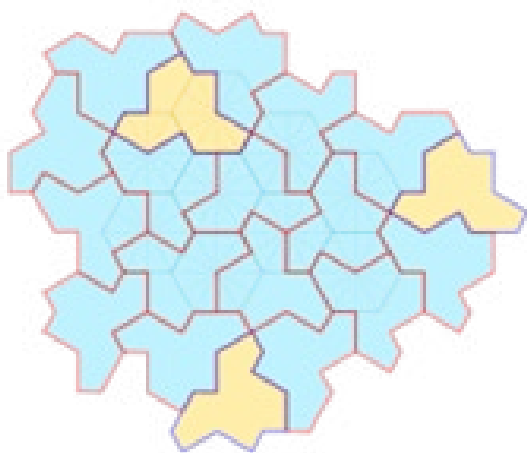
במאה השבע־עשרה, בימיו של המתמטיקאי הצרפתי פייר דה פרמה, היה ידוע שיש אינסוף שלשות של מספרים טבעיים x, y, z שמקיימים את השוויון $x + y = z$, ואינסוף שלשות פיתגוריות המקיימות את השוויון $x^2 + y^2 = z^2$, אבל לא נמצאו שלשות כאלו המקיימות את השוויון $y^n + x^n = z^n$ עבור מעריך שלם n הגדול מ־2. בשנת 1637 כתב פרמה בשולי ספר מתמטיקה שהיה ברשותו, שהוא מצא הוכחה שאין מספרים כאלה. למרבה הצער, פרמה לא מצא לנכון לרשום את ההוכחה לטענתו בשוליים הצרים של אותו ספר והיא זכתה במשך שנים רבות להכרה כ"השערת פרמה" או "המשפט האחרון של פרמה"².

בריאיון לרגל מלאת שלושים שנה לפרסום ההוכחה להשערת פרמה, אמר אנדרו ויילס כי עם פרסום ההוכחה נפתח עידן חדש במתמטיקה.³ בהוכחה נעשה שימוש בעקומים אליפטיים (elliptic curves) – אוספים של נקודות במישור שהרכיבים שלהן x, y מקיימים משוואות שצורתן הכללית היא $y^2 = x^3 + \mu x + \lambda$, עבור μ ו־ λ המסמלים קבועים

1. Brubaker, B. (2023, August 17). Complexity theory's 50 year journey to the limits of knowledge. *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/complexity-theorys-50-year-journey-to-the-limits-of-knowledge-20230817>
2. לקוראים שאינם מצויים בהשערת פרמה, הידועה כיום בשם "משפט פרמה־ויילס" או "המשפט האחרון של פרמה", מומלץ לעצור לכמה דקות ולקרוא כאן על הדרך בת מעל ל־350 שנה שעשתה השערת פרמה עד להשלמת הוכחתה.
3. הריאיון המלא עם אנדרו ויילס נמשך 25 דקות בערך ואפשר להאזין לו כאן.



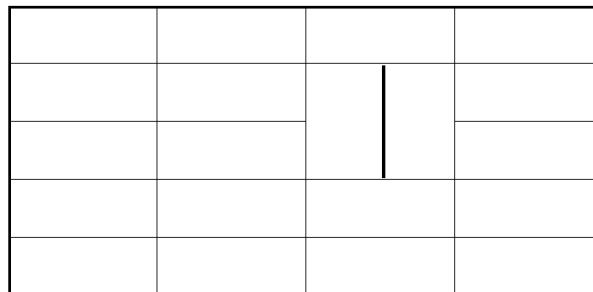
דעת שונים, נמצא לה פתרון שנקרא "אריח הכובע" (ראו איור 4) – אריח שמרצף את המישור עם תמונת הראי שלו. מהר מאוד מצאו אותם החוקרים שיש לא רק אריח אחד כזה, אלא משפחה אינסופית⁷ של אריחים כאלה, וגם אריח שמרצף את המישור ריצוף לא מחזורי ואינו דורש את השותפות של תמונת הראי שלו.



איור 4

6. תוכלו לקרוא עוד על 'בעיית איינשטיין' ופתרונותיה [כאן](#) (באנגלית) וגם [כאן](#) (בעברית). מומלץ לקרוא על עוד הרחבות מעניינות על ריצוף של המישור [כאן](#).

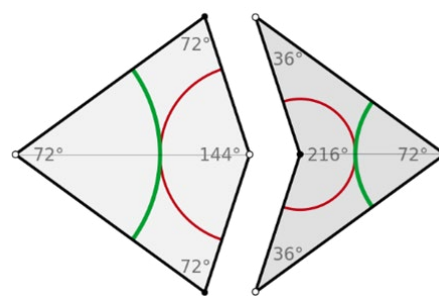
באיור 2 להלן מופיעה דוגמה פשוטה לריצוף באריחים מלבניים חופפים שאין הזזה שיכולה לגרום להתלכדותו עם עצמו – כי מלבד שני המלבנים האנכיים, כל המלבנים האחרים במישור מונחים באופן אופקי.



איור 2

קל ליצור באריחים מלבניים ריצוף מחזורי, כלומר ריצוף שכן חוזר על עצמו בהזזה. די לסובב ב-90 מעלות את שני האריחים המונחים בניצב לכל האחרים. נשאלת השאלה, האם יש אריח או קבוצת אריחים שמרצפים את המישור בריצוף לא מחזורי, אבל **אי אפשר** ליצור באמצעותם ריצוף מחזורי?

גם לשאלה זאת נמצאה תשובה חיובית, ויותר מאחת, עוד בשנות השבעים של המאה העשרים. נמצאו הרבה קבוצות של אריחים כאלה.⁶ הקבוצות הראשונות שנמצאו כללו אריחים רבים מאוד (למשל, [אריחי וואנג](#) היפהפיים), ובזמן המרוץ שהתחיל אחר הקבוצה המינימלית של אריחים כאלה נמצא זוג [אריחי פנרוז](#), שנודעו בשם העפיפון והחץ (ראו איור 3).



איור 3

שאלה אחת נשארה בלא מענה – האם יש ריצוף לא מחזורי בעזרת אריח יחיד?

השאלה הזאת זכתה לכינוי "בעיית איינשטיין" (לא, זה לא על שמו של המדען הנודע. מקור השם בגרמנית: אבן אחת, Ein Stein). היא נשארה פתוחה עד שבראשית שנת 2023, לאחר שיתוף פעולה בין ארבעה חוקרים מתחומי

6. תוכלו למצוא [כאן](#) רשימה עם איורים של ריצופים לא מחזוריים

מוח ומתמטיקה: תובנות לאנשי חינוך לגיל הרך

ד"ר אורית אלגאוי-הרשור

מרצה במכללת אחוה, מכללת אפרתה ומכון מופ"ת.
מומחית לנירופדגוגיה, הקשרים בין מדעי המוח לחינוך.
מחברת הספר "נירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים"
(2023), הוצאת מופ"ת.



ד"ר פירחה חמו

מרצה במכללת אפרתה. עוסקת בחינוך מתמטי בגן,
בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים.



מוח ומתמטיקה: תובנות לאנשי חינוך לגיל הרך

אורית אלגאוי־הרשלר ופירחה חמו

תקציר

מאמר זה מציע ידע נויורופדגוגי תוכני בסיסי על מתמטיקה בגיל הרך כדי לסייע לאנשי חינוך להיות צרכנים מושכלים של מחקרי מוח בתחום זה, ולפתח יכולת ליישם כראוי את ממצאי המחקרים בשדה החינוך. במאמר מוצגים שבעה עקרונות נויורופדגוגיים הנוגעים להתפתחות היכולת המתמטית במוח בגיל הרך, מלווים בתובנות העשויות להשפיע על העשייה בגן הילדים ובדוגמאות מעשיות. אנשי חינוך באקדמיה עשויים אף הם להפיק תועלת מסקירה זו לקורסים העוסקים במתמטיקה בגיל הרך, ולהשתמש בה לעשיית מחקרים בתחום.

מילות מפתח: מוח; נויורופדגוגיה; חינוך לגיל הרך; מתמטיקה; ENC.

מבוא

כדי ללמוד ממדעי המוח למעשה ההוראה נדרש תרגום של הממצאים באופן שעשוי לסייע לאנשי חינוך להיות צרכנים מושכלים שלהם. למרות התפתחות הנוירופדגוגיה, חסר ידע נויורופדגוגי תוכני, למשל מה מורי מתמטיקה צריכים לדעת על התפתחות המוח בהקשר של המקצוע שלהם. בפרט חסר ידע רלוונטי לאנשי חינוך לגיל הרך.

מטרת הסקירה המוצגת במאמר זה אינה רק לתאר מה מדעי המוח אומרים על התפתחות המתמטיקה במוח בגיל הרך, אלא לעמוד על מה שעשוי להיות שימושי לאנשי חינוך לגיל הרך. מהספרות המחקרית אנו למדים כי מתמטיקה לא יושבת במקום אחד במוח אלא ברשת רחבה של אזורים. מתוכם בחרנו במאמר זה רשתות תפקודיות שהתובנות עליהן די כלליות ומבוססות כדי שהגננת תוכל ללמוד ולזכור אותן, ומנגד די ספציפיות כדי שישפיעו על התובנה הפדגוגית שלה ועל היכולת לחשוב על פעילויות מתמטיות מתאימות בגן.

רקע תאורטי

נוירופדגוגיה היא תחום חדש יחסית העומד בנקודת ההשקה בין מדעי המוח לפסיכולוגיה ולחינוך כדי להעמיק את הידע של מורים על תהליכים מוחיים שעשויים להיות רלוונטיים לחינוך, ומתוך כך לסייע לשיפור הלמידה וההוראה. לפי דובינסקי ועמיתיה (Dubinsky et al., 2022), התרומה הבסיסית ממדעי המוח להבנת האופן

שלמידה מתנהלת במוח נטועה בתוך אחד משבעת רכיבי ידע-מורה של שולמן – ידע על תלמידים, מבחינת התפקוד הביולוגי ומה שקורה בתוך המוח שלהם. פיתוח מקצועי הנשען על מדעי המוח באמצעות מתן הסברים פיזיולוגיים לתופעות פסיכולוגיות רלוונטיות לחינוך, עשוי לספק עקרונות שמורים יכולים ללמוד וליישם כדי להבחין בין בחירות פדגוגיות מגוונות, לתכנן שיעורים ולקבל החלטות בזמן אמת בכיתה. בפרט הוא עשוי להשפיע על המורים לבחור פרקטיקות פדגוגיות ממוקדות תלמיד והתפתחותו ולפתח כישורים של מסוגלות עצמית, מוטיבציה, ויסות עצמי ואחריות על הישגי התלמידים.

ההעברה ממדעי המוח לחינוך אינה ישירה, ומורים עשויים להתקשות לעשות אותה בעצמם. בפרט, לחלק גדול מהמורים חסר ידע במקצועות ה־STEM, ובעיקר ביולוגיה ונוירוביולוגיה, כדי להבין את הממצאים עצמם. אתגרים וסוגיות אתיות מגוונות עומדים בפני מומחים שמקבלים על עצמם לסייע במלאכת התרגום, ולעיתים עליהם להתמודד עם נירומיתוסים שהתפתחו בהעדר תיווך ראוי. הרדימן ועמיתיה (Hardiman et al., 2012) מונות אתגרים וסוגיות אתיות העומדים לפתחם של מורים, חוקרי מוח, מו"לים ותקשורת פופולרית, קובעי מדיניות חינוכית ומורי מורים, ומדגישים כי יש לשים לב לאופן שממצאי מחקר רלוונטיים ממדעי המוח מועברים לקהילה החינוכית, ומנגד לאופן שהמחנכים מבטיחים שממצאי המחקר מיושמים בשדה החינוך בדרך אובייקטיבית וראויה.

בשנים האחרונות נפתחו בארץ ובעולם תוכניות להתמחויות, השתלמויות ולתואר שני בתחום הנוירופדגוגיה. צ'אנג ועמיתיה (Chang et al., 2021) בדקו כיצד מורים רואים ומשלבים רעיונות ממדעי המוח בתוך פרקטיקות ההוראה שלהם באמצעות סדרה של מושגים ממדעי המוח הרלוונטיים לחינוך (ENC – Educational Neuroscience Concepts) שהוצגו להם בקורס לתואר שני. שנה לאחר הקורס העידו המורים כי ה־ENC שרכשו בקורס משמשים בשבילם עקרונות מארגנים לפדגוגיה שלהם.

בייחוד הבנת מושגים ממדעי המוח הקשורים לצמיחת המוח במהלך הילדות וההתבגרות וליכולת שלו להשתנות לאחר למידה וניסיון (הפלסטיות הסינפטית) תרמה



(Frey & Fisher, 2010) בנושא קריאה. המחקרים מציעים במאמרם "קריאה ומוח: מה מחנכים בגיל הרך צריכים לדעת" חמישה נושאים ממחקר המוח הראויים לתשומת לב המחנכים: 1. קריאה אינה מולדת – מה שמאשר את האופי המורכב של קריאה, לעומת דיבור או הקשבה; 2. לימוד שפה משנה את המוח מבחינה פיזית – מה שמעודד המלצה לחשוף את הילדים להתנסויות ישירות ועקיפות וחוויות קריאה רבות; 3. חזרתיות מביאה לידי אוטומטיות – מה שמניע להמלצה על חזרתיות, ובכלל זה בתחום המודעות הפונולוגית שתורמת לאוטומטיות ומנבאת הישגי קריאה בהמשך; 4. מידע חזותי ממלא תפקיד חשוב בלמידה – מה שמעודד המלצה לשלב מידע חזותי עם הטקסט; 5. מודלינג – הוראה מכוונת באמצעות מודלינג של מורים, הדגמה וחשיבה בקול רם – מה שמכיר בחשיבות הקריאה לילדים ומעודד אותה.

במאמר הנוכחי נבקש לתרום לאנשי חינוך לגיל הרך ידע נוסף בדגמי חינוך בתחום המתמטיקה. נפרט שבעה מושגים נוספים (ENC) על התפתחות ההבנה המתמטית בגיל הרך, ועל כל ENC נפרט מסקנות פדגוגיות מתאימות.

יכולות מתמטיות מערבות אזורים רבים ברחבי המוח

היכן ממוקמת היכולת המתמטית במוח האנושי, וכיצד היא מתפתחת בגיל הרך? מחקרים עדכניים מראים כי יכולות מתמטיות מערבות אזורים רבים במוח כולו (Vogel & De Smedt, 2021). חשיבה מתמטית לסוגיה תלויה בתפקוד ובפעילות של כל אזור לחוד, ובחיבוריות ובתקשורת בין האזורים למיניהם (Micheloyannis et al., 2005). רוב האזורים המעורבים בחשיבה מתמטית הם לא ייחודיים למתמטיקה בלבד. לדוגמה, ילד שמתמודד עם השאלה כמה זה שלוש ועוד שניים, ומנסה לחשב את התשובה בעזרת האצבעות, מפעיל גם אזורים מתמטיים היודעים לזהות את הכמויות 2 ו-3, וגם אזורים מוטוריים כלליים השולטים בתנועת האצבעות. באיור 1 אפשר לראות חלק מהאזורים המעורבים בחשיבה מתמטית. הצבע הכחול מראה ייחודיות למתמטיקה, והצבע הכתום מראה מעורבות ביכולות כלליות. כך לדוגמה אזור ה-IPS הממוקם באונה הפריאטלית, נחשב לבסיס של התפיסה הכמותית (Dehaene, 1992). לעומתו, אזורים אחרים כלליים יותר המעורבים בחשיבה מתמטית הם אזורים שאחראים על הסבת הקשב (DLPFC, VLPFC) או על זיכרון העבודה (היכולת להחזיק מידע בזיכרון לזמן קצר, ולעבד אותו. בין השאר אזור HC).

לשינויים בהשקפת מורים על היכולת של תלמידיהם להרחיב את היכולות הקוגניטיביות, החברתיות והרגשיות שלהם ועל התפקיד שלהם כמורים לספק הזדמנויות לעשות כן. המורים מבינים גם שהתלמידים משתנים ומתקדמים בהשפעת חוויות מגוונות שהמורים מספקים להם לאורך זמן ולא מייד (Schwartz et al., 2019).

סקירת תוכניות התערבות וגישות חינוכיות הניזונות ממדעי המוח שעשה האוורד-ג'ונס (2014/2019; Howard-Jones, 2014) בחנה עד כמה תובנות מגוונות מתחום מדעי המוח וחקר התודעה משפיעות או קרובות להשפיע על הפרקטיקה בכיתה. בסקירה זוהו 18 תחומי מחקר במדעי המוח, שהממצאים שהתגלו בהם השפיעו בהצלחה על החינוך או עשויים להשפיע עליו בעתיד – אם תושקע עוד עבודה בהתאמתם. בתחומי מחקר שעסקו במתמטיקה נמצא למשל כי בנושא חרדת מתמטיקה יש מידע רב על השפעותיה של העקה (סטריס) על הלמידה, המאפשר פיתוח תאוריות מתאימות בנושא. בעקבות המידע על השפעות עקה נבנו כלי התערבות, אך רק אחד מהם נוסה בכיתה. לעומת החרדה ממתמטיקה, בנושא המוכר והחשוב של קישור בין ייצוגים סימבוליים לייצוגים לא סימבוליים של מספר לא נמצאו במחקרים על ילדים צעירים מסקנות על סוגי הייצוג החשובים ביותר שיש לכוון אליהם, אומנם מתוך מחקרים אחרים ברור שדווקא החיבורים העצביים בין הייצוגים למיניהם הם הכרחיים (Emerson & Carlton, 2012), ונדרש מחקר נוסף כדי להבין איך ליצור קשרים אלו ולראות את השפעותיהם בתוך הכיתה. תחום מחקר שעליו אין עדיין די ראיות ממדעי המוח הוא ההשפעה של יכולת רוטציה מנטלית על הישגים מתמטיים. כלומר יש לענות על שאלות מדעיות נוספות או להשקיע עבודה נוספת בפיתוח רעיון זה לפני שיהיה אפשר ליישמו בכיתה.

לפני יותר מ-20 שנה הציג קלמנטס (Clements, 2001) שלושה מסרים עיקריים שעלו ממדעי המוח, הקשורים לגיל הרך. לפי המסר הראשון, מוחם של ילדים בגיל הרך מתפתח במידה ניכרת – מה שמראה כי תקופה זו רגישה וחשובה במיוחד לפיתוח המוח. המסר השני קשור להשפעה שיש להתנסויות ולמידה בגיל הרך על מבנה המוח וארגונו, והשלשי רואה בפעילויות עשירות בגיל הגן תרומה גדולה להגדלת המוח של ילדים מאשר למידה של מיומנויות פשוטות.

מעטות הפעמים שנעשה בהן תרגום ממדעי המוח לאנשי חינוך לגיל הרך, מתוך שימת לב לידע נוסף בדגמי חינוך בתחום דעת מסוים. אחד מהם הוא המחקר של פריי ופישר



דנה ומרים משחקות במרכז הבובות בגן. הן הציבו כיסאות מסביב לשולחן, ועל כל כיסא הן הושיבו בובה. "הנה", אומרת מרים, "צלחת בשבילך, וצלחת בשבילך, וצלחת בשבילך." היא נותנת לכל בובה צלחת, בזמן שדנה מניחה ליד כל צלחת כף.

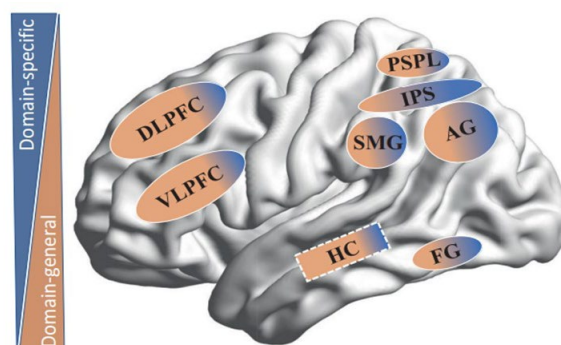
מכיוון שהלמידה המתמטית לא מתנהלת רק באזורי שפה או מתמטיקה, משחק אינטואיטיבי זה מאפשר לילדים לפתח תובנות מתמטיות חשובות, כגון מנייה בכמויות קטנות והתאמה חד-חד-ערכית (כל בובה מקבלת כיסא אחד, צלחת אחת וכף אחת) – גם אם לא נשיים את המושגים האלה במפורש. בפרט, החשיבה המתמטית של דנה ומרים מתפתחת מתוך שימוש בחושים שלהן.

החוקרת ג'ו בואלר (Boaler, 2015) ממליצה לפתח את החשיבה המתמטית באמצעות משחקים המזמנים שימוש בחושים ואזורי מוח מגוונים, ולהיעזר בכלים ועזרים המאפשרים המחשה וויזואליזציה של עקרונות מתמטיים. לדוגמה, באתר שלה YouCubed היא מציעה את המשחק הזה: הגננת מושיבה קבוצה קטנה של ילדים מסביב לשולחן ושואלת אותם מה נמצא מתחת לשולחן. כשהילדים עונים "רגליים" היא מבקשת מהם לרקוע ברגליים כדי לשמוע אותן. אחר כך היא מבקשת מהם לגלות כמה רגליים יש מתחת לשולחן מבלי להסתכל. לרשות הילדים עומדים אמצעי המחשה (עפרונות, פקקים של בקבוקים) ואמצעי תיעוד (נייר, טושים). הגננת מבקשת מהילדים להסביר את תשובתם.

בדוגמה הזו יש הפעלה של חושים רבים, ובהם יכולת ויזואליזציה בהחזיה, דמיון, שמיעה, תחושות בגוף (פרופריוספציה) ומישוש של אמצעי ההמחשה. נוסף על כך יש כאן חשיבה מסדר גבוה, מנייה ומנייה בזוגות, ייצוג מנטלי של עצמים במרחב ופעולה על ייצוג זה והפעלת יכולת בקרה ודחיית סיפוקים – לא להציץ מתחת לשולחן לפני הזמן.

הבסיס של היכולות המתמטיות הוא מולד

מהספרות המחקרית על המוח עולה שילדים נולדים עם יכולות מתמטיות מסוימות. למשל חוקרים מצאו שלתינוקות יש את היכולת להבחין בין כמויות קטנות. החוקרת ורוניקה איזרד ועמיתיה (Izard et al., 2009) השמיעו לתינוקות בני יומם סדרות של צלילים, כשכל סדרה כוללת מספר אחר של צלילים. מייד לאחר השמעת סדרת הצלילים הראו החוקרים לתינוקות קלף שיש עליו צורות. הממצאים הראו שהתינוקות התבוננו זמן ארוך יותר בקלף שמספר הצורות שעליו מתאים למספר



איור 1: אזורי המוח של הרשת האריתמטית (Vogel & De Smedt, 2021, p. 5)

בסקירת רחבת היקף על התפתחות המתמטיקה עד גיל 6, פירטה החוקרת טוקהומה-אספיוסה (Tokuhamo-Espinoza, 2015) את הרשתות החשובות ליכולות מתמטיות מגוונות: רשתות כלליות כמו רשתות האחראיות על השמיעה, הראייה, מישוש וגרפומטוריקה, רשתות המעורבות בהיבטים רגשיים וחברתיים של הלמידה, רשתות המעורבות בתפקודי חשיבה גבוהים כגון זיכרון, קשב או תפקודים ניהוליים ורשתות ייחודיות ליכולות מתמטיות, כמו תפיסת כמות או הכרת רצף המספרים. הבנה מתמטית מתפתחת לאחר שיתוף פעולה בין היכולות המגוונות האלה, שכל אחת ממקמת באזורים ואף ברשתות למיניהן ברחבי המוח.

על אף הנאמר לעיל, רשת של כלל האזורים המעורבים בחשיבה מתמטית עשויה לתפקד בנפרד מרשתות סמנטיות אחרות, כמו למשל רשת השפה. במחקר הדמיה fMRI, התבקשו נבדקים לשפוט את האמת של עובדות מתמטיות ("סינוס היא פונקציה מחזורית") או כלליות ("האוטובוסים בעיר לונדון הם אדומים") בזמן שמכשיר ההדמיה סרק את הפעילות המוחית שלהם. התוצאות הראו שבעת שיפוט העובדות המתמטיות, הפעילו הנבדקים אזורים מוחיים מסוימים מאשר בזמן שיפוט עובדות כלליות (Amalric & Deheane, 2018).

מסקנות מעשיות

ראינו כי יכולות מתמטיות מערבות אזורים רבים ברחבי המוח. הקשרים בין האזורים האלה מתפתחים דווקא בגיל הרך, כאשר הפלסטיות המוחית גבוהה במיוחד. לכן חשוב דווקא בגיל הרך ליצור פעילויות מתמטיות עשירות שמפעילות את האזורים המוחיים המגוונים המעורבים במתמטיקה, ובכלל זה לנצל הזדמנויות משגרת הגן שאינן פורמליות בהכרח.

לדוגמה, בזמן הפעילות הזו משגרת הגן מתנהלת למידה מתמטית לא פורמלית:



בשני אזורים במוח הקוף, כשכל צבע מייצג את התגובה של תא עצב בודד על כמות אחרת. כך נראה שהתא המסומן בצבע אדום מגיב דווקא על כמות של פריט יחיד, בעוד התא המסומן בצבע מגיב דווקא על כמות של ארבעה פריטים. התגובה הזו מתנהלת אוטומטית. היא נמצאת אצל תינוקות מלידה וגם אצל חיות רבות.

לפי איור 2 להלן אזור PFC הוא האונה הקדם-מצחית, אזור VIP הוא ventral intraparietal area הממוקם בתוך ה-IPS, הסולקוס האינטראפריטלי. כל קו מסמן פעילות של תא עצב בודד. לדוגמה הקו הצהוב ב-PFC מראה פעילות של תא בודד המגיב על כמות 4 מאשר על כמויות אחרות, ואילו הקו הכחול מראה פעילות של תא שמגיב יותר על כמות של שני פריטים (Viswanathan & Nieder, 2013).

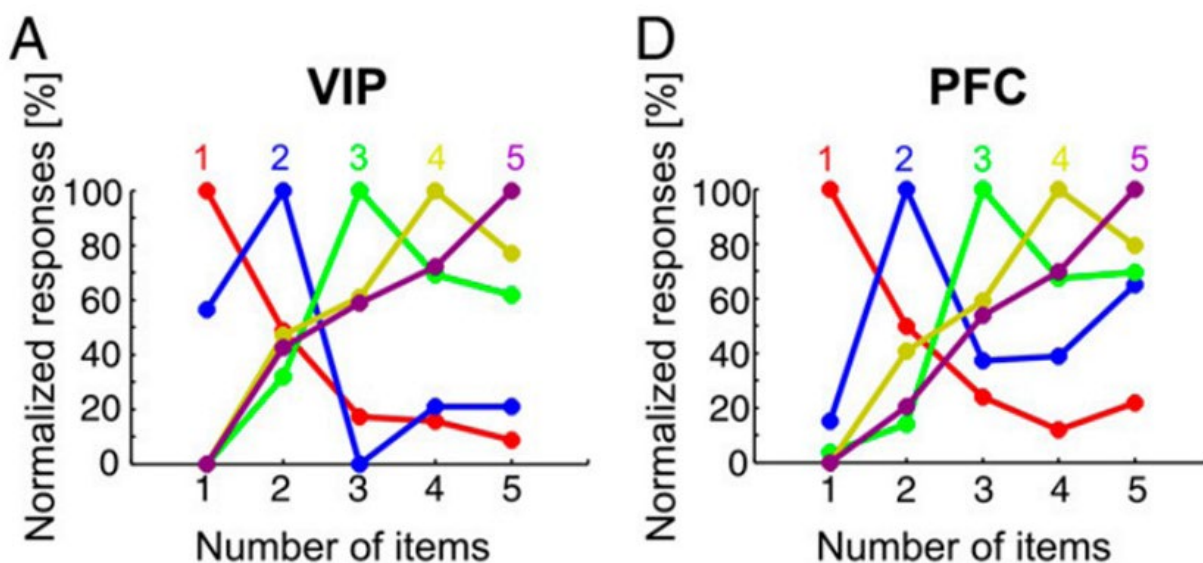
מסקנות מעשיות

למדנו ממחקר המוח שהבסיס של היכולות המתמטיות הוא מולד. כלומר יש תשתית להבנה מתמטית והיא טבעית לילד. ההתמקדות הספונטנית של ילדים בכמויות בחיי היום-יום שלהם מקדמת הבנה כי הניצול של שגרות בגן לצורך שיח וחשיבה מתמטיים אינו מלאכותי לילד, אלא המשך טבעי של הצורך שלו לראות את העולם גם במונחים מתמטיים. אפשר לקדם ולהעצים נטייה להתמקדות ספונטנית בכמויות אפילו בקרב ילדים מאוד צעירים מתוך הפניית תשומת ליבם למספרים ולכמויות בהתנהלות היום-יומית בגן, למשל בזמן האוכל: "קחי שתי פרוסות" וכדומה (שכטר וספקטור-לוי, 2015).

הצלילים ששמעו קודם. לדוגמה, תינוק ששמע סדרה של ארבעה צלילים, התבונן זמן ארוך בקלף שיש עליו ארבע צורות מאשר בקלף שיש עליו עשר צורות. מחקר זה ומחקרים אחרים מראים שתינוקות כבר נולדים עם הבנה בסיסית של כמויות ומספרים, והם אף מצליחים להעביר את המושג הכמותי מחוש אחד (שמיעה) לחוש אחר (ראייה).

הנטייה הטבעית שלנו לזהות מספרים וכמויות בסביבה מתכתבת עם תופעה ידועה מהספרות על ההתפתחות בגיל הרך: ילדים צעירים נוטים לשים לב ולשוחח על כמויות, גם מבלי שמבוגר הנחה אותם לעשות כך. השיח הספונטני על כמויות (SFON – spontaneous focusing on numerosity) מתועד במחקרים רבים בגיל הרך, ונמצא מתאם בינו ליכולות מתמטיות בהמשך (Hannula-Sormunen et al., 2015).

כיצד המוח של תינוקות יודע להבחין בין כמויות קטנות שונות אלה מאלה? התשובה הגיעה ממחקרים על בעלי חיים, שגם להם יש את היכולת הזו. החוקרים ויסונתן ונידר (Viswanathan & Nieder, 2013) בדקו את הפעילות של תאי עצב בודדים במוחם של קופים, בזמן שהם מתבוננים בתמונות עם כמויות שונות של נקודות. המחקר הראה שתאי עצב מסוימים מגיבים על כמויות מסוימות, כך שיש תאי עצב המגיבים על כמות של 1, 2, 3, 4 או 5 פריטים. דבר זה מתנהל אוטומטית, בלי צורך בחישוב כלשהו, בדומה לקליטה של צבעים וצלילים. באיור 2 אפשר לראות את התגובה של התאים השונים



איור 2: פעילות של תאי עצב בודדים בשני אזורים במוח של קוף, בזמן שהוא צופה בתמונות עם כמויות שונות של פריטים בציר ה-x מספר הפריטים שהקוף רואה, בציר ה-y מדד מנורמל לפעילות התא (Viswanathan & Nieder, 2013, p. 11190)



המערכת המוחית שקולטת כמויות היא קריטית לחשיבה מתמטית

ראינו בסעיף הקודם שהיכולת לקלוט כמויות קטנות היא טבעית ומולדת. יכולת זו מאפשרת לילדים קטנים להבחין בין כמויות של 1, 2, 3, 4 או 5 פריטים, ולראות בכמויות גדולות יותר "מעט" ו"הרבה". היכולות האלה מתחזקות ומתעדנות עם ההתפתחות, ומאפשרות קליטה של כמויות גדולות יותר בדיוק רב יותר. לכן תינוקות בני חצי שנה יכולים להבחין בין קבוצות שהגדלים שלהם עומדים ביחס של 1:2 (לדוגמה בין קבוצה של 6 פריטים לקבוצה של 12 פריטים), ואילו ילדים בני ארבע או חמש כבר יכולים להבחין בין קבוצות שהגדלים שלהם עומדים ביחס של 3:4 (לדוגמה בין קבוצה של 6 פריטים לקבוצה של 8 פריטים – הבחנה קשה יותר מההבחנה בין 6 ל-12 פריטים) (Vogel & De Smedt, 2021).

המערכת המוחית האחראית על יכולות אלה קיבלה את השם 'מערכת אומדן המספרים' (approximate number system – ANS), והיא נחשבת לבסיס היכולת המתמטית כולה. עם הזמן וההתפתחות, מערכת ה-ANS משתפרת ביכולותיה, ומתוך כך היא מקדמת יכולת להבין מספרים ומשמעותם. ואכן, נמצא שהתפתחות ה-ANS קשורה להתפתחות היכולת המתמטית מגיל הרך (Starr et al., 2013) ועד לסטודנטים ומבוגרים (Bugden et al., 2016).

היכן ממוקמת ה-ANS במוח וכיצד אפשר לפתח את המערכת הזו? אומנם יכולות מתמטיות מערבות אזורים רבים ברחבי המוח, אך הבסיס של היכולת הטבעית לתפוס כמויות ולהבין מספרים ממוקם דווקא באזור מסוים במוח האנושי – הסולקוס האינטראפריאטאלי (intraparietal sulcus) הממוקם בצד האחורי של הראש, באונה הקודקודית (ראו IPS באיור 1 לעיל).

התובנה על חשיבות ה-IPS להבנה מתמטית הגיעה דווקא ממחקרים עם אנשים שנפגעו באזור מוחי זה. החוקר סטניסלס דהן (Dehaene, 2011), פורץ דרך בחקר הבנת המתמטיקה במוח, מתאר בספרו חוש המספרים את האירוע של מ', איש בשנות השישים לחייו, שעבר שבץ מוחי קטן באזור ה-IPS. מ' השתקם כמעט לחלוטין, דיבר, קרא, ידע לחשוב וללכת בלי קושי ניכר. בתחום אחד בלבד היה למ' קושי בולט. הוא איבד לחלוטין את היכולת הטבעית להבין מספרים. אף שידע לקרוא מספרים ולומר באיזו ספרה מדובר, לא היו למספרים שום משמעות בעבורו. כך מתאר דהן (Dehaene, 2011) בספרו:

כשנשאל איזה מבין שני מספרים גדול יותר, הוא לא ידע לענות. הוא טען ללא היסוס ש-5 גדול יותר מ-6. כשנשאל מה המספר הממוקם

באמצע בין שני המספרים 3 ו-5, הוא ענה קודם 3, אחר כך 2. האמצע של המספרים 10 ו-20 היה לדעתו 30. לאחר מכן הוא תיקן את תשובתו ל-25, והתנצל באמירת המפתח: "אני לא מצליח לדמין את המספרים בראש". (עמ' 261)

האזור המוחי הנקרא ה-IPS נחשב כיום לבסיס מערכת אומדן המספרים (ANS), כלומר של היכולת הטבעית של המוח להבין מספרים, גדלים וכמויות. כך לדוגמה מחקר דימות מוחי fMRI הראה שאצל נבדקים בעלי קושי ביכולת ללמוד מתמטיקה (Math learning difficulty) יש פגיעה בפעילות המוחית באזור ה-IPS, לצד שיבושים של הקשרים בין אזור זה לאזורי מוח אחרים האחראים על קשב, זיכרון עבודה, עיבוד ראייתי ומוטיבציה (Tablante et al., 2023). מחקר אחר הראה שאצל ילדים עם דיסקלקוליה התפתחותית, יש פחות פעילות ב-IPS בזמן משימות חישוביות מאשר אצל ילדים מקבוצת ביקורת. מחקרים אחרים הראו שמידת הפעילות ב-IPS בזמן חישובים מתמטיים כמותיים עולה עם היכולת והגיל (Ansari & Dhital, 2006).

מסקנות מעשיות

לפי ואן הרועגן ועמיתותיה (Van Herwegen et al., 2017) יש קשר בין יכולות ה-ANS ליכולות מתמטיות בהמשך. לדבריהן, אפשר לשפר את יכולות ה-ANS באמצעות פעילויות מכוונות בגן הילדים, ובפרט משחקים של אומדן והשוואה ללא מנייה בכל מיני הקשרים ובאמצעות חושים מגוונים. להלן שתי דוגמאות מתוך המחקר שלהן:

1. משחק אומדן כמות "נחש כמה?": במשחק זה מציגים לילדים כל מיני חפצים בכמויות שונות, והילדים מתבקשים לאמוד כמה פריטים יש. למשל: כמה ממתקים יש בקופסה זו, כמה מקשים בלוח המקשים, כמה עלים על העץ, כמה פסטה אני יכולה להחזיק ביד, כמה אנשים יש בחדר וכו'. משחק זה מקדם יכולת אומדן ומאפשר לילדים ללמוד מילות מספר חדשות שהמבוגר נותן באמצעות המשוב שלו.
2. משחק השוואה "נחש בגרב": במשחק זה מחביאים כמויות מסוימות של חרוזים בכל מיני גדלים בשתי גרביים שונות זו מזו. הילד ממשש את שתי הגרביים בכל יד ומנחש איזו גרב מכילה יותר חרוזים או פחות חרוזים.

פתאום מחבר בין היכולת המתמטית הטבעית להבנת מספרים ופעולות

דן ושרון הם בני חמש ומשחקים בגן עם קוביות. דן מטיל את הקובייה שלו, והקובייה

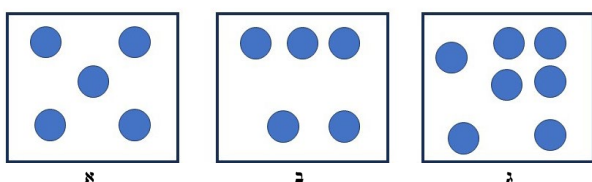


'פתאום תפיסתי' הוא פתאום של כמויות קטנות בבת אחת, המתנהל לרוב לכמויות של עד 5 פריטים. 'פתאום מושגי' מתנהל בכמויות גדולות יותר, כאשר ילד מפתאם כמה כמויות קטנות ומחבר אותן. לדוגמה אפשר לתפוס כמות של 7 פריטים כשתי קבוצות של 3 ו-4, או שלוש קבוצות של 3, 3 ו-1.

פתאום גם חשוב לאסטרטגיה של מניית המשך בתרגילי חיבור. בתחילת ההתפתחות ילדים לרוב משתמשים באסטרטגיית ייצוג ישיר שבה הם מונים כל פריט. לדוגמה ילד שמתבקש לחבר בין 3 ל-4 ימנה 3, ימנה 4, ולבסוף ימנה את כל הקבוצה יחד כדי להגיע לתשובה – 7. בהמשך ההתפתחות ילדים משתמשים במניית המשך: הם מפתאמים את הקבוצה הראשונה, 4, ומשם ממשיכים במנייה: "חמש, שש, שבע!". זהו שלב חשוב בהתפתחות יכולות מתמטיות.

מסקנות מעשיות

יש משחקים רבים לתרגול פתאום בגיל הרך, כמו משחקים המשתמשים בכרטיסים עם נקודות בדפוסים מגוונים. הגננת מראה כל כרטיס למשך זמן קצר (מקובל פחות משתי שניות) כדי שהילדים לא ימנו, ומבקשת מהם לומר כמה נקודות או פריטים היו על הכרטיס. משחקי התאמה כמו דומינו או משחקים עם קוביות משחק מפתחים אף הם את יכולת הפתאום, אך יש לדאוג לכך שהדפוס לא יהיה זהה בכל פעם, כדי לא לחבר אצל הילדים דפוס מסוים עם כמות מסוימת (ראו איור 3א ו-3ב). מומלץ גם לתרגל פתאום מושגי, כלומר פתאום של כמויות יותר גדולות מ-5 (ראו איור 3ג).



איור 3: דוגמאות לכרטיסי פתאום

יש עדויות לקיומו של ציר מספרים מנטלי

עדויות מחקריות מגוונות מחברות בין אזור ה-IPS ומערכת ה-ANS למושג תאורטי הנקרא 'ציר המספרים המנטלי'. זהו ציר מספרים דמיוני המארגן את המספרים לפי גודל, ומארגן משמאל לימין ומהקטן לגדול. בתופעה מעניינת הנקראת SNARC (spatial-numerical association of response codes) אפשר לראות העברה של יחסים במרחב ליחסים בין מספרים. במחקר של דהן ועמיתיו (Dehaene et al., 1993) התבקשו אנשים להשוות במהירות בין מספרים, ולהקיש את תשובתם על מחשב. באחת הפעמים הנבדקים התבקשו

נוחתת על ה-5. מבלי למנות את הנקודות, דן צועק "חמש! ניצחתי!"

כפי שראינו למעלה, ילדים צעירים מאוד וחיות מסוימות יכולים להבחין באופן טבעי בין כמויות קטנות, גם בלי למנות אותם. היכולת לקלוט ולשיים כמויות ללא צורך במנייה נקראת 'פתאום' (subitizing), ויש עדויות רבות לקשר בין היכולת הזו בגיל צעיר להתפתחות של יכולות מתמטיות בהמשך (Özdem & Olkun, 2021; Wästerlid, 2020), אם כי יש מחקרים ששוללים קשר כזה (Anobile et al., 2019).

יכולת הפתאום שונה מהיכולת של מערכת ה-ANS, מכיוון שמערכת ה-ANS יודעת להבחין גם בין כמויות גדולות יותר, ואילו פתאום עוסקת בכמויות עד חמש. מחקרים התנהגותיים ומחקרי מוח מראים שמדובר בשתי מערכות ויכולות אחרות, עם חפיפה מסוימת בין האזורים המעורבים בכל יכולת (Cutini et al., 2014; Decarli et al., 2020).

פתאום גם שונה בתכלית מפעולת המנייה. היא מתנהלת במהירות וב"פתאומיות" בלי כל צורך במנייה, ורק לכמויות קטנות. גם כאן מחקרי מוח ומחקרים התנהגותיים מראים שמדובר ככל הנראה בשתי יכולות שונות זו מזו. כך לדוגמה אין חפיפה בין הפגיעות המוחיות המשבשות את יכולת המנייה ובין פגיעות המשבשות את יכולת הפתאום (Demeyere et al., 2012).

מדוע פתאום חשוב להתפתחות מתמטית? ראשית, באמצעות הפתאום ילדים צעירים יכולים להבין את הקשר בין יחידות לכמות הכוללת, ומתוך כך הם מתחילים להבין את הרעיון של קרדינליות שלפיו המספר האחרון והגדול ביותר בתהליך המנייה מראה על גודל הקבוצה (Clements et al., 2019). הבנת עקרון הקרדינליות נחשבת לשלב מכריע בהתפתחות המתמטית של ילדים צעירים – היא מגלמת את הרעיון שאפשר לכוונת כמות כלשהי של פריטים במילה בודדת שמסמלת את מספר הפריטים בקבוצה. ילד שמפתאם את הכמות "ארבע" ואת הכמות "שלוש" מתחיל להבין שלמילים אלו יש משמעות כמותית, ומתוך כך מחבר ישירות בין שם המספר לכמות. מתוך כך מתפתחת ההבנה שאפשר לכוונת חמש נקודות במילה "חמש" או בספרה "5", צעד חשוב בהתפתחות ההבנה של מערכת הספרות (Merkley & Ansari, 2016).

שנית, פתאום משמש תפקיד חשוב בהבנת פעולות מתמטיות, כמו חיבור וחיסור. קלמנטס ועמיתיו (Clements et al., 2019) מבחינים בין שני סוגי פתאום.



איור 4: דוגמאות למשחקי מיון וסידור משיטת מונטסורי

בימין: מיון לפי גודל (MattThePuppetGuy, 2010); באמצע: מיון לפי גודל ותכולה (Syrikova, 2020); בשמאל: מיון צבעים מבהיר לכהה (Zhuraveleva, 2015)

מוחי fMRI הראו שאזורי מוח שונים, בהם אזור ה-IPS, מופעלים במשימות השוואתיות לא רק של כמות, אלא גם במשימות המערבות השוואות בין מדדים כמו גודל ובהירות (Pinel et al., 2004; Sokolowski et al., 2017). עד היום אין הסכמה מדעית בנידון אך חשוב לציין שיש כבר חומרים ומשחקים רבים המפתחים אצל ילדי גיל הרך את יכולת המיון וההשוואה על פי מדדים אחרים מכמויות ומספרים. כך, לדוגמה, חומרי מונטסורי כוללים תרגילים רבים שבהם ילדים מתבקשים למיין ולהשוות על פי גובה הצליל, גודל, צבע וכדומה (ראו איור 4).

מסקנות מעשיות

מהספרות עולה שחשוב לאפשר לילדים בגיל הרך למקם את ציר המספרים המנטלי באופן מרחבי, לדוגמה במשחקי קלאס, מיקום מספרים על ציר, המחשה של ציר המספרים על ידי חוט, חיבור וחיסור בעת הליכה קדימה ואחורה על ישר המספרים ועוד. נוסף על כך ייתכן שמשחקי מיון וסידור לפי גודל, חוזק, צליל, כמות של צבע ומדדים אחרים יכולים לשפר את ציר המספרים המנטלי וה-ANS.

מספרים מקודדים במוח בשלוש דרכים: כמות, מספר ושם המספר

מערכת ה-ANS שמזוהה עם ציר המספרים המנטלי, נותנת בתחילת ההתפתחות המתמטית רק הערכה גסה לכמויות, בייחוד כאשר הן גדולות משלוש או ארבע. עם הזמן וההתפתחות המתמטית, נוצרים חיבורים בין מערכת ה-ANS המוחשית לשתי מערכות חשובות אחרות שהן מופשטות. המערכת הראשונה נמצאת באזור הראייה, והיא מייצגת מספרים בעזרת ספרות – אצל רוב העולם המערבי אלו הן הספרות הערביות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ו-0 והשילובים שלהן. מערכת זו כוללת ככל הנראה סימנים מתמטיים כמו + או <.

להגיב על כל המשימות ביד שמאל, ובפעם אחרת ביד ימין. החוקרים מצאו שהנבדקים הגיבו יחסית מהר יותר על מספרים קטנים ביד שמאל, ועל מספרים גדולים ביד ימין. מכך החוקרים למדו שהמספרים מאורגנים בדמיון משמאל לימין, כאשר המספרים הקטנים יותר נמצאים בצד שמאל והמספרים הגדולים יותר בצד ימין.

ציר המספרים המנטלי מתכתב עם המושג המתמטי החשוב של אורדינליות, התובנה שלמספרים שונים יש מקום סידורי המסמל את גודלם. נוסף על כך ציר מספרים יכול לסייע בחישובי חיבור וחיסור באמצעות 'הליכה' ימינה או שמאלה על הציר. ואכן, מחקרים מראים שתרגול של משחקים המסתמכים על הרעיון של ציר המספרים המנטלי בגיל הרך, חיזק אצל הילדים יכולות מתמטיות בסיסיות לעומת קבוצת ביקורת שתרגלה משחקים מתמטיים שלא היו מבוססים על רעיון זה (Lin, 2022).

אומנם יש עדויות שדוברי עברית למשל מארגנים את ציר המספרים בכיוון הפוך, לפי כיוון הקריאה, אך האופי המרחבי של ציר המספרים המנטלי ברור ממחקרים רבים (Tam et al., 2019). מחקרים מראים בין השאר שמשחקים המדגישים את האופי המרחבי של ציר המספרים, לדוגמה משחקים של הליכה או קפיצה על ציר מספרים, משפרים יכולות מתמטיות אצל ילדים עם מערכת ניורוטיפוסית (Sella et al., 2016) ואצל ילדים עם דיסקלקוליה התפתחותית (Kucian et al., 2011).

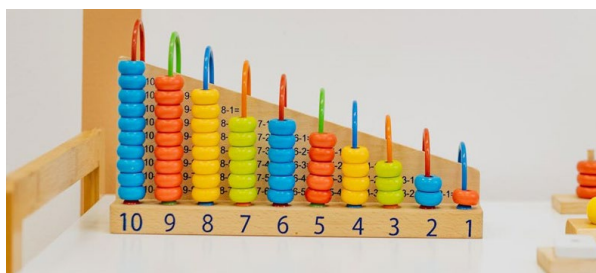
בספרות המחקרית יש הסכמה רחבה שלאזור ה-IPS יש תפקיד עיקרי במערכת ה-ANS ובציר המספרים המנטלי, ויש שגורסים שציר המספרים וה-ANS הם למעשה אותה מערכת. אומנם מתנהל דיון על האופי של מערכות אלו. האם הן אכן ייחודיות למספרים, או שמא הן מייצגות גם רצפים אחרים של ממדים נמדדים, כגון גובה או חוזק של צלילים, גודל של חפצים שונים, משכי זמן, כמות של צבעים, רכות של חומרים ועוד. אכן, מחקרי דימות



בין האזורים האלה, בזמן שהילדים צפו בחופשיות בסרטים שכללו נושאים מתמטיים. נמצא קשר בין מידת הקישוריות של האזורים ליכולת מתמטית כללית שנבחנה במבחן סטנדרטי (Emerson & Carlton, 2012). מחקרים עדכניים מראים ממצאים דומים (Lynn et al., 2022). במחקרם של צ'אנג ועמיתיה (Chang et al., 2022) נמצא כי תרגול החיבורים בין המערכת הכמותית המוחשית למערכות המופשטות של המספרים ומילות המספר, משפר יכולות מתמטיות אצל ילדים בגיל בית הספר היסודי, כשיכולת השיפור הייתה תלויה בחיבוריות המוחית בין ההיפוקמפוס – האזור המעורב בלמידה של דברים חדשים – לאזור ה-IPS החשוב להבנה מתמטית.

מסקנות מעשיות

מהתובנות על מודל הקוד המשולש אנו למדים כי חשוב ליצור חיבורים בין שלוש המערכות: ה-ANS, מערכת שמות המספר השפתית ומערכת הספרות הראייתית. וזאת דווקא בגיל צעיר כאשר המוח מתפתח ומייצר את הרשתות הבסיסיות שישרתו אותנו בהמשך הדרך. למעשה רצוי שייצוגי המספר בגן יכללו את שלושת הרכיבים, הספרה, הכמות ומילת המספר, בעניינים מגוונים. איור 6 מראה דוגמה נהדרת לחיבור בין הייצוג המוחשי לייצוג הסימבולי. אפשר לעודד ילדים למנות את החרוזים בקול רם ומתוך כך להתחבר גם למערכת המילולית.



איור 6: חיבור בין כמות לייצוג הסימבולי של המספר (Nilov, 2021)

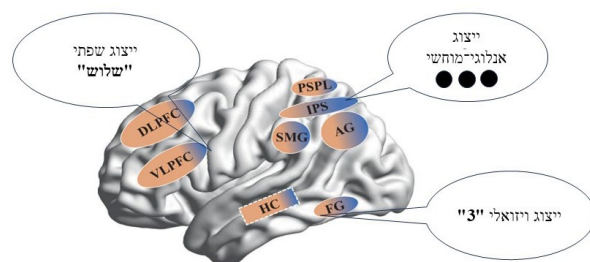
לחוש המישוש ולשימוש באצבעות יש קשר להבנה מתמטית

"כמה פרחים יש בתמונה?" שואלת הגננת. דנה חושבת לרגע, ואז מרימה יד אחת עם ארבע אצבעות ויד שנייה עם שלוש אצבעות. היא חושבת לרגע, מתבוננת באצבעות שלה, ואז אומרת "שבע!"

המושג finger gnosis, בתרגום מילולי "ידע על האצבעות", עוסק ביכולת להבחין בין אצבעות. לדוגמה, בבדיקה ידועה לקיום יכולת ההבחנה הזו, החוקר נוגע באצבעות של נבדק, מבלי שהנבדק רואה זאת ועליו

המערכת השנייה נמצאת באזורי השפה ומייצגת כמויות בעזרת מילים, כמו 'חמש' או 'שמונה', וגם היא ככל הנראה כוללת ייצוגים שפתיים של פעולות מתמטיות כמו המילים 'פחות' או 'כפול'.

שיתוף הפעולה בין שתי המערכות האלה דורש מעבר מייצוג לייצוג, והוא קריטי להבנת המספר. מודל שלוש המערכות נחשב כיום למודל המקובל של ייצוג כמויות במוח האנושי, וקיבל את השם 'מודל הקוד המשולש' (triple code model) (Dehaene, 1992). איור 5 מראה את המיקומים המועדפים של שלושת הייצוגים במוח.



איור 5: שלושת ייצוגי המספר ומיקומם המועדף במוח הייצוג האנלוגי-מוחשי מזוהה עם מערכת אומדן המספרים (ANS) (Vogel & De Smedt, 2021, p. 5)

לפי מודל הקוד המשולש יש שלושה ייצוגים אפשריים לחיבור של 2 ו-3. ייצוג אחד חזותי וסמלי, כלומר באמצעות המספרים וסימן החיבור (2+3). הייצוג השני הוא מילולי ('שתיים ועוד שלוש'), ואילו הייצוג השלישי הוא מוחשי באמצעות דמיון הכמויות, ציור או ייצוג עם חפצים. שלושת הייצוגים האלה מאפשרים לפתור את התרגיל בשתי דרכים שעל כל אחת מהן אחראית מערכת מוחית אחרת: מערכת ה-ANS וציר המספרים המנטלי מאפשרים לפתור את התרגיל פתרון מוחשי, ואילו בדרך השנייה התרגיל מיוצג מילולית, ומתאפשרת שליפה של עובדות מתמטיות מהזיכרון. חשוב לציין שבדרך השנייה אין למעשה התמקדות במשמעות המספרים. במודל הקוד המשולש, ההנחה היא ששליפה זו מהזיכרון מתנהלת בעיקר בעובדות מתמטיות מוכרות ונלמדות, כמו לוח הכפל או תרגילי חיבור פשוטים (Dehaene, 1992).

יש עדויות ממדעי המוח שהחזק והיעילות של הקשרים בין מערכות תפיסת הכמות ומערכת זיהוי המספרים מנבאים יכולות מתמטיות. מחקר fMRI בדק ילדים בני 4 עד 11 בכמה תנאים: התאמה בין מספרים לכמויות, התאמה של פרצופים לשמות, התאמה בין מילים והתאמה בין צורות. השוואה בין התנאים אפשרה לחוקרים לזהות במדויק את אזורי המוח שהיו מעורבים בהתאמה של מספר לכמות, אך לא היו מעורבים במשימות ההתאמה האחרות. בהמשך בדקו החוקרים את מידת הקישוריות



חשיבה, קריאה, תפיסה מתמטית והתנהגויות מגוונות. קשרים עצביים מתחזקים לאחר חוויות, תרגול וניסיון עם הסביבה, ותהליך זה מסתמך על הנוכחות של גירויים וחוויות מתאימים בכל שלב של ההתפתחות. הבנה של מערכות המוח העומדות בבסיס ההתפתחות של ההבנה המתמטית יכולה לתרום לאנשי חינוך לגיל הרך להבנתם הפדגוגית, להשקפתם על היכולת של תלמידיהם להרחיב את היכולות הקוגניטיביות, החברתיות והרגשיות שלהם, ועל התפקיד שלהם לספק הזדמנויות לעשות כן (Schwartz et al., 2019).

במאמר זה הצגנו שבעה עקרונות נזירופדגוגיים הנוגעים להתפתחות היכולת המתמטית במוח בגיל הרך, והראנו תוצאות שימושיות אפשריות. נחזור עליהם בקצרה:

1. יכולות מתמטיות מערבות אזורים רבים ברחבי המוח – ולכן חשוב דווקא בגיל הרך ליצור פעילויות מתמטיות עשירות שמפעילות את האזורים המוחיים המגוונים המעורבים במתמטיקה, ובכלל זה הזדמנויות משגרת הגן שאינן פורמליות בהכרח; 2. הבסיס של היכולות המתמטיות הוא מולד ולכן יש לראות בשיח מתמטי שיח טבעי שבא מהילד והחוויה שלו בעולם, ואפשר לנצל את שגרות הגן לצורך שיח זה; 3. המערכת המוחית שקולטת כמויות היא חשובה לחשיבה מתמטית – וכדאי לתרגל ולפתח אותה באמצעות פעילויות של אומדן והשוואת כמויות; 4. פתאום מחבר בין היכולת המתמטית הטבעית להבנת מספרים ופעולות ולכן מומלץ לעסוק במשחקי פתאום בשגרת הגן; 5. יש עדויות לקיום של ציר מספרים מנטלי המחבר בין מספרים לתפיסת המרחב, ולכן כדאי לזמן פעילויות המארגנות מספרים על ציר מרחבי ולעודד פעילויות מיון לפי גודל, כמות וכדומה; 6. מספרים מקודדים במוח בשלוש דרכים: כמות, מספר ושם המספר, ולכן חשוב לזמן לילדים הזדמנויות רבות לחבר ולתאם בין הייצוגים לסוגיהם; 7. לחוש המישוש ולשימוש באצבעות יש קשר להבנה מתמטית, ולכן חשוב לאפשר לילדים להשתמש באצבעות ולזמן פעילויות עשירות ומולטי־מודליות לעסוק במתמטיקה.

מאמר זה עסק בעיקר בתחום של מושג המספר ולא בתחומים מתמטיים אחרים כמו גאומטריה. מחקרים עתידיים עשויים לתרום להרחבת הידע הנזירופדגוגי תוכני גם על נושאים אלה.

לזהות באיזו אצבע נגע החוקר. מונח עברי ל־finger gnosis יכול להיות 'חוש האצבעות', ואנו נשתמש במונח זה בהמשך.

עדויות רבות מחברות בין חוש האצבעות ליכולות מתמטיות במגוון גילים, מילדים בכיתה א' ועד לסטודנטים באוניברסיטה (Penner-Wilger & Anderson, 2013). מחקר התערבות בגיל הרך אף גילה שתוכנית שפיתחה את חוש האצבעות בקרב ילדי הגן, שיפרה את היכולות המתמטיות שלהם (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). נוסף על כך מחקרי מוח מראים חפיפה מסוימת בין אזורי המוח המעורבים בחשיבה מתמטית ותפיסת כמויות לאזור במוח האחראי לחוש האצבעות (Penner-Wilger & Anderson, 2013). לדוגמה, מחקר fMRI הראה פעילות באזור מוח זה בקרב ילדים בני 8 עד 13 כאשר אלו התבקשו לפתור תרגילים במתמטיקה, גם כשהם לא השתמשו באצבעות כלל (Berteletti & Booth, 2015).

אף שיש בספרות המחקרית דיון רחב על הקשר המדויק בין אזורי המוח האחראים לחשיבה מתמטית לאזור האחראי לחוש האצבעות, יש כיום הסכמה רחבה על חשיבות חוש האצבעות להתפתחות המתמטית בגיל הרך. ואכן, באופן טבעי ילדים רבים משתמשים באצבעות בזמן מנייה ובתרגילי חישוב.

חסקנות מעשיות

בעבר עודדו ילדים לא להשתמש באצבעות, אך כיום על סמך מחקרים התנהגותיים ומחקרי מוח, הגישה המקובלת היא שאין לעצור ילדים מלהשתמש באצבעות כדי להבין מתמטיקה. אדרבה, התנסויות מולטי־מודליות מוקדמות עם אצבעות (המערכות כמה חושים, כמו חוש המישוש, המוטוריקה וראייה) ופיתוח המוטוריקה העדינה עשויים לשמש שער למיומנויות מתמטיות מאוחרות פעילות שבה ילדים מונים חפצים בעת הנחת אצבע אחרת על כל חפץ עשויה לפתח את חוש האצבעות ואת הקשר שלו למתמטיקה.

בפרט, ייצוג המספרים עד 10 בעזרת אצבעות הידיים ופעילויות הרמה בבת אחת של כל האצבעות המייצגות כמות המתאימה למספר מסוים, עשויים לתמוך בחשיבה המתמטית של הילדים ואף לסייע להם להגיע במהירות גבוהה יחסית לתוצאה של חיבור וחסור במספרים קטנים.

סיכום

הגיל הרך הוא תקופה של התפתחות מוחית מוגברת שבה נוצרים רשתות וקשרים עצביים בסיסיים, המשמשים בהמשך ההתפתחות ליצירה של מערכות עצביות מורכבות יותר ויותר, המאפשרות רגשות, למידה,



רשימת מקורות

- Chang, H., Chen, L., Zhang, Y., Xie, Y., de Los Angeles, C., Adair, E., Zanitti, G., Wassermann, D., Rosenberg-Lee, M., & Menon, V. (2022). Foundational number sense training gains are predicted by hippocampal-parietal circuits. *The Journal of Neuroscience*, 42(19), 4000–4015. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1005-21.2022>
- Chang, Z., Schwartz, M. S., Hinesley, V., & Dubinsky, J. M. (2021). Neuroscience concepts changed teachers' views of pedagogy and students. *Frontiers in Psychology*, 12, Article 685856. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.685856>
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270–275. <https://doi.org/10.5951/TCM.7.5.0270>
- Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The neglected quantifier. In A. Norton & M. W. Alibali (Eds.), *Constructing number merging perspectives from psychology and mathematics education* (pp. 13–45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2
- Cutini, S., Scatturin, P., Basso Moro, S., & Zorzi, M. (2014). Are the neural correlates of subitizing and estimation dissociable? An fNIRS investigation. *NeuroImage*, 85 Pt 1, 391–399. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2013.08.027>
- Decarli, G., Paris, E., Tencati, C., Nardelli, C., Vescovi, M., Surian, L., & Piazza, M. (2020). Impaired large numerosity estimation and intact subitizing in developmental dyscalculia. *PloS one*, 15(12), Article e0244578. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0244578>
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1–2), 1–42. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(92\)90049-N](https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90049-N)
- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122(3), 371–396. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371>
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- Demeyere, N., Rotshtein, P., & Humphreys, G. W. (2012). The neuroanatomy of visual enumeration: Differentiating necessary neural correlates for subitizing versus counting in a neuropsychological voxel-based morphometry study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 24(4), 948–964. https://doi.org/10.1162/jocn_a_00188
- האורד-ג'ונס, פ' (2019). מדעי המוח וחינוך: סקירת תוכניות התערבות וגישות חינוכיות הניזונות ממדעי המוח. עיבוד והנגשה (ל' רובינס, מתרגם). האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים, היזמה למחקר יישומי בחינוך. <http://education.academy.ac.il/SystemFiles/23257.pdf> (המקור פורסם ב-2014)
- שכטר, ט' וספקטור-לוי, א' (2015). "ראיתי שני פרפרים": תפיסה ספונטנית של כמות ומאפיינים מתמטיים בסביבה אצל ילדים צעירים. *עלון דעגן*, 8, 72–79.
- Amalric, M., & Dehaene, S. (2018). Cortical circuits for mathematical knowledge: Evidence for a major subdivision within the brain's semantic networks. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 373(1740), Article 20160515. <https://doi.org/10.1098/rstb.2016.0515>
- Anobile, G., Arrighi, R., & Burr, D. C. (2019). Simultaneous and sequential subitizing are separate systems, and neither predicts math abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, 178, 86–103. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.017>
- Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: An event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 18(11), 1820–1828. <https://doi.org/10.1162/jocn.2006.18.11.1820>
- Barrocas, R., Roesch, S., Gawrilow, C., & Moeller, K. (2020). Putting a finger on numerical development - Reviewing the contributions of kindergarten finger gnosis and fine motor skills to numerical abilities. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 1012. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01012>
- Berteletti, I., & Booth, J. R. (2015). Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems. *Frontiers in Psychology*, 6, Article 226. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00226>
- Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints.
- Bugden, S., DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2016). Using cognitive training studies to unravel the mechanisms by which the approximate number system supports symbolic math ability. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 10, 73–80. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.05.002>



- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, 57(3), 782–795. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070>
- Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., & Henik, A. (2017). From "sense of number" to "sense of magnitude": The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, 40, Article e164. <https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960>
- Lin, C. H. (2022). Developing mental number line games to improve young children's number knowledge and basic arithmetic skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 222, Article 105479. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105479>
- Lourenco, S. F., & Aulet, L. S. (2023). A theory of perceptual number encoding. *Psychological Review*, 130(1), 155–182. <https://doi.org/10.1037/rev0000380>
- Lynn, A., Wilkey, E. D., & Price, G. R. (2022). Predicting children's math skills from task-based and resting-state functional brain connectivity. *Cerebral Cortex*, 32(19), 4204–4214. <https://doi.org/10.1093/cercor/bhab476>
- MattThePuppetGuy. (2010, January 7). *ColoredCylinders2.JPG* [Image]. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ColoredCylinders2.JPG#/media/File:ColoredCylinders2.JPG>
- Merkley, R., & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 10, 14–20. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.006>
- Micheloyannis, S., Sakkalis, V., Vourkas, M., Stam, C. J., & Simos, P. G. (2005). Neural networks involved in mathematical thinking: Evidence from linear and non-linear analysis of electroencephalographic activity. *Neuroscience Letters*, 373(3), 212–217. <https://doi.org/10.1016/j.neulet.2004.10.005>
- Nilov, M. (2021, June 12). *Colorful wooden beads with numbers* [Image]. <https://www.pexels.com/photo/colorful-wooden-beads-with-numbers-8923967/>
- Dubinsky, J. M., Roehrig, G., & Varma, S. (2022). A Place for neuroscience in teacher knowledge and education. *Mind, Brain, and Education*, 16(4), 267–276. <https://doi.org/10.1111/mbe.12334>
- Emerson, R. W., & Cantlon, J. F. (2012). Early math achievement and functional connectivity in the fronto-parietal network. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 2(Suppl 1), S139–S151. <https://doi.org/10.1016/j.dcn.2011.11.003>
- Frey, N., & Fisher, D. (2010). Reading and the brain: What early childhood educators need to know. *Early Childhood Education Journal*, 38(2), 103–110. <https://doi.org/10.1007/s10643-010-0387-z>
- Gracia-Bafalluy, M., & Noël, M. P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex: A Journal Devoted to the Study of the Nervous System and Behaviour*, 44(4), 368–375. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.020>
- Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., & Räsänen, P. (2015). Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2–3), 155–177. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016814>
- Hardiman, M., Rinne, L., Gregory, E., & Yarmolinskaya, J. (2012). Neuroethics, neuroeducation, and classroom teaching: Where the brain sciences meet pedagogy. *Neuroethics*, 5, 135–143. <https://doi.org/10.1007/s12152-011-9116-6>
- Howard-Jones, P. (2014). *Neuroscience and education: A review of educational interventions and approaches informed by neuroscience*. Education Endowment Foundation. https://d2tic4wvvoliusb.cloudfront.net/production/documents/guidance/EEF_Lit_Review_NeuroscienceAndEducation.pdf?v=1694075293
- Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 106(25), 10382–10385. <https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106>



- Syrikova, T. (2020, March 14). *Anonymous toddler using white container while developing fine motor skills at home* [Image]. <https://www.pexels.com/photo/anonymous-toddler-using-white-container-while-developing-fine-motor-skills-at-home-3933268/>
- Tablante, J., Krossa, L., Azimi, T., & Chen, L. (2023). Dysfunctions associated with the intraparietal sulcus and a distributed network in individuals with math learning difficulties: An ALE meta-analysis. *Human Brain Mapping, 44*(7), 2726–2740. <https://doi.org/10.1002/hbm.26240>
- Tam, Y. P., Wong, T. T. Y., & Chan, W. W. L. (2019). The relation between spatial skills and mathematical abilities: The mediating role of mental number line representation. *Contemporary Educational Psychology, 56*, 14–24. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.10.007>
- Tokuhamma-Espinosa, T. (2015). *One way neuroscience can improve pre-literacy and pre-numeracy skills in young children* [Paper presentation]. International Perspectives on Language, Literacy and Learning, ECER 2015, European Educational Research Association, Berlin, Germany.
- Van Herwegen, J., Costa, H. M., & Passolunghi, M. C. (2017). Improving approximate number sense abilities in preschoolers: PLUS games. *School Psychology Quarterly, 32*(4), 497–508. <https://doi.org/10.1037/spq0000191>
- Viswanathan, P., & Nieder, A. (2013). Neuronal correlates of a visual "sense of number" in primate parietal and prefrontal cortices. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 110*(27), 11187–11192. <https://doi.org/10.1073/pnas.1308141110>
- Vogel, S. E., & De Smedt, B. (2021). Developmental brain dynamics of numerical and arithmetic abilities. *Npj Science of Learning, 6*(22). <https://doi.org/10.1038/s41539-021-00099-3>
- Wästerlid, C. A. (2020). Conceptual subitizing and preschool class children's learning of the part-part-whole relations of number. *Problems of Education in the 21st Century, 78*(6), 1038–1038. <https://doi.org/10.33225/pec/20.78.1038>
- Zhuraveleva, N. (2015, June 29). *Активность ребенка в Монтессори-классе* [Child activity in a Montessori classroom] [Image]. <https://did.li/YADTY>
- Özdem, Ş., & Olkun, S. (2021). Improving mathematics achievement via conceptual subitizing skill training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(4), 565–579. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1694710>
- Penner-Wilger, M., & Anderson, M. L. (2013). The relation between finger gnosis and mathematical ability: Why redeployment of neural circuits best explains the finding. *Frontiers in psychology, 4*, Article 877. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00877>
- Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron, 41*(6), 983–993. [https://doi.org/10.1016/s0896-6273\(04\)00107-2](https://doi.org/10.1016/s0896-6273(04)00107-2)
- Revkin, S. K., Piazza, M., Izard, V., Cohen, L., & Dehaene, S. (2008). Does subitizing reflect numerical estimation? *Psychological Science, 19*(6), 607–614. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02130.x>
- Schwartz, M. S., Hinesley, V., Chang, Z., & Dubinsky, J. M. (2019). Neuroscience knowledge enriches pedagogical choices. *Teaching and Teacher Education, 83*, 87–98. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.04.002>
- Sella, F., Tressoldi, P., Lucangeli, D., & Zorzi, M. (2016). Training numerical skills with the adaptive videogame "The Number Race": A randomized controlled trial on preschoolers. *Trends in Neuroscience and Education, 5*(1), 20–29. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2016.02.002>
- Sokolowski, H. M., Fias, W., Bosah Ononye, C., & Ansari, D. (2017). Are numbers grounded in a general magnitude processing system? A functional neuroimaging meta-analysis. *Neuropsychologia, 105*, 50–69. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2017.01.019>
- Soylu, F., Lester Jr, F. K., & Newman, S. D. (2018). You can count on your fingers: The role of fingers in early mathematical development. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 107–135. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.85>
- Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Psychological and Cognitive Sciences, 110*(45), 18116–18120. <https://doi.org/10.1073/pnas.1302751110>

השפעת פעילות מתמטית של האישה ההרה על מוח העובר

ד"ר עוזי אשר

בעל תואר דוקטורט ברפואה, התמחות במיילדות וגינקולוגיה. תואר M.Sc. בסטטיסטיקה ובכלכלה. תרומתו העיקרית למחקר היא בתחומי סקירת מערכות העובר, מתוך התמקדות במוח ובלב העובר. מעקב אחר היריון בסיכון גבוה בעיקר באמצעות אולטרה-סאונד ודופלר. היה יו"ר ועדת ההתמחות ומחקר של בית החולים זיו. שימש מנהל המרכז לבריאות האישה של קופ"ח כללית והיה אחראי על ניהול פוריות, הפריה חוץ-גופית ואולטרה-סאונד לפני לידה בצפון ישראל.



ד"ר דינה חסידוב

בעלת תואר דוקטורט Ph.D. בחינוך מתמטי. עוסקת שנים רבות בחינוך מתמטי ובמחקר. צברה ניסיון בישראל ובפעילות בין-לאומית. חוקרת תהליכי חשיבה בלמידת מתמטיקה בגילים מגוונים. ד"ר חסידוב יוזמת וחוקרת תחומים חדשים מעניינים ומאתגרים. מחקרה מתפרסמים בכתבי עת ובספרים יוקרתיים ומאפשרים שותפויות בין-לאומיות בין חוקרים. חברת סגל בחוג למתמטיקה, תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך בחולון.



ד"ר יורי פרליץ

בעל תואר דוקטורט ברפואה. מנהל מערך נשים ויולדות במרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה). מנהל היחידה להיריון בסיכון גבוה. מומחה באולטרה-סאונד וברפואת אם ועובר. מרצה בכיר בפקולטה לרפואה של אוניברסיטת בר-אילן. חבר ועד בחברה לרפואת האם והעובר בישראל.



פרופסור משה בן-עמי

פרופסור מן המניין ללימודים קליניים בפקולטה לרפואה בגליל של אוניברסיטת בר-אילן. נמנה על מקימי הפקולטה לרפואה בגליל ושימש סגן דיקן ואחר כך משנה דיקן. ניהל את מחלקת נשים ויולדות במרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה). כיהן בתפקיד יו"ר האיגוד הישראלי למיילדות וגינקולוגיה וחבר המועצה הלאומית למיילדות, נאנטולוגיה וגנטיקה ובמועצת האיגוד הישראלי למיילדות וגינקולוגיה. פרופ' בן-עמי מומחה לאקוקרדיוגרפיה עוברית ובדיקות דופלר (זרימות דם) בעובר. המחקר המוצג במאמר זה נעשה



ד"ר רובא סברי אבן עבד

בעלת תואר דוקטורט ברפואה. התמחות ברפואת נשים, מומחית ללייד ולאולטרה-סאונד נשים. עובדת במרכז בריאות האישה של קופת חולים כללית במוקייבלה, בנוף הגליל, בקריית טבעון ובעפולה.



ד"ר סמי חדד

בעל תואר דוקטורט ברפואה, התמחות במיילדות וגינקולוגיה. תרומותיו העיקריות במחקר הן בתחומי סקירת מערכות העובר, מתוך התמקדות במוח ובלב העובר. ניהל את יחידת האולטרה-סאונד המיילדותי במחלקת נשים ויולדות במרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה). חבר בוועדה מקצועית למיילדות וגינקולוגיה.



ד"ר לאונרדו קסלמן

בעל תואר דוקטורט ברפואה. מנהל המרכז לבריאות האישה, נוף הגליל, קופת חולים כללית. לשעבר מנהל יחידת אולטרה-סאונד, מחלקת נשים ויולדות, מרכז רפואי צפון ע"ש ברוך פדה (פוריה). חבר באיגוד הישראלי למיילדות וגינקולוגיה. חבר בחברה הישראלית לאולטרה-סאונד במיילדות וגינקולוגיה.



השפעת פעילות מתמטית של האישה ההרה על מוח העובר

דינה חסידוב, עוזי אשר, משה בן-עמי, יורי פרליץ, ליאונרדו קסלמן, רובא סברי אבן עבד וסמי חדד

תקציר

בשנים האחרונות גובר העניין בהשפעה של חשיפה אימהית לגורמים פיזיולוגיים, סביבתיים ופסיכולוגיים במהלך ההיריון על התפתחות הילד. מחקרים מספר קושרים מתח אימהי במהלך ההיריון לבעיות רגשיות והתנהגותיות אצל הילד.

מחקר זה נועד לבחון את ההשפעה של פעילות קוגניטיבית אימהית על זרימת הדם במוח העובר, כדי לקבוע אם פעילות מתמטית אימהית שיטתית במהלך ההיריון עשויה להשפיע על התפתחות המוח של הילד. ההשערה היא שיש קשר הדוק בין הפעילות המוחית של האם לזרימת הדם המוחית וחילוף החומרים המוחי של העובר. שינויים במהירות הזרימה או בתנגודת עורקי המוח הגדולים גורמים לשינויים בזרימת הדם המוחית.

שלושים וחמש נשים בשבוע ה-28 עד ה-40 להיריון עסקו בפעילויות מתמטיות. עורק המוח האמצעי של העובר (MCA), אינדקס פעימות (PI) ומהירות סיסטולית (PSV) נוטרו לפני הפעילות, במהלכה ואחריה.

הוכח כי פעילות המוח וזרימת הדם קשורות קשר הדוק. נמצא שיש ירידה ניכרת בתנגודת MCA במוח העובר, כפי שמעידה על ירידה של PI ב-MCA לקראת סוף הפעילות המתמטית. ירידה ניכרת בתנגודת עלולה לגרום לזרימת דם מוגברת בעורקים המספקים דם לרוב אזורי המוח, וייתכן שתפתח פעילות מוחית מוגברת.

מתאם בין מעורבות האם בפעילויות מתמטיות לזרימת הדם במוח העובר עשוי לשפר את התפקוד המוחי של העובר ולשמש יתרון קוגניטיבי בעבור הילד.

מילות מפתח: מוח עוברי; פעילויות מתמטיות; זרימת דם; זרימת דם במוח העובר; תכנות עוברי.

מבוא

אף שאין קשרים עצביים ישירים בין האם לעובר, ידוע שחוויות אימהיות יוצרות תהליך של השפעות פיזיולוגיות ונוירוכימיות שעלולות לשנות במישרין או בעקיפין את הסביבה התוך-רחמית וליצור תגובה עוברית (Aharony et al., 2020). מחקרים מדווחים על כך שנשים

בהיריון, שביצעו משימות קוגניטיביות מאתגרות או ביצעו מבחן Stroop Color and Word, או נחשפו לסרט דוקומנטרי מעורר מתח, תוך הערכת התגובות של העובר ללחץ האימהי, הראו תגובות עובריות קצרות (במשך ארבע דקות) של שונות מוגברת בקצב הלב ודיכוי הפעילות המוטורית (Copher & Huber, 1967; DiPietro, 2010; DiPietro et al., 2003; Monk et al., 2003, 2004).

לעומת זאת, ירידה בדופק העובר נצפו כאשר נשים בשבוע 32 להיריון עברו הליך הרפיה להפחתת מתח פסיכולוגי ופיזיולוגי. אף שאפשר לקשר את התגובה העוברית לשכיבה אימהית ולא להרפיה של האם, נצפתה האטה ברורה בפעילות המוטורית של העובר במהלך ההרפיה של האם והתאוששות בפעילות המוטורית של העובר, לאחר שפרוטוקול ההרפיה הסתיים (DiPietro, Costigan, 2008; DiPietro, Ghera et al., 2008). מחקרים אלו מוכיחים ששינויים פסיכולוגיים אימהיים משפיעים על הפיזיולוגיה של העובר.

וולפורד ואחרים (Wolford et al., 2016) חקרו את הקשר בין דיכאון אימהי במהלך ההיריון לתסמיני ADHD אצל ילדיהם בגיל שלוש וחצי, ומצאו כי תסמיני דיכאון במהלך ההיריון מנבאים תסמיני ADHD מוגברים. מידע זה עולה גם מהדיווחים של אימהות לילדים צעירים. הקשר ללחץ נפשי בהיריון נמשך גם לאחר הלידה. נמצאו עשרות מחקרים פרספקטיביים, בלתי תלויים, המראים על קשר בין חרדה ולחץ אימהי בזמן ההיריון לבעיות התנהגותיות ורגשיות בילד בשנות החיים הראשונות. לחץ נפשי ומצוקה של האם במשך ההיריון קשורים להתפתחות ADHD (Attention Deficit Hyperactivity Disorder) אצל הילד עם בעיות התנהגותיות ורגשיות. התפתחות הציר ההיפותלמו-יותרת המוח-אדרנל (Hypothalamic-Pituitary-Adrenal) יותרת המוח-אדרנל (HPA-axis), המערכת הלימבית והקורטקס הפרפרונטלי מושפעים מלחץ ומצוקה אימהיים.

מחקרים בבעלי חיים הראו שחשיפה של עוברים לקורטיזול גורמת לשינויים בלתי הפיכים במבנה המוח של העובר ובתפקודו (Uno et al., 1994). התפתחות ציר ההיפותלמו-יותרת המוח-אדרנל, המערכת הלימבית



התנועתית בצאצאי נקבות (Maruoka et al., 2016). העשרה סביבתית משפיעה גם על הסתעפות ואורך של דנדריטים, על מספר עמודי השדרה הדנדריטים וגודל הסינפסות של כמה אוכלוסיות עצביות (Faherty et al., 2016).

מטרות

מטרתנו הייתה לזהות ולכמת את הקשר בין פעילות קוגניטיבית (מתמטית) אימהית ושינויים בפעילות מערכת העצבים של העובר באמצעות בחינת זרימת הדם במוח העובר (קשורה במידה ישירה לחילוף החומרים במוח העובר), ולאחר מכן מעקב אחר הילד בן כשלוש שנים כדי להעריך האם הפעילות הקוגניטיבית של האם לפני הלידה משפיעה על התפתחות הילד ועל הפוטנציאל המוחי, הקוגניטיבי והמתמטי.

שאלת המחקר

באיזו מידה יש קשר בין פעילות מתמטית של האם במהלך ההיריון לפעילות המטבולית במוח העובר?

השערת המחקר

יש קשר חיובי בין פעילות מתמטית של האם ההרה במהלך ההיריון לפעילות המטבולית במוח העובר. ככל שהאם ההרה תעסוק יותר בפעילות מתמטית במהלך ההיריון, כן תהיה זרימת דם יעילה יותר במוח העובר.

מתודולוגיה

שיטת המחקר

מחקר זה הוא רב-תחומי המשלב מושגים מתחום החינוך המתמטי והרפואה. נשים הרות בשבוע ה-28 עד ה-40 להיריון קיבלו שאלון מתמטי. בדיקות דופלר אולטרה-סאונד של מוח העובר נעשו בזמנים שונים כדי למדוד אם הפעילות המתמטית של האם גרמה לשינויים בהתנגדות לזרימת הדם במוח העובר ובמהירות זרימת הדם. ייתכן ששינויים אלה משקפים את חילוף החומרים במוח העובר. את המחקר אישרה ועדת האתיקה של בית החולים שהמחקר נעשה בו (המחקר קיבל אישור הלסינקי). כל משתתפת חתמה על הסכמה מדעת להשתתף במחקר.

המשתתפים שנבדקו הם מין עוברי, מוצא אתני (יהודי, ערבי), גיל האם והשכלה, משך היריון ושהיריון לא בסיכון.

המחקר נעשה ביחידה לאולטרה-סאונד מיילדותי במרכז הרפואי פוריה שבישראל באמצעות מכשיר אולטרה-סאונד דופלר (GE VOLUSON E8 4-8 MHz). את סריקות האולטרה-סאונד עשו שני רופאים המתמחים בסריקת מוח עובר וזרימת דם במוח.

וקליפת המוח הקדם-מצחית מושפעים כולם מלחץ וחרדה של אימהות לפני לידה.

בשל ההתפתחות הטכנולוגית המאפשרת בדיקת הסביבה התוך-רחמית, אפשר לאפיין את השפעות הגומלין בין האם לעובר באופן שלא היה קודם. אפשר לראות ולנטר את העובר ואת תגובתו על רגשות ופיזיולוגיה אימהית. אף על פי כן המנגנון שבאמצעותו מניפולציה אימהית משפיעה על הפיזיולוגיה של העובר, אינו ברור יחסית (לדוגמה מתח או חרדה נגרמת). ההשערות כוללות מנגנון מבוסס הורמונלי (בעיקר ציר ההיפותלמוס-יותרת המוח-אדרנל, בייחוד באירועים של מתח או חרדה של האם). מחקרים אחרים עוסקים בהתראה העוברית ובשינויים המסתמכים על תחושות העובר בסביבה התוך-רחמית: תגובות קצב הלב של העובר נצפו בתוך שניות מניפולציות אימהיות, כמשפיעות על הסביבה התוך-רחמית. מניפולציות אימהיות כוללות שינויים ביציבה של האם (Lecaneut et al., 2002) וגירויים שמיעתיים (Groome et al., 1999) (כולל צלילים שהאם יוצרת באמצעות כלי הדם ומערכת העיכול הבולטים בסביבת השמיעה של הרחם) (Querleu et al., 1989). לפיכך ייתכן שהתגובה העוברית לכמה מניפולציות אימהיות עשויה להיות מתווכת באמצעות זיהוי תפיסתי עוברי של שינויים בסביבה התוך-רחמית.

אפיגנטיקה והשערת תכנות העובר

התגליות הגדולות האחרונות בתחומי האפיגנטיקה ותכנות העובר הראו שגירוי או חשיפה לגורמים בחלון זמן קריטי גורמים לשינויים קבועים במבנה ובתפקוד של איברי העובר החיוניים, מה שמביא, אולי, לידי שינויים ממושכים או קבועים בבריאות הילד ובהתנהגותו. לדוגמה מתח או חרדה של האם במהלך ההיריון עשויים להיות קשורים להפרעות קשב וריכוז ובעיות התנהגותיות ורגשיות אחרות אצל הילד (Wolford et al., 2016). אף על פי שהמנגנון המדויק של תכנות העובר אינו ידוע כרגע, האפיגנטיקה מציעה שמצבים בתוך הרחם של העובר, עשויים לתכנת מחדש את תפקוד הגנים על ידי השפעה על ביטוי הגנים מבלי לשכתב את הקוד הגנטי.

אם שינויים פיזיולוגיים ופסיכולוגיים של האם משפיעים על העובר, יש מקום להניח שגם פעילות קוגניטיבית אימהית עשויה להשפיע על העובר. עד כה, אף מחקר לא חקר את התאוריה הזו בבני אדם אף על פי שמחקרים בבעלי חיים מראים שחשיפה אימהית לסביבה מועשרת משפיעה על התפשטות התאים בהיפוקמפוס של עוברי עכברים נקבות, ומשפיעה במידה ניכרת על הפעילות



כלי המחקר

שאלון מתמטי: השאלון שפיתחה החוקרת כלל אוריינות מתמטית, בעיות מילוליות ופעילות גאומטרית. כמה מהפעילויות פותחו במיוחד בעבור מחקר זה בעוד חלקים אחרים היו ידועים, כמו מבחן סולם אינטליגנציה למבוגרים של וקסלר (Wechsler, 2008). הפעילות המתמטית של האם ותכננה להסתיים בתוך 12 דקות. היה צורך להתאים את רמת הקושי של כל שאלה לפי הכישורים המתמטיים של כל משתתפת. כדי להפחית כל חרדה אפשרית הקפידו החוקרים על נוהלי וקסלר ו-PISA. המטרה העיקרית של השאלון הייתה לגרום לנבדקות להגיע למאמץ קוגניטיבי מרבי בהתאם לתנאי המחקר. הנבדקות התבקשו לענות על השאלות ולפתור את התרגילים בעל פה בעת בדיקת אולטרה-סאונד. בשל חוסר אחידות של הנבדקות בהשכלה שלהן (החל מ-8 שנות לימוד וכלה בדוקטור) היה צורך לעשות לכל נבדקת אדפטציה של התרגילים לרמת היכולת וההשכלה המתמטית שלה במהלך העברת השאלון. דוגמאות לתרגילים שבאמצעותם אפשר להגיע למאמץ קוגניטיבי רב:

- תרגיל לנבדקות ברמה נמוכה עד בינונית של ידע מתמטי: עליכן לספור מ-24 ל-55 בדילוגים של 3. עליכן לספור אחורה בדילוגים של 3 מ-90 ל-58.
- תרגיל לנבדקות ברמה גבוהה של ידע מתמטי: עליכן לספור מ-24 ל-55 בדילוגים של 7. עליכן לספור אחורה בדילוגים של 7 מ-90 ל-51.

המטרות העיקריות של המחקר הן לזהות ולכמת את הקשר בין פעילות קוגניטיבית (מתמטית) אימהית לשינויים בפעילות מערכת העצבים של העובר באמצעות בחינת זרימת הדם במוח העובר, ולאחר מכן לעקוב אחר הילד בן השלוש בערך כדי להעריך האם הפעילות הקוגניטיבית של האם לפני הלידה משפיעה על התפתחות הילד ועל הפוטנציאל המוחי, הקוגניטיבי והמתמטי. נוסף על מטרות אלה ובשל הטרוגניות השכלתית, תרבותית ושפתית של הנבדקות, הוחלט לעשות את המחקר במתמטיקה ולא בתחום דעת אחר. הסיבה העיקרית להחלטה לעשות את הפעילות הקוגניטיבית במתמטיקה במהלך המחקר הייתה שיכולת מתמטית אינה תלויה בתרבותן ובשפתן של הנבדקות.

בשל אילוצים טכניים במהלך בדיקת אולטרה-סאונד, החוקרת הקריאה בקול את השאלות המתמטיות. התשובות היו בעל פה. במידת הצורך נעזרנו במתרגמת (לערבית ולרוסית).

תיקוף השאלון נעשה באמצעות העברת השאלון לקבוצה של 20 נשים בגיל והשכלה דומים בסביבה ניטרלית. תיקוף השאלון נעשה כדי לשלול כל חרדה הנובעת מנוכחות החוקרת בחדר האולטרה-סאונד. הפעילויות תועדו בסרטונים. השאלון הותאם לאחר מכן כדי להבטיח קושי בינוני (לא נכללו במבחן שאלות קלות במיוחד שעליהן כל המשתתפים ענו נכון או שאלות קשות במיוחד שעליהן כל המשתתפים ענו לא נכון). כמו כן תיקוף השאלון נעשה כדי לוודא קיום הקפדה על עקרונות אתיים (המבחן לא הבחין בין הרקע של אנשים); נוסף על כך תיקוף השאלון נעשה כדי להבטיח שיהיה אפשר להשלים את המבחן בתוך זמן סביר. לאחר תיקוף השאלון, תורגם השאלון מעברית לערבית.

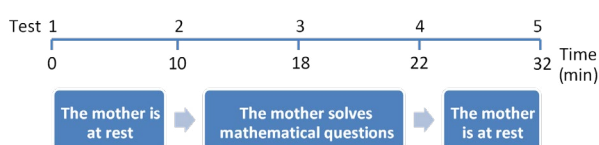
משתתפים

35 נשים בהיריון התנדבו להשתתף במחקר. כל משתתפת זכתה לתגמול על מעורבותה. כולן היו בנות 20 לפחות, בריאות, לא מעשנות, עם היריון יחיד, בהיריון לא בסיכון ותאריכי היריון עקיבים מאומתים בבדיקות היריון בתחילת השליש הראשון ואולטרה-סאונד. גיל העובר היה 28–40 שבועות. המשתתפות היו ממוצא אתני מעורב (ערבי ויהודי) ולא אחידות בכל הנוגע לגיל, זוגיות, השכלה ומין עוברי. נשים שלא הרגישו טוב במהלך הבדיקה או שפיתחו צירים לא נכללו במחקר.

איסוף נתונים

כל אישה התקבלה בנפרד ליחידת האולטרה-סאונד. כדי לבדוד את השפעת הפעילות המתמטית ולשלול השפעות אחרות (למשל השפעת חרדה או שכיבה), נעשו מדידות בחמש נקודות זמן: (א) מדידה ראשונית; (ב) לאחר 10 דקות של מנוחה בשכיבה (ללא פעילות מתמטית – כדי להבחין אם תגובות ה-MCA של העובר נבעו מהפעילות המתמטית או מהשכיבה); (ג) 8 דקות לאחר תחילת הפעילות המתמטית; (ד) בתום הפעילות (12 דקות); (ה) 10 דקות מנוחה לאחר הפעילות.

הפרוטוקול של איסוף נתונים (ראו איור 1) מורכב מ-5 בדיקות דופלר בנקודות הזמן המיועדות. במהלך 10 הדקות הראשונות והאחרונות של הפרוטוקול, האם במנוחה, בעוד במהלך 12 הדקות שביניהם, האם פותרת שאלות מתמטיות.



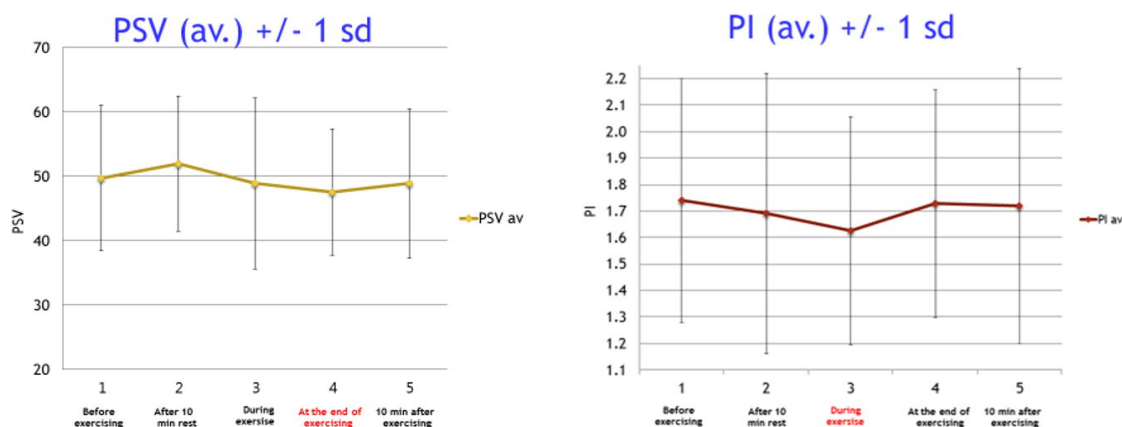
איור 1: ייצוג של פרוטוקול הניסוי



תוצאות עיקריות

התוצאות מראות שפעילות מתמטית של האם משפיעה על זרימת הדם במוח העובר, ועשויה להשפיע על קצב זרימת הדם במוח העובר. ערכי PI נשארו בלא שינוי בתגובה על שכיבה (מבחן 2), אך ירדו במידה ניכרת לאחר שמונה דקות של פעילות מתמטית (מבחן 3), $p < 0.05$. ערכי PI חזרו לרמות הבסיס במבחן 4 ונשארו, או התקרבו, לרמות אלו במבחן 5 (איור 3, מימין).

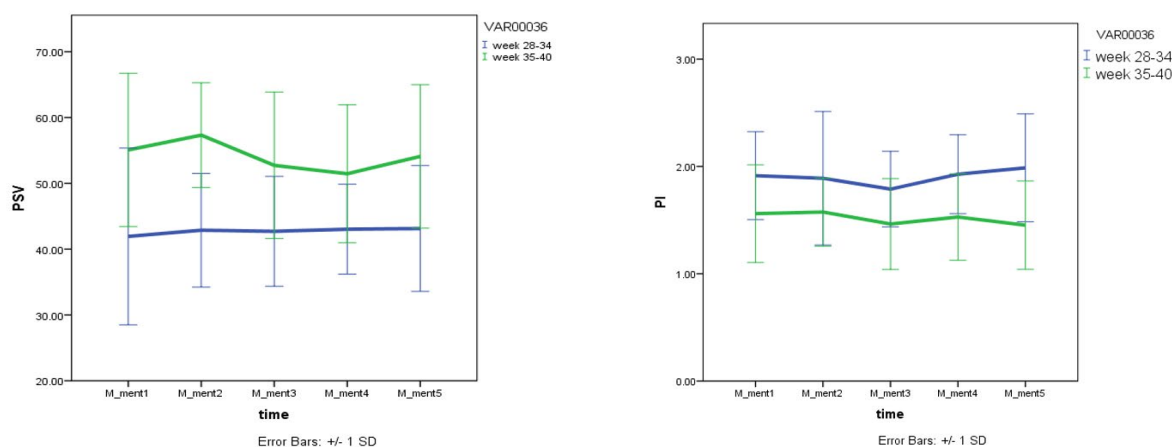
ערכי PSV היו נמוכים משמעותית בסוף הפעילות (מבחן 4) בהשוואה למדידה 1 (לפני הפעילות), $p < 0.05$.



איור 3: מימין: ערכי אינדקס פעימות (PI) שנמדדו בחמש נקודות הבדיקה המתוארות באיור 1. התוצאות מוצגות כממוצע $\pm$ SEM ($n=35$, $*p < 0.05$); משמאל: ערכי שיא מהירות סיסטולית (PSV) שנמדדו ב-5 נקודות הבדיקה המתוארות באיור 1. התוצאות מוצגות כממוצע $\pm$ SEM ($n=35$, $*p < 0.05$).

כפי שצוין לעיל, השתמשנו במבחן T דו־זנבי כדי לנתח את ההבדלים ב־PI ו־PSV בין מדידות בנקודות המדידה המוצגות באיור 3. נמצא הבדל מובהק סטטיסטית בין ערכי PSV בסוף הפעילות המתמטית (נקודה 4) לעומת ערכי PSV לפני תחילת הפעילות המתמטית (נקודה 1), כלומר ירידה משמעותית בערכי ה־PSV בתום הפעילות המתמטית. נמצא הבדל מובהק סטטיסטית בין ערכי PI בתחילת המבחן (נקודה 1) לעומת ערכי PI במהלך התרגול המתמטי (נקודה 3), כלומר ירידה ניכרת בערכי PI במהלך פעילות מתמטית.

לגבי המשתנים האחרים שנבדקו: ערכי PSV היו גבוהים יותר וערכי PI היו נמוכים יותר עם עלייה בגיל ההיריון (איור 4). ההבדלים היו מובהקים סטטיסטית (מבחן t דו־זנבי, $p < 0.001$).



איור 4: מימין: ערכי מדד הדופק (PI) יורדים עם גיל ההיריון; משמאל: ערכי Peak Systolic Velocity (PSV) עולים עם גיל ההיריון

ערכי PSV נמצאו גבוהים יותר במובהק ($p < 0.05$) בעוברים זכרים בהשוואה לעוברים ממין נקבה במבחן 2 (לאחר שכיבה, לפני פעילות מתמטית) בנשים עם פחות מ־12 שנות השכלה.



דין ומסקנות

תוצאות מרכזיות ופרשנות

ציפינו למצוא מתאם בין פעילות מתמטית אימהית לערכי PSV ו-PI של MCA עוברי, ואכן, הנתונים שלנו מצביעים על כך, כפי שמתבטא בהפתחת PI ב-MCA, ולפי כך זרימת דם מוגברת בעורק המוח הראשי. זה מניע את החוקרים להשערה שפעילות מתמטית אימהית במהלך ההיריון עלולה לגרום לשינויים פיזיולוגיים קצרי טווח וארוכי טווח בעובר ובסופו של דבר אצל הילד. תוצאות כאלה, אם יאוששו במחקרים נוספים, הן בעלות משמעות ועשויות להביא לידי מהפכה בפרוטוקולי ניהול היריון שמטרתם לפתח יכולות מתמטיות ויכולות קוגניטיביות נוספות של ילדים (ראו להלן).

הצעות למחקרים נוספים

ההשערה שלנו היא ייחודית בתחום: לא מצאנו מחקרים שחוקרים את השפעת הפעילות הקוגניטיבית האימהית על תפקוד מוח העובר. מחקרים עם מדגם גדול יותר יכולים לאשש תוצאות אלו ולבסס את השערת מחקר זה, הטוענת שפעילות מתמטית של האם במהלך ההיריון יכולה לפתח יכולת קוגניטיבית ומתמטית מוגברת אצל הילד. נוסף על כך נדרשים מחקרי מעקב כדי למצוא מתאם בין התהליך של האם ליכולת קוגניטיבית מוגברת אצל הילד.

כדי לתמוך בממצאים, ולבדוק שמכשיר הדופלר אינו רגיש די כדי להדגים הבדלים קטנים בזרימת הדם ובהתנגדות ל-MCA של העובר, אפשר להשתמש בפרמטרים מדידים נוספים המלמדים על ההתנהגות (neurobehavior) ועל המודעות של העובר. פרמטרים כמו תנועות עובר, שונות קצב הלב של העובר והקשר בין המדדים המשמעותיים FM/FHR. נוסף על כך אפשר לעקוב אחר רמות הלחץ של האם במהלך הפעילות באמצעות מדידת דופק, לחץ דם, מוליכות עור ואו נשימה אימהית. בדיקות דם להערכת הציר הנורואנדוקריני של שליה-עובר (בייחוד בהורמון שחרור קורטיקוסטרופן של השליה) עשויות גם לתמוך בהשערת המחקר. יש מקום לשלב בין המחקר הנוכחי למחקרים שנעשו באמצעות אמצעי מחקר נוספים, לדוגמה: יש מחקרים חדשים באמצעות fMRI המראים שיכולת מתמטית מתבטאת באזורים מוגדרים במוח. מחקרי הדמיה תפקודיים חשפו את היכולת לגייס שינויים במעגלים חשמליים במוח הפארייטאלי במהלך תרגול ופיתוח של יכולת קוגניטיבית. מעגלים אלה משתתפים בפתרון בעיות מתמטיות.

תחום נוסף שראוי למחקר הוא האם יש "חלון הזדמנויות" להעלאת הפוטנציאל הקוגניטיבי של עוברים ומתי הוא מתנהל. יתר על כן, אי אפשר לשלול שסוגים אחרים של

פעילות קוגניטיבית אימהית (מלבד מתמטיקה) יכולים להשפיע על העובר ולשפר את האינטליגנציה של העובר.

השפעה עתידית על יכולת מתמטית בקרב ילדים

לאחר שיוכח שפעילות מתמטית אימהית משפרת את ההתנהגות (neurobehavior) של העובר או משפרת את חילוף החומרים במוח העובר, אנו מתכוונים לעשות מחקרי המשך כדי לבחון האם אפשר להבחין בתפיסה מתמטית או קוגניטיבית מוגברת אצל ילדים בני שלוש. בדיקה בגיל כה צעיר היא ריאליזם שכן הוכח כי אפשר להעריך את היכולות המתמטיות של ילדים כבר בגיל צעיר. לילדים צעירים אכן יש תפיסה של מתמטיקה בחיי היום יום שלהם (השוואת כמויות, יצירת מודלים, מדידת חפצים, התמודדות עם בעיות יום-יומיות ועוד) (National Association for the Education of Young Children, 2002). גם לתינוקות יש ידע בסיסי של כמות הרבה לפני התפתחות השפה. ילדים בגיל הרך מציגים יכולות מתמטיות לא פורמליות (Baroody, 2000) כולל ספירת עצמים, התמצאות במרחב ויצירת צורות, לעיתים ברמות מתוחכמות להפליא (Clements & Clements, 2001; Sarama, 2000; Hassidov & Ilany, 2009, 2018).

השלכות עתידיות (לטווח ארוך)

יש צורך במחקרים נוספים לאישוש השערות המחקר. הביטוי של יכולות קוגניטיביות משופרות אצל ילדים לאחר פעילות מתמטית של האם במהלך ההיריון עשוי לחולל מהפכה בטיפול האימהי ובניהול טרום לידתי, ולהביא לידי "תכנות עוברי" שבו יהיה אפשר לשפר לצמיתות את היכולות הקוגניטיביות של הילד באמצעות תרגול מתמטי של האם במהלך ההיריון. אפשר לעצב כלים לשימוש הנשים ההרות כדי לשפר את היכולות הקוגניטיביות של ילדיהן.

רשימת מקורות

- Bar, J., Hod, M., Pardo, J., Fisch, B., Rabinerson, D., Kaplan, B., & Meizner, I. (1997). Effect on fetal circulation of low-dose aspirin for prevention and treatment of pre-eclampsia and intrauterine growth restriction: Doppler flow study. *Ultrasound in Obstetrics and Gynecology*, 9(4), 262–265. <https://doi.org/10.1046/j.1469-0705.1997.09040262.x>
- Baroody, A. J. (2000). Does mathematics instruction for three-to-five-year-olds really make sense? *Young Children*, 55(4), 61–67. <https://www.jstor.org/stable/42727827>



- Hassidov, D., & Ilany, B.-S. (2009). *Pre-school communities and mathematics education: Research issues and findings* [Paper presentation]. The 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece.
- Hassidov, D., & Ilany, B.-S. (2018). Collaboration between mathematics facilitators and preschool teachers during the innovative “senso-math” preschool program. *Mathematics Teacher Education and Development*, 20(1), 154–167.
- Hershkovitz, R., Erez, O., Sheiner, E., Landau, D., Mankuta, D., & Mazor, M. (2003). Elevated maternal mid-trimester chorionic gonadotropin associated with fetal cerebral blood flow redistribution. *Acta Obstetrica et Gynecologica Scandinavica*, 82(1), 22–27.
- Lecaneut, J.-P., & Jacquet, A.-Y. (2002). Fetal responsiveness to maternal passive swinging in low heart rate variability state: Effects of stimulation direction and duration. *Developmental Psychobiology*, 40(1), 57–67. <https://doi.org/10.1002/dev.10013>
- Maruoka, T., Kodomari, I., Yamauchi, R., Wada, E., & Wada, K. (2009). Maternal enrichment affects prenatal hippocampal proliferation and open-field behaviors in female offspring mice. *Neuroscience letters*, 454(1), 28–32. <https://doi.org/10.1016/j.neulet.2009.02.052>
- Monk, C., Myers, M. M., Sloan, R. P., Ellman, L. M., & Fifer, W. P. (2003). Effects of women’s stress-elicited physiological activity and chronic anxiety on fetal heart rate. *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics*, 24(1), 32–38. <https://doi.org/10.1097/00004703-200302000-00008>
- Monk, C., Sloan, R. P., Myers, M. M., Ellman, L. M., Werner, E., Jeon, J., Tager, F., & Fifer, W. P. (2004). Fetal heart rate reactivity differs by women’s psychiatric status: An early marker for developmental risk? *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, 43(3), 283–290.
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270–275. <http://dx.doi.org/10.5951/TCM.7.5.0270>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children’s ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482–488. <https://doi.org/10.5951/TCM.6.8.0482>
- Copher, D. E., & Huber, C. P. (1967). Heart rate response of the human fetus to induced maternal hypoxia. *American Journal of Obstetrics and Gynecology*, 98(3), 320–334. [https://doi.org/10.1016/0002-9378\(67\)90151-2](https://doi.org/10.1016/0002-9378(67)90151-2)
- DiPietro, J. A. (2010). Maternal influences on the developing fetus. In A. Zimmerman & S. Connors (Eds.), *Maternal influences on fetal neurodevelopment: Clinical and research aspects* (pp. 19–32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-60327-921-5_3
- DiPietro, J. A., Costigan, K. A., & Gurewitsch, E. (2003). Fetal response to induced maternal stress. *Early Human Development*, 74(2), 125–138. <https://doi.org/10.1016/j.earlhumdev.2003.07.001>
- DiPietro, J. A., Costigan, K. A., Nelson, P., Gurewitsch, E. D., & Laudenslager, M. L. (2008). Fetal responses to induced maternal relaxation during pregnancy. *Biological Psychology*, 77(1), 11–19. <https://doi.org/10.1016%2Fj.biopsycho.2007.08.008>
- DiPietro, J. A., Ghera, M. M., & Costigan, K. A. (2008). Prenatal origins of temperamental reactivity in infancy. *Early Human Development*, 84(9), 569–575. <https://doi.org/10.1016/j.earlhumdev.2008.01.004>
- Faherty, C. J., Kerley, D., & Smeyne, R. J. (2003). A Golgi-Cox morphological analysis of neuronal changes induced by environmental enrichment. *Developmental Brain Research*, 141(1–2), 55–61. [https://doi.org/10.1016/S0165-3806\(02\)00642-9](https://doi.org/10.1016/S0165-3806(02)00642-9)
- Groome, L., Mooney, D., Holland, S., Smith, K., & Atkinson, P. (1999). Behavioral state affects heart rate response to low-intensity sound in human fetuses. *Early Human Development*, 54(1), 39–54. [https://doi.org/10.1016/s0378-3782\(98\)00083-8](https://doi.org/10.1016/s0378-3782(98)00083-8)



- National Association for the Education of Young Children. (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings*. <https://www.naeyc.org/sites/default/files/globally-shared/downloads/PDFs/resources/position-statements/psmath.pdf>
- Querleu, D., Renard, X., & Boutteville, C., & Crepin, G. (1989). Hearing by the human fetus? *Seminars in Perinatology*, 13(5), 409–420.
- Uno, H., Eisele, S., Sakai, A., Shelton, S., Baker, E., DeJesus, O., & Holden, J. (1994). Neurotoxicity of glucocorticoids in the primate brain. *Hormones and Behavior*, 28(4), 336–348. <https://doi.org/10.1006/hbeh.1994.1030>
- Wechsler, D. (2008). *Wechsler Adult Intelligence Scale--Fourth Edition (WAIS-IV)* [Database record]. APA PsycTests. <https://doi.org/10.1037/t15169-000>
- Wolford, E., Pesonen, A-K., Lahti, M., Tuovinen, S., Savolainen, K., Kajantie, E., Heinonen, K., Lahti, J., Villa, P. M., Laivuori, H., Hämäläinen, E., Reynolds, R. M., & Räikkönen, K. (2016). Maternal depression during pregnancy is associated with child ADHD symptoms at 3.5 years. *Psychoneuroendocrinology*, 71, 33. <http://dx.doi.org/10.1016/j.psyneuen.2016.07.090>

פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית בגאומטריה בתלמידים בעלי רמות שונות של יכולת

ד"ר אילנה וייסמן

מרצה בכירה בחוג למתמטיקה במכללת שאנן ומנהלת מעבדה נירוקוגניטיבית לחקר יכולות ויצירתיות באוניברסיטת חיפה. מחקריה מתמקדים בחקר נירוקוגניטיבי (באמצעות EEG) הקשור לפתרון בעיות במתמטיקה ובחינת הבדלים אינדיווידואליים במהלך תהליך זה.



פרופ' מארק לייקין

פרופסור מן המניין בחוג לחינוך מיוחד ובחוג ללקויות למידה בפקולטה לחינוך באוניברסיטת חיפה. בעל תואר שני מהמחלקה ללקויות למידה, האוניברסיטה הפדגוגית הממלכתית של סנט פטרסבורג, רוסיה. כיום הוא גם מנהל מעבדת המחקר לחקר נירוקוגניטיבי של יצירתיות, יכולות ומחוננות באוניברסיטת חיפה ויו"ר הקתדרה לחינוך מיוחד של קוני-לונגפלד. מחקריו מתמקדים ברכישה ועיבוד של שפה דו-לשונית, מרכיבי שפה בתהליכי קריאה נורמליים וחריגים, פיתוח יצירתיות ונירוקוגניציה של מחוננים.



פרופ' רוזה לייקין

פרופסור מן המניין לחינוך מתמטי וחינוך מחוננים בפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה. כיום היא נמצאת בתפקיד דיקן הפקולטה ועורכת בכירה של כתב העת הבין-לאומי 'International Journal of Science and Mathematics Education'.

הקימה את מרכז חמ"ה - מרכז הבין-תחומי לחקר מחוננות והצטיינות. מחקריה של פרופ' לייקין מתמקדים ביצירתיות ויכולת מתמטית, עיצוב משימות, פוטנציאל מקצועי של מורים. היא מקדמת שילוב של מחקר נירוקוגניטיבי בתחום החינוך המתמטי.



פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית בגאומטרייה בתלמידים בעלי רמות שונות של יכולת

אילנה וייסמן, מרק לייקין ורוזה לייקין

תקציר

עיבוד מתמטי הקשור לפתרון בעיות גאומטריות קצרות הדורשות הסקה לוגית נבדק בקרב תלמידים הנבדלים ברמות של מחוננות כללית (G) ומצוינות במתמטיקה (EM) באמצעות פוטנציאלים חשמליים הקשורים באירועים (ERP – Event Related Potentials). שישים ושבעה בנים תלמידי תיכון השתתפו במחקר. משתתפי המחקר חולקו לארבע קבוצות מחקר מרכזיות שתוכננו על פי שילובים שונים של גורמי G ו-EM. לגורמים G ו-EM הייתה השפעה דומה על דיוק וזמן תגובה: תלמידי מצטיינים במתמטיקה (EM) ותלמידים מחוננים כללית (G) היו מדויקים יותר בהשוואה לעמיתיהם שלא מצטיינים במתמטיקה (NEM) ולא מחוננים (NG), בהתאמה. בו בזמן גורמים G ו-EM השפיעו אחרת על מדדים אלקטרו-פיזיולוגיים, עם אינטראקציה מובהקת בין גורמים G ו-EM הקשורה לאמפליטודות ERP בחלק משלבי פתרון בעיה. על סמך ההבדלים שנמצאו, אנו מציעים שהמחקר שלנו מראה שגורמים G ו-EM קשורים זה בזה אך מראים שהתכונות שונות בטבען. אנחנו מציעים שחלוקה לקבוצות יכולת במתמטיקה בבית הספר חייבת להביא בחשבון הצטיינות במתמטיקה ומחוננות כללית בו בזמן, כלומר גורם EM וגם גורם G.

מילות מפתח: פתרון בעיות בגאומטרייה; הסקה לוגית; מחוננות; מצוינות במתמטיקה; נוירוקוגניציה; אירועים מעוררי פוטנציאלים חשמליים (ERP).

מבוא

אין הגדרה שמקובלת על הכול עבור מחוננות מתמטית (Davis & Rimm, 2004). בדרך כלל, מחוננות מתמטית קשורה לביצועים מצוינים במתמטיקה או למחוננות כללית (Leikin, 2014). מחקרים על מחוננות בכלל או על מחוננות מתמטית בפרט משתמשים בקריטריונים מגוונים לבחירת אוכלוסיית המחקר וברוב הפעמים הישגים גבוהים במתמטיקה בבית הספר נחשבים מחוץ (אינדיקטור) למחוננות מתמטית (Ziegler & Raul, 2000). המונחים 'מחוננות מתמטית', 'יכולת מתמטית גבוהה', 'פוטנציאל מתמטי גבוה' ו'מצוינות במתמטיקה' נחשבים לרוב למונחים נרדפים (Leikin, 2020). תכונות של אנשים עם יכולת מתמטית גבוהה בדרך כלל מקושרות ליכולת טובה בעיבוד מידע מתמטי

ובפתרון בעיות, כולל חשיבה לוגית מתקדמת (Krutetskii, 1976).

לייקין ולייקין (Leikin & Leikin, 2009) הציעו להבחין בין מחוננות כללית למצוינות מתמטית שהם קשורים זה לזה אך שונים זה מזה באופיים ושיערו כי מחוננות מתמטית היא שילוב של שניהם. כדי לבחון השערה זו, הם הציגו מבנה של 2×2 המורכב מגורמים מחוננות כללית (G) ומצוינות במתמטיקה בית ספרית (EM), וערכו מחקר רב-ממדי בקנה מידה גדול בתלמידים בני 17–18 עם כל מיני שילובים של רמות של EM ו-G (Leikin & Lev, 2013; Leikin, Leikin et al., 2013; Leikin, Waisman et al., 2013; Paz-Baruch et al., 2014; Paz-Baruch et al., 2016; Leikin et al., 2016; Waisman et al., 2014).

מחקרים המתמקדים במאפיינים קוגניטיביים מראים שגורם G קשור לחשיבה אנלוגית, רכישת מידע חדש, יישום של אסטרטגיות מגוונות בפתרון בעיות (Steiner & Carr, 2003), זיכרון לטווח קצר, כן למהירות עיבוד (Paz-Baruch et al., 2014), ואילו גורם EM קשור לזיכרון מרחבי-חזותי (Paz-Baruch et al., 2016). כמו כן נמצא כי קיים מתאם גבוה בין מנת משכל (IQ) לזמן תגובה (RT – Reaction Time) על משימות כרונומטריות וטען כי זמן תגובה במשימות אלו יכול לשמש מדד של מנת המשכל (Jensen, 2006).

במהלך השנים נעשו כמה מחקרים לחקר הבסיס הנוירופיזיולוגי של מחוננות כללית ובפרט מחוננות מתמטית (כאשר האוכלוסייה של מחוננים מתמטית זוהתה בעיקר באמצעות הישגיהם הגבוהים במתמטיקה). באמצעות מתודולוגיית הדמיה תפקודית של המוח באמצעות תהודה מגנטית (fMRI – Functional Magnetic Resonance Imaging) מצאו החוקרים כי מוחם של אנשים מחוננים הוא בעל המיספרה ימנית מפותחת (Prescott et al., 2010) וקישוריות מוגברת בין חלקי המוח (Desco et al., 2011), וכן בעל יכולת להפעיל אזורי מוח מותאמי משימה בדרך מתוזמנת ומתואמת היטב בעת עשיית רוטציות מנטליות או משימות לא מתמטיות אחרות (O'Boyle, 2005). באמצעות מתודולוגית רישום חשמלי של גלי המוח באמצעות אלקטרודות שמניחים על גבי הקרקפת (EEG – Electroencephalography)



כ-100 אלפיות שנייה לאחר הצגת גירוי כלשהו ומבטא חישה ותפיסה של הגירוי, וגם רכיב P300, גל חיובי המופיע כ-300 אלפיות שנייה לאחר הגירוי ונחשב למשקף תהליכים המעורבים בהערכת גירוי או סיווגו וכן תהליכי זיכרון. רכיבים מאוחרים החל מ-300 אלפיות שנייה (או פוטנציאלים מאוחרים) קשורים לקשב סלקטיבי, לתהליכים הכוללים סיווג או עדכון ייצוגי זיכרון של גירויים ופעילות קבלת החלטות (Luck, 2014).

מחקרי ERP דיווחו כי לאנשים אינטליגנטים היה זמן חביון של רכיבי ERP קצר יותר (למשל, Jolij et al., 2007) ואמפליטודות ERP נמוכות יותר (Polich & Kok, 1995), ואילו מחקרים אחרים מצאו שאמפליטודות ERP (במיוחד של P300) גבוהות יותר אצל אנשים בעלי אינטליגנציה גבוהה יותר בהשוואה לאלה עם אינטליגנציה נמוכה יותר (Hill et al., 2011; Zhang et al., 2007).

על סמך סקירת ספרות זו שיערנו כי כל אחד מגורמי G ו-EM יכול לעודד יעילות עצבית בעת פתרון בעיות מתמטיות. עם זאת, במחקר הקודם שלנו מצאנו שפעילות חשמלית במהלך פתרון משימות שקשורות לפונקציות הייתה הכי נמוכה בקבוצת נבדקים G-EM, מחוננים שגם מצטיינים במתמטיקה (Waisman et al., 2014).

היות שיש הבדלים אינדיווידואליים בתהליכים קוגניטיביים הקשורים למתמטיקה, אפשר להשתמש בשיטות של מדעי המוח הקוגניטיביים כדי להבין טוב יותר איך הבדלים אלה באים לידי ביטוי בביצועים מתמטיים (De Smedt & Verschaffel, 2010). שימוש במדעי המוח יכול לעזור בחקירת תופעה של מחוננות מתמטית שלא הוגדרה היטב. שיטת אירועים מעוררי פוטנציאלים (ERP) מאפשרת מעקב מתמשך ורציף אחר פעילות קוגניטיבית (Neville et al., 1993) כאשר רכיבי ERP מסוימים קשורים לתהליכים קוגניטיביים למיניהם. לכן השתמשנו בשיטת אירועים מעוררים פוטנציאלים (ERP) מתוך התמקדת במדדים אלקטרו-פיזיולוגיים והתנהגותיים שקשורים בהסקה לוגית בגאומטריה בקבוצות משתתפים שנבדלים ברמות של G ו-EM.

תלמידים בעלי יכולת גבוהה במתמטיקה נבדלים מתלמידים אחרים ביכולת להסקה לוגית בנושא קשרים איכותיים ומרחביים (Deal & Wismer, 2010; Gardner, 1976; Krutetskii, 2006). מחקרי מוח קודמים הוכיחו כי יכולת חשיבה יוצאת מן הכלל בקרב אנשים בעלי כישרון מתמטי נתמכת ברשת מוחית מאורגנת בדרך אחרת (למשל, Desco et al., 2011). לאחר תצפיות אלו, החלטנו לבחון את הפעילות המוחית של תלמידים במהלך פתרון משימות גאומטריות הדורשות הסקה לוגית.

גבינס וסמית (Gevins & Smith, 2000) הראו כי רמות של אינטליגנציה כללית קשורות לעוצמת הפעילות החשמלית של המוח ולהתפלגות של פעילות זו על גבי הקרקפת. יש עדויות חזקות שאנשים בעלי אינטליגנציה גבוהה יותר מציגים פעילות מוחית נמוכה יותר (יעילה יותר) בהשוואה לאנשים בעלי אינטליגנציה נמוכה יותר במהלך ביצוע משימות קוגניטיביות (Neubauer & Fink, 2009). תופעה זאת ידועה בשם "השערת יעילות עצבית" (neural efficiency hypothesis). מחקרים מצאו כי תופעת היעילות העצבית קשורה גם למומחיות של אנשים בתחום מסוים (במקרה שלנו מצוינות במתמטיקה) (Grabner et al., 2006). יש לציין כי יש חוסר עקיבות בממצאים הנוגעים למידת הפעילות המוחית בקשר למומחיות: חלק מהמחקרים מדווחים על עלייה בפעילות המוח לאחר התרגול בעוד אחרים טוענים ההפך (Kelly & Garavan, 2005). במחקר של וייסמן ואחרים (Waisman et al., 2023) נמצא כי תלמידים שמצטיינים במתמטיקה (EM) הציגו פעילות חשמלית (EEG) גבוהה יותר בהשוואה לזו של תלמידים שלא מצטיינים במתמטיקה (NEM). אחד ההסברים לחוסר עקיבות זו הוא כי היעילות העצבית מושפעת מאופי וקושי המשימה, למשל, מידת המעורבות של זיכרון לטווח ארוך בפתרון (Neubauer & Fink, 2009). כלומר יעילות עצבית באה לידי ביטוי כאשר אנשים מתמודדים עם משימות בעלי קושי (סובייקטיבי) נמוך עד בינוני. עם זאת, כאשר מורכבות המשימה עולה לרמת קושי גבוהה, אנשים אינטליגנטים יותר כנראה משקיעים משאבים קוגניטיביים רבים בהשוואה לאנשים אינטליגנטים פחות (Dunst et al., 2014). יתר על כן, מחקרים נוספים קוגניטיביים החוקרים את השפעת האימון על המוח מצאו כי היעילות העצבית תלויה גם כמות ואיכות של הלמידה (Neubauer & Fink, 2009).

בחלק מהמחקרים הנורוקוגניטיביים בתחום האינטליגנציה נעשה שימוש במתודולוגיית אירועים מעוררים פוטנציאלים חשמליים (ERP – Event related potentials). שיטה זו מתמקדת במדדים האלקטרו-פיזיולוגיים שמשקפים שינויים בפעילות החשמלית של מערכת העצבים המרכזית הנובעים מגירויים חיצוניים או מתהליכים קוגניטיביים שנעשים במוח. מדדים אלה מספקים מידע על התהליך הקוגניטיבי בזמן אמת לפני ההופעת התגובה החיצונית (Neville et al., 1993). מחקרי ERP הצליחו להגדיר כמה גלים חשמליים (הנקראים רכיבים) שמאפיינים עיבודים קוגניטיביים למיניהם. למשל, רכיב P100, גל חיובי בעל אמפליטודה (משרעת) מקסימלית שמופיעה



התמקדו במשתתפים בוגרים. הם לא עסקו בהנמקה לוגית בגאומטרייה, הם גם לא בחנו הבדלים אינדיווידואליים הקשורים לרמות מגוונות של יכולות מתמטיות. המחקר שלנו מנסה לעסוק בסוגיות אלה.

השערות המחקר

על סמך סקירת הספרות שהוצגה לעיל ותוצאות המחקרים הקודמים שלנו שיערנו ש-G ו-EM הם מאפיינים הקשורים זה בזה אך שונים זה מזה, ובחנו את ההשערות האלה:

השערה 1: ברמה התנהגותית

לגורמי G ו-EM יש אפקט מובהק על דיוק תגובות (Acc – Accuracy) ועל זמן לתגובות נכונות (RTc – Reaction Time for Correct responses) בקרב קבוצות משתתפי המחקר G ו-EM, יחסית למשתתפי קבוצות NG ו-NEM:

א1. Acc גבוה יותר

ב1. RTc קצר יותר

השערה 2: ברמה נוירוקוגניטיבית

א2. זמני חביון (זמן מהופעת הגירוי עד לנקודת קיצוץ של אמפליטודת הרכיב Latency) של P100 קצרים בקרב משתתפי קבוצות G ו-EM מאשר בקרב משתתפי קבוצות NG ו-NEM.

ב2. אמפליטודות ERP של פוטנציאלים מאוחרים נמוכות יותר (דבר שקשור לתופעת היעילות העצבית) בקרב משתתפי קבוצות G ו-EM מאשר בקרב משתתפי קבוצות NG ו-NEM.

השערה 3: שילובים של גורמי G ו-EM מחזקים הבדלים בביצועים בארבע הקבוצות העיקריות של המשתתפים הן במדדים התנהגותיים הן במדדים אלקטרו-פיזיולוגיים. תלמידים בקבוצה G-EM בעלי ביצועים טובים יותר בהשוואה לתלמידים בקבוצות NG-EM, G-NEM ו-NG-NEM בכל המדדים שהוזכרו בהשערות 1 ו-2.

השיטה

מטרת מחקר זה למצוא דמיון והבדלים במדדים התנהגותיים ואלקטרו-פיזיולוגיים הקשורים בפתרון בעיות גאומטריות קצרות הדורשות הסקה לוגית בתלמידים שנבדלים זה מזה ברמת מחוננות כללית (G) והצטיינות במתמטיקה (EM). במחקר זה כללנו ארבע קבוצות של משתתפים (G-EM, NG-EM, G-NEM, NG-NEM). בדקנו דיוק (Acc), זמן לתגובות נכונות (RTc), אמפליטודות, זמני חביון והתפלגות של פוטנציאל חשמלי על פני הקרקפת.

לפיתוח חשיבה לוגית יש תפקיד חשוב בלימודי מתמטיקה ולהפך (Durand-Guerrier et al., 2012). כאן מורים למתמטיקה וחוקרים בתחום החינוך המתמטי מעניקים חשיבות ללימודי גאומטרייה בתוכנית הלימודים במתמטיקה בגלל תפקידה בטיפוח חשיבה לוגית וויזואלית (Pólya, 1973; Ayalon & Even, 2010). יש קשר הדוק בין חשיבה לוגית לחשיבה דדוקטיבית – התהליך שבו אדם מסיק מסקנות (מסקנות הכרחיות מבחינה לוגית) הנשענות על עובדות שידועות מקודם (נתונים או הנחות יסוד) (Nunes et al., 2007), כמו למשל בהוכחות מתמטיות (Hanna & de Villiers, 2012).

כמה מחקרים בחינוך מתמטי התמקדו בפיתוח חשיבה דדוקטיבית של תלמידים (Hoyels & Küchemann, 2002) או בסיווג של אובייקטים גאומטריים (מרובעים) כדוגמה של חשיבה דדוקטיבית בגאומטרייה (Fujita, 2012). מחקרים מגוונים הציעו כי לעיתים קרובות הלומדים מתקשים בהגדרות הפורמליות של הצורות כולל הבנה של יחסי הייררכייה ביניהם (Erez & Yerushalmy, 2006; Fujita, 2012). כמו כן נמצא כי לעיתים קרובות חשיבה בגאומטרייה אצל סטודנטים מושפעת במידה ניכרת מדימוי מושג של צורות גאומטריות (Vinner, 1991).

במחקר הנוכחי ניסינו לנתח פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית בגאומטרייה (בעיות על מרובעים) דבר שלא נחקר קודם. מחקרים נוירוקוגניטיביים הקודמים (בעיקר מחקרי fMRI) שעסקו בהסקה לוגית, השתמשו בעיקר במשימות הדורשות הסקה לוגית בהתבסס על הנחות לא קשורות למתמטיקה, לדוגמה, "אם צורה היא ריבוע אז היא אדומה. הצורה היא ריבוע. לכן היא אדומה" (Qiu et al., 2007). הממצאים עמדו על הבדלים במיקום ובחוזק של פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית (Mathieu et al., 2015).

עם זאת, נראה שהפעילות המוחית במהלך הסקה לוגית תלויה בהליך הניסויי (Prado et al., 2011). רק מחקרי EEG מוגבלים עסקו בחקר פעילות חשמלית הקשורה לחשיבה דדוקטיבית (Bonnefond & Van Der Henst, 2007; Qiu et al., 2003). רובם ניסה לאפיין את רכיבי ה-ERP שנגרמו באמצעות העיבוד הקשור בטיעונים דדוקטיביים. המחקרים מצאו שרכיב N200 מבוטא הכי הרבה ורכיב P300 מבוטא הכי פחות בתגובה על אי-התאמה לשונית בין הנחת היסוד ובין המסקנה, בעוד P300 היה בולט יותר כאשר הנחת היסוד והמסקנה התאימו. הם פירשו את תוצאות אלה בכך שהמשתתפים כבר הסיקו את המסקנה על סמך ההנחה העיקרית שהוצגה. שימו לב שרוב מחקרי מוח קודמים על חשיבה לוגית



משתתפים

המאמר מדווח על ממצאים שהתקבלו עם ניסוי מעבדה עם 67 משתתפים מארבע קבוצות המחקר. הקבוצות נבנו על סמך תהליך דיגום קפדני המתואר להלן:

1200 תלמידים שלמדו מתמטיקה בכיתות י' וי"א (בגילים 16–18) ברמה של 5 יח"ל או ברמה של 4 יח"ל נבחנו במבחן (Raven, 2000) Progressive Matrix Test Raven's Advanced Scholastic Assessment Test in Mathematics (SAT-M) לאבחון מחוננות כללית ובמבחן (Raven, 2000) Progressive Matrix Test (RPM) להצטיינות במתמטיקה. השתמשנו במבחן RPM מקוצר שהכיל 30 פריטים עם הגבלת זמן של 15 דקות ובגרסה קצרה של ה-SAT-M שהכיל 35 פריטים עם הגבלת זמן של 30 דקות (Zohar, 1990).

תלמידי G נבחרו מכיתות מחוננים בתיכון. תלמידים אלה עשו בכיתה ג' בחינה ארצית ואובחנו בעלי מנת משכל (IQ) מעל 130. נוסף על כך השתמשנו במבחן RPM לאימות גורם G אצל תלמידים ולשילוב תלמידים מכיתות רגילות בקבוצת G. למחקר נבחרו תלמידים מכיתות מחוננים עם ציוני RPM של מעל 26 (מתוך 30). תלמידים שלא אובחנו מחוננים, נכללו בקבוצת G אם הם קיבלו 28 (מתוך 30) במבחן RPM (1% מהאוכלוסייה הכללית). תלמידים הכוללים בקבוצת EM למדו מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל עם ציון מעל 90 (מתוך 100, על סמך הערכת המורים שלהם). בקבוצת EM נכללו תלמידים עם ציון SAT-M מעל 26 (2% מהאוכלוסייה הכללית). תלמידים בקבוצת NEM למדו מתמטיקה ב-4 יח"ל עם ציון מעל 90. בפעמים שבהן ציון המתמטיקה בבית הספר ב-5 יח"ל היה מעל 94 הושמטו הקריטריונים של ציון SAT-M. סטודנטים שנכללו בקבוצת NEM למדו מתמטיקה ב-5 יח"ל עם ציון מתחת ל-80 או ב-5 יח"ל עם ציון מעל 90 וקיבל ציון SAT-M מתחת ל-22.

במאמר זה אנו מדווחים על ממצאים עבור 67 מתבגרים בניו בעלי יד ימין דומיננטית (הגיל הממוצע הוא 16.01, כאשר $SD = 0.73$, ללא הבדלים מובהקים בין קבוצות) וללא לקויות למידה שעבורם נתוני ה-EEG נאספו ללא רעש. בארבע קבוצות נכללו 16 תלמידי G-EM שאובחנו מחוננים ומצטיינים במתמטיקה; 19 תלמידי G-NEM שאובחנו מחוננים אך לא מצטיינים במתמטיקה; 17 תלמידי NG-EM שהצטיינו במתמטיקה אך לא מחוננים; 15 תלמידי NG-NEM שזוהו לא מחוננים ולא מצטיינים במתמטיקה. המחקר קיבל אישורים של ועדת הלסינקי, משרד החינוך וועדת אתיקה של אוניברסיטת חיפה.

הליך המחקר

מבחן ממוחשב שתוכנן באמצעות תוכנת E-Prime (Schneider et al., 2002) כלל 60 משימות (30 משימות עם תשובה נכונה ו-30 משימות עם תשובה לא נכונה). מקור המשימות הוא בתוכנית הלימודים בבית ספר. הן עוצבו על פי תאוריית אסטרטגיות פתרון הבעיות של פויה (Pólya, 1973) שכוללות ארבעה שלבים: הבנת הבעיה, תכנון ובניית שלבי הפתרון, ביצוע התוכנית והסתכלות לאחור (בדיקת הפתרון). במחקר שלנו כל משימה הוצגה בשלושה שלבים: S1 – הצגת סיטואציית הבעיה, S2 – הצגת שאלה ו-S3 – הצעת תשובה. בעוד S1 ו-S2 תואמים להבנת הבעיה ותכנון שלבי הפתרון, S3 מתאים לשלב הסתכלות לאחור במודל של פויה. השלב של תכנון התוכנית / ביצוע פתרון נותח באמצעות מדדי ERP. כל המשימות הוצגו מבחינה ויזואלית במרכז מסך המחשב בתווים שחורים על רקע אפור בתוך ריבוע לבן בעל ממדים של 5 ס"מ × 5 ס"מ. רצף האירועים ודוגמאות של המשימה מוצגים באיור 1.



איור 1: רצף האירועים ודוגמאות של המשימה

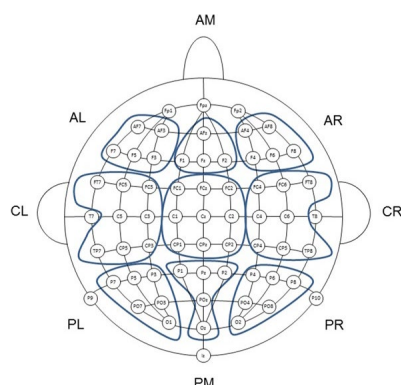


כזמן הממוצע שהושקע לאימות תשובה (בשלב S3) בכל משימות המבחן.

ניתוח של מדדים אלקטרו־פיזיולוגיים

ERPs נותחו באמצעות תוכנה לניתוח פעילות חשמלית Brain Vision Analyzer (Brain-products). ERPs סוננו במצב לא מקוון בטווח התדרים של 0.53–30 הרץ. פרקי זמן עם שינויים באמפליטודה העולים על ± 80 מיקרו־וולט בכל אלקטרודה לא הובאו לחישוב. תנועות העיניים תוקנו באמצעות אלגוריתם מתאים (Gratton et al, 1983). רכיבי גל של ה־ERP היו נעולים בזמן להתחלה של S1, S2 ו־S3. בשל ההבחנה בין השלבים המגוונים בפתרון בעיות (Pólya, 1973), ניתחנו את ה־ERPs עבור כל שלב בנפרד. ERP התקבלו באמצעות מיצוע של פעילות חשמלית בפרקי זמן של 200 אלפיות השנייה לפני הגירוי ועד 1200 אלפיות השנייה עבור S1, 2200 אלפיות השנייה עבור S2 ו־5000 אלפיות השנייה עבור S3. בניתוח לא נכללו משימות אם הנבדקים לא הגיבו בתוך 5000 אלפיות השנייה (כלומר משך התצוגה של חלון התשובה – S3). כ־40 משימות היו זמינות עבור כל משתתף ובכל שלב לקבלת ERP.

משטח הקרקפת חולק לתשעה אזורים אלקטרו־דודות: שמאל קדמי (AL), אמצעי קדמי (AM), ימין קדמי (AR), שמאל מרכזי (CL), מרכז אמצע (CM), ימין מרכזי (CR), אחורי שמאלי (PL), אחורי באמצע (PM), אחורי ימין (PR) (ראו איור 2).



איור 2: אזורי אלקטרו־דודות עבור ניתוח הסטטיסטי

רכיב מוקדם (P100): עקבנו אחר ההצעה של לוק (Luck, 2014, p. 314–315) "לכלול רק את האלקטרו־דודות שבהן רכיב ה־ERP קיים ולא לכלול את כל האלקטרו־דודות על גבי הקרקפת" ו"לנתח רק אלקטרו־דודות שבהן הרכיב בולט ביותר". לכן הגבלנו את הניתוח של P100 לאלקטרו־דודות אחוריות. נוסף על ההבדלים בין הקבוצות בדקנו גורם בין נבדקי Laterality המצביע על הצד של הקרקפת (ימין או שמאל) שדומיננטי מבחינת הפעילות החשמלית.

ב־S1 קבוצה "X" של תכונות של משפחת מרובעים הוצגה בדרך מילולית. ב־S2, כדי לבנות שרשרת לוגית, הופיעה אחת משני סוגי השאלות: (א) "אפשר להוכיח כי המרובע הוא..." או (ב) "המרובע יכול להיות...". ב־S3 הוצג "Y" שם של מרובע. בשביל שאלות מסוג א נדרשו הנבדקים לבחון האם X משמש תנאי מספיק ל־Y. עבור שאלות מסוג ב התבקשו המשתתפים לברר האם Y יכול להשתייך למשפחה של מרובעים שקבעו תכונות X. כלומר ב־S3 בחנו הנבדקים את נכונות ההסקה ההגיונית שתוכננה משלושת השלבים האלה: S1, S2 ו־S3.

במהלך S3 החליט כל נבדק בלחיצה על מקשי מתאים שבמקלדת אם התשובה המוצעת הייתה נכונה או לא נכונה. זמן תגובה הוגדר זמן שעבר בין הופעת S3 ללחיצה על המקש המתאים. פרקי זמן ורצף האירועים נקבעו במחקר פיילוט (Leikin, Leikin et al., 2013). אלפא־קורנבך נקבע על פי קריטריונים של דיוק ונמצא די גבוה ($\alpha = .722$).

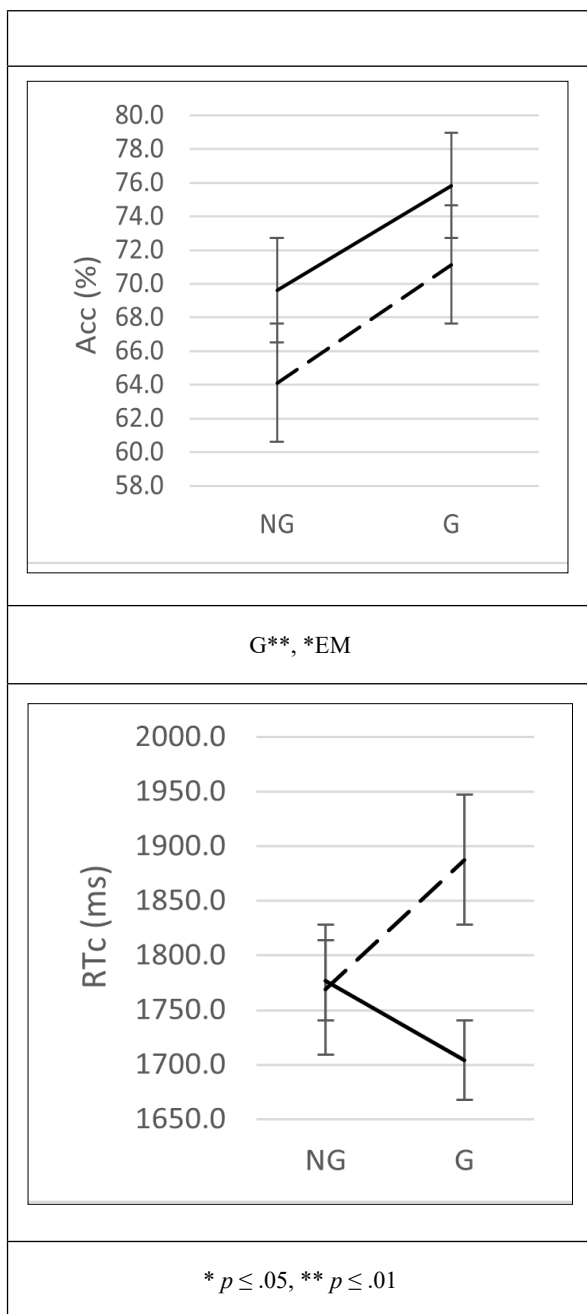
פעילות חשמלית על פני הקרקפת הוקלטת ברציפות באמצעות מערכת EEG בעלת 64 ערוצים BioSemi, Amsterdam, The) BioSemi ActiveTwo (Netherlands). המערכת פועלת בדרך זו: אלקטרו־דודות מתחברות לכובע מתאים הכולל 64 אלקטרו־דודות המאורגנות לפי מערכת 10–20 הבין־לאומית. שתי אלקטרו־דודות שטוחות מודבקות על צידי העיניים כדי לפקח על תנועות עין אופקיות. אלקטרו־דודת שטוחה שלישית ממוקמת מתחת לעין שמאל כדי לנטר תנועות עיניים אנכיות ומצמוצים. איור 2 מתאר את מיקום האלקטרו־דודות ואזורי האלקטרו־דודות שנבחרו עבור ניתוח נתונים.

ניתוח נתונים

ניתוח נתונים התמקד בקווי הדמיון ובהבדלים בין ארבע הקבוצות של המשתתפים: G-EM, NG-EM, G-NEM ו־NG-NEM. ניתוח נתונים עבור מדדי ERP ועבור מדדים התנהגותיים נותח עבור תשובות עם תגובות נכונות. נבדקו הבדלים בין קבוצות בכל המדדים הנבדקים בעזרת ANOVA עבור גורם G וגורם EM כגורמים בין נבדקים. כאשר נמצא אפקט מובהק של גורם EM וגם של גורם G או כאשר נמצאה אינטראקציה מובהקת בין גורמי G ל־EM נעשו השוואות של G לעומת NG בקבוצות G-EM ו־NEM וגם EM לעומת NEM בקבוצות G ו־NG, בנפרד. להשוואות אלה נעשה תיקון Bonferroni עבור ערכי p.

ניתוח של מדדים התנהגותיים

בניתוח נבדקו דיוק (Acc) וזמן לתגובות נכונות (RTc). Acc נקבע באמצעות אחוז התגובות הנכונות של המשתתף על 60 משימות במבחן. זמן לתגובות נכונות (RTc) חושב



איור 3: Acc ו-RTc בארבע קבוצות משתתפים

ממצאים אלקטרו־פיזיולוגיים

רכיב מוקדם P100: טבלה 2 מתארת ממצאים מובהקים הקשורים ל-P100. זיהינו את ה-P100 באלקטרודות אחוריות בשלבים S1, S2 ו-S3. לגורם G היה אפקט מובהק הן על זמן חביון הן על האמפליטודה של P100 ב-S2 ועל זמן חביון בלבד של P100 ב-S1. רכיב P100 הופיע לאחר מכן והיה בעל אמפליטודה גבוהה יותר בתלמידים מחוננים (G) מאשר בתלמידים לא מחוננים (NG).

פוטנציאלים חשמליים מאוחרים: ניתחנו את הפעילות החשמלית הממוצעת של רכיבים מאוחרים בפרק זמן של 350–650 אלפיות השנייה עבור S1 ו-220–350 אלפיות השנייה עבור S2 ו-S3. נוסף על ניתוחים עבור גורמי G ו-EM, עשינו ANOVA למדידות חוזרות על אמפליטודה הממוצעת של ה-ERP בהתחשב בשני גורמים בתוך נבדקים Caudality ו-Laterality. גורם Caudality מציין את חלוקת הקרקפת החל מהמצח ועד הצוואר לשלושה אזורים: קדמי, מרכזי ואחורי. גורם Laterality מציין את חלוקת הקרקפת לשלושה אזורים: ימני, אמצעי ושמאלי. הניתוח נעשה עבור כל אחד משלושת השלבים של משימה (S1, S2 ו-S3).

ממצאים

ממצאים התנהגותיים

ממוצעים של Acc ו-RTc מוצגים בטבלה 1.

טבלה 1: סטטיסטיקה תיאורית עבור Acc ו-RTc בארבע קבוצות של משתתפים

	Mean (SD)			
	NG	G		
כללי				
72.6 (9.1)	69.6 (8.3)	75.8 (9.1)	EM	דיוק Acc (%)
68.0 (8.9)	64.1 (8.3)	71.1 (8.3)	NEM	
	67.0 (8.7)	73.3 (8.9)	כללי	
1741.6 (429.3)	1777.0 (440.6)	1704.0 (428.0)	EM	זמן לתגובות נכונות RTc (ms)
1835.0 (450.6)	1768.6 (523.5)	1887.5 (390.6)	NEM	
	1773.1 (473.3)	1803.6 (412.5)	כללי	

מצאנו שלגורמים EM ו-G הייתה השפעה מובהקת על ה-Acc. הדיוק של תלמידים מחוננים (G) היה גבוה באופן מובהק בהשוואה לזה של תלמידים לא מחוננים (NG) $[F(1,63) = 10.080, p < .01, \eta^2_p = .138]$. והדיוק של תלמידים מצטיינים במתמטיקה (EM) היה גבוה באופן מובהק בהשוואה לזה של תלמידים לא מצטיינים במתמטיקה (NEM) $[F(1,63) = 5.957, p < .05, \eta^2_p = .086]$ (ראו איור 3).

לא נמצא אפקט מובהק של גורמים G ו-EM על RTc (זמן לתגובות נכונות), ולכן אוששה רק השערה א1.

איור מציג Acc (פנל עליון) ו-RTc (פנל תחתון) בארבע קבוצות המשתתפים בתוספת מדד פיזור שגיאת התקן.



טבלה 2: ממצאים מובהקים הקשורים ל-P100

אפקטים ואינטראקציות	שלב בפתרון בעיה	זמן חביון של P100	אמפליטודה של P100
גורם G	S1	$L(G) > L(NG)$ $5.221^*, \eta_p^2 = .077$	$Amp(G) > Amp(NG)$ $5.865^*, \eta_p^2 = .085$
	S2		
	S3	$L(G) > L(NG)$ $7.500^{**}, \eta_p^2 = .106$	
G * EM	S2		$Amp(NG-EM) > Amp(NG-NEM)$ $Amp(G-EM) < Amp(G-NEM)$ $6.585^*, \eta_p^2 = .095$
	S3		$5.299^*, \eta_p^2 = .078$
	S1		PL, PM: $Amp(EM) > Amp(NEM)$ PR: $Amp(NEM) > Amp(EM)$ $F(1.733, 109.205) = 5.632^{**}, \eta_p^2 = .082$

L - זמן חביון, Amp - אמפליטודה; $p \leq .05$, $p^{**} \leq .01$; $d.f. (1, 63)$ כאשר לא מצוין

האחוריות מימין הייתה גבוהה יותר ב-NEM בהשוואה לזו של משתתפי EM.

לפיכך הממצאים הנוגעים לאמפליטודות של P100 סותרים חלקית את השערה 2 מכיוון שזמני חביון של P100 בתלמידי G היו ארוכים באופן מובהק בהשוואה לאלה של תלמידי NG. אף על פי שלא עסקנו בחוזק של רכיבים מוקדמים בהשערות המחקר, היינו רוצים להדגיש כי נראה כי אמפליטודה של P100 הייתה גבוהה יותר באופן מובהק עבור תלמידי G.

פוטנציאלים מאוחרים: טבלה 3 מתארת ממצאים מובהקים הקשורים בפוטנציאלים מאוחרים שנמצאו בשלבים S1, S2 ו-S3 במסגרות הזמן המוגדרות.

נמצאה אינטראקציה מובהקת של גורם G עם גורם EM על אמפליטודה של P100 ב-S2 ו-S3. האמפליטודה של P100 ב-NG-NEM הייתה נמוכה באופן מובהק בהשוואה לזו של תלמידי G-NEM [עבור S2: $F(1,63) = 12.546, p < .001, \eta_p^2 = .166$; ועבור S3: $F(1,63) = 11.929, p < .001, \eta_p^2 = .159$]. בזמן שאמפליטודה של P100 ב-NG-EM הייתה דומה בהשוואה לזו של משתתפי G-EM. נוסף על כך מצאנו אינטראקציה מובהקת של גורם EM עם Laterality על אמפליטודה של P100 ב-S1. אמפליטודה של P100 באלקטרודות אחוריות משמאל (PL) ובאמצע (PM) הייתה גבוהה יותר בתלמידים EM בהשוואה לזו של תלמידי NEM, בעוד האמפליטודה באלקטרודות

טבלה 3: ממצאים מובהקים הקשורים לאמפליטודה ממוצעת של פוטנציאלים מאוחרים

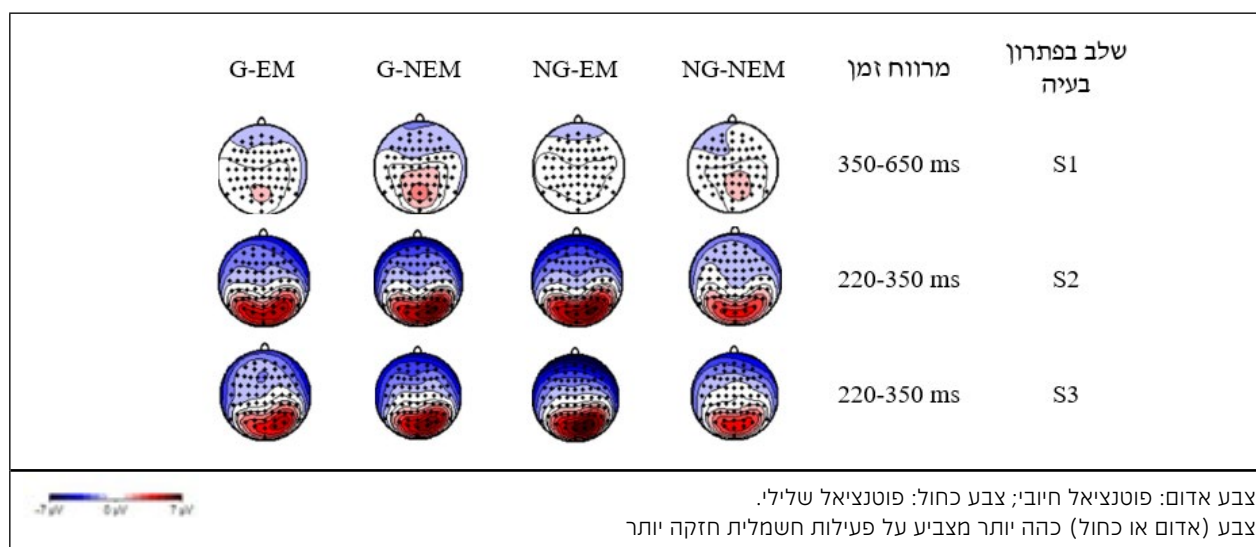
אפקטים ואינטראקציות	S1 350-650 ms	S2 220-350 ms	S3 220-350 ms
גורם EM $Amp(EM) > Amp(NEM)$	$F(1, 63) = 7.269^{**}$ $\eta_p^2 = .052$		
Caudality * EM A, P: $Amp(EM) > Amp(NEM)$ C: $Amp(EM) \sim Amp(NEM)$	$F(2, 126) = 3.425^*$ $\eta_p^2 = .052$		
Laterality * G R, L: $Amp(G) > Amp(NG)$ M: $Amp(G) < Amp(NG)$	$F(2, 126) = 4.086^*$ $\eta_p^2 = .061$		
G * EM $Amp(G-EM) < Amp(NG-EM)$ $Amp(G-NEM) > Amp(NG-NEM)$		$F(1, 63) = 4.557^*$ $\eta_p^2 = .067$	$F(1, 63) = 6.350^*$ $\eta_p^2 = .092$
Caudality * G * EM			$F(1.576, 99.280) = 3.712^*$ $\eta_p^2 = .056$

Amp - אמפליטודה, R - ימין, M - אמצעי, L - שמאל, A - קדמי, C - מרכזי, P - אחורי



בשלב S2 ו-S3 נמצאה אינטראקציה מובהקת של גורם G עם גורם EM במרווח זמן של 220–350 אלפיות שנייה. האמפליטודה של תלמידי NG-NEM הייתה נמוכה יותר בהשוואה לזו של תלמידי G-NEM, בזמן שהאמפליטודה של תלמידי G-EM הייתה דומה לזו של תלמידי NG-EM. ההבדל המובהק באמפליטודה הממוצעת בין תלמידי NG-NEM לתלמידי G-NEM נמצא ב-S3 $[F(1, 63) = 7.222, p < .01, \eta_p^2 = .103]$. נוסף על כך בשלב S3 נמצאה אינטראקציה מובהקת של Caudality עם גורמי G ו-EM. האמפליטודה הממוצעת בתלמידי G-NEM הייתה גבוהה באופן מובהק מזו של תלמידי NG-NEM באלקטרודות אחוריות $[F(1, 63) = 8.136, p < .01, \eta_p^2 = .114]$. לפיכך התוצאות של המחקר שלנו לא מאוששות השערה 3 מכיוון שתלמידי G-EM לא הציגו פעילות חשמלית נמוכה מובהקת לעומת קבוצות מחקר אחרות. איור 4 מציג מפות טופוגרפיות של התפלגות הפוטנציאל החשמלי על גבי הקרקפת במהלך פוטנציאלים מאוחרים בארבע קבוצות תלמידים בשלושת שלבים של פתרון הבעיה.

בשלב S1 במרווח הזמן של 350–650 אלפיות השנייה, נמצא אפקט מובהק של גורם EM. האמפליטודה עבור תלמידי EM הייתה גבוהה באופן מובהק מזו של תלמידי NEM. נוסף על כך נמצאה אינטראקציה מובהקת של Caudality עם גורם EM. האמפליטודה בתלמידי EM הייתה גבוהה יותר בהשוואה לזו של תלמידי NEM בחלקים הקדמיים והאחוריים של הקרקפת, בעוד האמפליטודה בתלמידי NEM הייתה דומה לזו של תלמידי EM בחלקים המרכזיים. ההבדל המובהק באמפליטודה בין תלמידי EM לבין תלמידי NEM נמצא בחלקים הקדמיים של הקרקפת $[F(1, 63) = 7.854, p < .01, \eta_p^2 = .111]$. יתר על כן, נמצאה אינטראקציה מובהקת של Lateralality עם גורם G. האמפליטודה של תלמידי G הייתה גבוהה יותר באזורים השמאליים והימניים בהשוואה לזו של תלמידי NG. בו בזמן נצפתה אצל תלמידי NG אמפליטודה גבוהה יותר באזורים האמצעיים של הקרקפת. ממצאים אלה מפריכים את השערה 2.ב. אמפליטודות של ERP בתלמידי EM גבוהות בהשוואה לאמפליטודות של תלמידי NEM. עוד לא נמצא אפקט של גורם G.



איור 4: התפלגות של פוטנציאלים מאוחרים על פני הקרקפת עבור ארבע קבוצות משתתפים ב-S1, S2 ו-S3

דין

מחקר זה היה מכוון לפיתוח הבנה טובה יותר של המושג יכולות מתמטיות גבוהות. לשם כך בחנו ביצועי תלמידים שנבדלו בשילובים של מחוננות כללית (G) והצטיינות במתמטיקה (EM). בפתרון בעיות הקשורות להסקה לוגית בנושא מרובעים. ביצועי פתרון בעיות נותחו באמצעות דיוק (Acc) וזמן לתגובות נכונות (RTc), וכן באמצעות מדדים אלקטרופיזיולוגיים כגון אמפליטודות והתפלגות על הקרקפת של פוטנציאלים חשמליים המתעוררים

נוסף על כך כדי לחקור את הקשר הכללי בין ביצועים התנהגותיים להשפעות ה-ERP בתלמידי NEM, ביצענו ניתוחי מתאם בין אמפליטודות הממוצעות באזורי האלקטרודות האחוריות ב-S3 וה-RTc. נצפה מתאם חיובי בין אמפליטודה ממוצעת באזור אלקטרודות אחוריות אמצעיות PM במרווח זמן של 350–220 אלפיות שנייה ודיוק Acc $(r = .343, p < .05)$. מתאם זה מראה שאמפליטודה גבוהה ב-S3 קשורה בדיוק גבוה בביצוע המשימה.



חוזק הפוטנציאל החשמלי בעת פתרון בעיה

בניתוח נתונים התנהגותיים גורמים EM ו-G הם בלתי תלויים יחסית מכיוון שיש להם השפעות אחרות על עיבוד בעת פתרון בעיות. שילוב של גורמי EM ו-G (בקבוצה G-EM) גורמים לעלייה ב-Acc. יתר על כן, ההשערה כי הצטיינות במתמטיקה ומחוננות קשורות זו בזו אך נבדלות במהותן, הופכת אפילו יותר בולטת כאשר אנו מנתחים את הנתונים האלקטרו-פיזיולוגיים. ניתוח הפוטנציאלים המוקדמים והמאוחרים של פעילות חשמלית במוח במהלך פתרון בעיות קצרות בגאומטריה הדורשות הסקה לוגית מראה תופעות מעניינות הקשורות לגורמי EM ו-G בשלושת השלבים בפתרון בעיות (S1, S2 ו-S3). גם G וגם EM השפיעו באופן מובהק על אמפליטודות וזמן חביון של פוטנציאלים מוקדמים, וגם על אמפליטודות ממוצעות של פוטנציאלים מאוחרים (ראו טבלאות 2 ו-3). ההשפעה העיקרית של גורם G התקבלה ב-P100. כמו כן נצפתה אינטראקציה מובהקת בין גורמים G ו-EM לגבי אמפליטודה וזמן החביון של הרכיב P100. ניתוח הפוטנציאלים המוקדמים הראה שבכל שלבי פתרון הבעיות היה ל-P100 אמפליטודה גבוהה יותר וזמן חביון ארוך יותר בקרב תלמידי G בהשוואה לתלמידי NG (ההבדלים המובהקים סטטיסטית הופיעו ב-S1 ו-S3 עבור זמן חביון וב-S2 ו-S3 עבור אמפליטודות). שימו לב ש-P100 משויך בדרך כלל לקשב ועיבוד חזותי ראשוני של הגירוי (Doyle et al., 1996). לפיכך אנו מסבירים את ההשפעה של גורם G באמצעות הפעלה אנליטית מוקדמת וממוקדת יותר של קשב הקשור לגירויים הגורמים לעיכוב ב-P100 והאמפליטודה הגבוהה יותר שלו. ב-S2 ו-S3 מצאנו אינטראקציה מובהקת בין גורמי EM ו-G לאמפליטודה של P100. גורם G חיזק באופן מובהק את האמפליטודה בקבוצה NEM אך לא השפיע על אמפליטודה בתלמידי EM. לפיכך ההשפעה העיקרית של גורם G הופיעה רק בשלב של פוטנציאלים מוקדמים, ליתר דיוק ברכיב P100 ב-S1, S2 ו-S3, בעוד ההשפעה העיקרית של גורם EM הייתה ברורה רק בפוטנציאלים מאוחרים ב-S1. ליתר דיוק, האמפליטודה של P100 בתלמידי G הייתה גבוהה מזו של בתלמידי NG, והאמפליטודה הממוצעת של תלמידי EM ב-S1 הייתה גבוהה יותר מזה של משתתפי NEM. באותו זמן האינטראקציה המובהקת בין שני הגורמים האלה הושגה ב-S2 ו-S3 על P100 וגם במרווח זמן של 220–350 אלפיות השנייה (פוטנציאלים מאוחרים). האמפליטודה הממוצעת בקבוצת משתתפי NG-NEM הייתה נמוכה יותר בהשוואה לזו של תלמידי G-NEM, בעוד אמפליטודה ממוצעת בתלמידי NG-EM הייתה מעט

בזמן פתרון הבעיות. בעקבות מודל של אסטרטגיות לפתרון בעיות של פויה (Pólya, 1973) המשימות חולקו לשלושה שלבים והמדדים האלקטרו-פיזיולוגיים נבחנו בכל שלב אחד משלושת השלבים האלה. כדי להשיג את מטרת המחקר, התמקדנו בארבע קבוצות של משתתפים שנבדלו בשילוב הצטיינות במתמטיקה בית ספרית וברמת המחוננות הכללית. הבחירה במשימות ההסקה הלוגיות הושפעה מהמחקרים של קרוטצקי (Krutetskii, 1976) ופויה (Pólya, 1973) שהדגישו קשרים בין יכולות גבוהות במתמטיקה להסקה לוגית וכן בין חשיבה לוגית למומחיות בפתרון בעיות. מנקודת המבט שלנו, הישגים גבוהים במתמטיקה בבית הספר משקפים מומחיות בפתרון בעיות. ממצאים קודמים הדגישו את נטייתם של תלמידים בעלי יכולות גבוהות במתמטיקה לחשוב חשיבה לוגית על אובייקטים מתמטיים איכותיים ומרחביים (Krutetskii, 1976). העלינו שלוש השערות עיקריות שאושרו חלקית בלבד במחקר זה.

דיוק וזמן תגובה

במחקר זה שני גורמים G ו-EM השפיעו באופן מובהק על ה-Acc של פתרון בעיות, בעוד שילוב של גורמי G ו-EM חיזקו השפעה זו. לפיכך תלמידים מחוננים שמצטיינים במתמטיקה (G-EM) הפגינו דיוק גבוה ביותר מבין כל ארבע הקבוצות של משתתפים. לא נמצאו השפעות מובהקות של גורמים EM או G על RTc. זה יכול להיות בשל העובדה ש-RTc נמדד בשלב אימות התשובה. ממצא זה יכול להיחשב מגבילה של המחקר. בזמן שלכל המשתתפים הוקצו זמנים זהים בשלבים של הצגת המצב והצגת השאלה, אנו יכולים להניח שזמן עיבוד בכל אחד מהשלבים הוא אחר. עם זאת, ללא הבדלים מובהקים, RTc הקצר ביותר הוצג בקבוצת תלמידים G-EM, ואילו RTc הארוך ביותר נמצא בקרב תלמידי G-NEM (טבלה 1). אנו משערים שממצאים אלה מראים על מגמות בזמן הנדרש לפתרון המשימות בידי כל אחת מהקבוצות של משתתפים. התוצאות שלנו בנושא Acc בפתרון בעיות הדורשות הסקה לוגית בגאומטריה הן עקיבות עם הממצאים של המחקר המכונן שעשה קרוטצקי (Krutetskii, 1976), ובו הוא הוכיח קשר חזק בין יכולות גבוהות במתמטיקה ליכולת חשיבה לוגית. כשאנחנו בוחנים רק מדדים התנהגותיים, אנו רואים שלגורמים EM ו-G יש השפעות דומות על ביצועים בפתרון בעיות. עם זאת, מדדים אלקטרו-פיזיולוגיים מראים כי תהליכים נוירוקוגניטיביים מגוונים מעורבים בפתרון בעיות הדורשות הסקה לוגית אצל תלמידים שנבדלים ברמת המחוננות הכללית או ברמת הצטיינות במתמטיקה הבית הספר. ההבדלים האלה משתקפים בחוזק הפוטנציאלים החשמליים במוח והתפלגותם על פני הקרקפת.



פתרון בעיות קשות הפעילות המוחית באנשים עם אינטליגנציה גבוהה היא גבוהה יותר. ולכן אנו מניחים שחוסר מובהקות בפעילות חשמלית נמוכה בתלמידי G-EM במחקר הנוכחי יכול להיות מוסבר בכך שבעיות הדורשות הסקה לוגית הן קשות יחסית (Fujita, 2012).

התפלגות של פוטנציאלים חשמליים

מחקר זה הראה גם שלגורמים G ו-EM יש השפעה אחרת על התפלגות הפוטנציאלים החשמליים המתעוררים בעת פתרון משימות בגאומטרייה. ההבדלים בהתפלגות חשמלית נצפים מתוך התבוננות איכותית במפות טופוגרפיות של פוטנציאלים חשמליים והן מאינטראקציות מובהקות סטטיסטית של Lateralality או Caudality עם הגורמים G ו-EM. לדוגמה, מצאנו אינטראקציה של Lateralality עם גורם EM ב-S1 עבור P100 שבאה לידי ביטוי באמפליטודה גבוהה יותר עבור תלמידי EM בהשוואה לתלמידי NEM באזורי אלקטרודות משמאל ובאמצע, ואמפליטודה גבוהה יותר עבור תלמידי NEM בהשוואה לתלמידי EM באזורי האלקטרודות מימין. רכיב P100 נראה משקף עיבוד בשלבים ראשונים של מידע חזותי (Doyle et al., 1996) לפיכך אפילו בשלבי עיבוד ראשוניים, הצטיינות במתמטיקה (גורם EM) עשויה להשפיע על התפלגות פוטנציאלים חשמליים של המוח על פני הקרקפת. נוסף על כך האינטראקציה המובהקת של Lateralality עם גורם G התקבלה במרווח זמן של 350–650 אלפיות שניות ב-S1. בד בבד ב-S1 נמצאה אינטראקציה מובהקת של Caudality עם גורם EM עם עלייה באמפליטודה עבור תלמידי EM בהשוואה לתלמידי NEM בחלקים הקדמיים והאחוריים של הקרקפת. ידוע כי קליפת המוח הקדמית מעורבת במהלך פתרון בעיות מתמטיות וחשיבה דדוקטיבית, ואילו קליפת המוח האחורית נמצאה מעורבת בעיבוד חזותי-מרחבי (Prado et al., 2011). לפיכך נראה שתלמידי EM מפעילים אזורי אלקטרודות שהם רלוונטיים יותר ומתאימים יותר לאופי הבעיות.

סיכום

בלא מפתיע, גורמים G ו-EM הם מאפיינים אישיים הקשורים זה בזה. גורמים EM ו-G השפיעו בדומה על מדדים התנהגותיים: תלמידים מחוננים ותלמידים מצטיינים במתמטיקה היו מדויקים יותר מעמיתיהם שלא מחוננים ולא מצטיינים במתמטיקה, בהתאמה. בו בזמן גורמים G ו-EM השפיעו אחרת על מדדים אלקטרופיזיולוגיים עם אינטראקציה מובהקת בין גורם G לגורם EM הקשורים לאמפליטודות ERP בחלק משלבי פתרון. לפיכך אנו טוענים שגורמים G ו-EM נבדלים באופיים. יתר על כן, הממצאים שלנו מוכיחים

גבוהה מזו של משתתפי G-EM (טבלה 3). במיוחד במהלך S3, גורם G השפיע על עלייה מובהקת באמפליטודת ה-ERP הממוצעת בקבוצה NEM, בעוד גורם EM השפיע על עלייה מובהקת באמפליטודת ה-ERP הממוצעת בתלמידי G. ניתוחי מתאם בקבוצת NEM גילו מתאם חיובי בין אמפליטודה ממוצעת באזור אלקטרודות PM ב-S3 ו-Acc (כלומר Acc גבוה יותר הביא לאמפליטודות גבוהות יותר). הדבר עשוי להראות שהשפעת המחוננות על אמפליטודה ממוצעת בתלמידי NEM עשויה להיות תלויה ב-Acc. הממצאים האלה תומכים בהשערה שלנו על ההבחנה וקשר גומלין בין גורם G לגורם EM. כפי שצוין לעיל, ניתחנו אמפליטודה ממוצעת של פוטנציאלים מאוחרים (מרווחי זמן של 350–650 אלפיות השנייה ב-S1 ו-220–350 אלפיות השנייה ב-S2 ו-S3) ולא רכיב עצמו בגלל היעדר בולט של נקודות קיצון בגל ה-ERP.

אף על פי שרכיב P300 לא זוהה במפורש, אנו מציעים שהוא מוטמן באמפליטודה הממוצעת במהלך שני פרקי זמן שצוינו לעיל. בדרך כלל P300 משויך לזיכרון עבודה, עדכון, קידוד או שליפה מהזיכרון לטווח ארוך (Donchin & Coles, 1988). יתר על כן, נראה שרכיב זה רגיש לכמות משאבי הקשב שהוקצו לגירוי, עם אמפליטודות גדולות יותר המשקפות כמויות גדולות יותר של קשב (Polich, 2012). לפיכך אפשר להציע שהאמפליטודה הממוצעת הגבוהה ביותר בתלמידי G-NEM עשויה להיות מקושרת להערכת גירוי וסיווג (Leikin, 2002). כאן אמפליטודה של P300 גבוהה יותר בתלמידים מחוננים בהשוואה לאלה שאינם מחוננים (Jaušovec & Jaušovec, 2000). במחקר שלנו, תלמידי G-NEM הציגו אמפליטודות ממוצעות גבוהות באופן מובהק מאשר תלמידי NG-NEM; זה עשוי להתפרש כהקצאה של יותר משאבים מנטליים לעיבוד השאלה (S2) ולהסקת מסקנה סופית ואימות הפתרון (S3). בו בזמן, ב-S1 הראו תלמידי EM אמפליטודה ממוצעת גבוהה יותר בהשוואה לתלמידי NEM. שימו לב שב-S1 המאפיינים של מרובעים מוצגים למשתתפים, ולכן אנו מניחים שהעלייה באמפליטודה בקבוצת תלמידי EM ב-S1 יכולה להראות שתלמידי EM התחילו לעבד את התכונות של מרובעים על בסיס נושאים בגאומטרייה שנלמדו בעבר הכוללים זיהוי של משפחת מרובעים המתאימה.

ספרות מחקרית מציינת את הקשר בין יעילות עצבית לקושי במשימה (Dunst et al., 2014). במהלך פתרון בעיות קלות עד בינוניות, הפעילות המוחית באנשים עם אינטליגנציה גבוהה היא נמוכה יותר בהשוואה לזו באנשים בעלי אינטליגנציה נמוכה יותר, ואילו בעת



- De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2010). Traveling down the road: From cognitive neuroscience to mathematics education ... and back. *ZDM—Mathematics Education*—649, (6)42, 654. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0282-5>
- Deal, L. J., & Wismer, M. G. (2010). NCTM principles and standards for mathematically talented students. *Gifted Child Today*, 33(3), 55–65. <https://doi.org/10.1177/107621751003300313>
- Desco, M., Navas-Sanchez, F. J., Sanchez-González, J., Reig, S., Robles, O., Franco, C., Guzmán-De-Villoria, J. A., García-Barreno, P., & Arango, C. (2011). Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *NeuroImage*, 57(1), 281–292. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.03.063>
- Donchin, E., & Coles, M. G. (1988). Is the P300 component a manifestation of context updating? *Behavioral and Brain Sciences*, 11(3), 357–427. <https://doi.org/10.1017/S0140525X00058027>
- Doyle, M. C., Rugg, M. D., & Wells, T. (1996). A comparison of the electrophysiological effects of formal and repetition priming. *Psychophysiology*, 33(2), 132–147. <https://doi.org/10.1111/j.1469-8986.1996.tb02117.x>
- Dunst, B., Benedek, M., Jauk, E., Bergner, S., Koschutnig, K., Sommer, M., Ischebeck, A., Spinath, B., Arendasy, M., Böhner, M., Freudenthaler, H., & Neubauer, A. C. (2014). Neural efficiency as a function of task demands. *Intelligence*, 42(100), 22–30. <https://doi.org/10.1016/j.intell.2013.09.005>

שמחוננות כללית אינה משמשת תנאי הכרחי או תנאי מספיק להצטיינות במתמטיקה הבית ספרית ולהפך. להתבוננות זו יש השפעות חשובות וחיוניות על חינוך מתמטי: אפשר לפתח מומחיות מתמטית באוכלוסייה רחבה הרבה יותר מזו של תלמידים מחוננים. תלמידים מחוננים (כמו כל התלמידים האחרים) צריכים לבחור את המקצועות העיקריים שלהם על פי ההעדפות שלהם, והם יכולים וצריכים להיות אחריהם ממתמטיקה עבור תלמידים רבים.

אנו טוענים שתלמידי G-EM זקוקים לגישות הוראה ולמידה מיוחדות בעת לימוד מתמטיקה יותר מכל קבוצה אחרת של תלמידים. על סמך ממצאים של לייקין ואחרים (Leikin et al., 2014) תלמידים אלה יכולים להפיק תועלת מסביבת למידה ייחודית שמספקת להם קצב למידה מהיר יותר, עבודה עצמאית יותר ומשימות מתמטיות מאתגרות יותר.

תודות

פרויקט זה התאפשר באמצעות התמיכה במענק 1447 מקרן John Templeton Foundation. הדעות המובעות בפרסום זה הן של המחברים ואינם משקפים בהכרח את השקפותיה של קרן John Templeton Foundation. אנו מודים לאוניברסיטת חיפה על התמיכה הנדיבה שהיא סיפקה עבור מחקר זה.

רשימת מקורות

- Ayalon, M., & Even, R. (2010). Mathematics educators' views on the role of mathematics learning in developing deductive reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education* 1154–1131, (6)8, <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9238-z>
- Bonnefond, M., & Van der Henst, J.-B. (2013). Deduction electrified: ERPs elicited by the processing of words in conditional arguments. *Brain and Language*, 124(3), 244–256. <https://doi.org/10.1016/j.bandl.2012.12.011>
- Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the Gifted and Talented*. Allyn & Bacon.



- Gratton, G., Coles, M. G., & Donchin, E. (1983). A new method for off-line removal of ocular artifact. *Electroencephalography & Clinical Neurophysiology*, 55(4), 468–484. [https://doi.org/10.1016/0013-4694\(83\)90135-9](https://doi.org/10.1016/0013-4694(83)90135-9)
- Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*. Springer.
- Hill, D., Saville, C. W. N., Kiely, S., Roberts, M. V., Boehm, S. G., Haenschel, C., & Klein, C. (2011). Early electrocortical correlates of inspection time task performance. *Intelligence*, 39(5), 370–377. <https://doi.org/10.1016/j.intell.2011.06.005>
- Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 193–223. <https://doi.org/10.1023/A:1023629608614>
- Jaušovec, N., & Jaušovec, K. (2000). Correlations between ERP parameters and intelligence: A reconsideration. *Biological Psychology*, 55(2), 137–154. [https://doi.org/10.1016/S0301-0511\(00\)00076-4](https://doi.org/10.1016/S0301-0511(00)00076-4)
- Jensen, A. R. (2006). *Clocking the mind: Mental chronometry and individual differences*. Elsevier.
- Jolij, J., Huisman, D., Scholte, S., Hamel, R., Kemner, C., & Lamme, V. A. (2007). Processing speed in recurrent visual networks correlates with general intelligence. *Neuroreport*, 18(1), 39–43. <https://doi.org/10.1097/01.wnr.0000236863.46952.a6>
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15, pp. 369–389). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_16
- Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle..." Young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271–299. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7>
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60–72. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons* (Rev. ed.). Basic Books.
- Gevins, A., & Smith, M. E. (2000). Neurophysiological measures of working memory and individual differences in cognitive ability and cognitive style. *Cerebral Cortex*, 10(9), 829–839. <https://doi.org/10.1093/cercor/10.9.829>
- Grabner, R. H., Neubauer, A. C., & Stern, E. (2006). Superior performance and neural efficiency: The impact of intelligence and expertise. *Brain Research Bulletin*, 69(4), 422–439. <https://doi.org/10.1016/j.brainresbull.2006.02.009>



- Leikin, R., Leikin, M., Waisman, I., & Shaul, S. (2013). Effect of the presence of external representations on accuracy and reaction time in solving mathematical double-choice problems by students of different levels of instruction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(5), 1049–1066. <https://doi.org/10.1007/s10763-012-9389-1>
- Leikin, R., Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM – Mathematics Education*, 45, 183–197. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8>
- Leikin, R., Paz-Baruch, N., & Leikin, M. (2014). Cognitive characteristics of students with superior performance in mathematics. *Journal of Individual Differences*, 35(3), 119–129. <https://doi.org/10.1027/1614-0001/a000140>
- Leikin, R., Waisman, I., & Leikin, M. (2016). Does solving insight-based problems differ from solving learning-based problems? Some evidence from an ERP study. *ZDM Mathematics Education*, 48, 305–319. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0767-y>
- Luck, S. J. (2014). *An introduction to the event-related potential technique* (2nd ed.). MIT Press.
- Mathieu, R., Booth, J. R., & Prado, J. (2015). Distributed neural representations of logical arguments in school-age children. *Human Brain Mapping*, 36(3), 996–1009. <https://doi.org/10.1002/hbm.22681>
- Neubauer, A. C., & Fink, A. (2009). Intelligence and neural efficiency. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 33(7), 1004–1023. <https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2009.04.001>
- Kelly, A. M. C., & Garavan, H. (2005). Human functional neuroimaging of brain changes associated with practice. *Cerebral Cortex*, 15(8), 1089–1102. <https://doi.org/10.1093/cercor/bhi005>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (J. Teller, Trans., J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). The University of Chicago Press.
- Leikin, M. (2002). Processing syntactic functions of words in normal and dyslexic readers. *Journal of Psycholinguistic Research*, 31(2), 145–163. <https://doi.org/10.1023/A:1014926900931>
- Leikin, M., Waisman, I., & Leikin, R. (2013). How brain research can contribute to the evaluation of mathematical giftedness. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 55(4), 415–437.
- Leikin, R. (2014). Giftedness and high ability in mathematics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 247–251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_65
- Leikin, R. (2020). Giftedness and high ability in mathematics. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 315–325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_65
- Leikin, R., & Leikin, M. (2009). *Multidimensional examination of mathematical genius as compared to mathematically gifted and non-gifted children* (Project No. 1447) [Grant]. The John Templeton Foundation.



- Psychology*, 41(2), 103–146. [https://doi.org/10.1016/0301-0511\(95\)05130-9](https://doi.org/10.1016/0301-0511(95)05130-9)
- Pólya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Prado, J., Chadha, A., & Booth, J. R. (2011). The brain network for deductive reasoning: A quantitative meta-analysis of 28 neuroimaging studies. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 23(11), 3483–3497. https://doi.org/10.1162/jocn_a_00063
- Prescott, J., Gavrilescu, M., Cunnington, R., O'Boyle, M. W., & Egan, G. F. (2010). Enhanced brain connectivity in math-gifted adolescents: An fMRI study using mental rotation. *Cognitive Neuroscience*, 1(4), 277–288. <https://doi.org/10.1080/17588928.2010.506951>
- Qiu, J., Li, H., Huang, X., Zhang, F., Chen, A., Luo, Y., Zhang, Q., & Yuan, H. (2007). The neural basis of conditional reasoning: An event-related potential study. *Neuropsychologia*, 45(7), 1533–1539. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2006.11.014>
- Raven, J. (2000). *Manual for Raven's progressive matrices and vocabulary scales: Research supplement no. 3* (2nd ed.). Oxford Psychologists Press.
- Schneider, W., Eschman, A., & Zuccolotto, A. (2002). *E-prime computer software* (Version 1.0). Psychology Software Tools.
- Steiner, H. H., & Carr, M. (2003). Cognitive development in gifted children: Toward a more precise understanding of emerging differences in intelligence. *Educational Psychology Review*, 15(3), 215–246. <https://doi.org/10.1023/A:1024636317011>
- Neville, H. J., Coffey, S. A., Holcomb, P. J., & Tallal, P. (1993). The neurobiology of sensory and language processing in language-impaired children. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5(2), 235–253. <https://doi.org/10.1162/jocn.1993.5.2.235>
- Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A., & Carraher, J. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(1), 147–166. <https://doi.org/10.1348/026151006X153127>
- O'Boyle, M. W. (2005). Some current findings on brain characteristics of the mathematically gifted adolescent. *International Educational Journal*, 6(2), 247–251.
- Paz-Baruch, N., Leikin, M., Aharon-Peretz, J., & Leikin, R. (2014). Speed of information processing in generally gifted and excelling-in-mathematics adolescents. *High Abilities Studies*, 25(2)167–143. <https://doi.org/10.1080/013598139.2014.971102>
- Paz-Baruch, N., Leikin, R., & Leikin, M. (2016). Visual processing in generally gifted and mathematically excelling adolescents. *Journal for the Education of the Gifted*, 39(3), 237–258. <https://doi.org/10.1177/0162353216657184>
- Polich, J. (2012). Neuropsychology of P300. In S. J. Luck & E. S. Kappenman (Eds.), *Oxford Handbook of Event-related Potential Components* (pp. 159–188). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780195374148.001.0001>
- Polich, J., & Kok, A. (1995). Cognitive and biological determinants of P300: An integrative review. *Biological*



- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the learning and teaching of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Waisman, I., Brunner, C., Grabner, R. H., Leikin, M., & Leikin, R. (2023). (Lack of) neural efficiency related to general giftedness and mathematical excellence: An EEG study. *Neuropsychologia*, 179, Article 108448. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2022.108448>
- Waisman, I., Leikin, M., Shaul, S., & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation between graphical and symbolic representations of functions in generally gifted and excelling in mathematics adolescents. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 669–696. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9513-5>
- Zhang, Q., Shi, J., Luo, Y., Liu, S., Yang, J., & Shen, M. (2007). Effect of task complexity on intelligence and neural efficiency in children: An event-related potential study. *NeuroReport*, 18(15), 1599–1602.
- Ziegler, A., & Raul, T. (2000). Myth and Reality: A review of empirical studies on giftedness. *High Ability Studies*, 11(2), 113–136. <https://doi.org/10.1080/13598130020001188>.
- Zohar, A. (1990). *Mathematical reasoning ability: Its structure, and some aspects of its genetic transmission* [Doctoral Dissertation]. Hebrew University of Jerusalem.

תרגול שליפה, תרגול מרווח ותרגול משולב בהוראת מתמטיקה

ד"ר דורית נריה

מנהלת תחום דעת מתמטיקה ביסודי ובקדם-יסודי במשרד החינוך. בעבר עבדה בהוראת מתמטיקה בבתי ספר יסודיים ועל-יסודיים בבאר-שבע, שימשה מדריכה להוראת מתמטיקה, ועבדה כמרצה בהשתלמויות מורים ובמסלול להוראת המדעים והטכנולוגיה באוניברסיטת בן-גוריון.



תרגול שליפה, תרגול מרווח ותרגול משולב בהוראת מתמטיקה

דורית נריה

תקציר

למחקרים במדעי המוח פוטנציאל רב לקידום ההבנה על אופן הלמידה ועל דרכי הוראה ולמידה מיטביים. אחד העקרונות הנירולוגיים החשובים שאפשר ליישם בהוראה הוא הנירופלסטיות – קליטת מידע חדש או שליפת ידע מהזיכרון מובילים ליצירת קשרים חדשים (סינפסות) בין תאי עצב (ניורונים) ומחזקים קשרים קיימים. מאמר זה דן בשלוש אסטרטגיות חשובות בלמידה בכלל ובלמידת מתמטיקה בפרט, שמומלץ ליישם מתוך מסקנות של מחקרים ניורולוגיים: **תרגול שליפה** (אחזור ידע מהזיכרון), **תרגול מרווח** (מפגש עם התוכן בזמנים מרווחים ולא בזמנים צפופים) ו**תרגול משולב** (תרגול שבו יש שילוב של נושאים והקשרים). שלוש האסטרטגיות קשורות לחלוקת התוכן למנות קטנות, למפגשים חוזרים ומרווחים על פני זמן ולמפגשים עם תכנים משולבים. אסטרטגיות אלו יכולות לקדם למידה משמעותית והבנה עמוקה יותר של הנושאים הנלמדים.

מילות מפתח: תרגול שליפה, תרגול מרווח, תרגול משולב.

מבוא - מה בין ניורולוגיה לפדגוגיה

בשנים האחרונות העניין במדעי המוח הולך וגובר, ויש המכנים את המאה ה-21 בשם Century of the Brain (Leysen, 2021). התחום המנסה לגשר בין מדעי המוח לפרקטיקות ההוראה והלמידה הוא ניורופדגוגיה. זה נשמע מובן מאליו שמחקרים במדעי המוח יהיו שימושיים למורים, הרי המוח הוא האיבר החיוני ביותר ללמידה. אבל איך אותות חשמליים או זרימת דם במוח יכולים לספר למורים משהו על האופן שיש ללמד היסטוריה, לשון או מתמטיקה?

הפדגוגיה ומדעי המוח מדברים בשפות שונות זו מזו (Howard-Jones, 2011; Willingham, 2009):

- פדגוגיה עוסקת בתלמידים ובלומדים, ואילו מדעי המוח עוסקים במבנה המוח, בניורונים ובתהליכים ביולוגיים, כימיים ופיזיקליים.
- מחקרים בפדגוגיה עוסקים במיומנויות מורכבות (הבניית ידע, גמישות מחשבתית, יצירתיות ועוד),

ולעומתם מחקרים במדעי המוח עוסקים בביטויים ביולוגיים, כימיים ופיזיקליים מבודדים של המיומנויות הנזכרות לעיל.

- הפרקטיקה הפדגוגית נעשית בכיתות מרובות תלמידים ובתנאים הרחוקים מלהיות אידיאליים, ואילו מחקרי מוח נעשים לרוב במעבדה בתנאים אידיאליים ומבודדים.

אז איך אפשר לגשר על הפערים ולהיעזר בממצאים של מחקרי מוח להוראה? כפי שניסח זאת הפסיכולוג הווארד-ג'ונס (Howard-Jones, 2011): איך עושים את המעבר from brain scan to lesson plan?

האם אפשר להכליל ממצאים ממחקרים על מוחות מעטים וליישמם בכיתה? יש חוקרים הטוענים שהפער בין ניורולוגיה לפדגוגיה גדול מדי ואי אפשר לגשר בין שני התחומים. הם ממשיכים וטוענים שלמרבית אנשי החינוך אין הידע הנדרש להבין מחקרים ניורולוגיים (למשל, Bruer, 1997; Howard-Jones, 2011; Leysen, 2021). למעשה הבנה שטחית של מחקרים עלולה להביא לידי היווצרות ניורו-מיתוסים שקשה מאוד למגר, דוגמת הסברה השגויה שלכל תלמיד יש סגנון הלמידה המתאים לו ויש ללמד אותו על פי סגנון זה (Privitera, 2021).

על אף ההסתייגויות האלו, למחקרים במדעי המוח פוטנציאל רב בקידום ההבנה של אנשי הוראה על דרכי הוראה ולמידה מומלצות. אומנם ניורולוגיה עוסקת במחקרים שרובם נעשו בתנאי מעבדה, אך היא מלמדת אותנו על האופן שבו לומדים, על האופן שידע נשמר בזיכרון ועל שליפה ואחזור מיטביים של ידע ועל דרכים להעמקת ההבנה.

מהמחקרים הניורולוגיים אפשר להעלות מסקנות יישומיות המובילות להוראה ולמידה טובות יותר. אחת התובנות המרכזיות של מחקרי מוח היא שהמוח הוא גמיש (neuroplasticity) ומשתנה בהתאם לגירויים מהסביבה החיצונית. לסביבה ולהתנסויות הלימודיות יש השפעה על טיב הלמידה וההבנה. למורים יש דרכים רבות להשפיע על הלמידה של התלמידים בהיבטים הקוגניטיביים ובהיבטים הרגשיים. לדרך ההוראה, למשימות שניתנות לתלמידים,



הגיבוש (consolidation) הוא השלב הבא בתהליך הלמידה. שלב זה נעשה בזיכרון לטווח ארוך. המידע המגיע למוח מתאי החישה מתורגם למידע שאופיו נקבע על פי האזור במוח שהגיע אליו. למשל, מידע המתקבל מגירוי אור (מידע ויזואלי) מגיע אל מרכז הראייה ומתורגם לתמונה. המידע המתורגם עובר עיבוד נוסף המסתמך על מידע קיים בזיכרון. לאחר תהליכי עיבוד המידע מתנהלת אינטגרציה של המידע החדש עם הידע הקיים. לזיכרון לטווח ארוך יש יכולת עצומה הנוצרת מתהליכים עצביים חשמליים וכימיים המשנים את חוזק הקשרים בין תאי העצב. ככל שכמות גדולה יותר של תאי עצב משתתפת בתהליך היווצרות הזיכרון, כך תהליך הלמידה יהיה טוב יותר. הלמידה מתבטאת בין השאר ביצירת קשרים עצביים חדשים ובארגון מחדש של קשרים עצביים קיימים כך שנוצרות רשתות המשקפות את הלמידה.

בדומה לספרייה גדולה, לא די שיהיו בה ספרים רבים, אלא חשוב גם לדעת למצוא את הספר המתאים בזמן ובקוֹשֶׁר שבו אנו זקוקים למידע שבו, כך גם בלמידה, היכולת לשלוף ולאחזר את הידע הקיים היא קריטית בתהליך החשיבה. שליפת הידע מביאה לידי עיבוד נוסף של הידע ולגיבושו מחדש.

למיצוי היכולת הנוירופלסטיות (neuroplasticity) יש עקרונות חשובים, ששלושה מהם מפורטים כאן:

- use it or lose it – כדי שנוכל להשתמש בידע, עלינו לשמר את היכולת לשלוף אותו. תאי העצב שבמוח שולחים אותות זה לזה, ומתקשרים זה עם זה באמצעות מוליכים עצביים (נוירטרנסמיטורים). באופן פשטני, אפשר לומר שאם התאים אינם בשימוש או לא מתקשרים עם תאים אחרים, הקשרים בין התאים האלו נחלשים ויכולת השליפה נחלשת.
- ריבוי קשרים מקל על ההיזכרות ומעמיק את הלמידה. שימוש בידע בהקשרים שונים ובדרכים מגוונות הוא חלק מתהליך הלמידה והוא מעמיק את ההבנה. המשמעות של העיקרון הזה בלמידה בכלל ובלמידת מתמטיקה בפרט, היא שיש לגוון את דרכי הלמידה, את הייצוגים, את אמצעי ההמחשה ואת ההקשרים בין הנלמד לתחומים אחרים במתמטיקה ומחוץ לעולם המתמטי.
- use it and improve it – הטמעת מידע בזיכרון אורכת זמן, ועל כן מומלץ להרבות בחזרות של שימוש בידע שכבר נבנה. החזרות חיוניות ליצירת קשרים חדשים במוח, לחיזוק קשרים קיימים וליכולת לשלוף את הידע.

ליחס כלפי תלמידים ולאווירה בכיתה יש השפעה ניכרת על קידום ההבנה ועל אהבת הדעת של התלמידים. החשיבות של מאפייני הסביבה הלימודית לא פוסחת גם על הוראת מתמטיקה ולמידתה (Booth et al., 2017; Silver & Libertus, 2022) ויש לה השפעה מכרעת על היבטים חשובים כמו ההבנה וההכרה בתפקיד המרכזי של המתמטיקה בחינוך, על הבניית ידע מתמטי עשיר ומעמיק המבוסס על ידע קונספטואלי ועל ידע פרוצדורלי וגם על היבטים אֶפֶקְטִיבִּיים – תחושת מסוגלות, סקרנות והרצון להמשיך ולהעמיק את הידע וההבנה המתמטיים.

למידה ונוירופלסטיות

למידה היא תהליך המוביל לשינוי בידע ובהבנה הנוירופלסטיות (neuroplasticity) היא אחד הביטויים של הלמידה. קליטת מידע חדש או שליפת ידע מהזיכרון גורמות ליצירת קשרים חדשים (סינפסות) בין תאי עצב (נוירונים) ולחיזוק קשרים קיימים. הפלסטיות מאפשרת למערכת העצבים להתאים את פעילותה לשינויים בתנאים הסביבתיים ולהשתנות בהתאם להתנסויות. למעשה זו התכונה המאפשרת למוח שלנו ללמוד דברים חדשים וזה גם הביטוי הפיזיולוגי של הלמידה.

במוח האנושי יש מיליארדי נוירונים שתפקידם לקלוט, לעבד ולהעביר מידע. אם ננסה לתאר את תהליך הלמידה באופן פשטני, נוכל לומר שהלמידה מורכבת משלושה תהליכים עיקריים הקשורים זה בזה: רכישת ידע חדש, קונסולידציה (consolidation – איחוד, עיבוד וגיבוש הידע) והיכולת לשלוף ולאחזר את הידע. זה תהליך מעגלי בחלקו, שכן שליפת הידע מביאה לידי גיבושו מחדש.

תהליך הלמידה מתחיל כשגירוי חיצוני נקלט במערכת החישה. הגירוי החיצוני יכול להיות חוויה שאנו עוברים, למידה מפורשת כמו הרצאה, למידה באמצעות התבוננות באחרים, ניהול שיחה, האזנה להסכת או כל פעילות אקטיבית או פסיבית שבמהלכה נקלט מידע. מידע שנראה לנו חשוב, מפתיע או בעל משמעות בדרך זו או אחרת, עובר לזיכרון העבודה. אם נתאר את הזיכרון כיכולת לאחסן, לשמור ולאחזר מידע, אזי זיכרון העבודה (working memory) נוגע לאחסון בעל קיבולת מוגבלת ולטווח קצר וליכולת לעשות מניפולציות על הידע (למשל – לזכור שני מספרים ולחשב את ההפרש ביניהם). חשוב לציין שעומס יתר על זיכרון העבודה מפחית במידה ניכרת את ההזדמנות ללמידה יעילה. זיכרון העבודה רגיש להסחות דעת ויש לו תפקיד קריטי בתהליכים קוגניטיביים כי הוא האחראי בין השאר על סינון שפע המידע המתקבל ועל עיבוד המידע הרלוונטי (Zelazo & Carlson, 2020).



תרגול שליפה, תרגול מרווח ותרגול משולב

הידע המתמטי נבנה באופן היררכי וספירלי ומרבית הנושאים הנלמדים בבית הספר היסודי נבנים זה על זה ויוצרים תשתית להמשך לימוד מתמטיקה; אי אפשר לדלג על לימוד כפל מספרים טבעיים, למשל, ולהמשיך ללימוד מציאת מכנה משותף או ללימוד אלגברה. שימור הידע חיוני להמשך הלמידה ולכן בהוראה ובלמידה צריך להקדיש זמן להבניית ידע חדש, אך חשוב באותה המידה להקדיש זמן ותשומת לב רבה לשימור הידע כדי שיהיה זמין להמשך הלמידה ולשליפה בהקשרים המתאימים. את התרגול החוזר יש לתזמן בשיקול דעת ולא להניח שהתזמון לא משנה כל עוד הלומדים מקבלים כמות מספקת של תרגול.

העקרונות הנורופדגוגיים מכוונים לשלוש אסטרטגיות חשובות בלמידה בכלל, ובלמידת מתמטיקה בפרט: תרגול שליפה (שליפה ואחזור של ידע קודם), תרגול מרווח (מפגש עם התוכן בזמנים מרווחים ולא בזמנים צפופים) ותרגול משולב (שילוב נושאים והקשרים). שלוש האסטרטגיות קשורות לחלוקת התוכן למנות קטנות, למפגשים חוזרים ומרווחים על פני זמן ולמפגשים עם תכנים משולבים.

אחת האסטרטגיות הבסיסיות ביותר בלמידת מתמטיקה היא תרגול. יש לכך סיבה טובה – תרגול ואימון יכולים לשפר את הביצועים של מיומנויות מתמטיות, וכנראה לא בכדי אומרים *practice makes perfect*. איכות הלמידה במתמטיקה מושפעת בין השאר מכמות התרגול (כלומר מספר הפעמים שהידע נשלף מהזיכרון) ומריווח התרגול לאורך זמן (Lyle et al., 2020).

אומנם בספרות המחקר המונח המשמש את דרכי הלמידה האלה הוא תרגול, אך אין הכוונה רק לתרגילים פרוצדורליים שגרתיים אלא גם לשילוב שאלות ברמות חשיבה שונות, בהקשרים שונים כמו גם לשאלות לא שגרתיות וכמובן גם לגיוון בדרכי הלמידה. תרגול אינו מתמקד רק בשאלות שגרתיות, אלא גם בגיוון האופן שבו חוזרים על הנושאים (שאלות שאלות, משחקים, חידונים, שימוש ביישומנים ועוד).

כאמור, אחזור ידע מהזיכרון מגדיל את הסבירות שהידע ייזכר מאוחר יותר. השליפה והאחזור של ידע קודם הכרחיים לא רק להעמקת ההבנה אלא גם ליצירת תשתית להמשך הלמידה. אחזור ידע קיים חשוב במיוחד לפני הצגת נושא חדש משום שעל מנת שהידע החדש יהיה

משמעותי ויישמר בזיכרון הוא חייב להיות מקושר, בדרך זו או אחרת, לידע הקיים. יש דרכים מגוונות שאפשר לתרגל בהן שליפה ואחזור של ידע קודם. למשל, בתרגול מסוג *recall* מבקשים מהתלמידים להיזכר ולכתוב מה שהם יודעים על מושג/נושא, ובתרגול מסוג *recognition* מבקשים מהתלמידים לזהות את הפריטים הנכונים מתוך מקבץ. אפשר לשלב תרגול כזה בתחילת שיעור (כרטיס כניסה) או כסיכום שיעור (כרטיס יציאה). אפשר לשלב מגוון אופנים נוספים של תרגול שליפה כל עוד מקפידים שהלומדים יהיו פעילים (Agarwal et al., 2021). מחקרים מסוימים (למשל, Richland et al., 2009; Seabrooke et al., 2022) מצאו שהשלמת שאלון ידע קצר לפני הלמידה של נושא חדש יכולה להעצים את היכולת לזכור ולשמר את הידע אחרי הלמידה, גם אם היו בו טעויות רבות. חשוב לציין שיש מחקרים שהסיקו שתלמידים בכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי מתקשים בשליפה מסוג *recall* וממליצים לשלב רמזים ושאלות מנחות (Evidence Based Education, 2023; Karpicke et al., 2016).

כמעט בכל ספרי הלימוד במתמטיקה נושאי הלימוד מחולקים ליחידות הוראה/לימוד קצרות וכל יחידה מלווה במקבץ תרגילים ומשימות הקשורות לנושא הנלמד. אף שייתכן שיש משימות ברמות קושי שונות, ברמות חשיבה משתנות ומשימות הדורשות אסטרטגיות פתרון שונות, רוב המשימות בכל פרק עוסקות באותו נושא. ארגון התרגול באופן שכל נושא מלווה בתרגול ממוקד שלאחריו ממשיכים לנושא הבא, וגם אותו מתרגלים באופן ממוקד נקרא *blocked practice* או *massed practice*. תרגול מסוג זה הכרחי בשלבי הלמידה הראשונים כי הוא מאפשר להתמקד ולהתעמק בנושא ספציפי (Barzagar, Nazar & Ebersbach, 2019; Mielicki & Wiley, 2022). גם בתרגול המתמקד בנושא ספציפי, יש לגוון את דרכי הלמידה, את הייצוגים, את אמצעי ההמחשה ואת ההקשרים בכל הנושאים הנלמדים וזאת משום ששימוש בידע בהקשרים שונים ובדרכים מגוונות ובאופנים שונים יכול להעמיק את ההבנה. למשל, בתרגול בנושא משמעות השבר כחלק משלם אפשר לשלב תרגול המורכב ממקבץ שאלות הקשורות לנושא, ולשלב ייצוגים מגוונים, שאלות ברמות קושי וברמות חשיבה שונות (ראו דוגמה למגוון שאלות באיור 1).



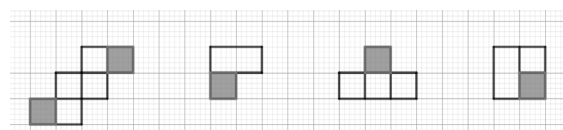
מקבץ תרגילים שבהם מתרגלים את הנושאים החדשים שנלמדו עם נושאים שנלמדו בעבר נקרא תרגול משולב (interleaved practice) ויש המתרגמים לעברית 'תרגול שזור' או 'תרגול משורג'. סוג זה של תרגול מורכב מקובצי שאלות שבהם יש שילוב של כמה נושאים, והוא מהווה אחת הטכניקות העוצמתיות להעמקת ההבנה (Agarwal & Agostinelli, 2020; Nemeth et al., 2021). בשיטת תרגול זו הלומדים צריכים לשלוף ממאגר הידע שיש במוחם את הידע הרלוונטי למטלה באמצעות מציאת מאפיינים משותפים או שונים לשאלות שנלמדו בעבר (Mielicki & Wiley, 2022). תהליך זה מעמיק את ההבנה ומאלץ את הלומדים להפעיל מחדש (reactivate) ולאחזר ידע הנמצא בזיכרון לטווח ארוך. בדרך זו יכולת השליפה משתפרת והקשרים העצביים מתחזקים (Rau et al., 2013). מחקרים מצאו שההישגים במתמטיקה עלו בקרב תלמידים שלמדו ותרגלו בשיטה של תרגול משולב (למשל, (Nemeth et al., 2021; Rohrer et al., 2015).

כאמור, בתרגול מסוג blocked practice יש חזרתיות על אותה פרוצדורה או על אותו נושא. תרגול כזה יכול להתאים להתחלת לימוד של נושא חדש. אך בהמשך הלמידה רצוי להיעזר גם בתרגול משולב הכולל מגוון שאלות מנושאים מגוונים, כולל כאלו שהתלמידים לא ראו לאחרונה. תרגול כזה מאלץ את התלמידים לחשוב על כל אחת מהשאלות ולשלוף מהזיכרון את הידע על השאלה ולבחור את האסטרטגיה המתאימה. זה תהליך מחשבתי מורכב ההופך את הלמידה למשמעותית יותר (Nemeth et al., 2021). נושאי התרגול המשולב לא חייבים להיות שונים לגמרי. למשל, שילוב של שאלות כפל ושאלות חילוק יכול להדגיש ולהעמיק את ההבנה של משמעות כל אחת מהפעולות ולסייע לפותרים להבחין איזו דרך פתרון מתאימה לכל משימה. כל התרגולים חייבים להיות מלווים במשוב, אך במיוחד יש ללוות את התרגול המשולב בדיונים ולאפשר לתלמידים לבדוק את הפתרונות, לשאול שאלות ולתקן את הטעויות (Agarwal & Agostinelli, 2020; Rohrer & Hartweg, 2023).

בהלימה ליעילות התרגול המשולב, מומלץ לשלב בשיעורי הבית או בתרגול בכיתה שאלות הקשורות לנושאים שנלמדו בעבר. באיור 2 יש הצעה לתרגול משולב המתאים לתלמידי כיתה ג'. השאלות נוגעות לנושאים מתמטיים אלה: המבנה העשרוני ומושגים בסיסיים (ספרות, סכום, מכפלה, מספרים עוקבים ועוד), סדר פעולות החשבון, קשרים בין תרגילים, חשיבה כפליית וחשיבה חיבורית. במקבץ השאלות יש שאלות ברמות חשיבה שונות (פתרון

שאלה 1

סמנו את הצורות ששליש מהן צבוע באפור:¹



שאלה 2

יואב אכל חצי חבילת גלידה. גם עידו ותומר אכלו מאותה חבילה

שלושתם אכלו את כל הגלידה שבחבילה.

כתבו אפשרות לחלק שאכל כל אחד מהילדים:

• עידו אכל _____ מחבילת הגלידה

• תומר אכל _____ מחבילת הגלידה

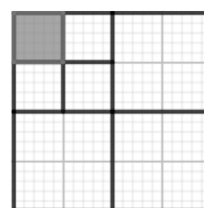
כתבו אפשרות נוספת לחלק שאכל כל אחד מהילדים:

• עידו אכל _____ מחבילת הגלידה

• תומר אכל _____ מחבילת הגלידה

שאלה 3

איזה חלק משטח הריבוע צבוע באפור?



א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{1}{7}$ ג. $\frac{1}{8}$ ד. $\frac{1}{16}$

שאלה 4

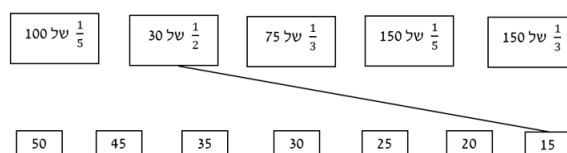
נועה אומרת ש- $\frac{1}{3}$ עוגה הוא פחות מ- $\frac{1}{4}$ של אותה העוגה כי 3 קטן מ-4.

• האם נועה צודקת?

• הסבירו את תשובתכם (תוכלו להסביר בעזרת מילים, תרגילים או ציור).

שאלה 5

חברו זוגות מתאימים:



עבור שני המספרים הנותרים השלימו היגד וחברו בין הזוגות המתאימים:

של של

איור 1: משימות בנושא משמעות השבר כחלק משלב

1. המשימה עובדה מתוך Metcalfe, 2018.



(Wiley, 2022). כמו כן יש לשקול בקפידה את אופן השילוב של תרגול שליפה ואחזור, ובייחוד לשקול אילו נושאים חדשים נציג בזמן השליפה, ולזכור שהצגת נושאים קרובים מדי בעיקר בתחילת הלמידה עלולה לגרום לגיבוש ידע מוטעה (interference).

תרגול מיטבי צריך לכלול את כל תלמידי הכיתה. תרגול שליפה בעל פה שבו תלמידים מצביעים ועונים עלול לגרום להשתתפות חלקית. אפשר, למשל, להשתמש בלוחות מחיקים ומתוך כך להבטיח מעורבות של כל התלמידים. יש להקפיד להקצות זמן לחשיבה וגם זמן למשוב כדי שהתרגול ימנע חזרה על טעויות בעתיד. ומילת אזהרה נוספת – שילוב תרגולי שליפה מרווחים או משולבים לא צריך להתבטא בריבוי מבחנים או בחנים. אפשר לשלב תרגולי שליפה, לרווח את התרגול ולשלב בין נושאים בדרכים מגוונות, שאינן בהכרח אירועי הערכה העלולים להוסיף ממד של לחץ וחרדה ללימודי המתמטיקה. אפשר לשלב את סוגי התרגול האלה בדרך של משחקים, שעשועונים, הערכה עצמית ועוד.

במאמר זה הוצגו שלושה אסטרטגיות חשובות בהוראה ובלמידה – תרגול שליפה המזמן חלוקת תוכן למנות קטנות, תרגול מרווח המזמן מפגש עם התוכן בזמנים מרווחים ותרגול משולב המזמן שילוב של נושאים והקשרים. דרכי התרגול האלה נשענות על עקרונות נורופדגוגיים שיעילותם אוששה במחקרים רבים (למשל, Agarwal & Bain, 2019; Evidence Based Education, 2023; Rohrer & Hartwig, 2023) והם ניתנים ליישום בעבודת ההוראה בתחומי דעת מגוונים בכלל ובלמוד מתמטיקה בפרט.

רשימת מקורות

- Agarwal, P. K., & Agostinelli, A. (2020). Interleaving in math: A research-based strategy to boost learning. *American Educator*, 44(1), 24–28, 40.
- Agarwal, P. K., & Bain, P. M. (2019). *Powerful teaching: Unleash the science of learning*. Jossey-Bass.
- Agarwal, P. K., Nunes, L. D., & Blunt, J. R. (2021). Retrieval practice consistently benefits student learning: A systematic review of applied research in schools and classrooms. *Educational Psychology Review*, 33(4), 1409–1453. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09595-9>

פרוצדורלי; הנמקה; פתרון שאלות בעלות יותר מפתרון אחד) וייצוגים למיניהם (חזותיים, מספריים ומילוליים):

שאלה 1

מצאו את המספר שעונה על כל התנאים:

- המספר הוא דו־ספרתי;
- שתי הספרות הן זוגיות;
- המספר הוא מכפלה של שני מספרים עוקבים;
- סכום הספרות גדול ממכפלת הספרות.

שאלה 2

פתרו את התרגילים:

$$(80 + 30) : 10 =$$

$$28 - 4 : 4 =$$

$$12 + 3 \times (16 - 6) =$$

שאלה 3

השלימו את הסימן החסר (<, > או =) בין שני התרגילים:

$$479 + 63 \quad \square \quad 479 + 65$$

הסבירו איך אפשר לדעת מהו הסימן החסר (<, > או =) מבלי לפתור את התרגילים.

שאלה 4

- בציור שלפניכם אפשר לראות שמשקולת שמשקלה 600 גרם כבדה יותר מ־3 פחיות זהות.



- מה יכול להיות המשקל של כל פחית?
- הציעו פתרון נוסף.

איור 2: דוגמה לתרגול משולב לתלמידי כיתה ג'

אחרי שפירטתי את היתרונות הרבים בלמידה משולבת ובלמידה מרווחת, אוסיף גם מילות אזהרה. תרגול משולב מיטבי מחייב בחירה מושכלת של הנושאים. תרגול משולב של כימיה והיסטוריה אינו יעיל כי הנושאים רחוקים זה מזה והלומדים אינם צריכים להפעיל שיקול דעת באבחנה בין הנושאים (Agarwal & Agostinelli, 2020; Hausman & Kornell, 2014; Mielicki &



- Lyle, K. B., Bego, C. R., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. S. (2020). How the amount and spacing of retrieval practice affect the short- and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review*, 32(1), 277–295. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09489-x>
- Metcalfe, G. (2018). *I see reasoning – LKS2. I See Maths* Ltd. https://www.sandbach-pri.cheshire.sch.uk/serve_file/443398
- Mielicki, M. K., & Wiley, J. (2022). Exploring the necessary conditions for observing interleaved practice benefits in math learning. *Learning and Instruction*, 80(3), Article 101583. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101583>
- Nemeth, L., Werker, K., Arend, J., & Lipowsky, F. (2021). Fostering the acquisition of subtraction strategies with interleaved practice: An intervention study with German third graders. *Learning and Instruction*, 71, Article 101354. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101354>
- Privitera, A. J. (2021). A scoping review of research on neuroscience training for teachers. *Trends in Neuroscience and Education*, 24, Article 100157. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2021.100157>
- Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). Interleaved practice in multi-dimensional learning tasks: Which dimension should we interleave? *Learning and Instruction*, 23, 98–114. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.07.003>
- Richland, L. E., Kornell, N., & Kao, L. S. (2009). The pretesting effect: Do unsuccessful retrieval attempts enhance learning? *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 15(3), 243–257. <https://doi.org/10.1037/a0016496>
- Rohrer, D., Dedrick, R. F., & Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 900–908. <https://doi.org/10.1037/edu0000001>
- Barzagar Nazari, K., & Ebersbach, M. (2019). Distributing mathematical practice of third and seventh graders: Applicability of the spacing effect in the classroom. *Applied Cognitive Psychology*, 33(2), 288–298. <https://doi.org/10.1002/acp.3485>
- Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K., & Davenport, J. L. (2017). Evidence for cognitive science principles that impact learning in mathematics. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. Ochsendorf, & K. M. Koepke (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 297–325). Elsevier Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805086-6.00013-8>
- Bruer, J. T. (1997). Education and the brain: A bridge too far. *Educational Researcher*, 26(8), 4–16. https://www.jsmf.org/about/j/education_and_brain.pdf
- Evidence Based Education. (2023). *Retrieval practice: Myths, mutations and mistakes*. <https://did.li/Ja6w5>
- Hausman, H., & Kornell, N. (2014). Mixing topics while studying does not enhance learning. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 3(3), 153–160. <https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2014.03.003>
- Howard-Jones, P. A. (2011, February 25). From brain scan to lesson plan. *The Psychologist*. <https://www.bps.org.uk/psychologist/brain-scan-lesson-plan>
- Karpicke, J. D., Blunt, J. R., & Smith, M. A. (2016). Retrieval-based learning: Positive effects of retrieval practice in elementary school children. *Frontiers in Psychology*, 7(104). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00350>
- Leysen, J. (2021). Confusions that make us think? An invitation for public attention to conceptual confusion on the neuroscience-education bridge. *Educational Philosophy and Theory*, 53(14), 1464–1476. <https://doi.org/10.1080/00131857.2020.1865920>



- Rohrer, D., & Hartwig, M. K. (2023). Spaced and interleaved mathematics practice. In C. E. Overson, C. M. Hakala, L. L. Kordonowy, & V. A. Benassi (Eds.), *In their own words: What scholars and teachers want you to know about why and how to apply the science of learning in your academic setting* (pp. 111–121). Society for the Teaching of Psychology. <https://teachpsych.org/ebooks/itow>
- Seabrooke, T., Mitchell, C. J., Wills, A. J., Inkster, A. B., & Hollins, T. J. (2022). The benefits of impossible tests: Assessing the role of error-correction in the pretesting effect. *Memory & Cognition*, 50(2), 296–311. <https://doi.org/10.3758/s13421-021-01218-6>
- Silver, A. M., & Libertus, M. E. (2022). Environmental influences on mathematics performance in early childhood. *Nature Reviews Psychology*, 1(7), 407–418. <https://doi.org/10.1038/s44159-022-00061-z>
- Willingham, D. T. (2009). Three problems in the marriage of neuroscience and education. *Cortex*, 45(4), 544–545. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2008.05.009>
- Zelazo, P. D., & Carlson, S. M. (2020). The neurodevelopment of executive function skills: Implications for academic achievement gaps. *Psychology & Neuroscience*, 13(3), 273–298. <https://doi.org/10.1037/pne0000208>

רווחה מקצועית של מורים מומחים למתמטיקה ולמדעים בתוכניות פיתוח מקצועי יעילות

ד"ר מירלה וידר

בעלת תואר שלישי בחינוך מתמטי מהפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון - המכון הטכנולוגי הישראלי, תואר M.A. בחינוך ופסיכולוגיה מהאוניברסיטה הפתוחה בישראל ותואר B.Sc. במתמטיקה מאוניברסיטת תל-אביב. בשנים האחרונות מרצה לקורסים מתמטיים וחינוך מתמטי במכללה האקדמית הדתית לחינוך שאנן, חיפה, ולאחרונה מונתה לתפקיד ראש החוג למתמטיקה. נוסף על כך היא עוסקת במחקר בחינוך מתמטי על רקע תפקידה כיועצת אקדמית במכון ויצמן למדע, רחובות.



ד"ר ענת אבן-זהב

בעלת תואר שלישי בחינוך מדעי מהפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון - המכון הטכנולוגי לישראל, תואר MBA במנהל עסקים ותואר B.Sc. במתמטיקה שימושית מאוניברסיטת תל-אביב. כיום מרצה לקורסים בחינוך מתמטי באקדמיית אלקאסמי, באקה אל-גרבייה ובמכללת סמינר הקיבוצים - המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנויות, תל-אביב-יפו.



רווחה מקצועית של מורים מומחים למתמטיקה ולמדעים בתוכניות פיתוח מקצועי יעילות

מירלה ידר וענת אבן־זהב

תקציר

בחנית היבטים פסיכולוגיים ונירולוגיים של תאוריית המכוונות העצמית הביאה חוקרים לידי השערה כי רווחה מקצועית חיונית לסיפוק המקצועי ולצמיחה האישית־מקצועית של מורים. עם זאת תוכניות לפיתוח מקצועי של מורים מתמקדות בעיקר בקידום הישגי התלמידים ונוגעות רק בעקיפין לרווחתם המקצועית של המורים. בפרט בולט היעדר קולות המורים בשיח הזה. מחקר זה נועד לעמת את תפיסות המורים כלפי צורכי הרווחה המקצועית שלהם עם הדרך שבה תוכניות פיתוח מקצועי יעילות נותנות מענה לצרכים אלו. רכיבי רווחה מקצועית (מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות) זוהו באופן תמטי בתוך 20 ראיונות עם מורים מומחים למדעים ומתמטיקה. הממצאים מראים כי המורים רואים חשיבות ברווחתם המקצועית בכל הרכיבים. בפרט, אזכור השאיפות לצמיחה אישית־מקצועית שכלל המורים ציין שהן חשובות ביותר, אינו ניכר בתוכניות פיתוח מקצועי יעילות. הממצאים מדגישים את הצורך לחזק רווחה מקצועית כמאפיין נוסף של תוכניות פיתוח מקצועי יעילות. מאפיין נוסף זה עשוי לתת מענה לצרכים פסיכולוגיים ונירולוגיים בתהליכי למידה של מורים ולכך עשויות להיות השלכות מעשיות ותאורטיות על תכנון והערכת יעילות של תוכניות פיתוח מקצועי למורים.

מילות מפתח: תאוריית המכוונות העצמית; נירוביולוגיה ולמידה; רווחה מקצועית של מורים; פיתוח מקצועי יעיל של מורים, מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים.

מבוא

מערכות חינוך עברו במהלך העשורים האחרונים שינויים רעיוניים הנוגעים לתפיסת מקצוע ההוראה (Natale et al., 2013). ההוראה אינה נתפסת עוד כעיסוק של 'הצווארון הכחול', אלא כמקצוע שבו מורים יכולים לפתח קריירה ומתוך כך להתקדם מבחינה מקצועית (Tucker, 2014). לצד שינויים רעיוניים אלה ועם הצורך שיצרה מהפכת המידע להתאמת מיומנויות הלומדים במאה העשרים ואחת, גבר גם הצורך בפיתוח מקצועי הנותן מענה לשיפור איכות ההוראה (Natale et al., 2013). תוכניות הפיתוח המקצועי במדעים ובמתמטיקה המכוונות את ידע המורים ואת האוריינטציה המקצועית שלהם, הפכו לחלק חשוב

מחיייהם המקצועיים של המורים (Intrator & Kunzman, 2007; Natale et al., 2013). עם זאת, רוב תוכניות הפיתוח המקצועי בהוראת המדעים והמתמטיקה משקפות בעיקר את המיקוד של קובעי המדיניות בהישגי תלמידים ומתעלמות מהתפקיד שממלא האדם במקצוע (Intrator & Kunzman, 2007). לפי דרלינג־המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017), "תוכניות פיתוח מקצועי יעילות" הן תוכניות המכוונות לשיפור הישגים של תלמידים. בסקר שעשו הם חשפו כי תוכניות יעילות מקדמות את ידע המורים בדגש על הרלוונטיות של התוכן ופרקטיקות ההוראה לתוכנית הלימודים, וסיפוק צורכי המורה בנושא זה (Darling-Hammond et al., 2017). הגדרה זו רואה במורים אנשי מקצוע שמצופה מהם להתאים את ההוראה שלהם למטרות ולפרקטיקות חיצוניות המוגדרות מראש (Lindvall & Ryve, 2019). יתר על כן, תוכניות פיתוח מקצועי נוטות להתעלם מהצרכים המקצועיים והאישיים המשתנים של מורים למדעים ומתמטיקה בשלבים השונים של קריירת ההוראה, ואותן תוכניות פיתוח מקצועי מוצעות לכלל המורים (Huberman, 1995). בשל חוסר שביעות הרצון של מורים מקריירת ההוראה, נראה כי גישה זו לפיתוח מקצועי היא מצומצמת ובלתי מספקת (Carrol & Fulton, 2004; Santoro, 2018; Song & Alpaslan, 2015).

תאוריית המכוונות העצמית שביססו רייאן ודצי (Ryan & Deci, 2000) הציגה את החשיבות שיש לרווחה מקצועית בתפקוד המיטבי של הפרט בארגון. אחר כך הציעו רייאן ואחרים (Ryan et al., 2013) ארבעה רכיבים לאפיון רווחה מקצועית: שייכות (relatedness), אוטונומיה (autonomy), מסוגלות (competence) ושאיפות (aspirations), וציינו כי מדובר בארבעה צרכים שטיפוחם יוצר אצל הפרט מוטיבציה פנימית המתבטאת בנטייה לסקרנות והתעניינות, חיפוש אחר אתגרים, שאיפה ללמוד ולפתח את הכישורים והידע בהקשר המקצועי ופיתוח יצירתיות (Ryan & Deci, 2000, 2017; Ryan et al., 2013) מחקרים רבים הראו כי גם בקרב מורים רווחה מקצועית מהווה היבט חיוני הקשור קשר הדוק לצמיחתם האישית־מקצועית, לפיתוח קריירת ההוראה ולאיכות חייהם המקצועיים



ההוראה שלהם. מטרת מחקר זה לבחון את החשיבות שמעניקים מורים מומחים למדעים ומתמטיקה לרווחה בחייהם המקצועיים, ולענות על שאלת המחקר הזאת:

האם וכיצד משתקפים רכיבי הרווחה המקצועית (שייכות, אוטונומיה, מסוגלות ושאירות) בתפישותיהם של מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים ביחס להתפתחות האישית-מקצועית שלהם?

עומות בין הדרך שבה המורים רואים את צורכי הרווחה המקצועית שלהם ובין היעדר המענה של תוכניות פיתוח מקצועי לצרכים אלו, מדגיש את חשיבות הרווחה המקצועית כרכיב חיוני בהערכת היעילות של תוכניות פיתוח מקצועי.

רקע ומסגרת תאורטית

חוקרים טוענים כי כדי לקדם את החינוך, יש לעבור למודל השומר על החיוניות המקצועית של המורים (Intrator & Kunzman, 2007) והמדגיש את התפתחותם האישית כאנשי מקצוע, נוסף על אחריותם להשיגי תלמידיהם (Tucker, 2014). מארלי (Marley, 2018) מציינת כי מתן הזדמנויות רבות יותר להתפתחות מקצועית עשוי לשמש מפתח לשיפור ההוראה ושביעות הרצון של מורים. כמו כן זיהו חוקרים את הרווחה המקצועית כחיונית למילוי צרכיהם המקצועיים של מורים וכדרך להפוך אותם לאנשי מקצוע טובים יותר, להגביר את המוטיבציה בעבודתם, להרגיש מוערכים, מסופקים ומחוברים יותר לעבודתם (Cuevas et al., 2018; Roffey, 2012; Rubin & Brown, 2019). החוקרים מסתמכים בקביעתם על מחקרים המספקים ראיות מהותיות שבקרב עובדים מסופקים המרגישים מעורבים במידה ניכרת במקצוע והזוכים להזדמנויות לקידום הקריירה, השימור גבוה יותר (Hall, 2002; Revesencio, 2015; Ryan et al., 2013). לפיכך מחקר זה מתמקד ברווחתם המקצועית של מורים למדעים ולמתמטיקה כגורם מפתח לסיפוק הצרכים המקצועיים שלהם.

מהי רווחה מקצועית?

ארגונים ציבוריים ופרטיים מעניקים חשיבות מיוחדת לרווחתם המקצועית של העובדים ומקדמים אותה באמצעות טיפוח איזון טוב בין עבודה לחיים, שמירה על מבנה ארגוני המאפשר לעובדים לשגשג ולהתגאות בעבודתם ותמיכה בעובדים להפיק את המרב מיכולותיהם כדי להשיג חוויית עבודה חיובית כוללת (Koivu, 2013). ברוח זו קויוו (Koivu, 2013, pp. 5) מצטט את הגדרת המכון הפיני לבריאות תעסוקתית למושג הרווחה המקצועית כדלקמן: "רווחה בעבודה פירושה עבודה בטוחה, בריאה ופרודוקטיבית בארגון שמונהג היטב בידי

לאחרונה נוספו עדויות מתחום המחקר הנירוביולוגי (Di Domenico & Ryan, 2017) המאששות את תאוריית המכוונות העצמית (Ryan & Deci, 2000). רכיבי הרווחה המקצועית נמצאו קשורים למערכות נירוביולוגיות מוחיות ולרגשות כמו חוסר אונים, חרדה ופחד, כעס, תסכול, סיפוק מקצועי ומוטיבציה פנימית (Thomsen et al., 1999). בפרט מצאו ואן הורן ואחרים (van Horn et al., 2004) במחקר מקיף על מורים הולנדים כי לרגשות מקום מרכזי בין רכיבי הרווחה המקצועית של המורים.

למרות העדויות המצטברות לחשיבות הרווחה המקצועית כמקדמת סיפוק מקצועי, מוטיבציה פנימית ולמידה, אין בספרות על תוכניות פיתוח מקצועי יעילות התמקדות מכוונת ברווחתם המקצועית של מורים (Darling-Hammond et al., 2017; Lindvall & Ryve, 2019). במחקר בחינוך המתמטי ובהוראת המדעים ההתמקדות היא ברובה בצד הקוגניטיבי של הלמידה, במלאכת ההוראה ובידע הנחוץ למורים לצורך ההוראה. רק בעשור האחרון נעשה ניסיון לגשש ולבחון את דרך ההשתקפות של הרגש בקוגניציה ובלמידה של תלמידים (Goldin, 2000; Hannula, 2012; Laukenmann et al., 2003; Zan et al., 2006). לעיתים קרובות למידה והוראה של מתמטיקה ומקצועות מדעיים מערבות היבטים רגשיים. עם זאת, בספרות המקצועית בחינת הרגשות המתעוררים בזמן ההוראה והלמידה היא בעיקר אינטואיטיבית, ולרוב אינה נסמכת על הבנת היבטים נירוביולוגיים המעורבים בתהליך הלמידה. נוסף על כך כמעט שאין בספרות המקצועית דיון ברגשות מורים (Darling-Hammond et al., 2017; Lindvall & Ryve, 2019).

מחקר זה שם לו למטרה לחשוף כיצד מורים מבינים את רווחתם המקצועית. הממצאים עשויים להביא לידי שינוי תפיסתי בעיצוב תוכניות פיתוח מקצועי שבד בבד עם העשרת איכות ההוראה תודגש גם רווחתם המקצועית של מורים באופן שיקדם תחושות של סיפוק מקצועי ומוטיבציה פנימית.

כדי לצמצם את המתודולוגיה בחרנו להתמקד במורים למדעים ולמתמטיקה מומחים ובתוכניות פיתוח מקצועי בתחום המדעים והמתמטיקה. הבחירה נשענה על החשיבות שמערכות חינוך בעולם רואות בתחומי לימוד אלו, המציבה את הפיתוח המקצועי של מורים למדעים ולמתמטיקה בקדמת הבמה (English, 2016; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). משתתפי מחקר זה בפרט הם מורים בכירים מבחינת השכלה, ותק והיכרות מתמשכת עם תוכניות לפיתוח מקצועי בתחום



היבטים נירוביולוגיים של רווחה מקצועית

תאוריית המכוונות העצמית יצרה מסגרת תאורטית לבחינת מושג המוטיבציה הפנימית הקשור לנטייה הספונטנית של אנשים להיות סקרנים ומתעניינים, לחפש אתגרים שבהם יוכלו לממש ולפתח את הכישורים והידע שלהם, גם בהיעדר תגמולים חיצוניים (Di Domenico & Ryan, 2017). עם התעצמות היכולות הטכנולוגיות בתחום מדעי המוח בעשור האחרון, החלו חוקרים לבחון ולאשש את הבסיס הנירוביולוגי של רכיבי הרווחה המקצועית ואת הקשר שלהם למוטיבציה פנימית (Di Domenico & Ryan, 2017; Reeve & Lee, 2019). כך, למשל, נמצא כי דפוסי ההפעלה העצבית שנצפו באמצעות fMRI במוח במהלך חוויה של מוטיבציה פנימית תואמים את תאוריית המכוונות העצמית (Ryan & Deci, 2017), כמו סיפוק צרכים פסיכולוגיים המעריכים תגמול ורגשות הנאה. לפי דמסיו (Damasio, 2021), רגש הוא שינוי במצב התודעה לאחר שינוי באיזון הכימיקלי במוח הנגרם באמצעות גירוי מוחי. העיבוד של הגירוי במוח יכול להיות מודע או לא מודע, אך התגובות הרגשיות נוצרות באופן אוטומטי. תפקיד הרגש הוא להניע את היצור החי לפעולה על פי הצרכים של האורגניזם.

המוטיבציה הפנימית קשורה קשר הדוק למערכת התגמול במוח ולתחושות של עונג כתגובה על גירויים מסוימים. מערכת התגמול משמשת לחיזוק התנהגויות המביאות לידי תגמול חיובי ותחושת עונג הקשורה בהפרשת מוליך עצבי בשם דופמין. הדופמין הוא קריטי לתפקודי מוח למיניהם, כולל חשיבה, תנועה, שינה, מצב רוח, תשומת לב ומוטיבציה (Fiorillo et al., 2003). באמצעות הדופמין מערכת התגמול המוחית מספקת את המוטיבציה והאנרגיה לגלות עניין בעולם הסובב אותנו, מעוררת רגשות של סקרנות, עניין וציפייה. על פי החוקר קנט ברידג' (Berridge, 2004), דופמין הוא המניע את האורגניזם לפעולה. ספולסקי (Sapolsky, 2011) רואה בבני האדם מי ששרויים במעגל חיפוש מתמיד אחר דופמין. השגת המטרה אמורה לגרום לתחושת שביעות רצון, ולכן להשהיית החיפושים אחר הדופמין. אולם הרצון לעוד דופמין גובר על שביעות הרצון, והאדם נוטה להמשיך לחפש דופמין אף שהוא בעצם מרוצה. אנו נוטים באופן אינסטינקטיבי לחזור על פעולות או מצבים שיוצרים דופמין. לא התגמול עצמו שומר על לולאת חיפוש הדופמין, אלא עצם הציפייה לתגמול, שכן מערכת התגמול רגישה בעיקר ל"סמנים" בעת שמתקרב תגמול (Sapolsky, 2011). המערכת מופעלת ומתגמלת בדופמין אף שטרם האדם מוצא או מקבל את מה שהוא

עובדים מוכשרים וקהילות עבודה שחוות את עבודתן כמשמעותית ומתגמלת ורואות בעבודה רכיב התומך בניהול חייהם".

תאוריות הומניסטיות (Maslow, 1943) טוענות שמלבד צרכים בסיסיים (צרכים פיזיולוגיים, צרכי ביטחון, צרכי אינטימיות וצורך במעמד והערכה), יש גם צורך במימוש עצמי, הכולל את הרצון להתקדם ולהצליח מבחינה מקצועית. מתוך כך תאוריית המכוונות העצמית (Ryan et al., 2013) מציינת שאיזון בין ארבעה צרכים בסיסיים עשוי לטפח רווחה מקצועית: מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות.

א. **מסוגלות** נוגעת ליכולת של אנשים להשפיע ולנהל את סביבתם הפנימית והחיצונית, להתמודד ביעילות עם בעיות, לפעול בסביבה לא מוכרת ולהשיג הישגים (Reeve, 2002; Ryan et al., 2013).

ב. **שייכות** עוסקת בצרכים רגשיים של הפרט, כגון הצורך להשתייך לקהילה (Maslow, 1943; Vignoles et al., 2006; Williams, 1997). הצורך בשיוך מקצועי (affiliation) (Atkinson & Raynor, 1974; McClelland et al., 1953), הצורך בקבלה, בהערכה ובאישור של הסביבה המקצועית (Hogan & Warremfeltz, 2003; Vignoles et al., 2006; Williams, 1997).

ג. **אוטונומיה** היא צורך פסיכולוגי כללי החיוני לרווחה מקצועית המזין את המוטיבציה הפנימית של האדם. אוטונומיה נוגעת למידה שבה הפרט מרגיש חופשי להציג התנהגות עצמאית, מכוונת ובגדר המוסכמות, המסתמכת על תחושה של בחירה חופשית ולא על שליטה וסמכות. התנהגות אוטונומית מתבטאת ביכולתו של אדם להתנגד לדרישות חיצוניות מהסביבה ולדבוק בדעותיו שלו. בעניין רווחה מקצועית, האוטונומיה מתבטאת בהשתתפות בקבלת החלטות מושכלת, בשמירה על צדק ארגוני וביחסים תקינים עם הממונים (Koivu, 2013).

ד. **שאיפות** קשורות לרמת המוטיבציה להתקדם ולממש צרכים פנימיים כמו צמיחה אישית-מקצועית, בריאות, עושר, תהילה, תדמית וכוח. בהקשר המקצועי, השאיפות משתקפות במידת המוטיבציה של האדם לממש יעדים מאתגרים בעבודתו (Ryff & Keyes, 1995).

מחקרים הראו כי ארבעת רכיבי הרווחה המקצועית מקדמים מוטיבציה פנימית ומספקים תנאים הכרחיים לצמיחה בתחומי חיים בכלל ובעבודה בפרט (Koivu, 2013).



למשל בדרך של קהילות למידה מקצועיות.

מתוך התבוננות בשבעת מאפייני היעילות של תוכניות פיתוח מקצועי למורים ניכר כי הם אכן מתארים את הלך הרוח של מרבית תוכניות הפיתוח המקצועי בעת זו, המדגישות את הרלוונטיות לתוכני ההוראה ולקידום איכות ההוראה (Darling-Hammond et al., 2017), אך אינם נוגעים ישירות למורים ולצורכי המורים כאנשי מקצוע (Intrator & Kunzman, 2007).

כדי להדגים באיזו מידה תוכניות פיתוח מקצועי יעילות נותנות מענה לצורכי הרווחה המקצועית של מורים למדעים ולמתמטיקה, נתמקד כאן בספרות המתארת שתי דוגמאות לתוכניות פיתוח מקצועי בתחומי המדעים שלפי דרלינג-המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017) כוללים את כל שבעת מאפייני היעילות:

1. STeLLA – מורים למדעים הלומדים מניתוח שיעורים (Roth et al., 2011; Taylor et al., 2017).
2. תוכנית פיתוח מקצועית למורי ביולוגיה המשלבת אוריינות אקדמית והוראה (Greenleaf et al., 2011).

בדוגמה הראשונה, מתוך הניסיון לאתר את ארבעת רכיבי הרווחה (מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות) זיהינו כי אף שדרלינג-המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017) לא עסקו במישרין ברווחתם המקצועית של מורים, שלושה מתוך ארבעת רכיבי הרווחה המקצועית – מסוגלות, שייכות ואוטונומיה – הוזכרו במפורש או שהיה אפשר ללמוד זאת מהטקסט המתאר את מאפייני היעילות של תוכנית הפיתוח המקצועי. בפרט, ראינו שהמורים שהשתתפו בתוכנית ה-STeLLA חוו תחושת מסוגלות עצמית באמצעות תכנון מוצלח של רצף של שיעורים מחוברים ושיתפו בניסיון ההוראה ברצף זה (Roth et al., 2017; Taylor et al., 2011) את שני רכיבי רווחה מקצועית אחרים, שייכות ואוטונומיה, היה אפשר לזהות זיהוי לא מפורש מתוך הטקסט. כך לדוגמה למדנו מתוך התיאור הטקסטואלי כי הניתוח הרפלקטיבי בקהילת מורים שיתופית נתן מענה לצורך של מורים בקשר ושייכות (Roth et al., 2017; Taylor et al., 2011). נוסף על כך ההנחה כי מתן הזדמנויות לבחירת תכנים אקדמיים מאתגרים ושילובם בפועל באמצעות חשיבה רפלקטיבית ושיתופית נתנה מענה לצורך בשייכות ובלמידה אוטונומית (Roth et al., 2011). עם זאת, ככלל, הרכיב הרביעי, השאיפות, לא נדון כלל במחקרים על תוכנית ה-STeLLA.

בדומה, גם בדוגמה השנייה, בתוכנית פיתוח מקצועי למורי ביולוגיה, הוזכרו רק שלושה מבין ארבעת רכיבי

מבקש: ההנאה היא בעיקר מן החיפוש ולא מן המציאה, מן המשחק ולא מן הניצחון, מן הדרך ולא מן המטרה (Sapolsky, 2011).

חלקים במוח הקשורים במערכת התגמול הדופמינרגית נמצאו פעילים במהלך חוויות של מוטיבציה פנימית (Haber & Knutson, 2010). בפרט, הופעלו במהלך חוויות המוטיבציה הפנימית אזורים במוח הקשורים בעיסוק בשאיפות ובאינטרסים אישיים (Enzi et al., 2009). יתרה מזו, מצאו לי וריב (Lee & Reeve, 2020) כי הזיכרון והמודעות לחוויות הרגשיות של מוטיבציה פנימית יוצרים במוח דפוסי הפעלה עצבית הדומים לאלו המתנהלים בזמן החוויה עצמה. חוקרים עומדים על קשר עמוק בין רכיבי הרווחה המקצועית למערכות מוחיות כגון מערכת התגמול ומערכות רגש ומוטיבציה פנימית (Di Domenico & Ryan, 2017; Enzi et al., 2009; Haber & Knutson, 2010; Reeve & Lee, 2019). נתונים אמפיריים ראשוניים שנאספו עודדו את די דומניקו ורייאן (Di Domenico & Ryan, 2017) לקשור בין תחושות המוטיבציה הפנימית המסתמכות על רכיבי הרווחה המקצועית לבין שתי מערכות רגש מרכזיות (Davis & Panksepp, 2011; Panksepp, 2004) הנוגעות לחיפוש (seek) ולמשחק החברתי (play). הם סבורים כי מערכת החיפוש (seek) קשורה קשר הדוק לצורך באוטונומיה, במסוגלות ובהגשמת שאיפות, ואילו מערכת המשחק (play) עשויה לספק הסבר נירוביולוגי לחשיבות שיש לסיפוק צורך השייכות (Di Domenico & Ryan, 2017).

הסקירה הספרותית עד כה מעלה תהיות על המידה שבה תוכניות פיתוח מקצועי המוגדרות יעילות תומכות בצמיחה אישית-מקצועית של מורים ועד כמה הן מכלילות רכיבי רווחה מקצועית (מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות).

האם תוכניות פיתוח מקצועי יעילות מכלילות רכיבי רווחה מקצועית?

דרלינג-המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017, pp. 2) הגדירו התפתחות מקצועית יעילה "למידה מקצועית מובנית הגורמת לשינויים בידע ובפרקטיקות הוראה של המורים ומשפרת את תוצאות הלמידה של תלמידים". הם זיהו שבעה מאפיינים לתוכניות יעילות: (1) מיקוד לתוכן הנלמד בכיתה; (2) שילוב למידה פעילה; (3) יישום של למידה שיתופית באמצעות אינטראקציות מקצועיות; (4) שימוש במודלים ופרקטיקות הוראה שהוכחו יעילות; (5) מומחים הנותנים תמיכה ואימון לצד התמקדות ישירה בצורכי ההוראה האישיים של המורה; (6) טיפוח הרגלי משוב ורפלקציה בקרב מורים; (7) יצירת המשכיות בתהליך הלמידה וההתפתחות של מורים



באים לידי ביטוי בגישות של המורים למדעים ולמתמטיקה המומחים כלפי ההתפתחות האישית-מקצועית שלהם. יושם חקר מקרה מרובה (Yin, 2014), שיטה שבה נחקרים חקר הוליסטי ובו בזמן חקר מקרים מרובים (Stake, 1995). עשרים מורים למדעים ולמתמטיקה מבתי ספר תיכוניים רבים בישראל נבחרו למטרה זו. כל אחד מהמורים נשאל על החשיבות שהוא מעניק לרווחתו המקצועית, ושימש חקר מקרה ייחודי (Merriam, 2014).

ההקשר המחקרי

מחקר זה מתמקד במורים למדעים ולמתמטיקה, מקצועות עיקריים בין מקצועות ה-STEM במערכת החינוך העל-יסודית. בעשורים האחרונים מערכות חינוך ברחבי העולם מקדמות את חינוך ה-STEM מתוך הבנה שעליהן להכשיר את תלמידיהן לעמוד בדרישות ההולכות וגדלות של שוק העבודה בעידן טכנולוגי משתנה. תחרות עולמית בכל תחומי החיים, ובכללם בתחום החינוך, נוסף על תחרויות המנבאות מחסור במספר אנשי המקצוע בתחומי ה-STEM, מציבים את החינוך ל-STEM בקדמת הבמה (Brown et al., 2011; English, 2016).

המצדדים בחינוך ל-STEM מאמינים בתרומתו לחינוך מיומנויות פתרון בעיות ולחשיבה ביקורתית ואנליטית בהקשר של בעיות בעולם האמיתי (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). ההנחה היא שתלמידים המתנסים התנסות חיובית בפתרון בעיות בשלבים מוקדמים של השכלתם עשויים לפתח קריירה בתחומים הקשורים ל-STEM. לאחרונה אף נשמעה קריאה לשיתוף פעולה בין מורים ולחיבור קוריקולרי בין תחומי ה-STEM כדי לשפר את יכולות התלמידים לפתור בעיות מציאותיות בין-תחומיות (Brown et al., 2011; El Nagdi et al., 2018).

נציין כי על אף שמערכת החינוך הישראלית מנסה לקדם את חינוך ה-STEM בדרכים שונות (למשל, מתן משאבים, יישום רפורמות חדשניות ויוזמות לתוכניות פיתוח מקצועי רלוונטיות), היא אינה פועלת די לקידום קשרים בין-תחומיים קוריקולריים בין מקצועות ה-STEM. כמו במדינות רבות אחרות, מורי STEM ישראלים מעורבים בעיקר בדיסציפלינה הספציפית שלהם ולעיתים רחוקות משתפים פעולה בפיתוח והטמעה של תוכנית לימודים בין-תחומית הממוקדת STEM בבתי הספר שלהם (Brown et al., 2011; El Nagdi et al., 2018).

משתתפי המחקר

במחקר השתתפו 20 מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים

רווחה מקצועית: מסוגלות, שייכות ואוטונומיה. בפרט, עבור המורים שהשתתפו בתוכנית נוצרו הזדמנויות לחשיבה ביקורתית וללמידה אוטונומית באמצעות התנסות בלמידה פעילה בעזרת תכנון מפגשים כפעילויות למידה שאפשר ליישם לאחר מכן בכיתה (Greenleaf et al., 2011). גרינליף ואחרים (Greenleaf et al., 2011) טענו במפורש שהסיוע למורים לפתח מומחיות דיסציפלינרית נוגע לאוטונומיה המקצועית של מורים. כמו כן איתרנו שני רכיבי רווחה נוספים, מסוגלות ושייכות, בטקסט: מתוך התיאור על שיפור ידע המורים והישגי תלמידיהם נלמד על התרומה לתחושת המסוגלות להשפיע על למידת תלמידים ולהתמודד טוב יותר עם סוגיות פדגוגיות בתחום הדעת (Greenleaf et al., 2011). נוסף על כך תיאור שיתוף הפעולה בלמידה קהילתית פעילה (Greenleaf et al., 2011) נראה עונה על צורך רגשי של המורים בשייכות. כמו בתוכנית STeLLA, גם כאן לא היה כל אזכור רכיב השאיפות של מורים.

ככלל, שתי דוגמאות אלו ממחישות כי גם אם אפשר ללמוד בספרות על תוכניות פיתוח מקצועי יעילות במישרין או בעקיפין על קיומם של שלושה מתוך ארבעת רכיבי הרווחה מקצועית, הרכיב הרביעי, השאיפות, חסר ואי אפשר לזהות אותו. למורים יש תפקיד חשוב וחיוני בתהליך השילוב וחיבור של תלמידים לתחומי המדעים והמתמטיקה. משום כך היעדר מודעות לרווחה המקצועית של מורים תמוה, בעיקר משום שמרבית מערכות החינוך כיום שואפות להגדיל במידה ניכרת את מספר התלמידים הנכנסים לתחומים הקשורים למדעים ומתמטיקה (Brophy et al., 2008; Merrill & Daugherty, 2010; National Science Board, 2007; Suddreth & Itamura, 2007) ומודאגות מהמחסור במורים למדעים ולמתמטיקה מנוסים (Hutchison, 2012; Wright et al., 2019). נשאלת אפוא השאלה: האם למורים למדעים ולמתמטיקה מומחים יש בכלל צורך במתן מענה לרווחתם המקצועית? האם ייתכן שהמצב הקיים מספק לחלוטין את צרכיהם המקצועיים ואינו דורש בחינה נוספת? מחקר זה מהרהר בשאלות אלו באמצעות איסוף ראיות אמפיריות של הצורך והחשיבות שמורים למדעים ולמתמטיקה מומחים רואים ברווחתם המקצועית כזו התורמת לצמיחתם האישית-מקצועית.

מתודולוגיה

במחקר זה נעזרנו במתודולוגית חקר מקרה איכותנית המאפשרת לחוקרים לחקור תופעות מורכבות בהקשרים ייחודיים (Merriam, 2014; Yin, 2014). גישה זו נמצאה מתאימה לכוונתנו לחקור כיצד צורכי הרווחה המקצועית



אשכול מדעים עירוני, מעריך בחינות בגרות, מדריך בהכשרת מורים ברמה ארצית, הכנה לקראת אולימפיאדה בפיזיקה או במתמטיקה, מפתח תוכניות לימודים בתחום המדעים או המתמטיקה וכיוצא בזה). קבוצת המורים הייתה מגוונת הן בהיבט מגדר (12 נשים, 8 גברים) הן במקצועות ההוראה (מתמטיקה, פיזיקה, כימיה, ביולוגיה, מדעי המחשב). טבלה 1 מפרטת בשם בדוי את הרקע המקצועי והאקדמי של משתתפי המחקר, את מקצועות

(במונחים של הכשרה וניסיון מקצועי) משישה בתי ספר תיכוניים בישראל. המשתתפים נבחרו במכוון על פי הוותק שלהם בהוראת תחומי הדעת לבחינות הבגרות. ותק המורים נע בין 15 ל-31 שנים. כלל המורים היו בעלי תעודת הוראה, תואר אקדמי במקצוע ההוראה שלימדו ותואר אקדמי נוסף בהתמחות בחינוך למדעים או מתמטיקה. כמו כן כל המורים פיתחו קריירה הקשורה למקצוע ההוראה בתוך בית הספר או מחוצה לו (תפקידים כגון רכז מתמטיקה, רכז צוות מדעים בבתי הספר, רכז

טבלה 1: רקע מקצועי ואקדמי של משתתפי המחקר

שם המורה (מגדר)	מקצוע ההוראה	שנות ותק בהוראה	רקע אקדמי	תפקידים מקצועיים נוספים (בתוך בית הספר ומחוצה לו)
קלי (אישה)	כימיה	20	תואר ראשון ושני בכימיה; תעודת הוראה	רכזת כימיה; רכזת אשכול מדעים
שלי (אישה)	כימיה	18	תואר ראשון בכימיה ותעודת הוראה; תואר שני במדעי הרפואה	רכזת כימיה; מחנכת כיתה
רחל (אישה)	ביולוגיה	32	תואר ראשון במדעי החיים ותעודת הוראה	מרכזת מקצוע
פאולה (אישה)	ביולוגיה	31	תואר ראשון בביולוגיה ותעודת הוראה	אחראית עבודות גמר בביולוגיה; אחראית מערכת
דולי (אישה)	מתמטיקה	15	תואר ראשון במדעי המחשב; תואר שני בהוראת המתמטיקה ומדעי המחשב; דוקטורט בהוראת המדעים; תעודת הוראה במתמטיקה	מנהלת מערכות מידע ברשת חינוך ארצית שבית ספרה משתייך אליה
איגור (גבר)	מתמטיקה	15	תואר ראשון במתמטיקה ומדעי המחשב; תואר שני בהוראת מתמטיקה ומדעי מחשב; תעודת הוראה	רכז מתמטיקה; מרצה בהשתלמות למורים בנושא של שימוש בטכנולוגיה להוראת המתמטיקה
תום (גבר)	מתמטיקה	22	תואר ראשון בהנדסת מכונות; תואר שני בהוראת המדעים; תעודת הוראה במתמטיקה	רכז מגמת רובוטיקה
מוטי (גבר)	מתמטיקה ומדעי המחשב	21	תואר ראשון במתמטיקה; תעודת הוראה במתמטיקה ומדעי המחשב	רכז מתמטיקה
לילי (אישה)	מדעי המחשב	17	תואר ראשון במדעי המחשב; תעודת הוראה במדעי המחשב	רכזת מדעי המחשב; רכזת מגמת הנדסת תוכנה
אלכס (גבר)	פיזיקה	15	תואר ראשון ותואר שני בהנדסת חשמל; תעודת הוראה בפיזיקה	רכז פיזיקה; רכז פדגוגי בעמותה חינוכית; יועץ אקדמי לסטודנטים באוניברסיטה; מרצה בקורס הכנה לאולימפיאדה בפיזיקה
בארי (גבר)	פיזיקה	23	תואר ראשון ושני בפיזיקה; מהנדס מתכות; תעודת הוראה	רכז פיזיקה; מורה לפיזיקה בבית ספר נוסף
מירי (אישה)	פיזיקה	28	תואר ראשון ושני בפיזיקה; תעודת הוראה	רכזת פיזיקה; מורה לפיזיקה בבית ספר נוסף
ליבי (אישה)	מתמטיקה	30	תואר ראשון ושני במתמטיקה; תואר שלישי בהוראת המדעים; תעודת הוראה במתמטיקה	מדריכה ארצית למורים למתמטיקה; מדריכה בקורסי פיתוח מקצועי למורי מתמטיקה



שם המורה (מגדר)	מקצוע ההוראה	שנות ותק בהוראה	רקע אקדמי	תפקידים מקצועיים נוספים (בתוך בית הספר ומחוצה לו)
סיגל (אישה)	מדעי המחשב	15	תואר ראשון במדעי המחשב; תעודת הוראה	רכזת מדעי המחשב; רכזת יחידת המחשוב במכללה; מרצה בקורסי מחשוב לנוער
ליהי (אישה)	כימיה	15	תואר ראשון ושני בכימיה; תעודת הוראה; לומדת לקראת תואר שלישי בהוראת המדעים	רכזת כימיה; רכזת פרויקטים מדעיים בבית ספרה
תימור (אישה)	מתמטיקה	17	תואר ראשון במתמטיקה; תואר שני במנהל החינוך; תעודת הוראה במתמטיקה	רכזת מתמטיקה; רכזת פדגוגית וסגנית מנהלת בבית ספרה
שפרה (אישה)	מתמטיקה ומדעי המחשב	17	תואר ראשון במדעי המחשב; תעודת הוראה; תואר שני במנהל עסקים	רכזת מתמטיקה
זיגי (גבר)	פיזיקה	19	תואר ראשון בהנדסת מכונות; תואר שני בהוראת המדעים; תעודת הוראה בפיזיקה	רכז פיזיקה
אפי (גבר)	פיזיקה ורובוטיקה	20	תואר ראשון בהנדסת חשמל; תואר שני ושלישי בהוראת המדעים; תעודת הוראה בפיזיקה	מרכז מגמת רובוטיקה; מרצה במחלקה להוראת מדעים וטכנולוגיה באוניברסיטה
אבי (גבר)	ביולוגיה וקיימות	21	תואר ראשון באקולוגיה; תואר שני ושלישי בהוראת המדעים; תעודת הוראה בביולוגיה	רכז ביולוגיה; מעריך בחינות בגרות בלימודי סביבה

איסוף הנתונים וניתוחם

מגוונים הנמצאים על סדר יומם ולהרחיב עליהם הרחבה חופשית ובלתי מוגבלת ולספק תשובה לשאלת המחקר.

הראיונות עם המורים משתתפי המחקר נעשו במהלך הסמסטר הראשון של שנת הלימודים כדי למנוע כל מיני הטיות בשל עייפות מצטברת לקראת סוף שנת הלימודים. כמין כן אחת מכותבות מאמר זה ערכה את כל הראיונות עם המורים בתוך הסביבה החינוכית המוכרת להם בבתי הספר שהם מלמדים בהם. כל ריאיון נמשך בין שעה לשעה ורבע. המורים המרואיינים השתתפו בהתנדבות, הובטחה להם אנונימיות ונאמר להם שאפשר להפסיק את הריאיון בכל זמן נתון.

הראיונות הוקלטו ותומללו זמן קצר לאחר עריכתם. הטקסטים של התמלילים שימשו לניתוח נתונים נושאי (Braun & Clarke, 2006). כדי לזהות רכיבי רווחה מקצועית המשתקפים בטקסט אימצנו גישה סמויה, הכוללת גם קריאה מתוך הטקסט הסמוי (סאבטקסט). בד בבד הקידוד הידני נעשה בנפרד בהתחלה, ולאחר מכן השוו המחברות את הקידודים שלהן, מתוך השמטת קידודים שנויים במחלוקת. הקידוד הספציפי הוא קידוד

הנתונים במחקר נאספו באמצעות ראיונות עומק מובנים למחצה (Willig, 2013). הראיונות נבנו על פי שיטת Strength, Weaknesses, Opportunities, and) SWOT Helms & Nixon,) שמקורה במנהל עסקים (Threats המשתתפים נשאלו על חייהם המקצועיים והתבקשו לדון בכל מיני היבטים של הקריירה המקצועית שלהם מנקודת מבט של חוזקות וחולשות פנימיות בהווה בהתאם להזדמנויות ואיומים מקצועיים עתידיים. כדי להימנע מהטיות לא מודעות ולחשוף את החשיבות הכללית שמורים למדעים ולמתמטיקה מומחים מקשרים לרווחתם המקצועית, החלטנו לשאול שאלות כלליות על החוזקות המקצועיות, החולשות, ההזדמנויות והאיומים של המורים, מבלי לעסוק במפורש ברווחתם המקצועית ובהיבטים אחרים של הפיתוח המקצועי. המרואיינים התבקשו לעסוק בנושאים פנימיים וחיצוניים חיוביים ולא חיוביים בארבעת היבטי ה-SWOT הנוגעים לחינוך המדעי והמתמטי בישראל בארבע רמות: (1) רמת הפרט; (2) רמת בית הספר; (3) רמת תוכנית הלימודים; (4) הרמה המערכתית לאומית (ראו שאלות מנחות לריאיון בנספח 1). לכן המרואיינים יכלו לעסוק בנושאים



שייכות: הצורך בשייכות מקצועית התבטא בתחושות של חוסר קשר ובדידות מקצועית של מורים המעידים כי חסרה עבודת צוות שיתופית עם עמיתים מומחים נוספים: "אני כרכוז מקצוע [המתמטיקה] מאוד מכוונת עבודה, הצוות שלי מאוד מקצועי, אבל יש מעט מאוד שיתוף פעולה ועבודת צוות" (שפרה, מתמטיקה ומדעי המחשב). סגל, מורה־רכוז למדעי המחשב אפילו תיארה תחושת בדידות הקשורה למיומנויות מקצועיות חסרות בקרב המורים בצוות שלה: "יש כאן הרבה בעיות וחולשות מקצועיות אצל כל אחד מחברי הצוות [...] באמת שאין לי הרבה צוות לעבוד איתו ואני עסוקה בלחשוב איך למזער נזקים".

בכמה מקצועות מדעיים, כגון פיזיקה וכימיה, הוזכרה בדידות מקצועית הנובעת ממיעוט המורים בצוות המקצוע: "כמורה היחיד לפיזיקה בבית הספר שלי, אני עסוק מעל הראש ואני נכנס רק לחדר המורים אולי פעמיים בחודש [...] כשאני מסתכל סביבי, אני מגלה שאני לא מכיר בערך 80 אחוז מהמורים, אז אם את שואלת אותי מה קורה בבית הספר, אני מתבודד. תמיד הייתי כזה" (אלכס, פיזיקה).

אוטונומיה: כמה מהמורים ביטאו שביעות רצון מחופש הפעולה שניתן להם בבית הספר: "אני עושה מה שאני רוצה. אני יודע שמעריכים אותי ומאמינים במאה אחוז. כלומר אני מקבל חופש מוחלט. הם לא בודקים אותי ולא מבקרים אותי [...] אני לא אוהב שמכתיבים לי" (בארי, פיזיקה). ממצא זה עולה בקנה אחד עם רכיב האוטונומיה, המדגיש את החשיבות שמעניק איש המקצוע להתנהגות הנובעת מתחושת בחירה חופשית מתוך ניגוד לשליטה וסמכות (Deci & Ryan, 2008; Weinstein & Ryan, 2010).

עם זאת, תחושת האוטונומיה שתוארה לעיל אינה קשורה לחופש אקדמי־מקצועי לבחור ולשנות את תוכני ההוראה, ולהחליט מה נכון, מתאים ומעודכן ללמד. המורים המומחים למדעים ולמתמטיקה ציינו כי תוכניות הלימודים מוכתבות בידי מערכת החינוך ואינן משאירות זמן להרחבה: "כשאתה אחראי על הכנת התלמידים לבחינות הבגרות, אין לך הרבה" (מוטי, מתמטיקה ומדעי המחשב). המורים הוסיפו כי לעיתים קרובות שינויי פתח בתוכנית הלימודים וצמצום בשעות ההוראה מחמירים את המצב עוד יותר, היות שהמורים נחשבים אחראים להישגי התלמידים: "יש כל כך הרבה חומר תאורטי שלמעשה יש מעט מאוד זמן פנוי לכל דבר אחר" (פאולה, ביולוגיה). המורים הוסיפו כי לעיתים קרובות שינויים בתוכנית הלימודים וצמצום בשעות ההוראה מחמירים

אנכי (עבור כל משתתף) ואופקי (על פני המשתתפים הרבים) כאשר כל ריאיון נפרד הושווה לאחרים (Corbin & Strauss, 2015; Miles et al., 2019). נעשה שימוש בטכניקת קידוד צירית (axial coding) כדי לשלב נתונים ולזהות נושאים מתעוררים הקשורים לארבעת רכיבי הרווחה המקצועית בקולות המשתתפים.

השוואה בין הראיונות והדיון על כל מורה לחוד סייעה להבנת קווי דמיון והבדלים בין המורים המשתתפים (Corbin & Strauss, 2015), ולנסח את הממצאים המבטאים את החשיבות שמעניקים לרווחתם המקצועית מורים מומחים למדעים ולמתמטיקה. מתוך כך גובשה תאוריה מבוססת הקשר המאפיינת את הניואנסים ואת החשיבות שהעניקו מורים מומחים למדעים ולמתמטיקה לרווחתם המקצועית (Charmaz, 2014; Corbin & Strauss, 2015; Miles et al., 2019).

נוסף על הראיונות בוצע ניתוח תמטי לאיתור רכיבי רווחה מקצועית גם בתוכניות פיתוח מקצועי המתוארות בספרות המקצועית כיעילות (Darling-Hammond et al., 2017).

ממצאים

ממצאי המחקר מראים כי כל ארבעת רכיבי הרווחה המקצועית מהווים צרכים מקצועיים בסיסיים של המורים. בייחוד הודגש הצורך במימוש שאיפות מקצועיות להתפתחות אישית־מקצועית בקריירת ההוראה, צורך שאינו מקבל מענה בתוכניות פיתוח מקצועי שהמורים משתתפים בהן. להלן יודגם הביטוי לארבעת רכיבי הרווחה המקצועית בציטוטי דברי המורים.

מסוגלות: מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים חשפו בראיונות תחושת מסוגלות עצמית גבוהה בתחום הוראתם. ביטוי לכך ניתן במשפטים, כגון "הדבר היחיד שאני נהנה ממנו הוא לסגור את הדלת ולהעביר שיעור טוב [...] זה הכול הניסיון והידע הדיסציפלינרי שלי" (רחל, ביולוגיה) או "אפילו עם סמרטוט וגיר אני מסתדרת טוב" (שפרה, מתמטיקה ומדעי המחשב).

עם זאת הביעו המורים צורך מקצועי לשמר ולהרחיב יכולות וידע ולהיחשף למגמות עדכניות ורלוונטיות בתחומי המדע והמתמטיקה: "כמורה לפיזיקה בתיכון, אני מרגיש שאני לא מספיק חשוף לחדשנות פדגוגית כדי להשתמש במגוון גישות הוראה" (זיגי, פיזיקה). קלי (כימיה) הסבירה: "מורה צריך להיות איש אשכולות. אני צריכה להיות אדם שיוודע הרבה ולומד הרבה. אני צריכה להיות גם אינטלקטואלית [...] לשם כך אני חייבת לראות עולמות שונים, לשאוב מהם השראה ולעשות בין הדברים סינתזות".



או אפילו ראשת מחלקה [...] האפשרויות האלה מאוד מעניינות עבורי [...] אני גם רוצה לעשות קצת מחקר מלבד ללמד את אותם נושאים ופרקים שוב ושוב [...] אבל אין לי הזדמנויות אמיתיות כאלו.

עם זאת, המורים מודעים לאתגר הגדול של מורים למדעים ולמתמטיקה במציאת כיוון מתאים לצמיחה האישית-מקצועית שלהם. לדוגמה, מירי (רכות פיזיקה) ציינה את הקושי במימוש שאיפות בעת העבודה בבית הספר: "אופק ההתפתחות של מורי מדעים מוגבל מאוד [...] זו נקודה קריטית, האופק המקצועי [...] מורים למתמטיקה ופיזיקה הם אנשים שלרוב לא נכנסים לתפקידי ניהול [...] יש למצוא דרך אחרת [...] כמו לעשות קצת מחקר, ניסויים."

שלי, מורה ורכות כימיה, תיארה את שאיפותיה המקצועיות וטענה כי הרפורמה החינוכית הישראלית "עוז לתמורה" הציבה למעשה תקרת זכוכית בלתי שבירה מעל האופק המקצועי של מורים למדעים ולמתמטיקה:

מעולם לא נמשכתי לחינוך כיתה, למרות שעשיתי את זה טוב מאוד [...] הייתי צריכה לעשות את זה כדי למלא את שעות ההוראה שלי [...] אבל אם אני חושבת על עצמי ושואלת את עצמי מה אני הכי אוהבת, זה לקדם רעיונות, לקדם פרויקטים, לקדם מדע, לקיים דיונים ברמה גבוהה על תהליכים מדעיים עם התלמידים שלי [...] לצערי, אי אפשר לממש את הרצונות האלה [...] אני חושבת שיש תקרת זכוכית עבה ומאוד בלתי שבירה מעל ראשם של המורים [...] הם חייבו את המורים לעבוד 8 שעות ביום, 5 ימים בשבוע [...] תוכניות הפיתוח המקצועי שמורים מגיעים אליהן אינן בהכרח ממוקדות בתחום הדעת, אלא לרוב מכוונות לצורכי בית ספר, ורק שעתיים בשבוע [...] זה מקשה מאוד על המורים לצמוח מקצועית בתחום הדעת שלהם.

ההזדמנויות המוגבלות למימוש שאיפותיהם של המורים באות לידי ביטוי בתחושות של תסכול עמוק ושחיקה, הגורמות לרצון לחמוק ממחויבויות מקצועיות, כפי שהסביר איגור, מורה ורכז למתמטיקה:

האיום העיקרי הוא שיימאס לי [...] בעצם כבר קצת נמאס לי להסביר את אותו הדבר שוב ושוב [...] אני קצת חסר סבלנות מלעשות את אותם הדברים שוב ושוב [...] זה קשה, לחזור על אותם שיעורים שוב ושוב פעמים רבות [...] למורים למתמטיקה אין הרבה הזדמנויות. אבל אם לקחת את עצמי כדוגמה, הודות לתקשוב,

את המצב עוד יותר: "בדרך כלל אין לנו אפילו מספיק זמן לתוכנית המיקוד המקוצרת [...] שזה פחות כיף [...] המטרה העיקרית היא להספיק את החומר הדרוש [...] זו ריצת מרתון [...] לפעמים זה מרגיש כאילו מישוה בכוונה הורס את הכיף מהחינוך לפיזיקה" (מירי, פיזיקה).

במדעי המחשב המורים מרגישים שיש צורך מיוחד לעדכן לעיתים תכופות את תוכנית הלימודים בחידושים בתחום, כדי שתישאר רלוונטית: "אני שומעת תלונות על כך שתוכנית הלימודים לא תמיד מותאמת כמו שצריך [...] זה נושא מאוד בעייתי מבחינת הרלוונטיות למה שקורה כרגע בתחום המחשוב מחוץ לבית הספר" (סיגל, מדעי המחשב).

בחינוך המתמטי, רכז המקצוע בונה בדרך כלל תוכנית עבודה שנתית מפורטת עבור צוות המתמטיקה מתוך דרישות תוכנית הלימודים העדכנית. אף שתוכנית עבודה זו נועדה לסייע בהוראה, היא מפחיתה עוד יותר את החופש האקדמי שיש למורה, כפי שהביעה ליבי, מורה למתמטיקה:

לדעתי זה מאוד מדכא כשאומרים לך בדיוק מה לעשות כל יום [...] אפילו ברמה של איזה תרגיל לפתור בכיתה ואיזה בבית [...] זה ממש לא נותן לך לפתח שום יצירתיות [...] צריך לאפשר יותר חופש למורים בבניית ההוראה והמקצועיות שלהם.

ליבי עסקה גם בתוכניות הפיתוח המקצועי האחידות וציינה כי "החופש הוא מוגבל בהשתלמויות שאינן תואמות את רמת הניסיון שלי, אבל עדיין מנסות ללמד אותי איך להתמודד עם הכיתה שלי [...] במקום להעצים אותי לפי הרמה שלי, אני מרגישה שהם פשוט מבזבזים את הזמן שלי, ואני לא לומדת שום דבר חדש".

שאיפות: שלא כשלושת רכיבי הרווחה המקצועית האחרים (מסוגלות, שייכות ואוטונומיה), שציינו כמה משתתפים בדבריהם, כל 20 המורים שרואיניו ציינו את רכיב השאיפות המקצועיות. כלל המורים הדגישו את החשיבות שהם מעניקים להגשמת שאיפותיהם המקצועיות. באופן העולה בקנה אחד עם מודלים רבי-ממדיים של רווחה פסיכולוגית (Ryff & Keyes, 1995), הביעו המורים שאיפות לצמיחה אישית-מקצועית רחבה, כזו שמעבר לבית הספר. לדוגמה, פאולה (ביולוגיה) תיארה את שאיפותיה בדרך הזאת:

לעשות משהו מעבר להוראה [...] לעשות דברים שמקדמים [...] לנסות לעשות משהו לשיפור שיטות הוראה ודרכי חשיבה [...] לצאת למכללות, להיות מרצה,



בהוראה שלהם. עם זאת, עדיין יש צורך עז להרחבת הידע הדיסציפלינרי ולפתוח ראייה רחבה, חדשנית ועכשווית בנושא המדעי-טכנולוגי. צורך זה של מורים מומחים אינו מסופק בתוכניות פיתוח מקצועי נוכחיות. אחת הסיבות קשורה בכך שתוכניות פיתוח מקצועי יעילות (Darling-Hammond et al., 2017) נוקטות גישה כללית להתפתחות מקצועית של מורים, שאינה מבדילה בין רמות מגוונות של מקצועיות מורים. נוסף על כך תוכניות פיתוח מקצועי בתחומי המדעים והמתמטיקה הן לרוב מכוונות תוכנית לימודים, ומטבען תוכניות הלימודים אינן נוטות לעמוד בקצב החידושים התכופים במדע ובטכנולוגיה (Kopcha et al., 2017). הכללת כלל המורים בתוכנית פיתוח מקצועי אחת מסתמכת על ההנחה כי ישנם מאפיינים משותפים בין המורים ברצף חייהם המקצועי ושדרך תוכנית פיתוח מקצועי אחת עשויה להתאים לכולם (Huberman, 1995). עם זאת, הממצאים העולים מהראיונות שנעשו עם מורים למדעים ולמתמטיקה המומחים סותרים הנחה זו ועומדים בקנה אחד עם הקביעה של הוברמן (Huberman, 1995, p. 193) כי "למורים יש מטרות שונות ודילמות שונות ברגעים שונים במחזוריות החיים המקצועיים שלהם, והרצונות שלהם לידע, למומחיות ולמימונות טכנית ישנתו בהתאם". קביעה זו תואמת את ההבנה כי מערכות מוחיות מניעות את האדם אחרת בכל מיני סיטואציות של החיים המקצועיים. בשל ניסיונם המקצועי המצטבר, מורים מומחים בעלי מסוגלות גבוהה בתחום הוראתם יטו להשתעמם היכן שמורים חדשים בהוראה יחוו נתרמים. מערכת החיפוש המוחית (seek), המעוררת רגשות של סקרנות ועניין במעין מעגל חיפוש תמידי אחר דופמין (Berridge, 2004; Sapolsky, 2011), גורמת שמורים מומחים ימשיכו בחיפוש אחר התקדמות ועניין מקצועי, ואף יעשו פעולות לקידום הקריירה שלהם. משתתפי מחקר זה המשולבים כולם בעיסוקים נוספים על הוראה (ראו טבלה 1) הם עדות לחיפוש של מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים אחר עניין וקידום מקצועי.

שייכות: די דומניקו וראיין (Di Domenico & Ryan, 2017) מקשרים את הצורך בשייכות מקצועית הכרוכה בהתמודדות על תפקידים בארגון ובתחרות עם עמיתים למערכת המשחק המוחית (play) (Davis & Panksepp, 2011), הנותנת דגש על הצורך בשייכות. למשל, ההשתתפות בתחרות והרצון "לנצח" במשחקי כוח ובעימותים מסבירים ותומכים בצורכי מורים למדעים ולמתמטיקה המומחים בשייכות.

הממצאים מראים שמורים למדעים ולמתמטיקה, ביחוד כאלו שהצוות המקצועי שלהם מצומצם, חשים בידוד

מצאתי את עצמי במקום אחר. אלמלא מצאתי הזדמנות לשלב תקשוב בהוראת המתמטיקה, לא הייתי היום מורה יותר.

לסיום, המורים הביעו צורך בלתי מתפשר בנוכחותם של ארבעת רכיבי הרווחה בחייהם המקצועיים, הם הדגישו במיוחד את הצורך לממש את שאיפותיהם המקצועיות. שאיפות אלו הן בדיוק רכיב הרווחה שחסר לחלוטין במאפייני תוכניות פיתוח מקצועי יעילות שסקרו דרלינג-המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017).

להתעלמות משאיפותיהם המקצועיות של מורים למדעים ולמתמטיקה עשויה להיות השלכה חמורה על חייהם המקצועיים והמשך תרומתם למערכת החינוך. מעצבי תוכניות פיתוח מקצועי צריכים לתת ביטוי לרווחה מקצועית בתוכניות פיתוח מקצועי ולהציגה כרכיב בהערכת יעילות של תוכניות חדשות. מערכות החינוך צריכות לספק למורים למדעים ולמתמטיקה הזדמנויות מקצועיות ולהרחיבן.

התבוננות בפיתוח מקצועי מתוך עדשה מורחבת זו עשויה לתרום לתפיסת המורים את חייהם המקצועיים משמעותיים, מעוררי השראה ומתגמלים.

דין ומסקנות

מחקרים מתחום מדעי המוח ופסיכולוגיה מראים כי הרווחה המקצועית מקדמת מוטיבציה פנימית ושביעות רצון של עובדים (Di Domenico & Ryan, 2017; Ryan et al., 2013; Reeve & Lee, 2019). מתוך כך הדגישו רובין ובראון (Rubin & Brown, 2019) את הרווחה המקצועית כרכיב העשוי לתרום לצמיחתם האישית-מקצועית של מורים. עיון בספרות המקצועית של תוכניות פיתוח מקצועי יעילות למורים זיהה כי צורכי המורים לרווחה מקצועית אינם נענים במלואם. מתוך היעדר קולם של המורים בהקשר זה ומתוך ניסיון להבין כיצד אפשר לשפר את תוכניות הפיתוח המקצועי באופן שישמשו מקום להתפתחות בחיים המקצועיים, ביקשנו במחקר זה לאסוף נתונים אמפיריים על תפיסות מורים מומחים למדעים ולמתמטיקה בנוגע לחשיבות שהם מעניקים לרווחתם המקצועית. ממצאי המחקר סיפקו עדות לחשיבות שמעניקים מורים לכל אחד מארבעת רכיבי הרווחה המקצועית. ניכר כי תוכניות פיתוח מקצועי יעילות מספקות רק במידה חלקית את שלושת צורכי הרווחה המקצועית, מסוגלות, שייכות ואוטונומיה של מורים למדעים ולמתמטיקה המומחים.

מסוגלות: ממצאי המחקר הראו כי מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים מציגים תחושת מסוגלות גבוהה



אינן מתוכננות למלא את הצורך של מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים לרווחה מקצועית. להתעלמות משאיפות המורים עשויות להיות השפעות על תפיסות, תחושות והחלטות מקצועיות של מורים למדעים ולמתמטיקה על הצמיחה האישית-מקצועית שלהם והישארותם במערכת.

החשיבות שהעניקו מורי המדעים והמתמטיקה המומחים למילוי ארבעת צורכי הרווחה המקצועית שהם צרכים פסיכולוגיים, נירוביולוגיים וחברתיים, מדגישה כי הרווחה המקצועית היא בעלת משמעות וראויה לבחינה מודעת של מעצבי תוכניות פיתוח מקצועי בעת תכנון תוכניות חדשות.

במחקר זה רווחה מקצועית היא רכיב נוסף וחיוני בבחינת יעילותם של תוכניות פיתוח מקצועי הן בהיבט הפסיכולוגי הן בהיבט הנירוביולוגי. התבוננות בתוכניות פיתוח מקצועי מתוך פריזמה מורחבת זו עשויה לתרום לראיית המורים את חייהם המקצועיים בעלי משמעות, מעוררי השראה ומתגמלים יותר. עם זאת, למחקר זה יש מגבלות: (1) המחקר נעשה בקרב 20 מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים מישראל. שכפול מחקר זה עם מורים למדעים ולמתמטיקה מומחים במדינות אחרות ברחבי העולם עשוי להוסיף תובנות חיוניות על צורך בהכללת רכיבי רווחה מקצועית בתוכניות פיתוח מקצועי; (2) אפשר להרחיב את היקף מחקר זה כדי לתת תשובה לצורכי הרווחה של מורי מתמטיקה ומדעים בשלבים מסוימים של קריירת ההוראה שלהם שאינם מומחים בהכרח; (3) המחקר הנירוביולוגי בתחום נמצא רק בראשית דרכו וחשוב לעדכן שכל הממצאים הקושרים בין מדעי המוח לרווחה המקצועית יעמיקו; (4) יש צורך במחקר נוסף כדי לבחון השפעות מעשיות של הרחבת הממצאים על דיסציפלינות נוספות.

מבחינה תאורטית הממצאים מוסיפים את ממד הרווחה המקצועית על מאפייני תוכניות פיתוח מקצועי יעילות שהציעו דרלינג-המונד ואחרים (Darling-Hammond et al., 2017) ומדגישים כי על מערכות החינוך להתמקד התמקדות עקיבה ומודעת בצמיחה מקצועית של מורים, לספק למורים הזדמנויות ולתמוך בפיתוח המקצועי שלהם. מבחינה מעשית, הצגת רווחה מקצועית בין מאפייני יעילות אחרים יכולה לשמש דרך להערכת יעילות של תוכניות פיתוח מקצועי. מבחינה מתודולוגית, מחקר זה מציע אימוץ גישה נירופדגוגית ללמידה. נירופדגוגיה משמשת תחום עניין חדש שמטרתו העיקרית להבין כיצד ליצור סביבת למידה המתאימה להתנהלות הלמידה במוח האנושי. אנו מציעות לאמץ גישה זו לא רק עבור למידת תלמידים במערכות חינוך,

מקצועית שאינה מקבלת מענה בתוך בית הספר. קהילות מורים מקצועיות חוץ בית ספריות הן ניסיון של קובעי המדיניות לתת מענה לצורך בשייכות מקצועית. עם זאת נראה כי גם מענה זה הוא חלקי, שכן משתתפי המחקר עמדו על הצורך בשייכות ארגונית המקורבת למחקר אקדמי לעיצוב תוכניות לימודים או לקבלת החלטות מקצועיות.

אוטונומיה: ויינשטיין ורייאן (Weinstein & Ryan, 2010) הדגישו את החשיבות של בחירה ואוטונומיה בעבודה להזדהות הפרט עם מטרות העבודה ולהגברת מוטיבציה פנימית לעשיית העבודה, וזאת מתוך ניגוד להשפעה השלילית של לחצים ותגמולים חיצוניים. ביסוס לקשר בין חוויות של מוטיבציה פנימית לתחושת האוטונומיה נמצא גם בתחום מדעי המוח (Enzi et al., 2009; Haber & Knutson, 2010; Lee & Reeve, 2020). חוקרים ציינו את התוצא (אפקט) המערער של פיתויים ולחצים חיצוניים הפוגעים ביכולת האדם לחוות את עצמו במרכז העשייה, כמערער את תחושת האוטונומיה ועשוי להפחית את המוטיבציה הפנימית (Di Domenico & Ryan, 2017). אכן, בראיונות ציינו המורים את היעדר האוטונומיה המקצועית ושתוכניות הלימודים נשלטות בידי קובעי המדיניות, זאת נוסף על עומס ולחץ הזמן שהם נתונים בו. בהתאמה מערכות חינוך ריכוזיות נוטות להכתיב את תוכניות הלימודים לבית הספר ולהשאיר למורים חופש מוגבל להחליט על שינוי או התאמה או עדכון. העניין שביטאו המורים בתפקידים המאפשרים מעורבות בקבלת החלטות ובתפקידים מקצועיים מחוץ למסגרת הבית ספרית, מדגיש את רצונם בחופש אקדמי מורחב שלא מקבל מענה בתוכניות פיתוח מקצועי מעצם מיקודם בעיסוק בתוכניות הלימודים בבית הספר.

שאיפות: בבחינת רכיב מיצוי שאיפות המורים הממצאים מציגים סתירה: מצד אחד מורים נוטים לראות חשיבות רבה ביותר בצמיחתם האישית-מקצועית ובהגשמת שאיפותיהם, בעוד מצד אחר שאיפות המורים מייצגות את הרכיב היחיד של רווחה מקצועית הנעדר מתוכניות פיתוח מקצועי יעילות. החשיבות המודגשת לרכיב השאיפות נתמכת גם בקשר הישיר למערכת החיפוש המוחית (seek) האחראית להפרשת דופמין המניע לפעולה. בפרט, אנזי ואחרים (Enzi et al., 2009) הראו כי במהלך חוויות של המוטיבציה הפנימית הופעלו אזורים במוח הקשורים בעיסוק בשאיפות ובעניינים אישיים. מימוש שאיפות, קרי השגת מטרות מקצועיות, מביאות לידי שביעות רצון, סיפוק והשהיית החיפוש, ואילו אי-מימוש עלול להביא לידי חיפוש אינסופי ואי-שביעות מתמשכת (Berridge, 2004).

ממצאי מחקר זה רומזים שתוכניות פיתוח מקצועי יעילות



רשימת מקורות

- Davis, K. L., & Panksepp, J. (2011). The brain's emotional foundations of human personality and the Affective Neuroscience Personality Scales. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 35(9), 1946–1958. <https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2011.04.004>
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2008). Hedonia, eudaimonia, and well-being: An introduction. *Journal of Happiness Studies*, 9(1), 1–11. <https://doi.org/10.1007/s10902-006-9018-1>
- Di Domenico, S. I., & Ryan, R. M. (2017). The emerging neuroscience of intrinsic motivation: A new frontier in self-determination research. *Frontiers in Human Neuroscience*, 11, Article 145. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2017.00145>
- El Nagdi, M., Leammukda, F., & Roehrig, G. (2018). Developing identities of STEM teachers at emerging STEM schools. *International Journal of STEM Education*, 5(1), 1–13. <https://doi.org/10.1186/s40594-018-0136-1>
- English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3, Article 3. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>
- Enzi, B., de Greck, M., Prösch, U., Tempelmann, C., & Northoff, G. (2009). Is our self nothing but reward? Neuronal overlap and distinction between reward and personal relevance and its relation to human personality. *PLoS ONE*, 4(12), Article e8429. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0008429>
- Fiorillo, C. D., Tobler, P. N., & Schultz, W. (2003). Discrete coding of reward probability and uncertainty by dopamine neurons. *Science*, 299(5614), 1898–1902. <https://doi.org/10.1126/science.1077349>
- Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 209–219. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0203_3
- Greenleaf, C. L., Litman, C., Hanson, T. L., Rosen, R., Boscardin, C. K., Herman, J., Schneider, S. A., Madden, S., & Jones, B. (2011). Integrating literacy and science in biology: Teaching and learning impacts of reading apprenticeship professional development. *American Educational Research Journal*, 48(3), 647–717. <https://doi.org/10.3102/0002831210384839>
- Atkinson, J. W., & Raynor, J. O. (1974). *Motivation and achievement*. V.H. Winston and Sons.
- Berridge, K. C. (2004). Motivation concepts in behavioral neuroscience. *Physiology & Behavior*, 81(2), 179–209. <https://doi.org/10.1016/j.physbeh.2004.02.004>
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Brophy, S., Klein, S., Portsmore, M., & Rogers, C. (2008). Advancing engineering education in P-12 classrooms. *Journal of Engineering Education*, 97(3), 369–387. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2008.tb00985.x>
- Brown, R., Brown, J., Reardon, K., & Merrill, C. (2011). Understanding STEM: Current perceptions. *Technology & Engineering Teacher*, 70(6), 5–9.
- Carroll, T., & Fulton, K. (2004). The true cost of teacher turnover. *Threshold* 8(14), 16–17. <https://www.aliefisd.net/cms/lib/TX01917308/Centricity/Domain/140/Teacher%20Turnover%20Grahic.pdf>
- Charmaz, K. (2014). Grounded theory in global perspective: Reviews by international researchers. *Qualitative Inquiry*, 20(9), 1074–1084. <https://doi.org/10.1177/1077800414545235>
- Corbin, J. M., & Strauss, A. L. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3rd ed.). Sage.
- Cuevas, R., Ntoumanis, N., Fernandez-Bustos, J. G., & Bartholomew, K. (2018). Does teacher evaluation based on student performance predict motivation, well-being, and ill-being? *Journal of School Psychology*, 68, 154–162. <https://doi.org/10.1016/j.jsp.2018.03.005>
- Damasio, A. R. (2021). *Feeling & knowing: Making minds conscious*. Knopf Doubleday Publishing <https://doi.org/10.1080/17588928.2020.1846027>
- Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development* [Report]. Learning Policy Institute. <https://doi.org/10.54300/122.311>



- Education*, 25(4), 489–507. <https://doi.org/10.1080/09500690210163233>
- Lee, W., & Reeve, J. (2020). Remembering pleasure and personal meaning from episodes of intrinsic motivation: An fMRI study. *Motivation and Emotion*, 44(6), 810–818. <https://doi.org/10.1007/s11031-020-09855-1>
- Lindvall, J., & Ryve, A. (2019). Coherence and the positioning of teachers in professional development programs. A systematic review. *Educational Research Review*, 27, 140–154. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.03.005>
- Marley, P. E. (2018). *Relationships among professional development activities and compensation regarding teacher attrition in rural public schools in the United States* [Thesis dissertation]. Georgetown University. https://repository.library.georgetown.edu/bitstream/handle/10822/1050832/Marley_georgetown_0076M_13920.pdf?sequence=1
- Maslow, A. H. (1943). A theory of human needs. *Psychological Review*, 50, 370–396. <https://doi.org/10.1037/h0054346>
- McClelland, D. C., Atkinson, J. W., Clark, R. A., Lowell, E. L. (1953). *The achievement motive*. Appleton-Century-Crofts. <https://doi.org/10.1037/11144-000>
- Merriam, S. B. (2014). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (2nd ed.). Jossey-Bass.
- Merrill, C., & Daugherty, J. (2010). STEM education and leadership: A mathematics and science partnership approach. *Journal of Technology Education*, 21(2), 2134–.
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldana, J. (2019). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (4th ed.). SAGE Publications.
- Natale, C. F., Bassett, K., Gaddis, L., & McKnight, K. (2013). *Creating sustainable teacher career pathways: A 21st century imperative* [Report]. National Network of State Teachers of the Year (NNSTOY). https://sep4u.gr/wp-content/uploads/pearson_edu.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics: An overview*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Science Board. (2007). *National action plan for addressing the critical needs of the U.S. Science, technology, engineering, and mathematics education system*. National Science Foundation. <https://www.nsf.gov/pubs/2007/nsb07114/nsb07114.pdf>
- Haber, S. N., & Knutson, B. (2010). The reward circuit: linking primate anatomy and human imaging. *Neuropsychopharmacology*, 35(1), 4–26. <https://doi.org/10.1038/npp.2009.129>
- Hall, D. T. (2002). *Careers in and out of organizations*. Sage. <https://doi.org/10.4135/9781452231174>
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Helms, M. M., & Nixon, J. (2010). Exploring SWOT analysis—where are we now? A review of academic research from the last decade. *Journal of Strategy and Management*, 3(3), 215–251. <https://doi.org/10.1108/17554251011064837>
- Hogan, R., & Warremfeltz, R. (2003). Educating the modern manager. *Academy of Management Journal*, 2(1), 74–84. <https://doi.org/10.5465/amle.2003.9324043>
- Huberman, M. (1995). Networks that alter teaching: Conceptualizations, exchanges and experiments. *Teachers and Teaching*, 1(2), 193–211. <https://doi.org/10.1080/1354060950010204>
- Hutchison, L. F. (2012). Addressing the STEM teacher shortage in American schools: Ways to recruit and retain effective STEM teachers. *Action in Teacher Education*, 34(5–6), 541–550. <https://doi.org/10.1080/01626620.2012.729483>
- Intrator, S. M., & Kunzman, R. (2007). The Person in the profession: Renewing teacher vitality through Professional Development. *The Educational Forum*, 71(1), 16–32. <https://doi.org/10.1080/00131720608984564>
- Koivu, A. (2013). *Clinical supervision and well-being at work: A four-year follow-up study on female hospital nurses*. Lap Lambert Academic Publication.
- Kopcha, T. J., McGregor, J., Shin, S., Qian, Y., Choi, J., Hill, R., Mativo, J., & Choi, I. (2017). Developing an integrative STEM curriculum for robotics education through educational design research. *Journal of Formative Design in Learning*, 1, 31–44. <https://doi.org/10.1007/s41686-017-0005-1>
- Laukenmann, M., Bleicher, M., Fuß, S., Gläser-Zikuda, M., Mayring, P., & von Rhöneck, C. (2003). An investigation of the influence of emotional factors on learning in physics instruction. *International Journal of Science*



- of *Personality and Social Psychology*, 69(4), 719–727. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.69.4.719>
- Santoro, D. A. (2018). *Demoralized: Why T teachers leave the profession they love and how they can stay*. Harvard Education Press.
- Sapolsky, R. (2011, February 5). *Dopamine Jackpot! Sapolsky on the science of pleasure*. [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=axrywDP9Ii0&t=130s>
- Song, S. C., & Alpaslan, M. M. (2015). Factors impacting on teachers' job satisfaction related to science teaching: A mixed methods study. *Science Education International*, 26(3), 358–375.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.
- Suddreth, D., & Itamura, V. (2007). *Perspectives of Utah educators on strategies to encourage the pursuit of mathematics and science*. Utah State Office of Education. https://www.researchgate.net/publication/234659554_Understanding_STEM_Current_perceptions
- Taylor, J. A., Roth, K., Wilson, C. D., Stuhlsatz, M. A. M., & Tipton, E. (2017). The effect of an Analysis-of-Practice, Videocase-based, teacher professional development program on elementary students' science achievement. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(2), 241–271. <https://doi.org/10.1080/19345747.2016.1147628>
- Thomsen, S., Soares, J., Nolan, P., Dallender, J., & Arnetz, B. (1999). Feelings of professional fulfilment and exhaustion in mental health personnel: The importance of organisational and individual factors. *Psychotherapy and Psychosomatics*, 68(3), 157–164. <https://doi.org/10.1159/000012325>
- Tucker, M. S. (2014). Fixing our national accountability system. Taris, *The National Center on Education and the Economy*. <https://www.ncee.org/wp-content/uploads/2014/08/FixingOurNationalAccountabilitySystemWebV4.pdf>
- van Horn, J. E., Taris, T. W., Schaufeli, W. B., & Schreurs, P. J. G. (2004). The structure of occupational well-being: A study among Dutch teachers. *Journal of Occupational and Organizational Psychology*, 77(3), 365–375. <https://doi.org/10.1348/0963179041752718>
- Panksepp, J. (2004). *Affective neuroscience: The foundations of human and animal emotions*. Oxford University Press.
- Reeve, J. (2002). Self-determination theory applied to educational settings. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Eds.), *Handbook of self-determination research* (pp. 183–203). University of Rochester Press.
- Reeve, J., & Lee, W. (2019). Motivational neuroscience. In R. M. Ryan (Ed.), *The Oxford handbook of human motivation* (2nd ed., 354–372). Oxford Academic. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780190666453.013.20>
- Revesencio, J. (2015). Why happy employees are 12% more productive. *Fast Company*, 22. <https://www.fastcompany.com/3048751/happy-employees-are-12-more-productive-at-work>
- Roffey, S. (2012). Pupil wellbeing—Teacher wellbeing: Two sides of the same coin? *Educational and Child Psychology*, 29(4), 8–17. <https://doi.org/10.53841/bpsecp.2012.29.4.8>
- Roth, K. J., Garnier, H. E., Chen, C., Lemmens, M., Schwille, K., & Wickler, N. I. Z. (2011). Videobased lesson analysis: Effective science PD for teacher and student learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 48(2), 117–148. <https://doi.org/10.1002/tea.20408>
- Rubin, A., & Brown, A. (2019). Unlocking the future of learning by redesigning educator learning. In J.W. Cook (Ed.), *Sustainability, human well-being, and the future of education* (pp. 235–268). Palgrave Macmillan, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78580-6_7
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68–78. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68>
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2017). *Self-determination theory: Basic psychological needs in motivation, development, and wellness*. The Guilford Press. <https://doi.org/10.1521/978.14625/28806>
- Ryan, R. M., Huta, V., & Deci, E. L. (2013). Living well: A self-determination theory perspective on eudaimonia. In A. Delle Fave (Ed.), *The exploration of happiness: Present and future perspectives* (pp. 117–139). Springer Science & Business Media.
- Ryff, C. D., & Keyes, C. L. M. (1995). The structure of psychological well-being revisited. *Journal*



- Vignoles, V. L., Regalia, C., Manzi, C., Golledge, J., & Scabini, E. (2006). Beyond self-esteem: Influence of multiple motives on identity construction. *Journal of Personality and Social Psychology*, 90(2), 308–333. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.90.2.308>
- Weinstein, N., & Ryan, R. M. (2010). When helping helps: Autonomous motivation for prosocial behavior and its influence on well-being for the helper and recipient. *Journal of Personality and Social Psychology*, 98(2), 222–244. <https://doi.org/10.1037/a0016984>
- Williams, K. D. (1997). Social ostracism. In R. M. Kowalski (Ed.), *Aversive interpersonal behaviors* (pp. 133–170). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-9354-3_7
- Willig, C. (2013). *Introducing qualitative research in psychology* (3rd ed.). Open University Press.
- Wright, D. S., Balgopal, M. M., Sample McMeeking, L. B., & Weinberg, A. E. (2019). Developing resilient K-12 STEM teachers. *Advances in Developing Human Resources*, 21(1), 16–34. <https://doi.org/10.1177/1523422318814483>
- Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). Sage publications.
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2>

שופכים אור על אוריינות מתמטית

מה משתנה במעבר מהוראת מתמטיקה לפיתוח אוריינות מתמטית?

פרופ' אנה ספרד

פרופסור אמריטה לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. היא חוקרת התפתחות של שיח מתמטי בחיי פרט ולאורך היסטוריה.





שופכים אור על אוריינות מתמטית

מה משתנה במעבר מהוראת מתמטיקה לפיתוח אוריינות מתמטית?

אנה ספרד

תקציר

אוריינות בכלל ואוריינות מתמטית (אורמ"ת, בקצרה) בפרט נחשבות היום ל"מיומנויות של מאה ה-21", הנחוצות לכל מי שחי בעולם עטור טכנולוגיה ובמציאות משתנה בלי הרף. ממצאי מחקרים שנעשו בעשורים האחרונים במקומות רבים על פני הגלובוס הראו בעקביות כי אורמ"ת אינה תוצאה אוטומטית של למידה בית ספרית: גם אלה שלמדו שיח זה אינם נוטים להיעזר בו במצבי חיים. עובדה זו מובילה לשאלות שבהן עוסק מאמר זה: אם נסכים כי אורמ"ת היא שילוב של שתי יכולות, יכולת להשתתף בשיח מתמטי ויכולת ליישם שיח זה בפעילויות חיים, מדוע אין די ביכולת הראשונה כדי לפתח את השנייה? מה עוצר בוגרי בתי ספר מליישם שיח מתמטי בחיי יום-יום? לבסוף מה הדרכים שבהן אפשר להתגבר על המכשולים ולקדם מתוך כך את התפתחותה של אורמ"ת? התשובות לשאלות אלה המוצעות במאמר זה מסתמכות על תאוריה שלפיה כל מהלכינו – כל שאנו עושים במיומנות סבירה במצבי חיים מגוונים – בנוי מרוטינות שפיתחנו במרוצת הזמן. הדברים מקבלים משנה תוקף מממצאים חדשים של מדעי המוח על בחירות של דרכי פעולה שאנו עושים בעומדנו לפני מטלות מגוונות. המאמר מסתיים במספר עצות מעשיות למורים השואפים לפתח אורמ"ת אצל תלמידיהם.

מילות מפתח: אוריינות מתמטית; שיח; רוטינה; סימולציה; ממוצבות.

הקדמה

המונח 'אוריינות מתמטית' או בראשי תיבות **אורמ"ת**, נמצא היום בפי כול. חשיבותו של הנושא אינה מוטלת בספק: אנו רואים בפיתוחה של אורמ"ת את צו השעה. עם זאת, מורכבותה ודחיפותה של סוגיה זו מעולם לא היו ברורים לנו כמו במגפה העולמית האחרונה. נוכחנו אז לדעת כי אורמ"ת עשויה להיות לא פחות ולא יותר, אלא עניין של חיים ומוות.

על כך עמדתי מקרוב כבר בימים הראשונים להתפשטותה של קורונה, כאשר האזנתי בעל כורחי לשיחה שהתקיימה במספרה תל אביבית בזמן שהמתנתי לתורי. היה זה בבוקרו של היום שבו בשעות הערב הונהג הסגר הראשון.

עם כניסת לקוח חדש, הספרית פנתה אליו והושיטה לו מסכה. "תוכל, בבקשה, לעטות את המסכה? זה לטובת שנינו," היא אמרה. פנייה זו גרמה לחילופי דברים קולניים למדי בינה ובין הלקוח.

[1]	הלקוח:	מה? המסכה? למה? בגלל השפעת הזאת?
[2]	הספרית:	טוב, אומרים שזה לא פשוט כמו שפעת. זה מתפשט הרבה יותר מהר. טוענים ש-2% מהנדבקים ימותו.
[3]	הלקוח:	שטויות. מה הסיכוי שלי למות? אפס. מאכילים אותנו פייק ניז ומנסים להשליט טרור ופחד.

כאן התערבה לקוחה שעד כה הקשיבה בשקט.

[4]	הלקוחה:	אבל 2% זה בכל זאת הרבה יותר מבשפעת. ההתפשטות היא מעריכית וכל מערכת הבריאות עלולה לקרוס.
[5]	הלקוח:	זאת דעתך. יש לי זכות לדעה משלי!

בסיום השיחה הלקוח נשאר עם פנים חשופות ואני – עם תחושת אי-נוחות ועם שאלות רבות. הכרתי את האיש וידעתי שהוא בעל השכלה אקדמית. "איפה האוריינות המתמטית שלו?", תהיתי. הטריד אותי שבעל תעודת בגרות מלאה, ואף למעלה מזה, נשמע כאילו לא למד מתמטיקה מעולם. למעשה היה נראה כאילו הוא זלזל במחקר מדעי כולו. הסוגיה של הידע המתמטי שהיה לו לכאורה אך נעלם דווקא כשהיה נחוץ ביותר, לא עזבה אותי ימים רבים ועודדה חשיבה מחדש על נושא האורמ"ת. מאמר זה מוקדש לרעיונות שהחלו לנבט במספרה. את הצגתם אקדים בסקירת הנסיבות שהעלו את האוריינויות לסוגיהן לחזית השיח החינוכי והציבורי.

מהיכן הרעיון של אורמ"ת?

לכאורה יש היום קונצנזוס על משמעות המונח 'אוריינות' בכלל ו'אוריינות מתמטית' בפרט. יש מקום להניח שהרוב יסכימו כי להיות אורייני בתחום המתמטיקה פירושו להיות מוכן ומזומן להשתמש בשיח מתמטי בכל מצב שבו שימוש כזה עשוי לעזור. על כן אורמ"ת משקפת את שימושיותה של המתמטיקה במשימות חיים: בקנייה ומכירה, בקביעת לוחות זמנים,



והוא הוצג "מתאים ללומדים המתכוונים להמשיך ללימודים גבוהים נטולי תכנים מתמטיים משמעותיים, ואף לכאלה המעוניינים בלימודים מקצועיים או המתכוונים ולצאת לעבודה מייד עם סיום בית הספר" (Venkatakrishnan & Graven, 2006, p. 14; ראו גם (Vithal & Bishop, 2006). גם באנגליה הופעלו מסלולים כאלה והם נקראו "מתמטיקה פונקציונלית". ואולם התוכנית האנגלית נגנזה לאחר שנים מספר (ויש שיגידו כי עברה טרנספורמציה), כשהתברר שהיא אינה מובילה לתוצאות הצפויות. גם התוכניות הדרום-אפריקאיות לא נחלו הצלחה רבה (Graven et al., 2023). המחקרים הראו שוב ושוב כי פיתוח אוריינות מתמטית הוא אתגר חינוכי תובעני וכי תוכניות לימודים קיימות אינן מצליחות להתמודד עימו (גל, 2012). בעשורים האחרונים, בזכות מבחני ה-PISA הבינ-לאומיים שבוחנים אוריינות מתמטית של בני חמש-עשרה (Schleicher, 2019) חדרו עובדות אלה לתודעת הכלל.

ובכך האוריינות שינתה את פניה: לא עוד לימודי אורמ"ת כגרסה 'לייט' של המתמטיקה הבית ספרית המסורתית; לא עוד ההתמקדות באוריינות כתרופת פלא לתלמיד המתקשה; ומעל לכול, לא מדובר עוד באורמ"ת כיכולת המתגבשת מעצמה עם התפתחות מומחיות בשיח על עצמים מתמטיים מופשטים, כגון מספרים, פונקציות או נגזרות. בד בבד עם הגעתנו לכל התובנות האלה, גברה גם ההכרה בנחיצותה של אורמ"ת לכלל התלמידים. היום המילה 'אוריינות' מופיעה מלווה בתארים מגוונים – 'אוריינות לשונית', 'דיגיטלית', 'מתמטית', 'מדעית', 'פיננסית', 'תרבותית' ועוד. בתוך כך גם אורמ"ת זכתה להגדרה מוסכמת, פחות או יותר, לפיה הכוונה היא לצירוף של שתי יכולות: "היכולת של היחיד לחשוב במונחים מתמטיים" והיכולת "לנסח, לנצל ולפרש מתמטיקה כדי לפתור מגוון של בעיות בעולם הממשי" (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2003). כמו כל האוריינויות האחרות, אורמ"ת מופיעה בין במפורש בין במרומז כפריט קבע ברשימות של 'מיומנויות למאה ה-21' המתפרסמות במסמכי מדיניות חינוכית למיניהם (פרץ, 2020; Fadel, 2008) מאז תחילתו של המילניום השלישי. מדובר במיומנויות שלדעת הכותבים הן הכרחיות כדי שנוכל להתמודד מחר עם מצבים שאיננו מסוגלים לחזותם היום. יכולת זו היא תנאי להישרדותנו בעולם של שינוי בלתי פוסק, המאיץ בהתמדה. זהו הרי עולם של התפתחויות טכנולוגיות העולות על הדמיון ושל התחממות הגלובלית שייתכן שאי אפשר לעוצרה.

בבניית גשרים, בשליחת חלליות לירח, בקריאת גרפים המתפרסמים בעיתונים, בהבנת תוצאות של בדיקות רפואיות, בהכנת מאכלים לפי מתכונים שבספרי בישול, בקבלת החלטה אם להצטייד במטרייה על פי תחזית מזג אוויר וכיוצא באלה. ואולם כפי שאפשר ללמוד מההיסטוריה הקצרה של המונח אוריינות, השימוש בו עבר תהפוכות המעידות על כך שטרם הגענו בתחום זה להבנות מספקות.

אף על פי שמתמטיקה נלמדת בבית ספר מאז ומתמיד, השיח על אורמ"ת הוא חדש יחסית. אומנם שימושיותה של מתמטיקה היא הסיבה המוצהרת להכללתה בלימודי הליבה, אולם הפיתוח של יכולות היישום לא נחשב עד לפני כמה עשורים לטעון פעולות חינוכיות מיוחדות. אדרבה, נדמה היה שאנו פועלים ברוח הסיסמה "הבה נדאג למתמטיקה ויישומיה ידאגו לעצמם".

גישה זו לא הוכיחה את עצמה. ההתפקחות הגדולה הגיעה במחצית השנייה של המאה הקודמת עם גל של מחקרים שבחנו את התמודדותם של בוגרי תיכון עם בעיות יום-יומיות ומקצועיות הכרוכות במספרים (Lave, 1988; Cole, 1996; Scribner, 1997). מחקרים אלה, שרובם נעשו בעשורים האחרונים של המאה הקודמת, הראו בעקביות כי בעלי השכלה תיכונית מלאה אינם לרוב נוטים להיעזר במתמטיקה במצבי חיים, וזה נכון גם כשמדובר בבעיות שקשה לפתור בלעדיה. בשל כך ההימנעות של לקוח המספרה מלחשוב על סוגיית המסכה במונחים מתמטיים אינה מפתיעה. זה היה בסך הכול ביטוי ספציפי של תופעה נפוצה. ממצאים אלה ורבים דומים אחרים הם האחראים לכך שהמונח 'אוריינות מתמטית' הגיע אל קדמת הבמה. כאן חשובה במיוחד התגלית המחקרית שלפיה גם אנשים ללא השכלה בית ספרית ובעלי היסטוריה ארוכה של כישלונות במתמטיקה בית ספרית מגיעים לעיתים למיומנויות מרשימה במטלות יום-יומיות הכרוכות בפעולות מתמטיות. כך, למשל, במחקרים שנעשו בברזיל (Nunes et al., 1993; Saxe, 1988) התפעלו החוקרים מזריזותן ודיוקןן של פעולות כספיות שעשו ילדים ברזילאיים בעת שמכרו סחורות למיניהן ברחובות ערים גדולות, והם בעלי השכלה בית ספרית חלקית לכל היותר. החוקרים למדו מכאן שההקשר היום-יומי המוכר הופך תכנים מתמטיים מופשטים למשמעותיים ונגישים יותר למוכרים הצעירים.

תובנה זו הולידה תוכניות לימודים מיוחדות לתלמידים שנחשבו לחלשים במיוחד במתמטיקה, אם לא לחסרי כל סיכוי. כך, למשל, בבתי ספר דרום אפריקאים הונהג בתחילת המאה מסלול לימודים בשם 'אוריינות מתמטית'



פדגוגיים מוכרים? ואם התשובה לשאלה האחרונה היא שלילית, מה האתגרים הייחודיים המקשים על פיתוח האורמ"ת וכיצד אפשר להתמודד עימם? עם סוגיות אלה אתעמת בהמשך, כשאני טוענת כי פיתוח אורמ"ת הוא אכן משימה ייחודית והיא מצריכה בשל כך חשיבה מחדש על המתמטיקה הבית ספרית ועל הוראתה. אפתח בבחינה נוספת של רעיון האורמ"ת ובהידוק הגדרתה.

מהי אורמ"ת? למה אורמ"ת?

אתחיל בדוגמה פשוטה למדי שתעזור לי בהמשך להבהיר את הייחוד של פעולות אורמ"תיות. היא לקוחה מאחד המחקרים שעשיתי עם עמיתיי בקרב בני 18 עם היסטוריה של הישגים נמוכים בלמידת מתמטיקה. באפיזודה 1 המראינת משחקת תפקיד של מוכרת עוגיות, ואילו נערה המצוידת בערמה של מטבעות שאקרא לה מירה היא הקונה.

לסיכום, חשיבותו ודחיפותו של פיתוח האורמ"ת אצל כלל התלמידים ברורות לנו היום יותר מאי פעם. עם זאת, עדיין אנו חסרים תובנות הדרושות לבניית תכניות לימודים מתאימות ופדגוגיות יעילות. במחקר שנעשה בשנים האחרונות בנורבגיה, שבה החינוך לאורמ"ת הפך לחלק מרכזי של לימודי מתמטיקה בכל בתי ספר, נמצא כי גם מורים מובילים אינם מסוגלים להסביר במה נבדל פיתוח אורמ"ת מהוראת מתמטיקה מסורתית (Bolstad, 2020). כיוון שכך, למרות הטיעונים הנחרצים על נחיצותו של החינוך לאורמ"ת, נראה שאיננו ערוכים עוד לפעולה החינוכית הנדרשת. הסוגיה מעוררת שאלות שעוד אין להן מענה: מה הם היעדים הייחודיים שמציבה האורמ"ת בפנינו? גם אם יעדים אלה שונים מבחינה מהותית מיעדים של לימודי המתמטיקה המסורתיים, האם לא היה אפשר להגיע עם קצת מאמץ לאורמ"ת באמצעים

אפיזודה 1: מירה (Sfard, 2005)

	דוברת	נאמר	נעשה
[1]	מראינת:	קנית ממני 3 עוגיות, כל אחת ב־75 אגורות. שלמי בבקשה.	
[2]	מירה:	3 פעמים 75	
[3]		150 ועוד 3 פעמים 25 ... 75	
[4]		150 ועוד 75 ... 225	
[5]		הינה, 2 שקל ו־20 ו־5 אגורות.	מעבירה למראינת שתי מטבעות של שקל אחד ומטבעות של 20 אגורות ושל 5 אגורות.

הפעולות שעשתה מירה הן מוכרות ופשוטות למדי, ויש שיגידו כי לא ברור מדוע פתחתי את העיסוק בנושא מורכב כמו אורמ"ת בדוגמה כה טריוויאלית. מה מיוחד בדרך פעולתה של מירה? האם בכלל היה אפשר להשלים את המשימה היום־יומית המוכרת היטב לכולנו בדרך אחרת? אפיזודה 2 תראה כי אכן יש דרך אחרת. הפעם, המראינת־הקונה היא נערה ששמה הבדוי הוא טלי.

אפיזודה 2: טלי (Sfard, 2005)

	דוברת	נאמר	נעשה
[6]	מראינת:	קנית ממני 3 עוגיות, כל אחת ב־75 אגורות. שלמי בבקשה.	
[5]	טלי:	כל אחת היא 75 אגורות....	מעבירה למראינת בזו אחר זו מטבע של 50 אגורות, שתיים של 10 אגורות ואחת של 5 אגורות.
[6]		והינה לך שקל שבעים וחמש [1.75].	מעבירה מטבע של שקל
[7]		בשקל יש 75 אגורות, אז יש פה 25 יותר.	
[8]		אז הינה לך עוד חצי שקל. וזהו.	מעבירה מטבע של 50 אגורות.



לפנות למתמטיקה גם כשנעשה שימוש מפורש במושג מתמטי מוכר לו, הלוא הוא גידול מעריכי (היגד [4] במסגרת 1).



איור 1: פעולה במטבעות מתווכת מספרים

הדוגמה מאלצת אותי לחזור ולהרהר בסוגיה שרבים רואים אותה כמובנת מאליה: למה כל המהומה הזו על האוריינות המתמטית? מדוע מעניקים לה חשיבות כה רבה? הייתכן שהדרישה לפעולה אוריינית מכבידה דווקא ואין בה צורך? ככלות הכול, מירה וטלי הצליחו באותה מידה, אבל מירה, שלא כטלי, הייתה זקוקה לכמה שנות בית ספר כדי שתוכל לפעול פעולה אוריינית. מבחינה זו, הפעולה של טלי הייתה חסכונית בהרבה. ובכן, אם בכל זאת אנו דוגלים היום בפיתוח האורמ"ת אצל כלל הלומדים, זאת משום שלפעולה מתווכת יש יתרונות מהותיים משלה. ראשית, פעמים רבות הפעולה המתווכת מתגלה זמינה יותר או מדויקת יותר מהפעולות הישירות העומדות לרשותנו. הרי אלה האחרונות אינן זמינות תמיד. במקרים מורכבים יותר הפעולה המתווכת היא תנאי ליכולתנו להתמודד עם הבעיה שלפנינו. כך למשל במשימה הפשוטה של תשלום תמורת עוגיות טלי לא הייתה מוצאת פעולה כזו לולי המטבעות שבידיה אפשרו לה להרכיב את הסכום הנדרש (תחשבו מה היה קורה, לדוגמה, אילו היו לה רק מטבעות של שקל אחד). שנית, שלא כמו הפעולות הישירות שאנו עושים במצבים מוכרים והן מתאימות רק למצבים אלה, ההליכים המתמטיים שהיו יכולים לתווך פעולות אלה הם אוניברסליים והם עשויים לעזור גם במצבים חדשים, כרוכים בעצמים אחרים. ואכן, כפי שהודגם באיור 2, הפעולות המספריות המתווכות פעולות קנייה ומכירה שנעשות במטבעות יכולות לתווך גם פעולות שקילה (חשבו לדוגמה איך אפשר להשתמש בחישוב מספרי שחישה מירה באפיזודה 1 במשימה של מציאת **המשקל** של שלוש עוגיות שכל אחת מהן שוקלת 57 גרם).

לכאורה אין הבדל בין שני האירועים. בשני המקרים התשלום נעשה בזריזות יחסית ולשביעות רצון המוכרת, ואולם הבדל חשוב מתגלה כשמשווים את **העצמים שבהם נעשו הפעולות**. באפיזודה 1 השיחה התחילה מאזכור של **עוגיות ומטבעות**, שהן עצמים מוחשיים מוכרים (ראו היגד [1]). בתשובתה, מירה סיפרה סיפור על **מספרים** ומספרים בלבד: 3, 75, 150, 25, 225 (ראו היגדים [2], [3] ו-[4]). לסיום, מירה חזרה אל שקלים ואגורות (ראו היגד [5]), ואף אם השתמשה גם כאן בשמות מספרים, הרי שהם שימשו אותה הפעם כתוויות למטבעות בכל מיני גדלים, כלומר שמות של עצמים מוחשיים.

הביצוע של טלי (אפיזודה 2) היה שונה מבחינה זו: המשתתפת דיברה כאן על מטבעות בלבד. ואכן, גם כשהיא ביטאה מילות מספר (ראו [6], [7] ו-[8]), היה נראה כי השימוש בהן היה דומה לזה שמירה עשתה רק בהיגדה האחרון: הן שימשו את טלי לתוויות למטבעות שהיא העבירה בזו אחר זו אל המראינת. ובאמת, כאשר מעמידים את שתי האפיזודות זו לצד זו, רואים בבירור שמירה נמנעה רוב הזמן מפעולה פיזית במטבעות, ואילו מילותיה של טלי היו מלוות מניפולציה במטבעות לאורך כל הדרך. זאת ועוד: מירה סיימה את הביצוע ואמרה את הסכום המדויק שהיא שילמה (2 שקל ו-25 אגורות), ואילו טלי נמנעה מהכרזה זו: כשהיא אמרה "וזהו" כדי לציין שהמשימה הושלמה בהצלחה (ראו היגד [8]), לא עניין אותה לדעת כמה היא שילמה בסך הכול. אפשר לסכם ולומר שהמסלול של מירה נע מעצמים מוחשיים אל עצמים מתמטיים ולעצמים מוחשיים בחזרה. לעומת זאת, טלי נשארה בכל הדרך בשיח על סוג יחיד של עצמים – אותם עצמים שהמשימה הייתה אמורה להיעשות בהם.

כדי לקצר, אומר שהפעולה של מירה הייתה **מתווכת שיח מספרי**, ואילו הפעולה של טלי הייתה **ישירה** – נעשתה במישרין באותם עצמים שהיו האובייקט של המשימה, כלומר המטבעות. הדאגרה התלת-שלבית שבאיור 1 ממחישה באופן סכמטי את מהותה של הפעולה המתווכת. פעולה זו מתחילה בשיח מסוים (שלב I; כאן השיח הוא על מטבעות בעלי ערכים שונים זה מזה), ממשיכה בהתאמת עצמיו של שיח זה לעצמים של שיח אחר (שלב II; כאן העצמים המותאמים הם מספרים), ובהם גם נעשית מניפולציה מתאימה לפעולה שיש לעשות בעצמים המקוריים. היא מסתיימת בחזרה אל שיח המקור (שלב III). הפעולה המתווכת שראינו כאן היא זו שאנו נוהגים לכנות 'אורמ"תית', שכן נעשה פה שימוש בשיח מתמטי (שלב II). אם כך, במשימת העוגיות רק מירה מראה אוריינות זו. פעולה אוריינית נעדרה גם מדברי לקוח המספרה, וזאת על אף היותו בוגר תיכון. האיש סירב



יש להניח שברוב הפעמים התשובה היא 'כן'. קרוב לוודאי אף תעשו פעולה כזו בלי לשאול את עצמכם שאלות ובלי להסס. ואכן, ברוב מוחלט של מצבי חיים אנו מתחילים את העשייה בספונטניות, ללא תכנון ובלי להתלבט. כך זה כשבפגישה מקרית עם חברה נפלטות לנו המילים "היי, מה שלומך?" או כשלפני יציאה ממכולת עם סל של מצרכים אנו ניגשים לקופה ושולפים אמצעי תשלום. ככה זה גם כשבכיתה כותבים משוואות על הלוח או כאשר קוראים מאמר ומנסים להבין את הנקרא. בזכות מה כל הידיעה הזו? מניין הנטייה הזאת למהלכים שאינם תוצאה של שיקול דעת מפורש? מה מאפשר בחירות מיידיות של דרך פעולה? רגע של מחשבה והתשובה נראית לנו מובנת מאליה: ניסיון! ואכן, אם ברור לנו מה לעשות כעת, זאת משום ש"בסרט הזה כבר היינו": אף בלי להיות מודעים לכך, אנו נזכרים במשהו שנעשה בעבר, בין שעשינו אותו בעצמנו ובין שעשה אותו מישהו אחר. ואכן, **כשאנו נמצאים במצב שבו אנו חשים מחויבים לפעול, אנו נוטים להיזכר במצב קודם דומה דיו למצב הנוכחי כדי להצדיק עשיית אותן פעולות שנעשו אז.** את המילים "מצב שבו אנו מחויבים לפעול" שבמשפט האחרון אחליף בביטוי '**מצב מטלה**'. בחיי יום-יום אנו נמצאים באיך-ספור מצבי מטלה, כלומר חשים מחויבים לפעול בדרך זו או אחרת כמעט בכל רגע. כן, זה נכון גם באותן פעמים שבהן לכאורה איננו עושים דבר – למשל, כשיושבים בהרצאה או נחים לאחר מאמץ פיזי. כעת אקצר גם את הפסקה הארוכה "מצב קודם דומה דיו למצב הנוכחי כדי להצדיק עשיית אותן פעולות שנעשו אז", ואעשה זאת בהחלפתה במילה בודדת: '**תקדים**'. המשפט המודגש המופיע לעיל מתקצר כעת להיגד תמציתי שנזכור אותו לאורך כל הדרך: **כשאנו נמצאים במצב מטלה, אנו נוטים לפנות לתקדים.**

לטענה זו, שלפיה כל מה שאנו עושים במיומנות הוא שחזור של פעולות מן העבר, השלכה מיידית: החזרות יוצרות דפוסי פעולה, כלומר סדרות מהלכים קבועות שחוזרות על עצמן במצבים דומים. לדפוסים אלה אנו קוראים **רוטינות**. כפי שמוצג בסכמה שבאיור 3, אפשר לחשוב על רוטינה ככנויה משני רכיבים, מטלה והליך לעשייתה. **המטלה** היא אוסף של אותם היבטי המצבים התקדימיים שאנו רוצים לשחזר כעת. **ההליך** הוא הדרך שבה פעלנו באירועים התקדימיים. חשוב לזכור כי ההליך הוא **מרשם** לביצוע, ולא הביצוע עצמו – הוא "התסריט" שלפיו פעלנו בכל הביצועים התקדימיים. ההליך יכול להיות אלגוריתמי, כפי שהוא במקרה של רוטינות לחישובים מספריים; והוא יכול להיות היוריסטי – לא יותר ממתווה פעולה כללי, כמו ברוטינות להוכחת משפטים. חשוב

כל שנאמר כאן מספק מפתח לקושיה נוספת. מדוע המילה 'אוריינות' שעסקה במקור רק במיומנויות שפתיות של קריאה וכתיבה, הורחבה לתחומים אחרים, ובהם מתמטיקה? השימוש במונח 'אוריינות' היה שמור עד לפני זמן לא רב **למיומנות בשיח כתוב, המלווה ביכולת ונכונות לתווך מגוון רחב של פעילויות בשיח זה.** הדוגמאות הפשוטות שראינו לעיל הבהירו שגם כשמדובר באוריינות מתמטית, הכוונה היא ליכולת תיווך באמצעות שיח, אלא שהפעם השיח המתווך הוא מתמטי. הצבת המילים 'שיח מתמטי' במקומו של הביטוי 'שיח כתוב' בהגדרת האוריינות השפתית מקדמת אותנו אל הגדרה של אוריינות מתמטית: **אוריינות מתמטית היא מיומנות בשיח מתמטי, המלווה ביכולת ונכונות לתווך בשיח זה מגוון רחב של פעילויות.** הגדרה 'דיסקורסיבית' זו שתשמש אותי בהמשך, ממחישה ביתר שאת מדוע אין לראות באורמ"ת 'מתמטיקה קלה' או 'מתמטיקה למתקשים'. אדרבה, פיתוחה הוא משימה תובענית יותר מזו של פיתוח שליטה בשיח מתמטי עצמו, שהרי מומחיות בשיח היא רק חלק מאורמ"ת.

שיח על מספרים



איור 2: הליך מתמטי אחד יכול לתווך פעולות בעצמים מוחשיים מגוונים

בעזרתה של ההגדרה הדיסקורסיבית אוכל להתעמק כעת באתגרים ייחודיים בפניהם עומדים מורים שמלמדים לקראת אורמ"ת. הבנת אתגרים אלה היא תנאי להוראה יעילה של הנושא. כדי שנוכל להגיע להבנה זו, יש לשאול שאלה מקדימה: מה המנגנונים שמאפשרים לנו לפעול כמעט בכל מצב? כיצד אנו מעצבים את דרכי העשייה שלנו?

ממה וכיצד נבנות פעולותינו? רוטינות!

כאשר תעמדו לפני הצורך לבצע מטלה כלשהי – הכנת ארוחה שתשביע את רעבכם, פרדה מאורחים שעוזבים את ביתכם לאחר ערב מהנה, או מתן הסבר לחישוב מתמטי זה או אחר – האם תדעו מה ייחשב **לפעולה מתאימה?**



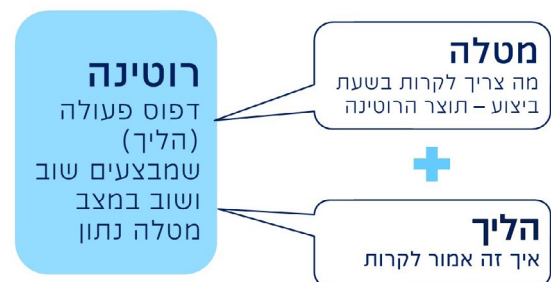
לסיכום, את העובדה שבמצבים רבים אנו מסוגלים לפעול כמעט בלי קבלת החלטות מודעת יש לזקוף לזכותן של הרוטיות שפיתחנו. יש מקום לומר כי **כל למידה כרוכה ברוטיניזציה של פעולותינו**. בזכותה אנו צוברים במהלך חיינו מאגר של רוטיות המאפשרות לנו להתמודד עם אינספור מצבי מטלה. לרוב המצבים שאנו עשויים להימצא בהם בחיי יום-יום יש באמתחתנו יותר מרוטינה אחת, ויש בהן רוטיות ישירות ורוטיות מתווכות. במונח '**רוטינה ישירה**' הכוונה היא לרוטינה שמתבצעת במישורין על העצמים המרכיבים את מצב המטלה (ראו את הרוטינה של טלי באפיוזדה 2). **רוטינה היא מתווכת** אם בהליך שלה יש מעבר מהשיח שהתחלנו בו אל שיח אחר ובחזרה. רוטיות מתווכות היא **אורמ"ת** אם השיח האחר הוא מתמטי, כפי שהיה במקרה של מירה באפיוזדה 1. את הסוגיה העומדת במרכזו של מאמר זה אפשר לנסח כעת כבעיה של בחירת רוטיות: כיצד להבטיח שבוגרי בית ספר ייעזרו בחיים ברוטיות אורמ"תיות? לפני שאדון בשאלה זו, אעיף עוד מבט במחקרים שהראו כי פנייה לרוטיות כאלה אינה מובטחת אפילו אצל בעלי השכלה מתמטית בית ספרית מספקת לכאורה.

בתחרות בין רוטיות ישירות ואורמ"תיות – מי זוכה? ממוצבות

כפי שנרמז כבר קודם, המחקרים הרבים על שימושי השיח המספרי במטלות יום-יומיות הראו בעקביות את העדפתנו לרוטיות ישירות על פני אורמ"תיות, הכרוכות בעשיית מעקפים דרך השיח המתמטי. ההימנעות מחציית גבולות בין שיחים היא כה חזקה, עד כי אנו עלולים להתעלם מפעולות מתווכות גם בפעמים שבהן אין לנו חלופה בדמות פעולה ישירה. מעטות הן התופעות שזכו לאישוש מחקרי רחב וחד-משמעי כמו התופעה הזאת. היא ידועה היום בשם '**ממוצבות**' (situativity) של למידה (או של קוגניציה; Brown et al., 1989). העובדה שאנו פועלים פעולה ממוצבת, פירושה שאנו נמצאים לרוב בקיבעון דיסקורסיבי: אנו נצמדים לשיח שכמו כופה את עצמו עלינו עם המטלה לביצוע, הלא הוא השיח של העצמים המגדירים את המטלה. אנו נאחזים בשיח זה ונמנעים מרוטיות הדורשות יציאה לשיח אחר. סיפוריהם של לקוח המספרה ושל טלי מוכרת העוגיות הם עדויות מיידיות לקיומה של תופעה זו. המקרה הראשון אף מעיד על עוצמת הקיבעון הדיסקורסיבי. יש מקום לומר כי הפחד של סרבן המסכה מהברירה האוריינית היה חזק דיו כדי לגבור על הפחד שלו מהקורונה. ממוצבות של פעולותנו, ובאופן כללי יותר הקיבעון הדיסקורסיבי, הם בלי ספק האויב מספר אחד של אורמ"ת, וכדי להתמודד איתם, עלינו להבין את סיבותיהם. לשם כך כדאי לבחון

גם לזכור שאי אפשר לצפות ברוטיות צפייה ישירה. כל שאנו יכולים לראות אלה הם **ביצועי** רוטיות, וכדי להסיק את הרוטיות שמשתמשות אותנו בפעולה זו עלינו לצפות בביצועים רבים שלה ככל האפשר במצבי מטלה מגוונים (אך שיכולים, כמובן, להיחשב לשקולים כי הם מגדירים אותה מטלה).

בסוף חשוב לציין כי לרוטיות **מבנה פרקטלי**, שכן רכיבי רוטיות הם לרוב רוטיות בפני עצמם. מבחינה זו אפשר להשוות רוטיות לקופסה שיש בה קופסאות קטנות יותר, ובתוכן קופסאות זעירות עוד יותר וכך הלאה. תהליך פירוק של רוטיות גדולה לקטנות יותר הוא בדרך כלל חלק מכל ביצוע של רוטיות זו. הפירוקים מסתיימים כשמגיעים לרוטיות 'אטומיות', כאלה שאי אפשר לחלקן יותר והן מתבצעות אוטומטית במהלך אחד בודד. כך, לדוגמה, הרוטיות של מירה לתשלום במטבעות מורכבת משלוש תת-רוטיות: (1) רוטיות ההעתקה של קבוצות מטבעות למספרים; (2) רוטיות לחישוב מספרי מתאים; (3) רוטיות להעתקת מספרים לקבוצות של מטבעות. תת-רוטינה (2), שהיא רוטיות בפני עצמה, מכילה בתוכה רוטיות כפל וחבור, שגם אותן אפשר לפרק לרכיבים קטנים יותר. אם את שולטת בחשבון, רוטיות חישוביות אטומיות הן חיבורים של מספרים חד-ספרתיים ופעולות כפל שבלוח הכפל. הרוטיות הגדולה לתשלום יכולה בתורה להפוך לחלק של רוטיות גדולה עוד יותר – למשל זו של קנייה במכולת. כך אפשר להגיע לרוטיות מורכבות מאוד, דורשות זמן רב לביצוע. זמן זה עשוי להימדד בימים או אף בחודשים ושנים. מכאן נובע גם כי מאגר רוטיות שלנו יכול לגדול למעשה ללא הגבלה. הגידול חל, לדוגמה, כשאנו מרכיבים בדרך חדשה כמה מהרוטיות שפיתחנו בעבר ויוצרים רוטיות חדשות. המסקנה החשובה ביותר מכל שנאמר כאן היא **שרוטיות הן אבני בניין לכל הפעילות שלנו**, ואנו משתמשים בהן אפילו בביצוע מטלות שלא התנסינו בהן בעבר. המטלות החדשות ידרשו בסך הכול הרכבה חדשה של רוטיות קיימות.



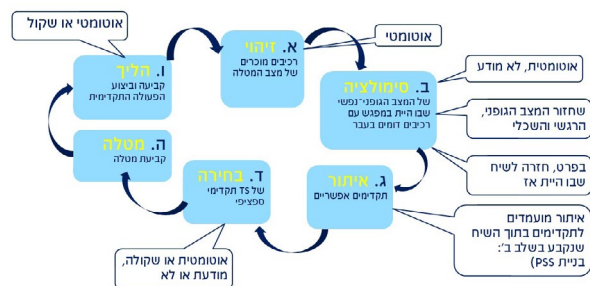
איור 3: רוטיות



בלתי מודעת? ואם כן, מה קובע את ההעדפות המוסתרות לעין? בניסיון לענות על שאלות אלה אציג בסעיף הבא תסריט אפשרי לתהליכי גיוס רוטינות.

מה מאפשר גיוס של רוטינה? סימולציה!

תשובה מעניינת לשאלה למה וכיצד מתנהל הגיוס התת-מודע של רוטינות מגיעה מתאוריה חדשנית במדעי המוח המסבירה את התהליכים הפנימיים האחראים לכלל פעילותינו. אסתמך בעיקר על עבודתו של חוקר מוח לאורנס ברסלאו, אבי הגרסה הייחודית של תאוריה זו שכינה אותה 'תורת הסימולציה הממוצבת'. לפי ברסלאו (Barsalou, 2009), כל מצב שאנו נקלעים אליו ומזהים בו עצמים, אמירות ואנשים מוכרים גורם לנו לשחזר אוטומטית את המצב הגופני, הרגשי והשכלי שהיינו בו בעבר בנוכחות אלמנטים דומים. וזה אומר בין השאר כי הסימולציה אחראית גם לשיח שנאמץ כדי לחשוב בו על מצב המטלה הנוכחי. לרוב יהיה זה השיח שפיתחנו בעבר במפגשים עם עצמים, אמירות ואנשים דומים לאלה שאנו עומדים כעת לפניהם.



איור 4: מפ"ם – מחזור הפעולה הרוטינית (גיוס רוטינה וביצועה)

כדי להסביר את תפקידה של הסימולציה בגיוס של רוטינות, איעזר באיור 4 המציג באופן סכמתי תהליך בחירה וביצוע של רוטינה. סכמה זו קיבלה לאחרונה תמיכה מרעיון 'מחזור הפעולה הממוצבת', SAC (situated action cycle) ובעברית מפ"ם, שפותח במסגרת תורת הסימולציה הממוצבת (Barsalou, 2020). כמו ה-SAC, תהליך בחירת הרוטינה הוא שרשרת של התרחשויות פנימיות ברובן המוצגות באיור 4. שרשרת זו חוזרת על עצמה שוב ושוב כשאנו מבצעים מטלות מורכבות. הסימולציה היא ההתרחשות המפעילה את השרשרת ויש לה השפעה מכרעת על הפעולה שנבחר.

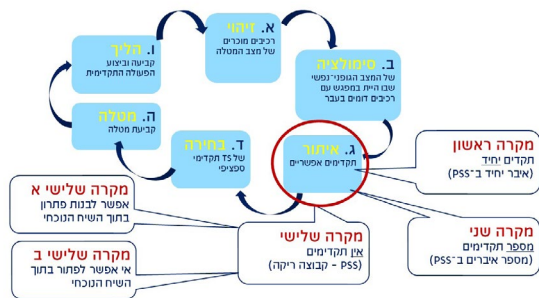
והנה ביתר פירוט השתלשלות העניינים במהלך סבב אחד של מפ"ם – גיוס וביצוע של רוטינה מסוימת. בשלב א, עם כניסתנו למצב מטלה מסוים, אנו מזהים אוטומטית עצמים, היגדים ואנשים מוכרים. העצמים יכולים להיות

שוב ובפירוט רב את ממצאי המחקרים שזיהו את התופעות לראשונה והביאו אותן לתודעת הכלל.

החוקרת האמריקאית ג'יין לייב (Lave, 1988), שהוזכרה כבר לעיל, התלוותה לקבוצה של בוגרי בית ספר בכל מיני גילים בזמן שעשו קניות בסופרמרקטים. המשתתפים נצפו כשהם מבצעים פעולות כגון מציאת התמורה טובה ביותר לכספם או בחירת מזון שמתאים לצרכיהם. בכל אלה גילו המשתתפים מיומנות מרשימה. עם זאת, כשהחוקרת בחנה את הדרך שבאמצעותה הם קיבלו את מבוקשם, היא מצאה שהקונים, בדומה לטלי מאפיזודה 2, לא השתמשו במתמטיקה בית ספרית, אלא פעלו במגוון שיטות ישירות שפיתחו בעצמם. לייב (Lave, 1988) דאגה גם לאשש שהמשתתפים היו בעלי יכולות מתמטיות מפותחות דיין כדי לאפשר פעולות אורמ"תיות. מבחן המורכב משאלות מתמטיות רלוונטיות שהיא עשתה בבתייהם של המשתתפים, הושגו הישגים מרשימים קצת פחות מאלה שנצפו בזכות פעולות הקנייה הישיר, אך עדיין סבירים בהחלט. כל זה העיד על העדפה ברורה של המשתתפים לרוטינות ישירות על פני מתווכות. ממצאים דומים הגיעו ממחקרים שנעשו בקרב בעלי מלאכה למיניהם. כך למשל חוקרת אמריקאית אחרת, סילביה סקריבנר (Scribner, 1997), מצאה כי פועלים שעבדו במחסני חלב ושתפקידם היה להכין משלוחים לפי הזמנות שהתקבלו ממכולות וסופרמרקטים עקפו בעקביות את המתמטיקה שלמדו בבית הספר ובנו את הכמיות הדרושות באמצעות מניפולציות ישירות במכלים ומארזים בגדלים מגוונים. העובדה שגם בעלי שליטה טובה בשיח מתמטי בית ספרי בוחרים להשקיע את מרצם בפיתוח רוטינות ישירות שיאפשרו להם לעקוף שיח זה מעידה על עוצמת המחסומים הסמויים המרחיקים מחשבה על חציית גבולות בין שיחים. ממצא זה עורר הרבה דיונים בקרב החוקרים. ההעדפה לרוטינות ישירות תוצרת עצמית אינה מובנת מאליה, שהרי אפשר ליישם את הרוטינות הישירות רק בעצמים מסוג מסוים והן לא יעזרו לנו במצבים שמערבים עצמים אחרים. כך לדוגמה אדם מיומן בפעולות ישירות במטבעות ושטרות של כסף לא יוכל להשתמש ברוטינות אלה לחישובי משקל, אורך או גובה. מהיכן באה העדפה זו? מה יוצר אותה? נראה כעת שהמפתח לשאלה זו הוא באופן שאנו מגייסים רוטינות בעת הצורך. פעולת הגיוס כרוכה בפנייה לתקדימים וכפי שנאמר קודם, פנייה כזו היא לרוב תת-מודעת, כלומר מתבצעת בתקשורת פנימית בין חלקים שונים של גופנו. כשיש לנו יכולת להגיב על מצב מטלה בעזרת רוטינות מגוונות שרק חלק מהן אורמ"תיות, כיצד תיעשה הבחירה? האם גם היא תהיה



כדי להבהיר נקודה זו, נבחן לעומק שלב ד במפ"ם (ראו איור 4), שבו אנו בוחרים תקדים מתוך מרחב החיפוש שנקבע בשלב ג לאחר הסימולציה (שלב ב). נבחין בין כמה מקרים לפי מספר התקדימים שמתוכם תתבצע הבחירה בשלב ד. מקרים אלה מפורטים באיור 5.



איור 5: המקרים השונים של מהלך מחזור הפעולה הממוצעת לפי מספר תקדימים שנקבעו בשלב ג

במקרה הראשון הסימולציה משאירה אותנו עם תקדים יחיד (ראו איור 5), לכן גם עם רוטינה אפשרית יחידה. על מקרה זה כבר דיברנו: בהיעדר חלופות, שלב ד לא יתבצע למעשה – או יתבצע בריק – ואת הברירה היחידה נפעיל אוטומטית.

המקרה השני שבו נצליח לפעול בלי קושי הוא זה שבו הסימולציה קידמה אותנו אל מספר תקדימים (ראו איור 5), ולכן גם מספר הליכים אפשריים. כדי לפעול, נצטרך הפעם לבחור בחירה שקולה, מודעת. נשים לב כי זה עשוי לקרות גם כאשר כל ההליכים התקדימיים נועדו לביצוע אותה מטלה. כדי להסביר זאת אשתמש במטפורה. כל הרוטינות שנועדו ליישום בסוג מסוים של עצמים – נגיד במספרים – מקושרות בדרך זו או אחרת זו לזו ויוצרות רשת המזכירה רחובות של עיר (ראו שרטוט I באיור 6). על כך רמזתי כבר כשטענתי שכל רוטינה יכולה להיות חלק של רוטינה אחרת. הסוגיה חזרה בסעיף האחרון כשדיברתי על מחזורי סימולציה. מחזור כזה הוא עשייה של רוטינה, והוא מוביל למצב מטלה חדש ולהפעלה של רוטינה נוספת. וכפי שמוצג בשרטוט II באיור 6, אם עשיית רוטינה A תורמת להיווצרות מצב מטלה המקדם לרוטינה B, כי אז רוטינות A ו-B מקושרות זו לזו ויוצרות רוטינה חדשה, גדולה יותר. בצורה זו נוצרת רשת שלמה של רוטינות המקוננות זו בתוך זו. בתוך הרשת, כמו בעיר, אפשר לנוע ממקום למקום בדרכים שונות.

בשולי דברים אלה כדאי להעיר כי לכל שנאמר כאן יש הקבלה ברורה בתאוריות חדשות שמסבירות את פעולת המוח. רשתות של רוטינות שהוצגו כאן מזכירות רשתות של נוירונים, ודרך היווצרותן של רוטינות מורכבות אינה שונה מזו של היווצרות סינפסות חדשות – החוליות

מוחשיים כמו מטבעות, או מופשטים, כגון מספרים.¹ הזיהוי מוליך מייד **לשלב ב**, הלא הוא הסימולציה של המצב הגופני, הרגשי והשכלי שהיינו בו במפגשינו הקודמים עם לפחות חלק מהאלמנטים האלה. כמעט בו בזמן מתרחש גם **שלב ג** שבו נקבע המרחב של אירועי העבר הרלוונטיים המאופיינים בנוכחות הרכיבים שזיהינו בשלב א. זהו המרחב שבו נחפש אחר תקדים שמתאים למצב מטלה נוכחי. המרחב המצומצם מוגדר בעיקר בשיח שבו אנו רגילים לחשוב על כל שאנו רואים ושומעים כעת. הצמצום הוא זה שיהפוך את החיפוש אחר תקדים שיקרה **בשלב ד** לבר ביצוע. שהרי בלי להגביל את מרחב החיפוש, היינו צריכים לסרוק את כל האירועים שנוכחנו בהם בעבר, וזוהי משימה בלתי אפשרית בעליל. בחירת תקדים מתוך המרחב המצומצם יכולה להתבצע אוטומטית או באופן שקול, כמודע או בלא מודע. אנו פועלים ללא היסוס ובלא מודע לפחות באותן פעמים שבהן מרחב החיפוש שנוצר בשלב ג השאיר אותנו עם מועמד יחיד. מועמד זה משמש כעת ברירת מחדל ומייתר למעשה את הצורך בפעולת הבחירה. מצוידים בתקדים, אנו יכולים כעת **בשלב ה** לפרש את מצב המטלה, כלומר לגזור ממנו את המטלה שלפנינו ואף להתקדם **לשלב ו**, שבו נקבע ונעשה הליך המתאים למטלה זו. ההליך יכול להיות מורכב ולהוביל אותנו דרך מספר תת-מצבים שכל אחד מהם מעמיד אותנו לפני תת-מטלה משלו ודורש סבב משלו של השלבים א-ו. גם תת-מטלות אלה עשויות להיות מורכבות ולדרוש תת-הליכים משלהן. המטלה המקורית תושלם כאשר בקינון זה של תת-מטלות ותת-הליכים נגיע אל רוטינות אוטומיות. וכשיבוצעו כל אלה, ייסגר המעגל ויושלם ביצועה של המטלה המקורית. המהלך כולו ישאיר אותנו במצב מטלה חדש, שלאחריו יבוא גם המהלך הבא, הלא הוא סבב חדש של הפעולות א עד ו.

בסעיף הבא אתמקד בשאלה הפוכה לזו שדנו בה בסעיף זה והתשובה עליה תענה גם על הסוגיה שנשאלה קודם: מהו מקורה של ההימנעות שלנו משימוש ברוטינות אורמ"תיות?

מה עוצר גיוס של רוטינה אורמ"תית? הסימולציה!

את סוגיית המנגנונים הסמויים שמאחורי הקיבוען הדיסקורסיבי ותופעת הממוצבות הנובעת ממנה אפשר לתרגם כעת לשאלה על טבען ומקורן של תופעות אלה.

1. רוב הרוטינות שבמאגרים שלנו התחילו את חייהן כההליכים פיזיים בעצמים מוחשיים. ככול שהרוטינות התפתחו והתמסדו, כן העצמים המוחשיים הוחלפו בעצמים מופשטים המכלילים את העצמים המקוריים. בד בבד עם ההפשטה, גדלה הרוטינה ויישומיה התרחבו בהדרגה.



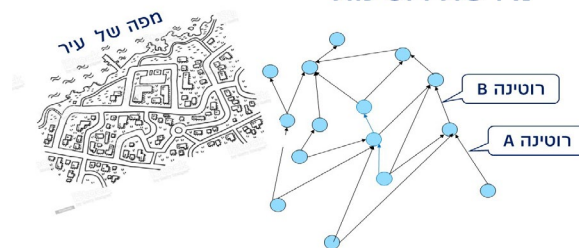
אל הפעולה המתווכת היינו צריכים להרחיב במודע את מרחב החיפוש, כלומר לעשות פעולה שדורשת מאמץ נוסף. ובאמת לא קל לצאת מהשיח שהסימולציה הכניסה אותנו אליו. לאחר שנכנסת לשיח זה, הוא מהווה את המדיום שבו נעשית כל חשיבתך, ובפרפרזה על דברי הפילוסוף לודוויג וויטגנשטיין על השפה, "גבולותיו של שיח הם גבולות עולמי" (Wittgenstein, 1999/1921, p. 56). ובמילים אחרות, השיח שלך הוא האמצעי של חשיבתך ולכן אין לך ברירה אלא להשתמש בשיח זה גם כשאת מנסה לנטוש אותו! זוהי משימה דומה לניסיון להניע את גופך קדימה במשיכת המגפיים שעל רגלייך. המאמץ שדורשת פעולה בלתי אפשרית זו כה גדול, עד כי תעדיפי לעיתים להמציא הליך ישיר וייחודי למצב מטלה נתון. אך גם כאשר הניסיון הקודם שלך כולל פעולה מתווכת והיא נכללת בשל כך במרחב החיפוש שנוצר בשלב ג, העדיפות תינתן לפעולה הישירה, החוסכת מעקף דיסקורסיבי. הפעולה הישירה תהפוך עם הזמן לברירת מחזל שתבחר אוטומטית במצב מטלה נתון.

וכעת המקרה השלישי הממתין לליבון: מרחב החיפוש שהגעת אליו בשלב ג בזכות הסימולציה אינו מציע לך שום תקדים למצב המטלה הנוכחי (ראו איור 5). ובשפה מטפורית, אומנם הסימולציה שלחה אותך לעיר מסוימת, אך לא איתרת שם את מה שאת מחפשת. אי לכך בשלב ד אין לך ממה לבחור. האנושות כולה מצאה את עצמה במצב כזה עם פרוץ המגפה העולמית. המגפה מיקמה את כולנו ב'עיר של מחלות ומגפות', כלומר בשיח שלא מצאנו בו תקדים למצב מטלה שנקלענו אליו עם הופעת הווירוס החדש. ואכן, כל שהיה ידוע עד כה בנושא מגפות עולמיות ווירוסים למיניהם לא סיפק רוטינות להתמודדות. היה זה מקרה מובהק של מצב ללא תקדים. וכשאינן תקדים ואין רוטינה, האם יש בכלל מה לעשות? כפי שאנו יודעים היום, כמעט שלוש שנים אחרי תחילת המגפה העולמית, יש ויש. בהיעדר תקדים מיידי אנו נאלצים להיות יצירתיים. כך זה גם כשאנו מוצאים את עצמנו בתוך עיר שאיננו מכירים די הצורך. את המסלול שטרם טיילנו בו נצטרך לבנות בעצמנו. כשנחשוב על המשימה לעומק נבין כי גם כאן נזדקק לרוטינות קיימות. על דרך מטפורה, מסלול ההליכה החדש יעבור לאורך רחובות קיימים. החידוש יתבטא בכך שנרכיב את הרוטינות מחדש. על כן פרדוקסלי ככל שזו יישמע, שימוש ברוטינות אינו סותר יצירתיות. אדרבה, רוטינות הן החומרים שנבנים מהם פתרונות יצירתיים.

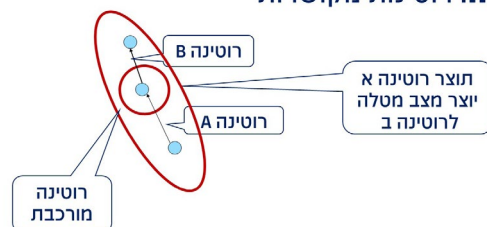
ובאשר ליצירת מסלול הליכה חדש, הרי שיש כאן שתי אפשרויות. פעמים רבות תצליחי לפתור את הבעיה בלי לצאת מן השיח (העיר) שבו מצאת את עצמך לאחר

שמקשרות בין נוירונים שהיו עד כה נפרדים לגמרי. התחברות כזו פותחת במוח מעברים שזמינותם גדלה ככל שמרבים להשתמש בהם. כך לפחות אנו לומדים מהחוק הידוע שקבע בשנת 1949 דונלד הב (Donal Hebb) ואף נקרא על שמו 'חוק הב': "היורים יחדיו, נקשרים יחדיו" (באנגלית האמירה נשמעת קליטה עוד יותר: fire together, wire together). תופעה זו – היכולת של המוח להשתנות ולהתעצב מחדש (או במילים פשוטות, העובדה שהפעילות שלנו מפסלת במוח) – אוששה במחקרים רבים והיא ידועה היום בשם **הפלסטיות של המוח**.² בשל קיום תופעה דומה בעולם של העשייה האנושית הנראית לעין – הניסיון אורג רשתות של רוטינות כפי שהוא אורג פיזית רשתות נוירונים – יש אולי מקום לדבר גם על **הפלסטיות של מערכת הרוטינות שלנו**.

I. רשת רוטינות



II. רוטינות מקושרות



איור 6: כל הרוטינות של שיח נתון מקושרות ביניהן ויוצרות רשת רוטינות דומה למפה של עיר

נחזור כעת לשאלה איך בוחרים מסלול אחד מתוך רבים. ייתכן שאפשר לקבל תשובה מפסיכולוגיה: במצבי בחירה אנו מונחים, לרוב בלא מודע, על ידי העיקרון שהפסיכולוג הישראלי-אמריקאי חתן פרס נובל דניאל כהנמן כינה 'חוק מזעור המאמץ': "כשיש מספר רוטינות אפשריות לביצוע מטלה נתונה, אנו נוטים לבחור בזו שדורשת את המאמץ המינימלי". וזה אומר שתמיד נעדיף את הדרך הקצרה ביותר – את התקדים שיבטיח כי לא נתאמץ יתר על המידה. ובמילים אחרות נבחר, קרוב לוודאי, ברוטינה ישירה, אם יש לנו כזאת, שכן הסימולציה מציעה לנו אותה בשיח שנזרקנו אליו בזכותה, ואילו כדי להגיע

2. להרחבות בנושא רשתות נוירונים והפלסטיות של המוח ובסוגיית הקשרים בין תופעות אלה לרוטינות שאנו מפתחים במהלך החיים ראו ספרה החדש של ד"ר אורית אלגאזי-הרשור (2023).



והמחסומים האלה עלולים להרתיע ויחד עם הנטייה שלך לחסוך במאמץ הם עשויים לגרום לך להרים ידיים.

כיוון שכך, ההימנעות הנפוצה מפעולה אוריינית אינה מפתיעה עוד. ואומנם, יש לאורמ"ת אויבים רבי-עוצמה. הנטייה המשולבת שלנו לסימולציה ולמזעור המאמץ גורמת לקיבעון דיסקורסיבי ולממוצבות. כשאנו מלקטים יחדיו את שנאמר בשני הסעיפים האחרונים, מתקבלת מסקנה מעניינת: באופן פרדוקסלי, המפתח לחידת המגבלות על דרכי פעולתנו נמצא באותו מקום שבו מצאנו תשובה לשאלה הפוכה, זו של גורם המעניק לנו יכולת לפעול כמעט בכל מצב. גורם זה, התברר, הוא הסימולציה שנעשית בגופינו בעל כורחנו. על כן סימולציה היא חרב פיפיות: היא מכשירה אותנו לפעולה בכל מצב מוכר, אך היא גם עלולה להכשיל אותנו במצבים חדשים. השאלה המתבקשת כעת היא מה לעשות כדי לפתח אורמ"ת אצל תלמידנו? כיצד אפשר להתגבר על אופייה המאתגר של משימה הוראתית זו?

אז מה עושים?

על פי התובנות שהגענו אליהן בזכות ההמשגה הדיסקורסיבית ברור כעת מדוע אורמ"ת אינה תולדה אוטומטית של שליטה בשיח מתמטי ואינה מתפתחת במידה משביעה רצון לאחר הוראה בית ספרית מסורתית. ההעדפה שלנו לפעולות ישירות והאירצון הנובע מכך לפנות לפעולה האורמ"תית הם אינהרנטיים ואינם בני מניעה. כמו כן שיעורי המתמטיקה המסורתיים אינם הסביבה המתאימה להתגברות על הקושי. כיוון שהיכולת שלנו לפעול ברוב מצבי החיים נובעת מהנטייה שלנו לשחזור אוטומטי של מצבים תקדימיים, הסיכוי לכך שבחיי היום-יום נפנה אל רוטינה שנלמדה בבית ספר אינו רב. רוטינה שנלמדה בבית ספר היא זו שנגייס אותה בהיותנו בכיתת לימוד, אך היא אינה בהכרח זו שלפיה נפעל מחוץ לבית הספר. לכאורה היינו יכולים להגביר את הסיכויים לתיווך מתמטי יום-יומי אילו לימדנו מתמטיקה בהקשרים מציאותיים, הדומים למצבי מטלה אותנטיים המזמינים תיווך. ואולם, גם כאן צצות בעיות. ראשית, שום מאמץ לייבא הקשרים מציאותיים לתוך הכיתה לא ישכיה מהתלמידים שהם נמצאים בבית הספר, שבו הם מצופים לפעול למען מטרותיו של המוסד ולפי כלליו. במילים אחרות, המטלה שהלומדים מתמודדים איתה בבית הספר לא תהפוך למטלת חיים 'אותנטית' רק משום שהיא הוצגה כאילו היא כזו. מטלה חשבונית המחופשת לפעולת קנייה בשוק אינה אלא אותה גברת בשינוי אדרת והיא תתנהל בכיתה לפי כללים בית ספריים של פרסים ועונשים ולא כללים של שוק. לכן על אף המאמצים שהשקענו בהמחזה, אין סיכוי רב שהסימולציה הממוצבת

הסימולציה (ראו מקרה שלישי א באיור 5). ואכן, אם את בעיר שהכרת כבר במידה מסוימת, את עשויה למצוא מסלול מספק גם בלי להיעזר בניווט סלולרי. די לך במפה המנטלית של העיר שבנית לעצמך קודם. כדי לומר זאת פחות מטפורית, את יכולה למצוא רוטינה ישירה, כפי שעשו באי הסופרמרקטים שצפתה בהם ג'יין לייב (Jane Lave, 1988) וכמו שעשתה טלי במחקרנו. ישירות פירושה שחסכת לעצמך יציאה משיחך הנוכחי.

עם זאת, יהיו פעמים שבהן השיח שמשמש ברירת מחדל לא יספק לך תשובות (ראו מקרה שלישי ב באיור 5). כאן כדאי שתזכרי בשיחים אחרים המוכרים לך – בערים אחרות שטיילת בהן בעבר. לכל אחד מאיתנו יש עולם שיחים ייחודי ומפה המאפשרת התמצאות בו. כעת את יכולה לחפש מעקף דרך אחת הערים שבעולמך – למשל דרך "עיר המתמטיקה", המאוכלסת בעצמים מתמטיים. אם תמצאי מעקף שכזה, הרי שיש לך רוטינה אורמ"תית. רוטינה מתוכתת כזו הציעה לקוחת המספרה כשהיא ניסתה להסביר את הצורך בעטיית מסיכות במגפה העולמית. על כן רוטינות אורמ"תיות הן הברירה היחידה העשויה להציל אותך במצבים בעייתיים ביותר. למרות זאת, הממוצבות עלולה להכשיל אותך במאמציך גם הפעם. חוק מזעור המאמץ מכה כאן שנית, ובעוצמה. בניית מעקף היא פעולה תובענית הדורשת השקעה רבה. במשימה זו את נתקלת בכל המכשולים שקיימים במקרים הקודמים, אך יש גם קשיים נוספים, והם מטרידים במיוחד. מציאת מעקף תתאפשר רק אם את מסוגלת לנוע בחופשיות בתוך שיחים מתמטיים רבים. נוסף על כך כיצד תבחרי את השיח המתאים וכיצד תבני את ההתאמה היעילה בין העצמים של שיחך הנוכחי לאלה של שיח המעקף? בלשון של מטפורת העיר, את זקוקה כעת למפת כבישים בין-עירוניים (בין-שיחיים) שבאמצעותה תוכלי להגיע מעיר שאת נמצאת בה כעת – נאמר עיר המחלות והמגפות – אל עיר המעקף, כגון זו של פונקציות מעריכיות. בניית דרכים עירוניות ובין-עירוניות תצרוך משאבים רבים, והזמן בראשם. לבסוף גם אם את מתמצאת היטב בערים רבות, תתקשי להחליט באיזו מהן לבחור כדי לבנות מעקף יעיל. תצטרכי לסרוק את כל הערים המוכרות לך, כי הפעם אין גורם שיצמצם את מרחב החיפוש, כפי שעושה סימולציה במקרים אחרים. כמו כן בחירות מסוימות עלולות להיחסם בשל חוק נוסף, שאפשר לקרוא לו 'חוק מקסום התמורה החברתית'. לפי חוק זה, אנו נוטים לבחור במה שמביא פרסים ולהימנע ממה שמסכן אותנו בעונש. בבית הספר, לדוגמה, לשיח מתמטי הנלמד כעת עדיפות על אלה שנלמדו בעבר, שכן התלמידים מאמינים כי השיח הנלמד כעת הוא זה שבו הם נבחנים ברגע זה. כל הקשיים



המודגשת שוב ושוב בספרו הקלסי של פויה היא השימוש באנלוגיה: איתור בעיה מוכרת ופתורה דומה לזו המונחת לפנינו כעת, והתאמת פתרונה הידוע של הבעיה המוכרת לבעיה החדשה. אנלוגיה אינה אלא רוטינת-על לחיפוש תקדימים. כמובן, כאן תשומת לב מיוחדת צריכה להינתן לאנלוגיות "רחוקות", חוצות שיחים.

לעת הזאת, כאשר שיטות הוראה לקראת אורמ"ת עדיין נמצאות בשלבי פיתוח מוקדמים, כל שאפשר להציע הוא רשימת יכולות בסיסיות חיוניות למי שמנסה להגיע לאוריינות מתמטית. את המאמר אסיים ברשימה כזו, והיא קרוב לוודאי עדיין חלקית בלבד. בלשון המטפורה של שיח כעיר מדובר כאן בציוד בסיסי למשוטט בין שיחים. הראשון בין הכלים החיוניים הוא **היכרות טובה עם השיח המתמטי**. הכלי השני הוא **מפת רשת הרוטינות**, שהיא בבחינת מפת עיר. הכוונה כאן היא להיכרות מעמיקה גם עם הקשרים בין הרוטינות המתמטיות. הכלי השלישי הוא **מפת הקשרים בין-שיחיים** שהיא בבחינת מפת דרכים בין-עירוניות. הכוונה הפעם לרוטינות-על למעברים בין שיחים, ובפרט בין שיחים יום-יומיים למיניהם לבין השיח המתמטי. מטבע הדברים, מפה כזו יכולה להיבנות בבית ספר רק חלקית, שכן בזמן הלימודים אי אפשר לטייל בין כל זוג של שיחים. הכלי הרביעי הוא שיטות היחלצות, כלומר **רוטינות-על לחיפוש אחר מעקפים** – ליצירת מעברים לשיח מתמטי ובחזרה. רוטינות-על אלה נועדו לאפשר התמודדות עם מצבי המטלה המאתגרים ביותר, הלוא הם אלה שאינם מוכרים לתלמיד. לבסוף הלומדים זקוקים **לחשיבה ביקורתית** שתמתן את השפעת הממוצבות. חשיבה זו נחוצה גם כדי שהתלמידים יוכלו להעריך מראש את איכותו ואת יעילותו של כל מסלול שבו הם ישקלו לנוע.

הוראה בית ספרית של מתמטיקה, כפי שהיא נהוגה זה שנים רבות, מכוונת בעיקר אל הקניית שני הכלים הראשונים, מיומנות ברוטינות מתמטיות והיכרות עם הקשרים ביניהן. היא אינה מתמקדת די הצורך בפיתוח שלוש הכלים האחרים, ויש האומרים שהיא בולמת את בנייתו של זה האחרון, הלוא הוא החשיבה הביקורתית. הבנת המכשולים האורבים כאן למורה ולתלמיד שהתאפשרה בזכות ההמשגה הדיסקורסיבית של אורמ"ת, עשויה לעזור בחיפוש אחר דרכים להתמודד עם אתגרי השעה האלה.

שתבצע אצל התלמיד בביקורו העתידי בשוק אמיתי תזכיר לו את האירוע הבית ספרי הרלוונטי.

לסיכום, ההתנסות הכיתתית ברוטינה זו או אחרת, מעצם היותה בית ספרית, אינה מבטיחה שהיא תהיה בשביל התלמידים בעתיד תקדים מועדף במצבי חוץ בית ספריים. יתרה מזו, גם אילו היה טעם להיעזר בהתנסויות במצבי מטלה מאורגנים בצלמן של סיטואציות מן החיים, כיצד היינו ממחזים מצבים עתידיים שאינם ניתנים לחיזוי? יוצא מכאן שהמורה צריכה לוותר על הרעיון של יצירת מאגר מוכן של תקדימים ספציפיים ש"יכסו" את כל המצבים שהתלמידים עשויים להתקל בהם בעתיד. מעתה, משימתה העיקרית והמאתגרת ביותר של המורה תהיה להבטיח שתלמידיה ידעו להתמודד עם מצבים שבהם תהליך גיוס רוטינה מסובך ביותר: מצבי מטלה בלתי מוכרים להם, שבהם הסימולציה אינה מעלה שום תקדים (מרחב חיפוש תקדימים המתקבל בזכותה נשאר ריק) ולכן גם אינה מכוונת לרוטינה מתאימה (ראו את המקרה האחרון בסעיף הקודם). זוהי משימה של מי שנאלץ למצוא את דרכו בעיר שהוא לא טייל בה מעולם והוא אינו מצויד בשום אמצעי ניווט.

למעשה נראה כי מורה המנסה לפתח אוריינות מתמטית של תלמידה עומדת לפני דרישה פרדוקסלית: היא אמורה ללמד את התלמיד לפעול במצבים שהיא עצמה אינה מכירה ואף אינה יכולה לדמיין. בשל המטרה המאתגרת הזאת, הבלתי אפשרית לכאורה, הברירה היחידה היא ככל הנראה לעלות לרמת-על: במקום להתמקד בלמידה ישירה של יישומי מתמטיקה ספציפיים יש לכוון אל פיתוח **רוטינות לבניית רוטינות חדשות**, ובעיקר כאלה שחוצות גבולות בין שיחים. את הרעיון הזה אפשר ליישם בהוראת **מידול מתמטי**, נושא שבהשראת מבחני PISA נכנס בימים אלה לתוכניות לימודים בכל העולם. מידול מתמטי, ובאנגלית **modeling** (Schukajlow et al., 2018), הוא מלאכת התרת בעיות מתחומים (שיחים) שונים באמצעות בניית רוטינות מתווכות מתמטיקה. אף על פי שגם כאן הלומדים עוסקים במצבי מטלה ספציפיים, הלמידה העיקרית צריכה כאמור להתרחש ברמת-על: מתוך המקרים הספציפיים הלומד חייב לגזור **רוטינות-על** להתמודדות עם מצבי מטלה בלתי מוכרים. מה הן הרוטינות האלה? עדיין מוקדם להציג הצעה מסודרת וממצה. הרעיונות המפורסמים של המתמטיקאי ההונגרי-אמריקאי ג'ורג' פויה לרוטינות-על האמורות לעזור בהתרת בעיות מתמטיות (Pólya, 1971) הם נקודת מוצא אפשרית לחשיבה שיטתית על הנושא.³ הרוטינה

3. פויה לא השתמש במונח 'רוטינה', אך תיאוריו מעידים על התאמתו של שם זה.



- assessments. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 1021–1036. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01448-1>
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge University Press.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2003). *The PISA 2003 assessment framework – Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. <https://www.oecd.org/education/school>
- Pólya, G. (1971). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Saxe, G. B. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Researcher*, 17(6), 14–21. <https://doi.org/10.3102/0013189X017006014>
- Schleicher, A. (2019). *PISA 2018: Insights and Interpretations*. OECD. <https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf>
- Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on the teaching and learning of mathematical modeling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 5–18. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>
- Scribner, S. (1997). Mind in action: A functional approach to thinking. In M. Cole, Y. Engstrom, & O. Vasquez (Eds.), *Mind, culture, and activity: Seminal papers from the laboratory of comparative human cognition* (pp. 354–368). Cambridge University Press.
- רשימת מקורות**
- אלגאוויהרשלר, א' (2023). *נוירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים*. מכון מופ"ת.
- גל, ע' (2012). *אוריינות מתמטית: סקירה מדעית מוגשת לוועדה בנושא: "מה צריכים לדעת העוסקים בהוראת המתמטיקה?"*. האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים. <http://education.academy.ac.il/SystemFiles/23066.pdf>
- פרץ, ח' (2020). *מיומנויות המאה ה-21: סקירת ספרות*. מחלקת מחקר ופיתוח, קרן רש"י. <https://did.li/LZOIC>
- Barsalou, L. W. (2009). Simulation, situated conceptualization, and prediction. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 364(1521), 1281–1289. <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.2008.0319>
- Barsalou, L. W. (2020). Challenges and opportunities for grounding cognition. *Journal of Cognition*, 3(1), Article 31. <https://doi.org/10.5334/joc.116>
- Bolstad, O. H. (2020). *Teaching and learning for mathematical literacy* [Doctoral dissertation, University of Agder]. <https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2687234>
- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32–42. <https://doi.org/10.3102/0013189X018001032>
- Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline*. Belknap Press of Harvard University Press.
- Fadel, C. (2008). *21st century skills: How can you prepare students for the new global economy?* Organisation for Economic Co-operation and Development. <https://www.oecd.org/site/educeri21st/40756908.pdf>
- Graven, M., Venkat, H., & Bowie, L. (2023). Analysing the citizenship agenda in mathematical literacy school exit



- Sfard, A. (2005). What changes when learning goes to school: The communicational version, the case of mathematics. *European Journal of School Psychology*, 3(1), 57–82.
- Venkatakrisnan, H., & Graven, M. (2006). Mathematical literacy in South Africa and functional mathematics in England: A consideration of overlaps and contrasts. *Pythagoras*, 64, 14–28. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i64.95>
- Vithal, R., & Bishop, A. J. (2006). Mathematical literacy: A new literacy or a new mathematics? *Pythagoras*, 64, 2–5. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i64.93>
- Wittgenstein, L. (1999). *Tractatus logico-philosophicus* (C. K. Ogden, Trans.). Dover Publications. (Originally published in 1921)

להרחיב את השביל ולהרחיק את הגבול

ניסיונות ליישום רעיונות תאורטיים מפסיכולוגיה חינוכית וקוגניטיבית
בהכשרה להוראה ובתוכניות לתואר שני (M.Ed.) בהוראת מתמטיקה

ד"ר תקוה עובדיה

מרצה בכירה במכללת אורנים, מלמדת בתואר ראשון
ושני קורסים מגוונים בחינוך מתמטי.





להרחיב את השביל ולהרחיק את הגבול

ניסיונות ליישום רעיונות תאורטיים מפסיכולוגיה חינוכית וקוגניטיבית בהכשרה להוראה ובתוכניות לתואר שני (M.Ed.) בהוראת מתמטיקה

תקוה עובדיה

תקציר

מחקרים העוסקים במבנה התודעה האנושית מכוונים להעמיק את ההיכרות עם ההיבטים של תפקוד המוח כמו חשיבה, זיכרון, למידה, רגשות ועוד. אנשי חינוך מגלים עניין בממצאי המחקר הפסיכולוגי הכללי ובתחום הפסיכולוגיה הקוגניטיבית. נירופדגוגיה יוצרת חיבורים בין תוצאות מחקרים בתחום מדעי המוח, פסיכולוגיה ופדגוגיה כדי להיטיב את דרכי ההוראה והלמידה, כך שסביבות הלמידה ותהליכים שיעוצבו יגבירו את הפוטנציאל הלימודי של הפרט ושל הקבוצה הלומדת הן מתוך החוויה הקוגניטיבית הן מתוך החוויה הרגשית.

המאמר המצורף מתאר שלוש דוגמאות מתוך שלושה מחקרים שונים זה מזה שבהם נעשה ניסיון לעצב סביבת למידה ודרכי הוראה על פי רעיונות שנהגו במחקרים העוסקים בפסיכולוגיה קוגניטיבית או אחרת כדי למקסם תהליכי למידה של הפרט והקבוצה. ניתוח האירועים המוצגים מנסה למקד את פרשנות מצבי הלמידה באמצעות רעיונות תאורטיים שנהגו בתחומי מדעי המוח ופסיכולוגיה. בשלוש הדוגמאות המוצגות במאמר זה התמקדות החוקרת היא בתשומת הלב של המשתתפים כדי להבין מה מושך את תשומת ליבם, ומהן הפעולות שהם עושים כתוצאה של שימת לב זו.

בדוגמה הראשונה מתבוננת החוקרת בתשומת הלב של מורה ששינתה את סביבת הלמידה לתלמידה כך שהם פועלים בחלק גדול מהשיעור לבדם והמורה מנסה למקד את תשומת ליבה בתפקידה החדש בכיתה, בדוגמה השנייה מתמקדת החוקרת בתשומת הלב של היחיד כאשר הוא פועל ופותר בעיה מתמטית לא שגרתית בקבוצת עבודה. בדוגמה השלישית מתמקדת החוקרת בתשומת לב של מורה שמתעדת את הוראתה, בפרשנות של המורה לאירועים שהסבו את תשומת ליבה, ובאירועים שלא שמה לב אליהם.

התבוננות בתשומת הלב של הלומד בתהליך למידה, או של המלמד בתהליך ההוראה, מקדמת את המודעות להבנת הפרקטיקות שנוקטים לומדים ומלמדים בתהליכי למידה הוראה שנובעים משימת ליבם, וגם את המודעות לאיפיון אירועים שזנחים משימת ליבם. מודעות זו מעוררת לעיצוב תהליכי וסביבות למידה הוראה המגבירים את תשומת

הלב של המלמדים והלומדים לאירועים חשובים הנזנחים מתשומת לב. התבוננות בדוגמאות המוצגות במאמר בעדשות מושאלות מתאוריות מתחומים שאינם חינוך מתמטי מקדמת הבנת עומק לתהליכים שהתרחשו בהם.

מילות מפתח: שימת לב (Noticing); נירופדגוגיה; עומס קוגניטיבי; זיכרון אפיוזי; קולבורציה; גאומטריה; סביבת פולפרוף; פתרון בעיות; זיכרון עבודה שיתופי.

מבוא

Between stimulus and response there is a **space**.
In that space is our power to choose our response.
In our response lies our **growth** and our **freedom**.
(Viktor Frankl)

כבני אנוש נוצרנו רגישים לגירויים, ואנו מגיבים בזריזות על כל רחש כחלק מתכונת הישרדות אנושית. אנו חיים בעידן שבו גירויים ותגובות מסיטים את תשומת ליבנו ולא בהכרח לצרכים חיוניים. גזאלי ורוזן (Gazzaley & Rosen, 2016) מזכירים לנו שככל שאנו צורכים בלא מודע טכנולוגיה, אנו מאתגרים את שורשי האנושיות שלנו ומחלישים את התודעה:

Know that the more we **unconsciously consume technology**, the more we're splintering the very roots of our humanity. (p. 49)

אם נחבר בין הרעיון של פרנקל לשלוט במוח שבין גירוי לתגובה לאזהרה של גזאלי ורוזן לצורך טכנולוגיה מתוך מודעות, נאחד את שני הרעיונות באמצעות ההבנה שהיתרון האנושי שלנו בעניינם נוגע ל"תשומת הלב" או ליתר דיוק למיקוד תשומת הלב שלנו בעשיית פעולות שהן תוצאה של גירויים מגוונים.

המשימה של שליטה בתשומת הלב, או במילה אחרת מיקוד "מערכת התודעה" או מיקוד פעולות קוגניטיביות (ואולי גם מטא-קוגניטיביות, נדון בזה בהמשך) מורכבת מאוד לטענתם של פסיכולוגים אבולוציוניים, מאחר שיש לנו הטיות טבעיות כבני אנוש הנובעות מעצם אנושיותנו. הטיות אלה הן עדות למיקוד תשומת הלב בדרך אחרת בכל מיני מצבים. כבני אנוש קל מאוד להסיח את התודעה שלנו מבחור, עד כדי כך שאנו לא מודעים להסחה זו (גודמן, 2021). לעובדה זו יש השפעה על דרכי ההוראה ולמידה שנדון בהן במאמר הנוכחי.



ב"תשומת לב" מתנהלות בזכות פעולות קוגניטיביות ותייתי אם כדי לחשוב על הפעולה, צריך חשיבה ביקורתית שהיא קוגניטיבית שמשרתת מטא-קוגניציה.

זה כעשור שאני עוקבת אחר גילויים מדעיים ומסקנות שאפשר ליישם בחינוך מתחומי הפסיכולוגיה הקוגניטיבית, הפסיכולוגיה החינוכית והפסיכולוגיה האבולוציונית ומנסה ליישם מסקנות מחקר בקורסים בהכשרה להוראה ותוכניות להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה (ופיזיקה).

במאמר שלפנינו אציג שלוש דוגמאות הממחישות כיצד עקרונות שנלמדו מתוצאות מחקרים (בחקר המוח, כגון הבנת תהליכי היווצרות הידע, תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה, נפלאות הזיכרון ועקרונות מפסיכולוגיה ארגונית כגון תאוריית U (Otto Scharmer), תורגמו לפרקטיקות שיושמו בהכשרה להוראת מתמטיקה (ופיזיקה).

המסע במאמר להלן מתאר את המוטיבציה שלי כמרצה ללכוד את תשומת ליבו של הלומד, כדי למקד אותה בתהליכי למידתו במודע ומתוך כך לכוון אותו לחולל יצירה חדשה שלו בעבורו, כזאת שגם אם היא מנצלת את היישומים הטכנולוגיים למיניהם, היא אינה מאבדת את היתרונות הקוגניטיביים שלו כלומד, כיוצר ואולי ממקסמת אותם.

חינוך 4.0 (Education 4.0) כולל יישום רעיונות דידקטיים שהם תוצאות של מחקרים בפסיכולוגיה ופסיכולוגיה קוגניטיבית, שמקדמים את מיקוד תשומת לב הלומד בנלמד באמצעות עיצוב סביבות למידה מתאימות. במאמר הנוכחי מוצעות דוגמאות צנועות לעיצוב סביבות למידה ברוח זו וחקירתן על פי שאלות מחקר מסוימות. במאמר הנוכחי אני מתמקדת בהתבוננות בתשומת הלב של המורים, מתוך פרספקטיבות מגוונות כדי להבין את הסיטואציות הנחקרות בעניין של "תשומת לב".

אחתום את המבוא בדבריו של אוטו שארמר (Otto Scharmer):

The power of attention is the real superpower of our age. attention, aligned with intention, can make mountains move. (Otto Scharmer, 2018).

רקע תאורטי למחקר

בחלק זה אעסוק בחמישה נושאים: נירופדגוגיה מהמחקר לשדה, תשומת לב (noticing), תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה, קולבורציה וזיכרון עבודה שיתופי ותשומת הלב והבחירה בזיכרונות. בכל נושא אזכיר ספרות מחקרית בנושא שתסייע להסביר כמה מהמצאים משלושה מחקרים שנעשו ומתוארים במאמר זה באופן תמציתי.

במאה ה-21 נראה שללומד הסביר הוכנו אפשרויות מגוונות להתפתחות הידע (והמיומנויות הנדרשות). אם הוא לא אוהב לקרא ספר, הוא יכול להאזין להסכת (פודקאסט), אם המאמר לא קריא בעבורו, יש תוכנת PDF שתקריא לו אותו בעת אימון בחדר כושר. אם הוא לא די מיומן כדי לכתוב, הוא יקריא למחולל כתיבה את דבריו והמחולל יכתוב בעבורו. אם הוא לא רהוט בחישוב, יש מחשבון מרמה אריתמטית ועד רמה אלגברית או גרפית מורכבת שיציג בעבורו פתרונות בייצוגים מגוונים. המיג'רני (Midjourney) יצייר ויעצב עבורו, ומחוללי AI למיניהם יסכמו בעבורו תשובות לשאלות, יקודדו לו קודים, וזו רק ההתחלה. אם הלומד יהיה "מודע" ו"ישים לב" לתהליכים קוגניטיביים (ומטא-קוגניטיביים), אולי הוא ירתום את הכלים ללמידה מודעת ועמוקה. ומה אם לא?

הדרך ללמידה במאה ה-21 נעשית שביל רחב וכמעט חסר שוליים – "גבולות", הגבול מצטמצם עם כל התפתחות טכנולוגית שמקדמת הנגשה של ידע או מיומנויות. **כמעט כולם יכולים: לקרוא, לכתוב, לחשב, לעצב, לצייר, לסכם, להשיב ולתכנת באמצעות כתיבת דרישות ממוקדות למחוללים טכנולוגיים למיניהם. האומנם?**

האם אכן אנו מוכנים לוותר לעצמנו על חוויית הלמידה המרגשת, חוויית ההמצאה, הגילוי, היצירה, החוללות של הזיכרון, ניסוח פתרון יצירתי שלנו, ציור שעיצבנו ללא כלים חיצוניים? האם נכנה את התוצרים של המחוללים למיניהם יצירות שלנו? האם אכן נסכים שהם יבטאו אותנו? את מחשבתנו? את הלוגיקה האנושית? האם המיומנויות הקוגניטיביות (והמטא-קוגניטיביות) שלנו עשויות להשתפר באמצעותם או עלולות חלילה להתנוון? במרחב שבו יש שפע של הזדמנויות ליצירה כהרף עין, כנראה עדיין מפעמת רוח האדם להטביע את חותמו שלו ביצירה אנושית, שנובעת מכוחו האינטלקטואלי, **משימת הלב שלו** לדעת, להבין וליצור.

במרחב שבו נפגשים האדם, החינוך והחברה במאה הנוכחית, מתעצם האתגר של אנשי החינוך לחולל עם המשאבים ההולכים ומתפתחים, שינוי תודעתי עמוק המכוון להחלשת הסחת הדעת מבחוץ, הגברת המודעות ותשומת הלב מבפנים כדי לחולל את השינוי המכונה "למידה" באמצעות יצירה אנושית אינדיווידואלית מושכלת.

המושג המרכזי שאדון בו במאמר זה הוא "Noticing" הקשור למגוון של פעולות קוגניטיביות, כגון תפיסה, פרשנות, הנמקה, תגובה, קבלת החלטות, בניית קשרים ועוד. בכל אחת מהדוגמאות שיוצגו במאמר אנתח את "תשומת הלב" (Noticing) על פי תאוריה נבחרת. בעת הניתוח הבחנתי שגם פעולות מטא-קוגניטיביות הקשורות



נירופדגוגיה - מהמחקר אל השדה - האומנם?

על אף שמדעי המוח החינוכיים פורסמו לפני למעלה מ-30 שנה היו שטענו שאי אפשר לתרגם את מדעי המוח החינוכיים לחינוך (Bowers, 2016; Bruer, 1997). יש הטוענים שחוקרים חינוכיים משתמשים במדעי המוח כדי להבין נתונים התנהגותיים. מדעי המוח השפיעו על הפרקטיקה החינוכית בכמה דרכים. לדוגמה, הם פענחו את המנגנונים המזהים של דיסלקציה והתערבויות לדיסלקציה (Shaywitz & Shaywitz, 2008) ותובנות על האופן שחרדה, תשומת לב ורגשות נוספים משפיעים על התוצאות החינוכיות (Carew & Magsamen, 2010). החסמים ליישום מחקר נירופדעי בחינוך מבוססים היטב וכוללים מחסומים תאורטיים מאחר שלשתי הדיסציפלינות יש מטרות אחרות מבחינה מהותית וסולמות של חקירה השונים זה מזה (Devonshire & Dommett, 2010; Willingham, 2009). כדי להמחיש חוסר התאמה שכזה, כדאי לשאול "מה נחשב לשיטות עבודה מומלצות למחקר" לפי כל דיסציפלינה. אף שאין תשובה ברורה לשאלה זו, אפשר לדמיין מצב שבו יישום מיטבי בהוראה כרוך בהתאמות גמישות מרגע לרגע ויש תגובות על הסביבה הקרובה ועל צורכי התלמידים הלומדים. זה עומד בסתירה למה שרבים יראו בו ראיה של השיטות המדעיות הטובות ביותר. כלומר, הפקת ידע מדעי שאפשר לשכפל ולשחזר אותו.

מחסום תאורטי נוסף נובע מקשיים בתרגום ממצאים גם כאשר הם משרתים מטרות רלוונטיות ומתנהלים ברמת חקירה מתאימה. קורצס ועמיתיו (Churches et al., 2020) מציעים כי מדעי המוח יכולים לעמוד בבסיס החינוך באותה דרך שבה הביולוגיה עומדת בבסיס הרפואה, כלומר כל תחום משמר את היצירתיות שלו אך אינו יכול לפעול נגד החוק של התחום האחר. הקש זה בנוי על הקביעה שמדעי המוח הם מדע טבע שמוטל עליו לחקור את פעולתו של המוח, בדיוק כפי שהביולוגיה מבינה את פעולתו של גוף האדם. לעומת זאת, החינוך שואף לפתח פדגוגיות ולכן יש לו יותר במשותף עם האופן שהרפואה משתמשת בביולוגיה כדי לעגן מחקר ותרגול בטיפולים, או האופן שהארכיטקטורה משתמשת בפיזיקה.

פסיכולוגים בית ספריים מאומנים במדידת תוצאות ברמת הפרט, הקבוצה והמערכת, מה שהופך אותם למומחים לתמוך בתרגום של ממצאים נירופדעיים ולמדוד יעילות של שינויים בהוראה. מחקר אחרון של קורצס ועמיתיו (Churches et al., 2020) הוכיח כי מורים בכיתה יכולים לקדם מחקרים מבוקרים ומחקרים משוחזרים המתמקדים בהשערות שנשענות על מדעי המוח, ותורמים לבסיס

ראיות חזק ליישום באמצעות עשיית מחקר בסביבה בית ספרית. פסיכולוגים בבית הספר הם אחד מאנשי בית הספר המעטים שיש להם די ידע בתכנון ניסוי כדי לתמוך במורים במאמץ זה.

פסיכולוגים בית ספריים סייעו בפיתוח התערבויות אקדמיות ופרקטיקות הוראה לשיפור הלמידה והתוצאות של התלמידים בתחומי ליבה כולל קריאה ומתמטיקה (Bramlett et al., 2010). הכשרה במדעי המוח החינוכיים מפיקה ממצאים עיקריים שאפשר למנף אותם לפיתוח ושכלול התערבויות ופרקטיקות בהוראה. לדוגמה, ילדים עם דיסלקציה, שלא כעמיתיהם הלא-דיסלקטים, אינם מצליחים לגייס את הקורטקס הקדם-מצחתי הגבי בעת משימות של מודעות פונולוגיות (Kovelman et al., 2012). ממצא זה מראה שהתערבויות המכוונות לתפקוד ניהולי כמו מודעות פונולוגית עשויות להיות יעילות בשיפור תוצאות הקריאה של ילדים דיסלקטיים מאשר התערבויות המכוונות למודעות פונולוגית בלבד. בדומה, יחסית לעמיתים נורמטיביים, ילדים עם דיסקלקוליה התפתחותית מציגים הפעלה תפקודית חלשה יותר בסולקוס תוך-פריאטלי ימני, באינסולה ובאונה קדמית תחתונה במהלך משימת זיכרון עבודה מרחבית וכן פגיעה בזיכרון העבודה (Rotzer et al., 2009). ממצא זה מלמד על החשיבות הפוטנציאלית של התמקדות בזיכרון עבודה מרחבי בהתערבויות במתמטיקה לילדים עם דיסקלקוליה. ואכן, עדויות מתכנסות מתחומי מדעי המוח והפסיכולוגיה כאחד מעידות על קשרים חזקים ומהימנים בין עיבוד מרחבי ומתמטי (Hawes & Ansari, 2020). זה מספק הדגמה נוספת לאופן שרמות שונות של ניתוח (מוח והתנהגות) יכולות לקדם הבנה עשירה יותר של ביצועים לימודיים ספציפיים לתחום (למשל, מתמטיקה) כמו המנגנונים שעשויים לעמוד בבסיס התערבויות מוצלחות. לאחרונה מינפו חוקרים את בסיס הידע הזה כדי לתכנן הן התערבויות אימון מבוססות מעבדה הן בכיתה לשיפור המיומנויות המרחביות של ילדים והביצועים המתמטיים שלהם (Gilligan et al., 2019, לדוגמה).

לסיכום יש מקום לומר כי מדעי המוח החינוכיים ספגו ביקורת על כך שיש להם השפעה מועטה על הפרקטיקה החינוכית. היעדר מנגנונים קונקרטיים המגשרים על מדעי המוח והחינוך היה תורם מרכזי לפער הזה.

במאמר הנוכחי אני מציגה שלוש דוגמאות של שימוש מקומי וצנוע בתוצאות מחקרים מתחומים מגוונים של הפסיכולוגיה כגון פסיכולוגיה קוגניטיבית, לצורך בניית סביבות למידה בתוכניות להכשרת מורים למתמטיקה.

בדוגמה הראשונה תלמידים (או סטודנטים) לומדים לכתוב הוכחה פורמלית דדוקטיבית בגאומטריה באמצעות תוכנת



קריטיים) בכיתה ופירוש והיגיון של אירועים אלו (Kaiser et al., 2015). קיסר ועמיתיו (Sherin & Star, 2011). הגדירו תפיסה, פרשנות וקבלת החלטות כהיבטים של תשומת לב. לפי קוניג (König et al., 2022) רוב המחקרים העוסקים בתשומת לב, ובפרט אלה מתחום החינוך המתמטי מתמקדים בפרספקטיבה הקוגניטיבית-פסיכולוגית.

2. פרספקטיבה חברתית-תרבותית (Socio-cultural perspective of teacher noticing) של תשומת לב המורה מוזכרת לעיתים קרובות בשילוב עם המונח 'חזון מקצועי' (Goodwin, 1994). הפרספקטיבה החברתית-תרבותית של "שימת לב" המורים נשענת על המבנה החברתי-תרבותי והמסתמך על הפרקטיקה של ראייה מקצועית שפיתח גודוויין (Goodwin, 1994) בתחום האנתרופולוגיה הלשונית. בבסיס גישה זו עומדת האמונה כי היכולת לשים לב לאירוע משמעותי היא פעילות חברתית (Goodwin, 1994) שפותחה באמצעות פרקטיקות דיסקורסיביות של אנשי מקצוע המדגימים את מומחיותם באמצעות השיח. לאחרונה צצו גישות פוליטיות-חברתיות מוכוונות שוויון, שקוראות לשים לב לשיח על גירעון בהקשר של לומדים ומדגישות את הצורך לשים לב לפרקטיקות שמעריכות את היכולות של תלמידים מוחלשים וממקדת תשומת לב בתלמידים למען חינוך שוויוני (Dominguez, 2019; Louie et al., 2021) לעומת גישת שימת לב לגירעון ומוחלשות, שיינר (Scheiner, 2023) מדגיש את תשומת הלב של המורה לחזקות של תלמידים בחשיבה מתמטית.

3. פרספקטיבת הדיסציפלינה הספציפית (Discipline-specific perspective of teacher noticing) עוסקת בתשומת לב המורים כפרקטיקות להעלאת מודעות המורה בהוראה בתחומי (Mason, 2002). את הפרספקטיבה פיתח מייסון (Mason, 2002) בהקשר של חינוך מתמטי. אף שמדובר בפרספקטיבה כללית, המפתחת את הדיסציפלינה של ההתבוננות, הדוגמאות שמייסון משתמש בהן (Mason, 2002) הן מתמטיות, ולכן השפעתה של פרספקטיבה זו יושמה בעיקר בידי חוקרי חינוך מתמטי. גישה מכוונת פרקטיקה זו מספקת המלצות למחקר על הפרקטיקה של האדם עצמו: "בלב כל הפרקטיקות טמונה תשומת לב: לשים לב להזדמנות לפעול כראוי. כדי להבחין בהזדמנות לפעול נדרשים שלושה דברים: נוכחות ורגישות ברגע, צורך – סיבה לפעול ומעשה אחר שעלה בראש" (Mason, 2002, p. 1). מייסון (Mason, 2002) פיתח מערכת של פרקטיקות

פולפרוף הכוללת משוב שיוצר בעבורם כעין דוגמאות פתורות, ורמזים שהם כעין מאגר משאבים שמקילים על העומס הקוגניטיבי על זיכרון העבודה בזמן אמת. מבנה זה של התוכנה גם מאריך את זמן מיקוד הקשב של הלומדים לביצוע המשימה, וגם מייצר מודל תודעתי של מבנה צורני ומהותי של הוכחה דדוקטיבית גאומטרית שמשרת אותם לקראת כתיבת ההוכחה בפתרון הבא. תפקיד המורה המלמדת בכיתה לא ברור לה ותשומת ליבה המתמקדת במשתנים מסוימים של למידת התלמידים, מקדמת את הבנתה על הפרקטיקות החדשות הייחודיות למצב שעליה לנקוט בהוראה.

בדוגמה השנייה עוצבה סביבת למידה על פי התאוריה העוסקת בקולבורציה וזיכרון עבודה קבוצתי, ותאוריית U המתארת גם לקבוצת לומדים העושים יחד משימה מתוך נוכחות עמוקה. הלומדים בקבוצה זו מיקדו את תשומת ליבם ברעיונות של עצמם וברעיונות של עמיתיהם, ובעת הפניית תשומת הלב מרעיון לרעיון וקבלת החלטות יצרו פתרון קבוצתי. הלומדים בקבוצה הגיעו להישגים של פתרון בעיות לא שגרתיות יותר מלומדים עצמאיים שהתמודדו עם אותן בעיות ללא רבי-שיח קבוצתי.

בדוגמה השלישית השתמשתי בוידאו ככלי להחיות זיכרונות אפיזודיים נכחדים על פי תאוריות המגדירות זיכרון אפיזודי, לצורך למידה מאירועים משמעותיים בכיתה שנכחדו מתשומת הלב של המורה המלמדת. בחנתי את מהות הקשב הסלקטיבי של המורה בבחירת האירועים לדיווח ביומנה.

בכל הדוגמאות יש התמקדות בתשומת לב המורה באמצעות פרדיגמות המתייחסות לתשומת לב כפי שאפרט להלן.

תשומת לב (Noticing)

יש ארבע נקודות מבט עיקריות שעיצבו את המחקר על "תשומת לב" (Noticing) של מורים במהלך שני העשורים האחרונים:

1. פרספקטיבה קוגניטיבית (Cognitive-psychological perspective of teacher noticing): התייחסות פסיכולוגית קוגניטיבית יוצאת מנקודת הנחה שהקשב האנושי מוגבל וכדי לשים לב, יש להתאמן בתשומת לב, ובפרט בהוראה. "תשומת לב" של מורה מגדירה את האופן שהמורים מגיבים על חשיבה של תלמידיהם (van Es & Sherin, 2002). הפרספקטיבה הקוגניטיבית-פסיכולוגית של שימת לב המורה מאפיינת את תשומת הלב, כמכלול של תהליכים או תהליכים קוגניטיביים המתנהלים במוחם של מורים, כגון קליטת אירועים בולטים (או



כאשר בכל דוגמה אני מנסה להתבונן ב"תשומת הלב" באמצעות פרספקטיבה מתאימה.

תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה

עומס קוגניטיבי מתבטא במאמץ המנטלי המוקדש לעיבוד, לבנייה, לארגון ולאוטומטיזציה של המידע בתבניות חשיבה. עומס קוגניטיבי נוצר על זיכרון העבודה של הלומד בזמן ביצוע משימת לימוד מסוימת. תהליכים אוטומטיים של למידה מתפתחים לאחר התנסויות חוזרות ונשנות של האדם הלומד, ואלו מאפשרים לו לעבד מידע ביעילות ובחסכנות מבחינת משאבי הקשב המודע (Sweller et al., 1998). סוולר (Sweller, 2011) הגדיר את תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה כזו שנוגעת לרכישת ידע בסביבות למידה מותאמות מתוך הורדת העומס הקוגניטיבי שאינו הכרחי ללומד קרי המיותר. העיקרון המרכזי שסוולר משתית עליו את התאוריה נשען על רעיון הברירה הטבעית – "החזק תמיד ישרוד", ובעניין של ידע – הידע "החזק" ולא "החלש" הוא שישרוד בזיכרון לטווח ארוך. סוולר (Sweller, 2015, 2016a) הגדיר את הארכיטקטורה של מבנה התודעה האנושית באמצעות חמישה עקרונות, משלב אחסון המידע ועד ארגונו כמובנה לשימוש חוזר: (1) אחסון המידע בזיכרון באמצעות זיכרון לטווח קצר וארוך; (2) באמצעות תשומת הלב של הלומד הוא מסגל (אדפטציה) ידע ישן למצב חדש או לגיבוש ידע חדש; (3) הידע מתפתח באקראי לכאורה, בעיקר באמצעות יישום ויצירה של אסטרטגיות היוריסטיות בזמן פתרון בעיה; (4) הגבלת קיבולת הזיכרון הגורמת לאדם לברור את החיוני לשמירה וסינון הלא רלוונטי; (5) תשומת לב של הלומד לארגן את סביבת הידע החדש באמצעות קשרים בין מושגים או חלקי ידע לכדי סכמת ידע חדש מובנה. על פי סוולר (Sweller, 1988), האדם מרחיב את גבולות הזיכרון והאחסון באמצעות בנייה של ידע מקושר שמאוחסן "בצפיפות" ובאמצעות סכמות מרוכזות מובנות, וכך מתפנה מקום בזיכרון לבנייה ולאחסון של ידע חדש. עיקרון זה מרחיב את הרעיון של מילר (Miller, 1956) הטוען לנפח פריטים בזיכרון עבודה הכולל יחידות מידע המאורגנות בשבע פלוס מינוס שתיים, ואת הרעיון של קוואן (Cowan, 2001) הטוען לעיבוד ארבעה פריטים ב-30 שניות. סוולר (Sweller, 2016b) הוכיח שעומס קוגניטיבי מושפע ממשאבי הזיכרון הפועלים בזמן עיבוד המשימה וביצועה, ועל פי עקרונות מבנה התודעה. כהמשך להתפתחות התאוריה נעשו מחקרים שעסקו במדידה של העומס הקוגניטיבי בזמן פתרון בעיות (Paas et al., 2003). העומס הוגדר מצב שיש בו שני ממדים: ממד סיבתי המשקף את האינטראקציה בין

לפיתוח מקצועי של מורים המהווים את הדיסציפלינה של "תשומת לב" כשהן נעשות בדרך שיטה בהקשר של מחקר פעולה. בדרך כלל דיסציפלינה של שימת לב מאופיינת בארבע פעולות הקשורות זו בזו: (1) רפלקציה שיטתית הכוללת ניהול דוחות באמצעות זיהוי ורישום של רגעים חשובים, זיהוי בדיעבד; (2) הכרה המבוססת על תהליכים הקשורים זה בזה של זיהוי ותיגוב מצבים טיפוסיים, הבחנה בין בחירות וחלופות; (3) הכנה לתשומת לב המורכבת מתהליכי רגישות של דמיון אפשרויות והגברת ההזדמנויות להבחין; (4) אימות עם אחרים המסתמך על תיאור רגעים וחיזוק תרגילי משימות כדי להדגיש נושאים או רגישויות חשובות (Mason, 2002). אף שהמיקוד של גישה זו הוא להעלות את המודעות והרגישות של אינדיווידואלים, ההיבט של אימות עם אחרים מרמז על תרגול חברתי באמצעות הכנסת שלושה עולמות שונים זה מזה, כלומר עולם החוויה האישית של האדם עצמו, עולם החוויה של עמיתיו (שבו ניתנת תמיכה מהתבוננות) ועולם התצפיות והתאוריות (Mason, 2002).

4. נקודת מבט הקשורה למומחיות של "תשומת לב" של מורה (expertise-related perspective of teacher noticing) המתמקדת בהבדלים בין מומחים לטירונים. הפרספקטיבה הרביעית והאחרונה הרלוונטית לחקר שימת לב המורים פותחה בתחום חקר המומחיות באמצעות עבודתו החלוצית של ברלינר (Berliner, 1987, 2001, 2004) והמחקרים האמפיריים של קבוצות המחקר בניהולו שיישמו מחקר מומחיות על קבוצת היעד של מורים. בתיאורו על התפתחות המומחיות בהוראה, הבחין ברלינר (Berliner, 1987) בין שלבים שונים של פיתוח מיומנויות, החל ממורה מתחיל למורה מומחה. אף שלא נעשה שימוש במושג "תשומת לב" הוא זיהה הבדלים בין טירונים למומחים. לדוגמה, בפירוש תופעות בכיתה, טירונים התקשו לפרש את התצפיות שלהם בכיתה ולפתח הסברים למה שקורה בכיתה. הבדלים נוספים קיימים בחיזוי תופעות בכיתה, כמו היכולת להניח הנחות והשערות על תופעות בכיתה והתנהגות תלמידים, בייחוד בנושא טעויות של תלמידים ושימוש באלגוריתמים שגויים.

לסיכום, ארבע נקודות המבט חולקות מאפיינים משותפים והבדלים מגוונים בבחינת המושג noticing. במאמר הנוכחי אני מדגישה את "תשומת הלב" של המורים או פרחי ההוראה כרכיב חשוב בניתוח מצבים שהתנהלו בסביבות למידה מגוונות של הכשרה להוראת מתמטיקה,



קולבורציה - זיכרון עבודה שיתופי וחלוקה משותפת בעומס קוגניטיבי

למידה שיתופית (קולבורטיבית) מתנהלת כאשר שני תלמידים או יותר תורמים תרומה פעילה ללמידה הדדית ומנסים לחלוק במאמץ הנדרש כדי להשיג את מטרת הלמידה. ההבדל בין למידה שיתופית (קואופרטיבית) פעולה שיש בה חלוקת עבודה ותפקידים) ובין למידה קולבורטיבית קשור למידת התרומה של המשתתפים. כך שהשתתפות שיש לה תרומה מוכחת לדיון או לפתרון הבעיה היא שיתוף פעולה (קואופרציה), והשתתפות שיש בה תרומה לפתרון בעיה והשגת יעד במהלך עבודה משותפת שאין בה בהכרח חלוקת עבודה ותפקיד מוגדרים מראש היא עבודה בשיתוף (קולבורציה) (Schäfer et al., 2013).

חוקרים (Scheuer et al., 2010; Stahl, 2015, 2017) של למידה קולבורטיבית שיתופית ממוחשבת (המכונה CSCL – Computer Support Collaborative Learning – הדגישו את מאפייני המשימה והלמידה בלמידה בקבוצות כאשר מיקוד המשימה הוא פתרון בעיות מתמטיות. המשימה צריכה להתאים לעבודה בקבוצה, והקבוצה לומדת את תרבותה ותפקודה כקבוצת למידה (Stahl, 2017). יש סיבות תאורטיות להשערה כי השימוש בלמידה קולבורטיבית יכול להפחית את האינטראקטיביות של האלמנטים ואת העומס הקוגניטיבי שלהם. על פי העיקרון הקוגניטיבי ההדדי, למידה קולבורטיבית "מארגנת" זיכרון עבודה קולקטיבי (Kirschner et al., 2011). זיכרון עבודה קולקטיבי זה הוא חלק ממרחב עבודה קולקטיבי שנוצר באמצעות תקשורת ותיאום של ידע שמחזיק בו כל חבר בקבוצה הלומדת יחד. באמצעות תקשורת ותהליכים סוציוקוגניטיביים המתקבלים בתוך הקבוצה נוצר מבנה ידע קולקטיבי או קוגניציה משותפת הדדית, המורכבת מהקוגניציה המשותפת. מחקרים מראים שמבני הידע הקולקטיביים האלה מותנים ביעילות של שיתוף פעולה (Gavali & Banu, 2020; Van den Bossche et al., 2006), אפשר לומר כי שיתוף פעולה מותנה בתשומת הלב של כל משתתף להגיב תגובה מתאימה לסיטואציה מתמטית כדי לקדם את הרעיון. תשומת הלב היא זו שתלכוד את הרעיון שעליו להגיב בהסכמה והרחבה או באי-הסכמה ונימוק. המושג של זיכרון עבודה קולקטיבי קשור לתאוריה של קוגניציה קבוצתית (Stahl, 2014), הנוגעת לנפח זיכרון העבודה של כל החברים בקבוצת פתרון הבעיה. בלמידה אישית כל האלמנטים האינטראקטיביים חייבים להיות מעובדים בזיכרון יחיד של אותו אדם. לעומת זאת, בלמידה קולבורטיבית יש חלוקה של אלמנטים אינטראקטיביים

המשימה (עיצובה החיצוני ותוכנה הפנימי) למאפייני הלומד, וממד ההערכה המשקף מושגים מדידים של עומס נפשי, מאמץ נפשי וביצועים. במחקרים שנעשו על אינטראקציות בין כמה משתתפים, לדוגמה מאפייני משימה עם מאפייני לומד, נמצאו תוצאות ומסקנות להמלצות על עיצוב משימות בהוראה. מקובל להבחין בין שני סוגים של עומס קוגניטיבי: עומס קוגניטיבי פנימי ועומס קוגניטיבי חיצוני. עומס פנימי (מובנה – intrinsic) קשור במשימה והוא משתנה מאדם לאדם על פי מידת המומחיות שלו בתחום המשימה; עומס חיצוני (extraneous) תלוי באופן שהמשימה מוצגת, ולפיכך אפשר לשנותו ולהקטינו בעיצוב המותאם ללומד (Pollock et al., 2002). חן ועמיתיו (Chen et al., 2023) הוכיחו כי מורכב מאוד למדוד עומס קוגניטיבי של מטלות לימודיות. הם טוענים שמורכבות המשימות שהלומדים חווים נשענת על אינטראקטיביות של אלמנטים. יש מקום לקבוע אינטראקטיביות של אלמנטים מתוך התחשבות בו בזמן במבנה המידע המעובד ובידע המוחזק בזיכרון לטווח ארוך של האדם המעבד את המידע. אף שאפשר לכמת בקלות את מבנה המידע במשימת למידה באמצעות ספירת מספר רכיבי המידע המקיימים אינטראקציה, אפשר להעריך ידע המוחזק בזיכרון לטווח ארוך רק באמצעות שיקול דעת של מורה או מבחני ידע. כלומר האינטראקציה של הלומד והידע הקודם שלו משנים את המדידה של מורכבות המשימה. ככל שהעומס הקוגניטיבי הפנימי והחיצוני גבוהים בסביבת ההוראה, מורכב יותר למורה לשים לב למכלול היבטים שהוא אמור לשים לב אליהם בהוראתו. ואם לא ישים לב כנראה גם לא יגיב כנדרש. תשומת הלב היא נגזרת של משאב זיכרון העבודה, וככל שהעומס על זיכרון העבודה יגבר, תשומת הלב כנראה תקטן. במאמר הנוכחי בדוגמה הראשונה אתמקד בהצגה של רעיון לסביבת למידה-הוראה התורמת להפחתת עומס קוגניטיבי פנימי וחיצוני בזמן ביצוע משימה, הלומדים מתנסים בכתיבת הוכחה פורמלית דדוקטיבית לבעיות גאומטריות בסביבה אינטראקטיבית שמספקת משאבים לפתרון הבעיה כגון רמזים ומשוב מיידי (למשל Tindall-Ford et al., 2015). נראה שהעומס על הלומד במהלך למידה הוא רלוונטי (germane) ו"מדוד" כמתאים כי התוכנה מגיבה בהסתגלות ללומד, ומתוך כך מגבירה את המשאבים שלו לפתרון הבעיה. בדוגמה זו אתמקד במאפייני תשומת הלב של המורה בכיתה, ותשומת ליבו למאפייני הלמידה של תלמידיו בפתרון בעיות גאומטריות באמצעות הוכחה דדוקטיבית כפי שהוא חווה אותם בזמן אמת וגם באמצעות איסוף המשוב במסכי פתרונות תלמידיו.



מרכזי שבו נפגשים מדעים מתחומים מגוונים – נוירולוגיה, ביולוגיה, פסיכולוגיה וסוציולוגיה (אייל, 2004). כדי להבין את הזיכרון בהקשר של חוויות הוראה של מורים, התבוננתי בהיבטים פסיכולוגיים, חינוכיים וקוגניטיביים של הזיכרון ובייחוד בעניין הוראת מתמטיקה. בהיבט הפסיכולוגי היה זה טולווינג (Tulving, 2002) שהבחין ראשון בין הזיכרון של החוויות האישיות (אפיזודי) ובין הזיכרון של הידע הכללי (סמנטי) ועיגן את התאוריה בתחום. הזיכרון הסמנטי כולל לטענתו ידע עובדתי שלא ישתנה כמו ידיעת לוח הכפל או נוסחאות, והוא אינו מוגדר לא בזמן ולא במקום שבו האדם למד את הדבר. לעומתו, הזיכרון האפיזודי הוא התנסותי ורגשי, פגיע לשכחה ומורכב לשחזור. כל אירוע אישי מתרחש פעם אחת בזמן מסוים ובמקום מוגדר. למרות המאפיינים השונים שלהם, נמצאים הזיכרון של הידע הכללי והזיכרון של החוויה האישית בקשרים הדוקים ולרוב הם מחזקים זה את זה: נזכור טוב יותר ידע כללי אם ייתמך בזיכרונות של חוויות אישיות. טולווינג (Tulving, 2002) טוען כי בשלושים שנות מחקר על שני סוגי הזיכרונות, התקדמנו לקראת הבנה כי מערכת הזיכרון האפיזודי היא אחת המערכות המורכבות של הזיכרון. הזיכרון האפיזודי מאפשר לאדם להחיות אירועים מהעבר, לחשוב עליהם בהווה ולראות בהם בהקשר של חייו 'כאן ועכשיו'. הזיכרון האפיזודי גם מאפשר לתכנן באמצעותו חידושים והתפתחויות לקראת העתיד. עיבוד החוויה באמצעות הזיכרון האפיזודי נתמך באמצעות מקום, תרבות והרגלים שאנשים יוצרים לעצמם ונשענים עליהם. כך שתמיכה זו שייכת להגדרה של נורמות אובייקטיביות ויכולה להיחשב חלק מהזיכרון הכללי של האדם. בהיבט החינוכי מייסון (Mason, 2002) עוסק במציאות שבה האדם חוקר את תהליכי הוראתו באמצעות הזיכרון, באמצעות הטבעת המושג noticing – מתן תשומת לב. לטענתו, מיקוד תשומת הלב של המורה לאירועים שהוא זוכר ופרשנות האירועים, הם שמעצבים את תפיסות ההוראה שלו כמורה. אי לכך, לטענתו, כחלק מעבודת ההוראה יש לעבוד עם מורים על המחקרים שלהם (או רפלקציות כתובות) במפורש ובמודע לצד התבוננות בבחירת האירועים שמשכו את תשומת ליבם ונבחרו מזיכרונותיהם, מאופן חקירתם ומהלך גיבוש הבנתם. מייסון (Mason, 2002) טוען כי ההרהור של המורים על עבודתם, בזמן אמת או לאחר מעשה, מונע לעיתים קרובות מרגשות שהם חווים בשל האירוע ובחשיבה על מה הביא אותם לקבלת החלטה בזמן האירוע, ופחות מניתוח מעמיק של הסיטואציה והבנת משמעותה. לשם קידום ההוראה באמצעות הזיכרונות, הוא מציע לעבוד עם המורים על כתיבת דוחות (accounts) רפלקטיביים ומדגיש שני

בין זיכרונות עבודה מרובים, ומתוך כך מופחת העומס הקוגניטיבי בזיכרון היחיד (Kirschner et al., 2018). זיכרונות העבודה יוצרים יחדיו זיכרון עבודה קולקטיבי שהוא גדול מזיכרון יחיד. תהליך היצירה של זיכרון עבודה משותף יכול להיתמך בפעולות הקבוצה, למשל הצעות לפעולות שאפשר לעשות, רעיונות ליישום פתרון, קבלה, בקרה ואיסכמה, תיקון של רעיונות והוצאה לפועל משותפת (Stahl, 2014). למידה קולבורטיבית מוצלחת דורשת תקשורת בתוך צוות ותיאום של רעיונות ופעילויות משותפות. דבר זה כרוך בהשגת הסכמה על אסטרטגיות הקשורות למשימות, חלוקת תמישימות בין המשתתפים, זיהוי ופתרון רעיונות מנוגדים וקונפליקטים ובניית רעיונות בהסכמה. פעולות אלה "מתורגמות" בתודעה במונחים של עומס קוגניטיבי (Popov et al., 2017). תקשורת עם אחרים שנועדה לתאם את הפעילויות היא מיומנות מולדת ראשונית בעיקרה, ולכן סביר שלא תטיל עומס קוגניטיבי כבד. לעומת זאת, מיומנויות הקשורות בידע מולד משני, למשל מיומנויות של ידע תוכן ספציפי לתחום שעוסקים בו, יש מקום להניח שידרשו מניפולציה על מידע מסוים ופעילויות קוגניטיביות מורכבות (Geary, 2012). תיאום רכישת מידע משני ביולוגי (מידע בתחום הדעת) צפוי להטיל עומס קוגניטיבי כבד. שיתופי פעולה לצורכי למידת תכנים מצריכים מיומנות של תקשורת (שמקורן בתשומת לב) ותיאום של עשיית המשימות המורכבות כדי לייעל את הפעילות של זיכרון עבודה משותף קבוצתי (הטרנס-אקטיבית) ולבנות סכמות ידע ומיומנויות טובות יותר (Kirschner et al., 2018).

הלמידה המשותפת מורכבת משלושה רכיבים: האינטראקציה בין משימת הלמידה, הלומדים כפרטים והצוות. כל מצב למידה שיתופי מסוים מושפע מהמאפיינים של כל אחד משלושת המרכיבים האלה, ומזמן ויסות למידה של כל משתתף (Hadwin, 2021). שיתוף פעולה יתרחש כאשר המשימה מורכבת דייה כדי להצדיק את הזמן הנוסף והמאמץ הכרוך בשיתוף פעולה עם אחרים, וכאשר תשומת הלב של הפרט מופנית לרעיונותיו ובו בזמן מופנית לרעיונות של אחרים בקבוצה. למידה קולבורטיבית מגבירה את המודעות של המשתתפים לתהליכי הלמידה שלהם ושל אחרים, תומכת בבניית ידע ומאפשרת שימוש יעיל באסטרטגיות (Isohätälä et al., 2020). במחקר הנוכחי אציג את דוגמה 2 שמתארת עיצוב סביבת למידה שבה סטודנטים פתרו יחד בעיה מתמטית בסגנון שפחות מוכר להם כדי לזמן, לזהות ולאפיין למידה קולבורטיבית.

הבחירה בזיכרונות - תשומת לב ואי-תשומת לב
ריצ'רד רסטאק, נוירולוג ונוירופסיכיאטר, טוען כי הזיכרון הוא היכולת הקוגניטיבית החשובה ביותר במוחנו, צומת



אחרות, מטרה מרכזית של זיכרון העבודה עשויה לעזור להתכונן לעתיד פוטנציאלי (Nasrawi & van Ede, 2022; van Ede et al., 2019). כאשר תחזיות משתנות או חוסר הוודאות מתמוסס, תשומת לב סלקטיבית בוחרת ומתעדפת את התכנים שנמצאים ממש קרוב למציאות רלוונטית עתידית. צפייה בגבולות יכולת זיכרון העבודה מנקודת מבט פונקציונלית משנה את הנרטיב מזה של ליקוי ביכולת הקוגניטיבית של החזקת תכנים מוגבלים לזו של חוזק ביכולת לתמוך ברפרטואר עשיר של מצבי הכנה להתממשקות יעילה עתידית עם מצבים אקטואליים ורלוונטיים לאדם. תשומת לב סלקטיבית פנימית אפוא אינה משרתת רק כדי לשפר את האיכויות או הנגישות של הזיכרונות לרגע זה, אבל גם כדי לשפר את היכולת שלהם לשרת את ההתנהגות העתידית הצפויה (van Ede & Nobre, 2023).

במאמר הנוכחי אציג דוגמה שבה המורים נדרשו לתעד אירועים מהוראתם באמצעות וידאו ואחר כך לכתוב רפלקציה ממוקדת באירועים משמעותיים שהם בוחרים. לאחר הכתיבה התנהל דיון במליאת הכיתה על הרפלקציה הכתובה ונעשתה צפייה חוזרת בווידאו לצורך זיהוי אירועים שנעלמו מתשומת הלב, וניסיון להבין את הסיבה לכך.

מבנה המאמר

המאמר הנוכחי מציג יישום של רעיונות מפסיכולוגיה קוגניטיבית חינוכית וחקר המוח והלמידה, שיושמו בתוכניות התערבות במחקרים שהתנהלו בסביבות של הכשרה להוראה או בתוכניות להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה (ופיזיקה).

מטרת המחקרים הייתה ליישם רעיונות מדעיים מהתחומים הנזכרים לצרכים דידקטיים ופדגוגיים.

בכל דוגמה שאציג להלן אדגיש את ההתבוננות ב"תשומת הלב" של המשתתפים במחקר בהקשר של פרדיגמות מגוונות הנוגעות ל"Noticing".

שאלת המחקר: לכל דוגמה הייתה שאלת מחקר תואמת שתוצג בפתח הדוגמה.

הנתונים: לכל דוגמה אציין את הנתונים שנאספו בהקשר של מחקרה במקור ואופן ניתוחם.

המאמר הנוכחי מדגיש מצד אחד את ההשאלה של ממצאי מחקרים ויצירת דידקטיקה ופדגוגיה שמעצבת סביבה בהשראתם, ומצד אחר הניתוח של הדוגמאות הוא מתוך נקודת מבט ששמה את המיקוד בתשומת הלב של המשתתפים בדוגמה, וגם כאן אנסה להתבונן ולפרש את הדוגמה מתוך פרדיגמות מגוונות למושג Noticing.

היבטים של כתיבה רפלקטיבית (Mason, 2002). האחד נוגע על account of – דיווח על אירוע המתאר תיאור עובדתי וחיוני את היבטי אירוע ההוראה בקצרה וללא רגשות ופרשנות, לעומת account for העוסק בדיווח הכולל פרשנות והסבר. הדגש של שונפלד (Schoenfeld, 2011) על תאוריה זו הוא ששימת הלב (noticing) היא תוצאה של מה המורה "רואה ושם לב" או "לא רואה ולא שם לב", מעצב את מה שהוא עושה או לא עושה. כלומר היכולת להתבונן בהוראה, ברבדים מגוונים, מקדמת את היכולת של המורה ליישם פרקטיקות לפי הפרשנות שלו מתוך מה שהבחין. מייסון (Mason, 2002) טוען כי אירועים שנשארים בזיכרון הם בדרך כלל אירועים שאנו מחויבים להם רגשית או אינטלקטואלית והם 'חשובים' לנו מסיבה כלשהי. בחירת אירועים מושפעת הן מהחוויית שעבר הבוחר הן מהידע הקודם שלו בתחום. רגע הבחירה קשור במודעות אישית תלוית הקשר רגשי של הבוחר.

זיכרון רב־היבטי

מחקרים בתחום הנזכרים מקשרים לזיכרון תכונה של סלקטיביות. כלומר יש מנגנון פיזיולוגי הגורם לאדם להעדיף זיכרון בעל רושם מסוים אחד על פני זיכרונות אחרים. למשל, במחקרם של וימבר ועמיתיו (Wimber et al., 2015) נמצא כי יש מנגנון בזיכרון שגורם לנו לשכוח זיכרונות ואירועים. כלומר עצם הבחירה לזכור אירועים מסוימים, יוצרת שכחה של אחרים. הם מסבירים שיש מעין תחרות בין הזיכרונות, ואלו שבסופו של דבר אנו מחיים, מדחיקים ומשכיחים את האחרים. אומנם אנשים רגילים לחשוב שלשכוח זה דבר פסיבי, אך המחקר מוכיח שאנשים עוסקים יותר ממה שהם מבינים ומרגישים בעיצוב מה שהם זוכרים מחייהם. הרעיון שעצם הזיכרון יכול לגרום לשכחה מפתיע ויכול לספר לנו יותר על זיכרון סלקטיבי ואפילו הטעיה עצמית. ככל שדנים באירוע ספציפי יחיד מחיים אותו, ומכחידיים מהזיכרון אירועים אחרים. גם פסיכולוגים קוגניטיביים, כמו סוולר (Sweller, 2015) למשל, סבורים כי שכחה או קושי להיזכר אינם מקריים. לטענתם, לזיכרונות שונים דפוסי שכחה בהתאם למאפייניהם. מערכת הזיכרון מגינה על עצמה באמצעות תהליך השכחה. תכנים שאינם חשובים עוד מנופים ומשאבי עיבוד מופנים לטיפול בתכנים רלוונטיים להווה. מחקרים עדכניים רואים כי זיכרון העבודה משרת גם עתיד פוטנציאלי. בהקשרים דינמיים, העתיד הקרוב מורכב מאפשרויות רבות. מנקודת מבט פרגמטית זו מה שאנו מאחסנים בזיכרון העבודה עשוי להיות מאוחסן לא בגלל שאנו יודעים שזה יהפוך לרלוונטי (פעולה מושהית) אלא בגלל שאנו צופים שזה עשוי להיות רלוונטי (פעולה פוטנציאלית). במילים



(<https://www.cet-c-etalogue.cet.ac.il/full-proof>)

שאלת המחקר הייתה: האם וכיצד מתפתחת מבחינה מקצועית מורה המלמדת לראשונה פתרון בעיות הוכחה בגאומטריה בכיתות התיכון באמצעות תוכנת פולפרוף?

הנתונים נאספו ביומן המורה החוקרת בשלוש נקודות זמן: תיעוד ההכנה לשיעור, תיעוד השיעור ותיעוד רפלקציה שלאחר השיעור. הניתוח נעשה לאחר שבעה חודשי הוראה שבהם נאספו כ-50 שיעורים מתועדים בשלוש הנקודות לעיל. הניתוח כלל מציאת מאפיינים דומים ושונים בין השיעורים על פי פרקטיקות הוראה ייחודיות לסביבת ההוראה הייחודית החדשה למורה. כחלק מהממצאים עלו כמה תופעות מעניינות שהתבטאו ביומן המורה. ג'וני שמיה לב אליה בשלב די מוקדם של ההוראה באמצעות התוכנה. היא מיקדה את תשומת ליבה כדי ללמוד מהתוכנה את מאפייני המשוב כדי להמשיך את ה"חינוך" וה"דידקטיקה" של התוכנה באירועים שבהם הלמידה לא כללה שימוש בתוכנה, וכדי לייצר סביבת למידה לכידה (קוהרנטית) ללומדים. להלן אציג קטע קטן שבו ג'וני מבטאת איך תשומת ליבה ממקדת אותה ללמוד ממשותב התוכנה.

מאפייני תשומת הלב של המורה בהוראת גאומטריה באמצעות פולפרוף

ג'וני מסתובבת בין התלמידים בכיתה ושמה לב שאצל כולם התוכנה מגיבה על כל שורה שהם כתבו לא מדויק דדוקטיבית. ג'וני מנסה למקד את תשומת ליבה במשוב כדי להבין אותו וכדי ללמוד ממנו איך לנהל משוב המקדם כתיבת פתרונות הוכחה לבעיות גאומטריות. נתבונן בצילום מסך להלן ובקטע מתוך יומן החוקר של ג'וני:

ג'וני כותבת ביומן המחקר שלה על האיור לעיל:

רוני התחילה בשאלה דרך סימון הצלע DE ב"א. לאחר מכן היא הסיקה דרך המשפט של קטע האמצעים במשולש, ש- $BC=2x$. מכתבת שלבי הפתרון ברור שרוני הבינה כי אין צורך לרשום את העובדות אודות קטע האמצעים. בשלב 4 ניתן לראות שההיסק שלה היה נכון, אך היא לא רשמה שהנימוק הוא שקטע האמצעים במשולש שווה לחצי הבסיס. כמו כן בשלב 6 נראה שהיה על רוני לנמק שקטע האמצעים הוא תיכון לשתי צלעות המשולש שהוא חותך. בנוסף רוני חזרה על אותה טעות שביצעה בשלב 6 גם בשלב 8. [...] בנוסף היא הניחה שהקטע האמצעי במשולש הוא תיכון לשתי הצלעות האחרות, אך היא לא סיפקה הסבר נכון ומדויק לקביעה זו ולא כתבה על איזה כלל היא התבססה. [...] רוני גם הגיעה למסקנה שיש לה זוויות נגדיות שוות, בטרם קבעה מי הקווים

שלוש דוגמאות המציגות חיבורים "נירופדגוגיים" בעיצוב ובניתוח

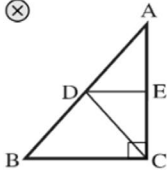
דוגמה 1: הוראת גאומטריה באמצעות תוכנת פולפרוף – מה למד המורה?

הוראת התחום של הוכחה בגאומטריה מאתגרת את המורים מאחר שהם נדרשים לייצר בקרב התלמידים צורך אינטלקטואלי להוכיח בעיה גאומטרית, שלעיתים מובנת להם בגרפים והם לא מרגישים צורך לכתוב הוכחה. נוסף על כך המורים צריכים ללמד תלמידים לבנות באופן דדוקטיבי רעיונות לוגיים לכדי תיאור לוגי מקושר המשמש הוכחה לבעיה. שתי משימות אלה כוללות תתי-משימות (כגון הנמקה לכל עובדה, כתיבה בדרך מסוימת, הוספת קווי עזר ועוד) שחוקרים רבים דנו בהן ומצאו אותן מורכבות להוראה, כך שתוכניות להתפתחות מקצועית של מורים לקידום הוראה של הוכחה גאומטרית עדיין שכיחות (למשל: Stylianides & Stylianides, 2022). בדוגמה להלן מוצג אירוע שבו מורה לגאומטריה מלמד לראשונה פתרון בעיות הוכחה בגאומטריה באמצעות תוכנה שמלווה את התלמיד וממשיבת אותו על כל פרט שהוא כותב בהוכחה. תהליך המשוב הקפדני אמור לשמש "דוגמה" או מודל סכמטי לתלמיד בכתיבת פתרון לבעיה הבאה. אפשר להסביר את האימון שהתוכנה עושה לתלמיד על פי תאוריית העומס הקוגניטיבי. תאוריה זו גורסת כי המוח זקוק ללמידה באמצעות אנלוגיות, הקבלות, השוואות והסקת מסקנות שעל פיהן נוצרות תבניות בזיכרון. בשלב שהתלמיד למד ויודע את התוכן ומבין אותו אפשר להתקדם לרמות למידה גבוהות יותר של הקבלה והשוואה שנוצרות מתוך הידע הקודם, ומתוך כך מייצרים תבניות חדשות לידע המתקדם. תהליך זה של למידה מותנה בתשומת הלב של התלמיד להפנים את דוגמאות המשוב שקיבל מהתוכנה, כדי ליישם אותן בבעיה החדשה הבאה. בד בבד תהליך זה מאתגר את המורה לעצב את תהליך הלמידה בכיתה בהתאם, ולנהל כיתה באמצעות פרקטיקות שממקדות את תשומת הלב של התלמיד במאפייני המשוב של התוכנה כדי להתפתח מהוכחה להוכחה, וגם למקד את תשומת הלב שלו לאופן שהוא מייצר דיונים כיתתיים מהמשוב.

ג'וני היא מורה לגאומטריה בתיכון בצפון הארץ. השנה היא שילבה בהוראתה את התוכנה פולפרוף וחקרה את פרקטיקות הוראתה בשיעורי הגאומטריה על רקע מחקר פעולה. מטרת המחקר הייתה להבין את מאפייני פרקטיקות ההוראה של ג'וני כמשתנים לאחר יישום הוראה באמצעות התוכנה. (באיורים להלן יהיה אפשר להתרשם כיצד התוכנה מסיבה את תשומת לב התלמיד לכתיבת הוכחה דדוקטיבית וגם כאן:



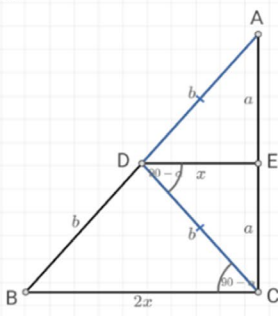
⊗



הוכח (בעזרת קטע האמצעים) את המשפט:
התיכון ליתר במשולש ישר זווית
שווה למחצית היתר.
(הדרכה: העבר את קטע האמצעים DE והוכח ש- $CD = AD$.)

סעיף א'

לפי טענות	נימוק	טענה
	נתון	1 $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$)
	נתון	2 DE הוא קטע אמצעים ב- $\triangle ABC$
	סימון	3 נסמן את $DE = x$
3,2	קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה לה.	4 $BC = 2x$
	סימון	5 נסמן את $AD = b$
5,2	הגדרה: קטע אמצעים במשולש (חוצה שתי צלעות במשולש)	6 $BD = b$
	סימון	7 נסמן את $AE = a$
7,2	הגדרה: קטע אמצעים במשולש (חוצה שתי צלעות במשולש)	8 $CE = a$
	סימון	9 $\angle BCD = 90^\circ - a$
	נראה שהטענה מבוססת על טענה אחרת שמופיעה בהמשך ההוכחה. כדאי לבדוק שסדר הטענות נכון.	10 $BC \parallel DE$
9,2	קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה לה.	11 $\angle CDE = 90^\circ - a$
8,5,4,11	כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.	12 $CD = b$
12		13 $AD = CD$



איור 1: משוב מפורט להוכחה השלמת חלקים חסרים

הבא, אלא היא מיקדה את תשומת ליבה בתהליך כדי להבין את מהות המשוב של התוכנה כדי ללמוד ממנו למשב במשימת הערכה שאינה באמצעות פולפרוף. נוסף על כך היא הייתה עסוקה בהכללת מאפייני המשובים של תלמידה, כדי לבנות באמצעותם דיון כיתתי משמעותי ללומדים. מתברר שזה דיון אחר מהדיונים שהיו עד כה בכיתה. בהמשך היום ג'וני מציגה צילום מסך נוסף מתוך השיעור ומסבירה כי מעיון בפתרון של התלמיד דני, היא הבינה שהתלמיד הגיב על משוב הפולפרוף באופן דינמי על כל הערה. כאשר המשוב הציג "חסר שלב", חזר דני לבדוק את ההוכחה מתחילתה כדי לבחון מה עליו להוסיף. ג'וני שמרה לב כי פעולה זו נעשתה ארבע פעמים במהלך הפתרון, ובכל הפעמים התלמיד דני חזר לתקן. ג'וני מבינה כעת שלתוכנה יש יתרון עליה בכך שהיא לא יכולה לספק משוב דינמי פרטי לכל לומד בזמן השיעור או כאשר היא מעריכה פתרונות במשימות הערכה. ג'וני כותבת:

עכשיו אני מזהה את היתרון הגדול של התוכנה. בשלב הראשון למדתי מהתוכנה שעליי למשב כל שורה. אחרי שהבנתי זאת חשבתי שזה יתרונה המובהק של התוכנה. היום כשחקרתי את פתרונות התלמידים שהתוכנה אספה עבורי, והתמקדתי בדני, הבנתי שהתוכנה ממשבת באופן דינמי את כל 27 תלמידי בו זמנית [...] את זה

המקבילים. רוני נוטה לקפוץ לשלבים מתקדמים בפתרון התרגיל, בטרם היא בונה את הנדבכים הבסיסיים שעליהם יש להתבסס [...] אבל הוא תלמיד עם חשיבה טובה גאומטרית כי מצליח לתקן עצמו. ומה למדתי מהפולפרוף? במצב זה התוכנה ביצעה דבר שלא נהגתי עד היום לעשות מול תלמידי בעת שהדרכתי אותם לפתור את הבעיה. התוכנה מוסיפה רישום על יד כל טענה שאינה מוכחת כדי שהפותר "יזכור בפעם הבאה" להוכיח אותה. מנקודת מבטי כמורה, המשוב של פולפרוף מקדם את רוני להבין את הבעייתיות בדילוג על שלבים, וכך היא מקפידה להבא לשים לב שעליה לסדר את השלבים בסדר הגיוני, ואת ההיגיון הזה היא רואה בדוגמה של המשוב [...] לפני היכרותי עם התוכנה, תשומת הלב שלי להערכת פתרון הייתה כללית, זיהיתי אי סדר, אי דיוק ושקללתי את הניקוד להפחתה. כעת אני יודעת שתשומת הלב שלי להבין כל שורה, למשב כל שורה, וגם לשאול את עצמי איך אני אוספת מהמשוב במסכים שראיתי דיון שמתאים ומקדם את תלמידי? מה משותף לכל הפתרונות החלקיים? לכל אי הדיוקים [...] אי הנימוקים [...]

קטע היום של ג'וני מלמד שהיא לא הניחה לתוכנה לעשות את העבודה בעבורה בהערכת הפתרון של התלמיד, ובהקניית אימון ו"דוגמה" לכתיבת הפתרון



בהמשך היא מציגה את תשומת ליבה לפרקטיקות שעליה ליישם בהוראה בכיתה בזמן אמת כשהתלמידים עסוקים בפתרונות בתוכנה. נוסף על כך אפשר להתבונן בהערה של המורה על התלמיד כבעל חשיבה גאומטרית, באמצעות הפרספקטיבה החברתית. המורה שמה לב לחזקה של התלמיד (Scheiner, 2023).

בדוגמה הזו התוכנה מרחיקה את הגבול של התלמיד. תלמיד שלא ידע לכתוב הוכחה מיומן לעשות זאת באמצעות משוב שמסב את תשומת ליבו לחלקים החסרים בהוכחה, ובאמצעות מאגר רמזים, עד כדי הצלחה לכתוב הוכחה מאורגנת ומנומקת דוקטיבית. התלמיד מפתח קשב סלקטיבי פנימי באמצעות הערות שהוא מקבל בצבע ירוק. גם המורה ג'ני הרחיקה לעצמה את הגבולות מתוך כך שלמדה מהתוכנה דרכי משוב יעילים יותר משנהגה לעשות בעבר, ופיתחה פרקטיקות לניהול דיון המתמקד בהיבטים של המשובים השכיחים של תלמידה כפי שהיא הסבה את תשומת ליבה אליהם, וכפי שהם משכו את תשומת ליבה באופן הצגתם החיצוני. כאן לכלי הטכנולוגי, על מאפייניו הייחודיים, משוב דינמי בצבע ומאגר רמזים יש פוטנציאל ללכוד את תשומת לב התלמיד והמורה להיבטים מהותיים של למידה והוראת הוכחה. עוד ראוי לומר כי לפי תאוריית העומס הקוגניטיבי, המשימה מופיעה באופן שהעומס החיצוני שלה קטן בהרבה מהעומס הפנימי, ולכן הקשב הסלקטיבי של הלומד ממוקד במשימה.

דוגמה 2: תשומת הלב של הפרט בקבוצה כתנאי לבניית זיכרון עבודה משותף לפתרון משימה קבוצתית

כדי להיות בטוחים שקבוצה תגייס משאבי זיכרון עבודה קבוצתיים יש לאתגר אותה בבעיה מוכרת לה פחות. כדי לזהות שקבוצה אכן בונה זיכרון עבודה קבוצתי, יש להתבונן במהות תשומת הלב של כל פרט בקבוצה, כדי לזהות שתשומת ליבו אכן לרעיונות שהביע עמית בקבוצה ומחשבתו ממשיכה את הרעיון שהובע בקבוצה באמצעות הסכמה, תיקון ודיוק או אי-הסכמה.

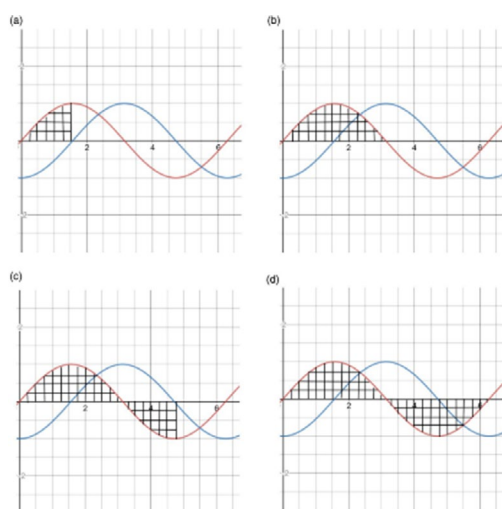
שאלת המחקר הייתה: מה מאפיין תהליך למידה קולבורטיבי של פתרון בעיות לא שגרתיות במתמטיקה בקרב סטודנטים (שהם כבר מורים)?

הנתונים נאספו באמצעות שלושה כלים: יומני למידה של הלומדים, יומן מחקר של החוקרת וקובצי אודיו שתיעדו פתרון בעיות קבוצתי.

הממצא המרכזי שאדון בו בדוגמה הנוכחית עוסק בזיהוי הפתרון קולבורטיבי ובהתפתחות הידע המתמטי של הפרט בזכות זיכרון עבודה קולקטיבי.

אני בהחלט לא יכולה לעשות [...] ואני בכלל לא מודעת לכך שיש צורך ביותר משוב אחד לשורה [...] התוכנה הגיבה שוב ושוב עד הכתיבה הנכונה המלאה. הדינמיקה הזו חסרה אצלי כפרקטיקה. עוד למדתי שהמשוב הזה מהכלי הטכנולוגי שאינו מכיר את התלמיד מתקבל בברכה, פעמים רבות שמתי לב שהמשוב שלי בכיתה לתלמיד, מבייש אותו למרות שנעשה בצורה מכובדת [...].

הקטע הזה של היומן מציג את תשומת ליבה של ג'וני לשני היבטים: האחד נוגע לעובדה שג'וני מזהה שהמשוב יוצר דינמיקה של דיאלוג עם הלומד, והדינמיקה היא הכרחית לצורך שיפור התגובה של התלמיד, הלומד מתקן את עצמו עד שהתוכנה מפסיקה להגיב; השני נוגע לעובדה שהתלמיד ממשיך לשתף פעולה למרות "הערות" חוזרות של משוב התוכנה, כי "האינטימיות החברתית" שבינו לכלי במרחב שבו רק שניהם נמצאים לכאורה, שונה מהדינמיקה שבינה כמורה לבינו במרחב ציבורי שהוא הכיתה. התבוננות בתשומת ליבה של ג'וני במונחים של מייסון (Mason, 2002; Discipline-specific perspective of teacher noticing המתמקדים בהבנת תשומת הלב בהקשר המסוים הדיסציפלינרי, מקדמים את ההבנה כי תשומת הלב של המורה היא בכמה "שכבות". הרמה הכללית היא ללמוד מהתוכנה ללמד הוכחה. הרמות הנגזרות מרמה זו מציגות תשומת לב של הפעולות: ניתוח המשוב, השוואת המשוב של התוכנה למשוב של המורה, בחינה מחדש של תפקיד המורה בניהול דיונים, בחינה מחדש של מאפייני הדיון, השוואה בין המשובים של כלל התלמידים, הבנת מהות התקשורת שבין הלומד לתוכנה ועוד. הפעולות הנזכרות נובעות מתשומת לב המורה להעמיק ולהתבונן בכל היבטי המשוב, בכל היבטי הלמידה, ובהיבט הפרקטיקות שלה כמורה. פעולות אלה מקדמות את התפיסה של המורה כלפי כתיבת פתרונות הוכחה ודינמיקת הלמידה עם התוכנה, וגם דינמיקת ההוראה שעליה לחדש. החיפוש אחר תשומת הלב של המורה בדבריה ביומן, מסייע לזהות את השכבות הרבות של היבטי ההתבוננות שלה בסיטואציות הלימודיות, כטריגרים להתפתחותה בהבנת דרכים ללמד הוכחה, ותובנותיה על היבטים רגשיים של לומד עם הכלי הטכנולוגי. בשלבים הראשונים בכתיבה ביומן ג'וני מתארת ביומנה התבוננות רבה במסכי התלמידים ותגובה מעטה שלה במליאת הכיתה, היא מנצלת את העובדה שהיא לא חייבת להגיב כי הכלי הטכנולוגי ממלא את מקומה. בשלב הבא בתיעוד ביומן ג'וני מודעת לתשומת ליבה ללמוד מהתוכנה ללמד כתיבת הוכחה והיא מתארת את המוטיבציה שלה "להתנהג" כמו התוכנה כאשר היא מעריכה פתרונות שמוגשים כמבחנים.



איור 2 (Sauerheber & Muñoz, 2020, p. 633)

במאמר הנוכחי אתבונן בממצא הנזכר באמצעות ניתוח "תשומת הלב" של הפרט בקבוצה, והבנת הדינמיקה שמחוללת את הידע הקבוצתי החדש שנוצר בקבוצה בשל "תשומת הלב" של הפרט ושל הקבוצה.

תשומת הלב של הפרט בניתוח תמונה של גרפים כמשימה קולבורטיבית

המשימה שניתנה לסטודנטים הייתה בהשראת המאמר "Teaching demonstration of the integral" (Sauerheber & Muñoz, 2020). הסטודנטים נדרשו לנתח בקבוצה של ארבעה לומדים את ארבעת הגרפים ולכתוב עליהם את מקסימום המידע המתמטי שאפשר להפיק מהשרטוט המוצג:

עקבתי אחר הדיון הקבוצתי ותמללתי אותו כדי לזהות את שינוי מיקוד תשומת הלב של הפרט בקבוצה, כחלק מהשתתפות בחשיבה קולבורטיבית על המשימה, וכדי לזהות את תהליך היווצרותו של מבנה הידע הקולקטיבי החדש ללומדים (ראו טבלה 1).

טבלה 1: ניתוח תשומת הלב ברבי-שיח

רבי-שיח	תשומת הלב של הדובר Noticing	תפקיד הדובר
1. 10: יש פה ארבעה גרפים	תמונה - גירוי חושי - עובדה נראית לעין	יזמה
2. 20: אלה פונקציות מחזוריות	ידע - מיקוד קשב פנימי - תשומת לב של הסטודנטית לשרטוטים מחזוריים	העלאת רעיון מתמטי
3. 30: זה $2\sin x$ ו- $\sin x$	פרשנות של סוג הפונקצייה המחזורית	קידום הרעיון המתמטי
4. 10: מה? (בשפת גוף של אי-הסכמה)	שאלה	ערעור
5. 40: אני לא מסכימה עם 30.	הטלת ספק, אי-הסכמה עם 30 אולי גם כתגובה על שאלה של 10.	אי-הסכמה
6. 20: למה? כפול 2 לפונקציית $\sin$ לא פוגם במחזוריות.	תגובה ל-40. ניסיון להנמקה שהפונקצייה $2\sin x$ נשארת מחזורית אחרי הכפלה ב-2. מיקוד תשומת הלב בהכפלה.	נימוק רעיון
7. 10: כי אנחנו צריכים להסכים מי הגרפים? ומה מסמל קווקו השטח. הגרף האדום הוא $\sin x$ והגרף הכחול הוא $\cos x$.	10 שקודם שאלה והביעה אי-הבנה כעת מדויקת את המידע שהציגו לפני הקבוצה ומקבלת החלטה שהגרפים הם הפונקציות סינוס וקוסינוס.	העלאת רעיון חדש
8. 30: אני משרטטת (GeoGebra) את $2\sin$ ורואה שטעיתי. חבל שאני לא יודעת לזהות את זה בלי לשרטט.	לא מקבלת את מה שנאמר בקבוצה ובודקת נימוק אחר לדעתה	נימוק רעיון קודם באמצעות תוכנה וקבלת החלטה שהרעיון שגוי.
9. 10: כי את עדיין לא מורה. אם היית מורה, התמונות של הזזות של פונקצייה $\sin$ היו רצות לך בראש והיית זוכרת שהכפלה ב-2 מגדיל את ערכי הפונקצייה. בשרטוטים פה ערכי הפונקצייה הם מקסימום 1.	נימוק והסבר ל-30	נימוק וניסיון לסגור רעיון הכפלת הפונקצייה סינוס, כדי להתקדם עם הרעיון החדש של 10 הקשור לשמות לשני סוגי הגרפים.



תפקיד הדובר	תשומת הלב של הדובר Noticing	רב־שיח
יוזמה לרעיון שממשיך רעיון קודם. הסבת תשומת הלב לגרף d.	הסכמה עם 10 לרעיון בשורה 7 והצעת רעיון חדש להתבוננות בגרפים.	10. 40: נראה לי שאת החלק של זיהוי הפונקציות סיימנו. עכשיו צריך להבין את השטחים בשרטוט d. אני חושב שהשטח מסמל שניתן להזיז חלקי שטח וכך להשוות בין השטחים הכלואים בין שתי הפונקציות.
שאלת הבהרה ליוזמה	שאלת הבנה	11. 30: למה להתחיל משרטוט d?
נימוק לס3	ניסיון להסביר את 40	12. 20: 40 חשב שזה השרטוט הכי שקוף.
הסטת הדיון לרעיון חדש מדויק יותר המתייחס לפונקציות. חשיבה לאחור.	רעיון חדש המתמקד במבנה צורני של $-\cos$	13. 20: זה לא $\cos$ זה $-\cos$
יוזמה לרעיון חדש העוסק בשטחים.	נראה שהדיוק מתקבל כי 30 ממשיכה את המחשבה, ומקדמת את כולם לשים לב לשטחים	14. 30: אהה... אני חושבת שהשרטוטים לפי הסדר ממחישים שטחים שונים אבל יש קשר בין כולם. השאלה מה הקשר?
המשך הרעיון של תשומת הלב לשטחים והכללתו	אפיון השטחים באמצעות הכללה	15. 10: לא חשבתי על זה אבל נכון, בכל שרטוט השטח המסומן גדל מהקיצון ועד... עד נקודת החיתוך עם ציר ה־x
יוזמה להתבוננות במערכת הצירים באמצעות סימון π .	התבוננות בגרפים של פונקציות טריגונומטריות באמצעות π .	16. 20: אני בעד לסמן אחרת את המספרים. בואו נוסיף לציר ה־x את π .
המשך הרעיון העוסק בקשר בין ארבעת השטחים	תשומת לב לגבולות השטחים	17. 30: רגע רגע רגע... עכשיו לדעתי הבנתי אותך (פנייה לס1) ויש לי רעיון מתמטי:
		18. נתונים גרפים של פונקציות $\sin(x)$ ו־ $\cos(x)$, כאשר אזורים מוצללים בין הציר האופקי $\sin(x)$ ל־7
ס3 יוצרת רעיון שלם לארבעת הגרפים	תשומת לב לגבולות השטחים	19. מ־0 x = עד $x = \frac{\pi}{2}$, $a(x)$
	תשומת לב לגבולות השטחים	20. מ־2 x = עד $x = \pi$, $b(x)$
	תשומת לב לגבולות השטחים	21. מ־0 x = עד $x = \frac{3\pi}{2}$, $c(x)$
	תשומת לב לגבולות השטחים	22. מ־0 x = עד $x = 2\pi$, $d(x)$
דיוק הניסוח	תשומת הלב לניסוח	23. 40: כן אומרים את זה הפוך.
המשך הרעיון של ס3 עם חיבורו לרעיון הקודם הקשור לגרף d	המשך הרעיון הקודם	24. 40: יש לי רעיון בוא נבדוק את מה שאמרתי קודם. האם השטח של שרטוט d המקווקו לכל אחת מהפונקציות שווה? אני משרטט (GeoGebra)...
רעיון חדש המתחבר לרעיון הקודם	רעיון חדש שמנסה לאפיין את הזוגות של הפונקציות והקשר לשטחים	25. 20: לא אל תשרטטי יש לי רעיון אני כותבת תעקבו אחרי שאני לא טועה. אני חושבת שהפונקציות הן פונקצייה נגזרתה. לא לא פונקצייה נגזרתה אלא....
תהייה		26. 10: אהה
הזמנה לפעולת חישוב	הערכת הרעיון באמצעות חישוב	27. 30: אם כך אז חושב שנחשב שטחים
חישוב		28. הערך $-\cos\frac{\pi}{2} - [-\cos(0)] = 0 - -1 = 1$ עבור איור a, כאשר השטח הנסחף החוצה על ידי הפונקצייה הנגזרת $\sin(x)$ מהציר האופקי הוא יחידת גודל ריבועית אחת.
		29. 10: אהה אפשר להמשיך ככה:



רבי־שיח	תשומת הלב של הדובר Noticing	תפקיד הדובר
30. $-\cos -(\pi) = \cos 0 = 1 - (-1) = 2$	יישום הרעיון באמצעות חישוב	חישוב
31. $\cos \frac{3\pi}{2} - \cos 0 = 0 - (-1) = 1$	יישום הרעיון באמצעות חישוב	חישוב
32. לבסוף, שינוי הגובה עבור $-\cos(x)$ ל- 2π שווה ל- $0 = 1 - (-1) = 2$ שהוא...	יישום הרעיון באמצעות חישוב	חישוב
33. 20: האמת שהקווקו מזכיר לי את סכום המלבנים שנוצרים ומסתכמים לשטח שהוא האינטגרל...?	רעיון חדש המתייחס לשטחים ולסכום המלבנים תשומת הלב היא למושג אינטגרל	יוזמה לרעיון המשך
34. 40: אהה מה? אני בעד להבין שוב את השטחים. מה חישבנו? מה יצא? מה ההכללה? חישבנו אינטגרל מסוים וקיבלנו את השטח הכלוא בין הגבולות והפונקצייה? נו...	שאלה לצורך הבנת החישוב ואולי נימוק והכללה	חשיבה לאחור
35. 10: השטח של האינטגרל שווה לנגזרת?	שאלה לצורך הבהרה	חשיבה לאחור
36. 30: לא מה שעשינו [...] זה מזכיר לי משפט [...]	תגובה ל־10 וגם מחשבה עצמאית על החישובים	הזמנה להכללה
37. 40: המשפט השני של [...]	מחשבה	המשך ניסיון ההכללה
38. 10: המשפט היסודי של החדו"א המקשר בין נגזרת לאינטגרל.	רעיון מכליל	המשך ניסיון ההכללה
39. 20: עכשיו אני לא מוותרת נכנסת לאתר...	חיפוש אחר המשפט המדויק	המשך ניסיון ההכללה
40. 10: כן אפשר אבל אני יכולה להסביר אותו כאן בשרטוטים ובחישובים.	תשומת הלב בחזרה לגרפים	חשיבה קדימה להסבר המשפט באמצעות הגרפים

שתשומת הלב היא סלקטיבית, והגירוי לתשומת הלב הוא פנימי, כלומר האפיון של המשימה, וכפי שנמצא אצל ואן אד ונובר (van Ede & Nobre, 2023) יש במחשבה זו עדות ורמז על קשב שמשרת את העתיד במובן של התקדמות לקראת פתרון הנוגע לשטחים. בשורה 13 ס2 שיעקבה אחר השיח ולא השמיעה קול במהלך הדיון, מזהה כי הגרף הוא $-\cos x$ ולא $\cos x$. עובדה זו מלמדת שס2 שנעה בין הרעיונות של הקבוצה לרעיון שלה חשבה על הרעיונות שנאמרו ואז הגיבה. היא שוכנעה שלא זיהתה נכון את הגרפים אבל לא שוכנעה בתשובה של ס1 בשורה 7. במהלך כל השיח אין הבעה של רעיונות מתמשכים, כל דובר בקבוצה אומר רעיון ומצפה לתגובת הקבוצה, המשתתפים ממשיכים את הרעיון או מתחילים רעיון חדש שנובע מתשומת ליבם. בשיח המוצג אי אפשר לזהות אי סימטריה של רעיונות מתמטיים לטובת משתתף מסוים. כן נבחין כי תשומת הלב ממקדת ברעיונות מתמטיים בלבד, וכי הרעיונות לרוב מתקדמים לקראת הרעיון הבא ומעט נסוגים לרעיון קודם. התבוננות בשיח מתוך נקודת מבט המתמקדת בתשומת הלב מהפרדיגמה של הפסיכולוגיה

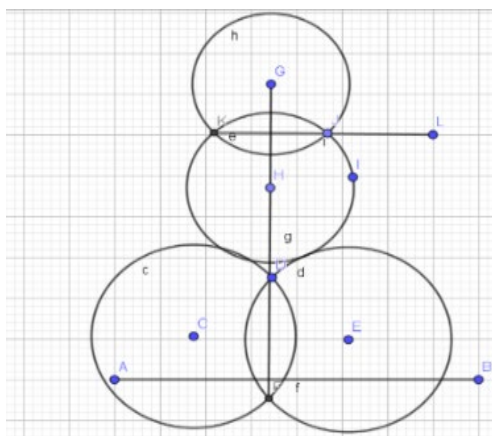
התבוננות בתשומת הלב לפי ההגדרה של קוניג ועמיתיו שהגדירו תפיסה, פרשנות וקבלת החלטות כהיבטים של תשומת לב (König et al., 2022), מקדמת את ההבנה שתשומת הלב של כל משתתף בשיח באמצעות פרשנות וקבלת החלטות מקדמת את הפתרון המתמטי של הבעיה. הניסיון להגדיר את תשומת הלב של כל דובר בעבודה הקבוצתית מקדם את ההבנה כי תשומת הלב של הפרט נעה לעיתים מהרעיון המתמטי הפרטי שלו לרעיון המתמטי של העמית, כאשר קבלת ההחלטה באיזה רעיון למקד את תשומת הלב תלויה במשתתף. למשל בשורות 5–6 ס4 לא מסכימה עם הרעיון של ס3 שמציעה את שמות הפונקציות $\sin x$ וגם $2\sin x$. מי שמגיבה לה היא ס2 שממקדת את תשומת ליבה של ס4 לרעיון שהביעה בעצמה בשורה 2 בקביעתה שהגרפים מתארים פונקציות מחזוריות. כלומר במקום לערער על הקביעה שהפונקציות לא זוהו נכון, תשומת הלב של ס2 היא רק לתכונת המחזוריות. ס1 שמקשיבה לשתייהן ממקדת את כולן ברעיון אחר העוסק בזהות הגרפים. הדיון על זהות הגרפים נזנח לטובת תשומת לב לשטחים הכלואים. מידע זה מקדם את ההבנה



כשאנחנו לא שמים לב, מייסון (Mason, 2011) טוען כי לא התכוונו לשים לב או כי אנחנו שמים לב למשהו אחר. הדוגמה שאציג להלן עוסקת בניתוח וידאו של מורים שנעשה כחלק ממחקר פעולה שלהם כשתיעדו את עצמם כדי להבחין ולאפיין אירועים בכיתת מתמטיקה שהם לא שמו לב אליהם בזמן אמת כדי להבין מדוע לא שמו לב. במחקר זה רצינו להרחיק את הגבול של נקודות העיוורון של המורה בשיעור, להעלות את המודעות למאפייני האירועים שלא זוכים לתשומת לב למרות חשיבותם כדי להגביר את מודעות המורה לחוסר תשומת ליבו והסיבות לה.

שאלת המחקר הייתה: מה מאפיין אירועים של חוסר תשומת לב של מורה שנכחדו מדיווחי רפלקציה הנכתבת מזיכרונה על שיעורי מתמטיקה? את הנתונים אספו שמונה מורות שתיעדו שיעורים נבחרים במשך שישה חודשים. התיעוד כלל יומני מחקר של המורות שתיעדו את הרפלקציה שלאחר השיעור ותמלול סרטי וידאו של הוראתן. הניתוח עסק באירועים שהמורות חשבו שהם בעלי משמעות ושנצפו בווידאו, אך המורות לא אזכרו אותם בכתיבה הרפלקטיבית ביומני המחקר שלהן. לפי המורות, כל האירועים היו "אירועים של חוסר תשומת לב". להלן אציג דוגמה אחת לצורך בחינת חוסר תשומת לב הנובע כנראה מחוויה רגשית לא נעימה של המורה:

מרים החליטה ללמד את תלמידיה לכתוב הוכחה פורמלית בגאומטריה מתוך הוראה של בניית גאומטריות באמצעות סרגל ומחוגה פיזיים בלוח הכיתה וגם וירטואליים באמצעות גאוגברה. באחד השיעורים היא בנתה בנייה גאומטרית על הלוח וביקשה מתלמידיה לעקוב אחר הפעולות שהיא עושה. במהלך פעולותיה היא ביקשה מהם לנסח הוכחה פורמלית גאומטרית להצדקת הבנייה. להלן השרטוט שהציגה מרים בלוח הכיתה:



איור 3

הקוגניטיבית כפי שמציג אותה קירשנר (Kirschner et al., 2018) ממקדת את תשומת הלב במאפיינים שיוצרים תהליך שיתופי (ראו טבלה 2 בנספח 1).

זיכרון עבודה קולקטיבי הוא חלק ממרחב עבודה קולקטיבי שנוצר מתוך תקשורת ותיאום של ידע שמחזיק בו כל חבר בקבוצה הלומדת יחד. באמצעות תקשורת ותהליכים סוציאלקוגניטיביים המתקבלים בתוך הקבוצה נוצר מבנה ידע קולקטיבי או קוגניציה משותפת הדדית המורכבים ממודלים מנטליים משותפים. ברב־שיח שהוצג לעיל מבחינים בהתפתחות הידע הקבוצתי כך שכל אחד מחברי הקבוצה תרם בזמן קריטי, זמן שבו לא ידעו מה לחשוב הלאה, רעיון שנבע מתשומת ליבו לתמונת הגרפים, להתקדמות החשיבה הקבוצתית. בין שהרעיון היה נכון מתמטית בין לאו הוא גרם לחברי הקבוצה להסב את תשומת ליבם לרעיון ולהגיב עליו. המושג "זיכרון עבודה קולקטיבי" מקדם את ההבנה של מורים ומורי מורים בעניין עיצוב משימות קבוצתיות לתלמידיהם. כאן המשימה עוצבה כך שהיא תקדם קולבורציה של קבוצה ועזרה להם לגבש יחד רעיונות מתמטיים שסטודנטים שעבדו בלי קבוצה לא גיבשו אותם. (משימה זו ניתנה כמשימה יחידנית בקורס אחר באותה השעה שעבדה בה הקבוצה הנוכחית, וסטודנטים שעבדו לבד לא הצליחו לגבש רעיונות לפתרון המשימה חוץ מרעיונות כלליים מאוד.)

מצד אחד בדוגמה הזו הסביבה של עבודה בקבוצה עם המשימה הפתוחה אתגרה את תשומת לב המשתתפים, כך שכל משתתף היה עסוק ברעיון שלו ובשיפוט וקבלת החלטות על הרעיונות של עמיתיו בו בזמן, והיה צריך לקבל החלטה לבחור מבין הרעיונות את הרעיון המתאים. מצד אחר מציאות זו הרחיבה את גבולות ההבנה של המשתתפים. לפי ניתוח הרב־שיח נראה שרעיונות שהעלה חבר בקבוצה עוררו אסוציאציות לרעיונות אחרים בקרב המשתתפים, ריבוי הרעיונות הפך להיות ריבוי של משאבים לפתרון המשימה, ומתוך כך הצטמצם הגבול של "אי־הידעה".

דוגמה 3: אי־תשומת לב - תשומת לב סלקטיבית - שגיאה של מורה בשרטוט בנייה גאומטרית

...In fact, there is a great deal that we do not notice, either because we are not attuned or sensitized or because our attention is directed and occupied elsewhere. Sometimes people do not notice, do not realize that they need to pay attention to some feature in a situation,... (Mason, 2011, p. 35)



הבנייה היא פורמלית, תהיה הוכחה פורמלית, ואם לא, הרי הוא אינו יכול להוכיח פורמלית. תשומת הלב של התלמיד הייתה ממוקדת בכתיבת הוכחה פורמלית, כזו שמתאימה לשרטוט פורמלי. כלומר גם הקשב של התלמיד היה סלקטיבי. הוא מוכן לכתוב הוכחה פורמלית לשרטוט ששומר על הכללים הפורמליים. המורה בזמן אמת פירשה את תגובתו של התלמיד כהתנגדות לעשיית משימה. רק ניתוח שלאחר הוראה הסב את תשומת ליבה של המורה למהות האירוע, וגרם לה לפרש אותו כאירוע המלמד כי התלמיד הבין את מהות ההוכחה הפורמלית. טולווינג (Tulving, 2002) טוען שהזיכרון האפיוזי הוא התנסותי ורגשי, קל לשכחה ומורכב לשחזור, וזו כנראה הסיבה לחוסר תשומת הלב של המורה לאירוע בזמן ששחזרה את השיעור ביומן הכתיבה. כפי שטענו ואן אד ונוברה (van Ede & Nobre, 2023), תשומת לב סלקטיבית פנימית אפוא אינה משרתת רק כדי לשפר את האיכויות או הנגישות של הזיכרונות לרגע זה, אבל גם כדי לשפר היכולת שלהם לשרת את ההתנהגות העתידית הצפויה. בדוגמה זו נראה כי גם התלמיד בזמן אמת השתמש בזיכרון הסלקטיבי של בחירתו בטענה "אי אפשר להוכיח" כדי לשרת התנהגות עתידית של כתיבת הוכחה.

בדוגמה זו ראינו כי אפשר להרחיק את הגבול של הזיכרון האפיוזי הנשכח באמצעות דיון רפלקטיבי המלווה בתיעוד וידאו, בהנחיית מנחה. פעילות זו מאפשרת למורה להחיות אירועים שלא לכדו את תשומת ליבו בזמן אמת, כי תשומת ליבו הייתה ממוקדת בהיבט אחר של הסיטואציה המתמטית. עוד ראינו כי מטרה מרכזית של זיכרון העבודה עשויה לעזור להתכונן לעתיד פוטנציאלי (Nasrawi & van Ede, 2022; van Ede et al., 2019). כאשר המצב אינו ודאי, תשומת לב סלקטיבית בוחרת ומתעדפת את התכנים שנמצאים ממש קרוב למציאות רלוונטית עתידית, וזה מה שעשה התלמיד.

דיון

לפני כעשור וחצי במהלך כתיבת הדוקטורט בטכניון למדתי וכתבתי עבודה לקורס בהנחייתו של פרופסור אורי לירון (שלא היה קשור למחקר הדוקטורט). בעבודתי למדתי לעומק תאוריות הקשורות להבנת התפקוד הקוגניטיבי באמצעות תאוריות מהפסיכולוגיה האבולוציונית (למשל Cosmides & Tooby, 1998). כחלק מהבנת התאוריה ודרכי הניתוח עשיתי מיני מחקר מתמטי בקרב תלמידים בגילים מגוונים, וגם בקרב חברות, חברים ועמיתים לעבודה. מתוך כך התוודעתי לאופן ניתוח ופרשנות לפתרונות נכונים ושגיאות בתחומים מתמטיים מגוונים, באמצעות נימוקים מתאוריות הפסיכולוגיה הקוגניטיבית והאבולוציונית. פרופסור לירון ואני נסחפנו

ברפלקציה שכתבה מרים מהזיכרון, היא לא הזכירה כלל את המידע שהיה תלמיד שטען שהשרטוט ששרטטה הוא שגוי. התלמיד טען שהמורה יצרה קו מקביל מבלי לבנות אותו לפי כללי הבנייה המקובלים בסרגל ומחוגה. זהו אירוע משמעותי מאחר שאם המורה דורשת לנתח שרטוט שהוא תוצר מוגמר כדי לכתוב הוכחה פורמלית, והשרטוט שגוי, הרי שתהיה בעיה לכתוב הוכחה לבנייה שגויה. מרים כתבה לעצמה ברפלקציה מהזיכרון שהמשימה הייתה מורכבת להבנה עבור התלמידים ולא פירשה את מקור הקושי. בצפייה בקטע השיעור בווידאו, המנחה הסבה את תשומת ליבה של מרים להערתו של התלמיד, ואף שלא הבחינה בכך בשיעור עצמו, בווידאו שלאחר השיעור ובצפיית העמיתים הבחינה מרים בשרטוט השגוי ובהערת התלמיד. לאחר הרפלקציה מהווידאו שעשתה בליווי המנחה, כתבה מרים: "התלמיד זיהה שהקו שנוצר כמקביל לא נוצר כבנייה גאומטרית על פי כללי הבנייה. אלא שורטט סתם כך. הוא הבין שהשרטוט שגוי". ההתמקדות שלה בתגובת התלמיד אפשרה לה להיווכח ולכתוב ביומן ש"הסיטואציה מלמדת שהתלמיד הפנים את כללי הבנייה מתוך הבנה שאין אפשרות להעביר סתם כך קו ולהחליט על הקבלה שלו לקו אחר [...] איך לא שמתי לב לכך?".

כשדנתי באירוע זה עם מרים הבנו את הסיבות לאי אזכור האירוע ברפלקציה שנכתבה מהזיכרון. ראשית, מרים לא חוותה את ההערה של התלמיד כעוצמתית לעומת כלל ההערות שהיו בכיתה. כלומר הקשב של מרים היה סלקטיבי והתמקד בהערות הלומדים האחרים אף שהערת התלמיד הייתה דומיננטית ברקע. נוסף על כך בזמן אמת היא פירשה את תגובתו של התלמיד בשטחיות: כטענה הנוגדת את הפתרון שלה, שגרמה לה לרגשות לא נעימים. האם בשל כך פירשה טענה זו כהתחמקות מכתובת הוכחה פורמלית? כמו כן בסוף אותו שיעור מיקוד תשומת הלב של מרים היה כללי: "כתיבת הוכחה פורמלית מצדיקה לבנייה", ואילו כאשר כתבה רפלקציה מהזיכרון וסיכמה את השיעור כמקדם את התפיסה של ההוכחה הפורמלית, תשומת הלב שלה הופנתה מההתנהלות בכיתה לתפיסה העצמית שלה כמורה המקנה לתלמידיה את תפיסת המושג "הוכחה" בגאומטריה. לעומת זאת, כאשר התבוננו בווידאו ביחד ברמת המיקרו, ראינו שיש למקד את תשומת הלב בכל פרט שהיה בשיחה בכיתה כדי לעבד הכול יחד לכדי הבנה עמוקה של מה שהתנהל בכיתה. ניתוח מעמיק של חלקי כל השיח שהיה בכיתה בסיוע צפייה בווידאו הביא את המורה לידי הבנה מהו הדבר שהפריע לתלמיד: התלמיד לא הסכים לכתוב הוכחה לבנייה שחלקה לא נעשה לפי הכללים הגאומטריים של בנייה בסרגל ומחוגה וירטואליים. לטענתו, אם



בתרומה לרעיונות המתמטיים תהיה בולטת כל כך. שארמר (2022/2018) טוען כי "חמישה אנשים מסוגלים לשנות את העולם" (עמ' 142). קבוצת אנשים מכוונת מטרה משותפת ומשאבים מאפשרים לתוצאה לקרות. כשמיניתי את הפעולות שנעשו בקבוצה והיו בעבורי עדות למיקוד תשומת הלב של המשתתפים ברבי-שיח הן היו אלה: יוזמה, ערעור, הרהור, המשך רעיון מתמטי, הסכמה, נימוק רעיון של עמית אחר, נימוק רעיון של עמית, הסבר, הסבר על הסבר, הזמנה לחישוב, הערכת רעיון, דיוק רעיון וניסוח הכללה. כשניסיתי למיין את הפעולות לפי משתתפים נמצא שכמעט את כל הפעולות עשו כל המשתתפים בזמנים מגוונים של רב השיח. האם אני יכולה ללמוד מכך שקולבורציה מקדמת "הזדמנויות שווה לתרומת רעיון מתמטי בפתרון בעיות" בקבוצות הטרוגניות? או מיקוד תשומת לב לרעיונות מתמטיים מהותיים? שקולבורציה מקדמת מיקוד תשומת לב של מורים להיבטים מדויקים יותר של משאבים לפתרון בעיה? אולי כן, כי חקרתי די קבוצות בביצוע בעיות מגוונות. ואולי לא, כי אני לא מעיזה לחדש מסקנה על התאוריה הקולבורטיבית שהושאלה משדה מחקר אחר, חידוש עבור שדה החינוך המתמטי, מבלי ליצור מחקר כזה עם חוקר מהתחום. אבל אני כן מעיזה להמשיך ליישם פרקטיקה של פתרון קבוצתי למשימה מתמטית לא שגרתית, כעיקרון חינוך 4.0.

בדוגמה השלישית הצגתי את ההנחיה לתשומת לב לאירועים בווידאו המתעד שיעור מתמטי כהזדמנות למיקוד תשומת הלב באירועים המתמטיים שנכחדו מתשומת הלב ברפלקציה הכתובה. גם בדוגמה זו ההבנה של התופעה התאפשרה בזכות הבנת תאוריות פסיכולוגיות המקשרות בין זיכרון לרגשות (Tulving, 2002). וגם בזכות התאוריות על זיכרון העבודה המסבירות שתשומת לב סלקטיבית אינה משרתת רק כדי לשפר את האיכויות או הנגישות של הזיכרונות לרגע זה, אבל גם כדי לשפר את היכולת שלהם לשרת את ההתנהגות העתידית הצפויה גם על המחקר בתחום וגם על ההכשרה לקידום ופיתוח תשומת לב לאירועים בכיתה.

במחקרי (עובדיה וגולדברג, בפרסום) אפיינתי פרקטיקות הוראה של מכשירי מורים בישראל. בניתוח שעשיתי לנתונים שעלו מקבוצת מכשירי המורים למתמטיקה נמצא שהם מיישמים פרקטיקות קהילתיות שחוזרות על עצמן, אך אף לא אחד מהם עסק בפרקטיקות הכשרה להוראה בעניין של מאפייני הלומד, או הבדלים במאפייני למידה בין המורים הלומדים. ממצא זה נובע אולי מאמונה שהמורים למתמטיקה הם קבוצה הומוגנית או מעיסוק

לדיוני עומק, ומאז אני משתעשעת בספרות המחקר הזו, הדומות לה והקרובות לה, וניסיתי לעצב סביבות למידה בקורסי מתמטיקה מסוימים לפי תוצאות מחקרים, וגם לאסוף נתונים ולחקור את סביבות למידה (למשל: עובדיה, 2018; עובדיה, 2020). עיצוב סביבות למידה בהכשרה להוראת מתמטיקה לאחר יישום ממצאים משדות מחקר אחר מוצג במאמר הנוכחי באמצעות שלוש דוגמאות. בכל דוגמה התבוננתי בתשומת לב של המורה, וניסיתי לזהות עד כמה הרחקנו את הגבול העליון של תשומת הלב, עד שהיא נעשתה ממוקדת יותר ומספקת עושר של תובנות למורה על הפרקטיקות של הוראתו, על מאפייני הלמידה של הלומדים ועוד. בדוגמה הראשונה בתייעוד של השיעורים הראשונים המורה מציינת שהיא לא יודעת היכן למקד את תשומת ליבה: "האם להתמקד בתלמיד חלש ולעקוב אחר פעולותיו? האם לעבור ביעף בין כולם ואצל כל תלמיד להרגיש מעט מעשייתו? האם לשבת בכיסא המורה ולתת לתלמידים לחשוב עצמאי ולבסוף לנהל דיון על פתרון מודגם מאחד מהם?" המורה נימקה את מאפייני תשומת ליבה בתייעוד ההוראה. בהמשך היא מתפתחת למקד את תשומת ליבה במבנה המשוב שהתוכנה מספקת כדי ללמוד ממנו, ועוד יותר בהמשך היא ממקדת את תשומת ליבה בשינוי הפרקטיקות שעליה לעשות בהוראה באמצעות התוכנה כדי לקדם את התלמידים לכתיבת הוכחה פורמלית בגאומטריה. השינוי שחל בקרב תלמידיה בזמן תהליך הלמידה מפעים אותה, והיא בוחרת לאמץ את כללי המשוב של התוכנה גם בתרגילי הערכה ללא תוכנה, עד כמה שאפשר באמצעים אנושיים. מתברר שתאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה (Phan et al., 2017) העוסקת בעומס חיצוני של המשימה כמכביד על העומס הפנימי ומעכב תהליך התמקדות במשימה, חלה גם על מורים. המורה שלימדה באמצעות פולפרוף ראתה במשוב המאורגן החוזר על עצמו, מבנה צורני שמקל עליה להבין כיצד התוכנה מעריכה את תהליך כתיבת הפתרונות של תלמידיה.

בדוגמה השנייה מיקדתי את תשומת הלב של קבוצות לומדים בתמונה של גרפים וביקשתי מקסימום תובנות מתמטיות על הגרפים. המשאב המרכזי שהענקתי למשימה כשעיצבתי אותה, היה הקבוצה. הנחתי כי ארבעה לומדים בעלי רקע מתמטי מגוון ורקע הוראתי שונה יביאו למרחב הדיון משאבים מגוונים. עוד הנחתי כי ריבוי המשאבים הטמונים בכל משתתף יסייע להם כלומדים להגיע לפתרון יצירתי שמעניין אותם, ושהוא יצירה משותפת. לא הנחתי כי הקבוצה שעבדה כל אחד לבד על אותה משימה, לא תצליח כמעט בכלל לייצר משאבי ידע לפתרון המשימה. הדבר העיקרי שלא הנחתי שאיסימטריית ההשתתפות

de Didàctica de la Llengua de la Literatura i de les Ciències Socials, Universitat Autònoma de Barcelona. https://www.researchgate.net/publication/255666969_Expert_Teachers_Their_Characteristics_Development_and_Accomplishments

Berliner, D. C. (1987). Ways of thinking about students and classrooms by more and less experienced teachers. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 60–83). Cassell.

Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 463–482. [https://doi.org/10.1016/S0883-0355\(02\)00004-6](https://doi.org/10.1016/S0883-0355(02)00004-6)

Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review*, 123(5), 600–612. <http://dx.doi.org/10.1037/rev0000025>

Bramlett, R., Cates, G. L., Savina, E., & Lauinger, B. (2010). Assessing effectiveness and efficiency of academic interventions in school psychology journals: 1995–2005. *Psychology in the Schools*, 47(2), 114–125. <https://doi.org/10.1002/pits.20457>

Bruer, J. T. (1997). Education and the brain: A bridge too far. *Educational Researcher*, 26(8), 4–16. <https://doi.org/10.3102/0013189X026008004>

Carew, T. J., & Magsamen, S. H. (2010). Neuroscience and education: An ideal partnership for producing evidence-based solutions to Guide 21st Century learning. *Neuron*, 67(5), 685–688. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2010.08.028>

Chen, O., Paas, F., & Sweller, J. (2023). A cognitive Load theory approach to defining and measuring task complexity through element interactivity. *Educational Psychology Review*, 35, Article 63. <https://doi.org/10.1007/s10648-023-09782-w>

עמוק וחיובי בתאוריה ומחקר בחינוך מתמטי, מבלי להתדיין עם תאוריות פדגוגיות גנריות שאינן בהכרח מעולם החינוך המתמטי. כנראה כדי שמכשירי מורים יישמו המלצות מתחומי הפסיכולוגיה המגוונים צריכה להיות אמונה שקהילות חוקרים קרובות או רחוקות עשויות להגיע לשיתופי פעולה מחקריים, לדיוני עומק מחקריים, שיישום תוצאותיהם יקדם יישום פדגוגיות חדשניות כפרקטיקות הכשרה המשלבות פסיכולוגיה ומדעי המוח עם חינוך מתמטי. אולי אנו בתחילתו של עידן של עיצוב היוזמה בין קהילות החוקרים לשיתוף פעולה מחקרי ויישומי בין חינוך מתמטי לענפי הפסיכולוגיה.

רשימת מקורות

אייל, נ' (2004). **נפלאות הזיכרון ותעתועי השיכחה**. א. ניר.

גודמן, מ' (2021). **מהפכת הקשב: העידן הדיגיטלי – השבר והתיקון**. דביר.

עובדיה, ת' (2018). אפיון סביבה של לימוד מדוגמאות פתורות סטטיות ואינטראקטיביות לבעיות מתמטיות בחדו"א באמצעות גישת העומס הקוגניטיבי בלמידה ותאוריית ה-APOS. **דברים**, 11, 142–111.

עובדיה, ת' (2020). בין רפלקציה הנכתבת מזיכרון לרפלקציה מצפייה בתיעוד וידאו: ניתוח מחקרי פעולה בהוראת מתמטיקה. **דברים**, 13, 109–127.

עובדיה, ת' וגולדברג, צ' (בפרסום). פרקטיקות רווחות בהכשרת מורים בישראל: תמונת מצב. בתוך ע' זוהר, מ' רזניק וש' פיימן-נמסר (עורכות), **אתגרים בהתחדשות הכשרת המורים בישראל: תובנות ממחקר על תהליכי שינוי שהתרחשו באוניברסיטה העברית**. הוצאת ספרים ע"ש י"ל מאגנס.

שארמר, ק"א (2022). **היסודות של תיאוריית U: עקרונות ליבה ויישומים (ד' בלישה, מתרגמת)**. גורדון ספרים. (המקור פורסם ב-2018)

Berliner, D. (2004). Expert teachers: Their characteristics, development and accomplishments. In R. Batllori, E. Gómez Martínez, M. Oller, & J. Pagès Blanch (Eds.), *De la teoria...a l'aula: Formació del professorat ensenyament de las ciències socials* (pp. 13–28). Departament



- Gilligan, K. A., Hodgkiss, A., Thomas, M. S. C., & Farran, E. K. (2019). The developmental relations between spatial cognition and mathematics in primary school children. *Developmental Science*, 22(4), Article e12786. <https://doi.org/10.1111/desc.12786>
- Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist*, 96(3), 606–633.
- Hadwin, A. F. (2021). Commentary and future directions: What can multi-modal data reveal about temporal and adaptive processes in self-regulated learning? *Learning and Instruction*, 72(2), Article 101287. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101287>
- Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, 27, 465–482. <https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7>
- Isöhätälä, J., Näykki, P., & Järvelä, S. (2020). Cognitive and Socio-Emotional interaction in collaborative learning: Exploring fluctuations in students' participation. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 64(6), 831–851. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1623310>
- Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König, J., & Blömeke, S. (2015). About the complexities of video-based assessments: Theoretical and methodological approaches to overcoming shortcomings of research on teachers' competence. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 369–387. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9616-7>
- Kirschner, F., Paas, F., & Kirschner, P. A. (2011). Task complexity as a driver for collaborative learning efficiency: The collective working-memory effect. *Applied Cognitive Psychology*, 25(4), 615–624. <https://doi.org/10.1002/acp.1730>
- Churches, R., Dommett, E. J., Devonshire, I. M., Hall, R., Higgins, S., & Korin, A. (2020). Translating laboratory evidence into classroom practice with Teacher-Led randomized controlled trials—A perspective and Meta-Analysis. *Mind, Brain, and Education*, 14(3), 292–302. <https://doi.org/10.1111/mbe.12243>
- Cosmides, L., & Tooby, J. (1998). *Evolutionary psychology: A primer*. <http://cogweb.ucla.edu/ep/EP-primer.html>
- Cowan, N. (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 24(1), 87–114. <https://doi.org/10.1017/s0140525x01003922>
- Devonshire, I. M., & Dommett, E. J. (2010). Neuroscience: Viable applications in education? *The Neuroscientist*, 16(4), 349–356. <https://doi.org/10.1177/1073858410370900>
- Dominguez, H. (2019). Theorizing reciprocal noticing with non-dominant students in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 75–89. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09896-5>
- Frankl, V. E. (1963). *Man's search for meaning*. Pocket Books.
- Gavali, P., & Banu, J. S. (2020). Improving problem solving ability of student through cooperative learning. *Journal of Engineering Education Transformations*, 33(Special Issue), 567–570. <https://dx.doi.org/10.16920/jeet/2020/v33i0/150118>
- Gazzaley, A., & Rosen, L. D. (2016). *The distracted mind: Ancient brains in a high-tech world*. The MIT Press.
- Geary, D. C. (2012). Evolutionary educational psychology. In K. R. Harris, S. Graham, T. Urdan, C. B. McCormick, G. M. Sinatra, & J. Sweller (Eds.), *APA educational psychology handbook, Vol. 1. Theories, constructs, and critical issues* (pp. 597–621). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/13273-020>



- Nasrawi, R., & van Ede, F. (2022). Planning the potential future during multi-item visual working memory. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 34(8), 1534–1546. <https://doi.org/10.1101/2021.12.17.473138>
- Paas, F., Tuovinen, J. E., Tabbers, H., & Van Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive Load measurement as a means to advance cognitive Load theory. *Educational Psychologist*, 38(1), 63–71. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_8
- Phan, H. P., Ngu, B. H., & Yeung, A. S. (2017). Achieving optimal best: Instructional efficiency and the use of cognitive Load theory in mathematical problem solving. *Educational Psychology Review*, 29(4), 667–692. <https://doi.org/10.1007/s10648-016-9373-3>
- Pollock, E., Chandler, P., & Sweller, J. (2002). Assimilating complex information. *Learning and Instruction*, 12(1), 61–86. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(01\)00016-0](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(01)00016-0)
- Popov, V., van Leeuwen, A., & Buis, S. C. A. (2017). Are you with me or not? Temporal synchronicity and transactivity during CSCL. *Journal of Computer Assisted Learning*, 33(5), 424–442. <https://doi.org/10.1111/jcal.12185>
- Rotzer, S., Loenneker, T., Kucian, K., Martin, E., Klaver, P., & von Aster, M. (2009). Dysfunctional neural network of spatial working memory contributes to developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, 47(13), 2859–2865. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2009.06.009>
- Sauerheber, R. D., & Muñoz, B. (2020). Teaching demonstration of the integral calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(4), 631–642. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1614689>
- Kirschner, P. A., Sweller, J., Kirschner, F., & Zambrano R. J. (2018). From cognitive Load theory to collaborative cognitive load theory. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 13(2), 213–233. <https://doi.org/10.1007/s11412-018-9277-y>
- König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X., & Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, 36, Article 100453. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453>
- Kovelman, I., Norton, E. S., Christodoulou, J. A., Gaab, N., Lieberman, D. A., Triantafyllou, C., Wolf, M., Whitfield-Gabrieli, S., & Gabrieli, J. D. E. (2012). Brain basis of phonological awareness for spoken language in children and its disruption in dyslexia. *Cerebral Cortex*, 22(4), 754–764. <https://doi.org/10.1093/cercor/bhr094>
- Louie, N., Adiredja, A. P., & Jessup, N. (2021). Teacher noticing from a sociopolitical perspective: The FAIR framework for anti-deficit noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 95–107. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01229-2>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Farmer.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203832714>
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63(2), 81–97. <https://doi.org/10.1037/h0043158>



- Stahl, G. (2014). The constitution of group cognition. In L. Shapiro (Ed.), *The Routledge handbook of embodied cognition* (pp. 335–346). Routledge.
- Stahl, G. (2015). Conceptualizing the intersubjective group. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 10, 209–217. <http://doi.org/10.1007/s11412-015-9220-4>
- Stahl, G. (2017). Group practices: A new way of viewing CSCL. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 12, 113–126. <http://doi.org/10.1007/s11412-017-9251-0>
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, Article 100957. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957>
- Sweller, J. (1988). Cognitive Load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257–285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4
- Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Eds.), *The psychology of learning and motivation: Cognition in education* (Vol 55, pp. 37–76). Elsevier Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-387691-1.00002-8>
- Sweller, J. (2015). In academe, what is learned, and how is it learned? *Current Directions in Psychological Science*, 24(3), 190–194. <https://doi.org/10.1177/0963721415569570>
- Sweller, J. (2016a). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 5(4), 360–367. <https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2015.12.002>
- Sweller, J. (2016b). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory*
- Schäfer, A., Holz, J., Leonhardt, T., Schroeder, U., Brauner, P., & Ziefle, M. (2013). From boring to scoring – A collaborative serious game for learning and practicing mathematical logic for computer science education. *Computer Science Education*, 23(2), 87–111. <https://doi.org/10.1080/08993408.2013.778040>
- Scharmer, C. O. (2018). *The essentials of Theory U: Core principles and applications*. Berrett-Koehler Publishers.
- Scheiner, T. (2023). Shifting the ways prospective teachers frame and notice student mathematical thinking: From deficits to strengths. *Educational Studies in Mathematics* 114(1), 35–61. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10235-y>
- Scheuer, O., Loll, F., Pinkwart, N., & McLaren, B. M. (2010). Computer-supported argumentation: A review of the state of the art. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 5(1), 43–102. <https://doi.org/10.1007/s11412-009-9080-x>
- Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing Metters. A lot. Now what? In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 223–238). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203832714>
- Shaywitz, S. E., & Shaywitz, B. A. (2008). Paying attention to reading: The neurobiology of reading and dyslexia. *Development and Psychopathology*, 20(4), 1329–1349. <https://doi.org/10.1017/S0954579408000631>
- Sherin, B., & Star, J. R. (2011). Reflections on the study of teacher noticing. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 66–78). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203832714>



- van Ede, F., & Nobre, A. C. (2023). Turning attention inside out: How working memory serves behavior. *Annual Review of Psychology*, 74, 137–165. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-021422-041757>
- van Ede, F., Chekroud, S. R., Stokes, M. G., & Nobre, A. C. (2019). Concurrent visual and motor selection during visual working memory guided action. *Nature Neuroscience*, 22(3), 477–483. <https://doi.org/10.1038/s41593-018-0335-6>
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.
- Willingham, D. T. (2009). Three problems in the marriage of neuroscience and education. *Cortex*, 45(4), 544–545. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2008.05.009>
- Wimber, M., Alink, A., Charest, I., Kriegeskorte, N., & Anderson, M. C. (2015). Retrieval induces adaptive forgetting of competing memories via cortical pattern suppression. *Nature Neuroscience*, 18(4), 582–589. <https://doi.org/10.1038/nn.3973>
- and Cognition, 5(4), 360–367. <https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2015.12.002>
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251–296. <https://doi.org/10.1023/A:1022193728205>
- Tindall-Ford, S. K., Agostinho, S., Bokosmaty, S., Paas, F., & Chandler, P. (2015). Computer-based learning of geometry from integrated and split attention worked examples: The power of self-management worked examples: The power of self-management. *Educational Technology and Society*, 18(4), 89–99.
- Tulving, E. (2002). Episodic memory: From mind to brain. *Annual Review of Psychology*, 53, 1–25. <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135114>
- Van den Bossche, P., Gijssels, W. H., Segers, M., & Kirschner, P. A. (2006). Social and cognitive factors driving teamwork in collaborative learning environments: Team learning beliefs and behaviors. *Small Group Research*, 37(5), 490–521. <https://doi.org/10.1177/1046496406292938>

נספח 1:

טבלה 2: ניתוח הדיאלוג על פי העקרונות לניתוח שיח שיתופי

מאפיין	מיקומו ומשמעותו בביצוע המשימה
מורכבות המשימות	ארבעת הסטודנטים במשימה הנוכחית נזכרים ומזהים פונקציות הנתונות באמצעות שרטוט ללא ביטוי אלגברי, המשימה די מורכבת בעבורם כקבוצה, מאחר שהיא פתוחה ועליהם לייצג אותה באמצעות מקסימום רעיונות מתמטיים.
הדרכה ותמיכה במשימות	בהוראות למשימה ניתן שרטוט הכולל את תנאי הבעיה ויכולת להשתמש בכל חומר עזר. המשימה ניתנת למשחק ביישומון כהבנת המשתתפים, והם עושים זאת בכמה שלבים (שורה 8, שורה 24)
מומחיות בתחום	מידת המומחיות של המשתתפים בנושא ובסגנון הבעיה אינה זהה, לא כולם מורים בפועל, לא כולם סיימו תואר ראשון באותו מוסד לימודי. כולם למדו מתמטיקה או הוראת מתמטיקה לתואר ראשון.
מיומנויות שיתוף פעולה	זהו הסמסטר השני שבו המשתתפים לומדים יחד, והם בחרו לעבוד בהרכב זה, התפקידים והפעולות ביניהם הם ספונטניים.
גודל הקבוצה	מלכתחילה חשבתי כי הקבוצה קטנה ולכן העומס הקוגניטיבי שיכול לנבוע מגודל הקבוצה לא שייך לסיטואציה זו. בדיעבד היה נראה שמורכב לכולם להקשיב, להבין ולהגיב. בזמן שמישהו הגיב עדיין אחרים תהו על הנאמר. (למשל שורה 17 שורה 34)



מאפיין	מיקומו ומשמעותו בביצוע המשימה
תפקידים קבוצתיים	אין תפקידים קבוצתיים פורמליים, אבל כל פעם מישוהו אחר מעז ליזום שינוי בפעילות, ובאופן טבעי הדיון ותשומת הלב מופנים אליו. אין דומיננטיות של הסטודנט בעל הרעיונות. מאחר שמיקוד תשומת הלב של הקבוצה בדובר, המשך הרעיונות נע מדובר לדובר. אפשר לסמן שלושה או ארבעה רעיונות שהפנו את תשומת הלב של הקבוצה, והביעו אותם משתתפים אחרים. למשל: שורה 7: 10: כי אנחנו צריכים להסכים מי הגרפים? ומה מסמל קווקו השטח. שורה 01: 40: נראה לי שאת החלק של זיהוי הפונקציות סיימנו עכשיו צריך להבין את השטחים. בשרטוט d. אני חושב שהשטח מסמל שניתן להזיז חלקי שטח וכך להשוות בין השטחים הכלואים בין שתי הפונקציות. שורה 41: 30: אהה...אני חושבת שהשרטוטים לפי הסדר ממחישים שטחים שונים אבל יש קשר בין כולם. השאלה מה הקשר? שורה 52: 20: לא אל תשרטטי יש לי רעיון אני כותבת תעקבו אחרי שאני לא טועה. אני חושבת שהפונקציות הן פונקצייה ונגזרתה. לא לא פונקצייה ונגזרתה אלא.... אי־הדומיננטיות של משתתף אחד מציגה תנועה כמעט סימטרית בין הדוברים כאשר דובר אחד מפנה לתשומת לב לרעיון והקבוצה בודקת אותו. מי שמפנים את הרעיון ממשיך אותו, או סותר אותו או מרחיב.
הרכב הקבוצה	הרכב הצוות הטרוגני מבחינת הניסיון התעסוקתי, גם מבחינת ידע קודם והכשרה להוראת מתמטיקה. הטרוגניות מקדמת קולבורציה כי תשומת הלב של כל משתתף אינה זהה לשל עמיתיו.
חווית משימות מוקדמת	לקבוצה יש היכרות עם משימות דומות בסגנון העבודה ולא בתוכן המתמטי משיעורים קודמים באותו קורס.
ניסיון קודם בקבוצה	הקבוצה עבדה יחד כקבוצה קולבורטיבית בפעם הראשונה.

Mooc: מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההוויה האנושית

בועז זילברמן

מפתח חומרי למידה במתמטיקה ומדריך מורים
במרכז לטכנולוגיה חינוכית. ממייסדי YIRME - הפורום
לחוקרים וחוקרות צעירים בחינוך מתמטי בישראל.



Mooc: מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההווה האנושית

בועז זילברמן



החלק הראשון של השיעור עוסק בקובייה ההונגרית – החידה המפורסמת והממכרת. חלק זה מספר על המבנה של הקובייה, על המתמטיקה הדרושה כדי לספור כמה חידות (מצבי מוצא) יש, על החיפוש אחר מספר המהלכים ההכרחי והמספיק כדי לפתור כל חידה מכל מצב מוצא אפשרי, ועל ההיסטוריה של הקובייה – החל מהולדתה כניסיון של פרופסור ארנו רוביק להמחיש לתלמידיו תלת-ממדיות, דרך הפריצה שלה לשוק הפנאי וכלה בשיאים הבלתי-נתפסים במהירות הפתרון של החידה.



החלק השני של השיעור עוסק בתכונות הגאומטריות של הקובייה. חלק זה מספר על פאונים קמורים וקעורים, על החתכים השונים של קובייה והאופן שאפשר להוכיח בעזרתם שקובייה היא פאון קמור, על פאונים שמתקבלים לאחר קיטום של הקובייה, על מיפוי כל הפאונים המשוכללים ועל זוגות של פאונים משוכללים שהם דואליים זה לזה (כלומר שמתקבלים זה מזה באמצעות החלפה של כל פאה בנקודת המרכז שלה שהופכת לקודקוד, והחלפה של כל קודקוד בפאה שהוא נמצא במרכזו).

בקורס מתמטיקה – המלכה והמשרתת של ההווה האנושית נחשפים הלומדים לעולם המופלא, המלהיב והסוער של המתמטיקה, לטבעה האמיתי כמקצוע דינמי ומתחדש – שבו פתרון של בעיה מוליד עוד ועוד שאלות חדשות ומסקרנות ולעבודת החוקרים והחוקרות בתחום. במהלך הקורס יפגשו הלומדים בדרכים המקוריות שבהן מתמטיקאים ומתמטיקאיות התמודדו (ועדיין מתמודדים) עם שאלות מעניינות, ילמדו על הנחישות וההקרבות שהיו לעיתים חלק ממסע מפרך ומרתק זה, ויגלו שהמתמטיקה אינה רק 'המלכה והמשרתת של המדעים', אלא של התרבות האנושית כולה.

הקורס מורכב מחמישה שיעורים שכל אחד מהם פורס לפני הלומדים שלב אחר שלב בדרך שווה לכל נפש, את המסע והתגליות על נושא מסוים: סודוקו ושימושיו המודרניים; נפלאות הקובייה; גדלים אינסופיים וסוגי מספרים; בעיית ימי ההולדת ותורת ההסתברות; וריצופים באריחים ובטבע. סדר השיעורים נתון לבחירת הלומדים – אפשר להתחיל בכל אחד מהשיעורים ולהתקדם לפי הבחירה האישית, לפי הסדר שצוות הקורס הציע או לפי הנחיות המרצה (עבור סטודנטים וסטודנטיות שלומדים בהנחיה).

הקורס מיועד ללמידה עצמית, וכולל הקנייה בעזרת סרטונים, הדגמות, אנימציות ויישומונים. כמובן, צפייה פסיבית אינה מזמנת למידה משמעותית. לשם כך משולבות בכל שיעור משימות מגוונות – בתוך הסרטונים ואחריהם, שאלות למחשבה ולדיון עם הלומדים האחרים בקורס, יומן מסע ומשימות סיכום בסוף כל שיעור. מגוון זה מאפשר להגביר את המעורבות של הלומדים בצפייה, לבדוק הבנה ויישום של הנושאים, לספק ללומדים משוב מיידי, וגם לאפשר העמקה והרהור על תהליך הלמידה האישית של כל לומד ולומדת.

נדגים את מהלך הלמידה באחד השיעורים – נפלאות הקובייה. השיעור נפתח במבוא שכולל יישור קו בעניין מושגים בסיסיים בהנדסת המרחב (כגון קודקודים, מקצועות ופאות), שאלות אופייניות למתמטיקאים בנושא הנלמד (כגון 'האם אפשר לחתוך מחומש או משושה מקובייה [בעזרת מישור]?'), שש חידות קצרות על צביעה של קובייה, ויומן מסע – שאלה להרהור על הנושאים שהוצגו במבוא.



לסיכום, אנחנו מזמינים אתכם ואתכן להירשם לקורס ולהתנסות בו. הקורס הוא חינוכי ופתוח לכל מי שמעוניין, ואין צורך בתואר במתמטיקה – הקורס מיועד לבוגרי תיכון ואינו כרוך בידע מוקדם. הקורס פותח בשיתוף פעולה של מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית עם מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך במימון ישראל דיגיטלית – קמפוס IL.

קישור לסרטון המבוא: https://youtu.be/yLiW_zM8Szw

קישור לקורס: <https://campus.gov.il/en/course/mathematics-the-queen-and-servant-of-the-human-being>

צוות הפיתוח וההפקה:

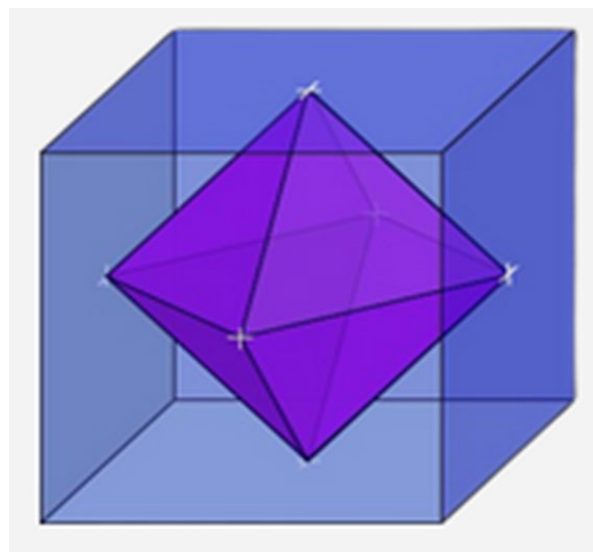
פרופ' נצה מובשוביץ-הדר

ד"ר יניב ביטון

ד"ר בועז זילברמן

ד"ר רותי סגל

רותם רביב



החלק השלישי של השיעור עוסק במשפט אוילר על פאונים פשוטים – החל מההשערה הנועזת על הקשר בין מספר הקודקודים, המקצועות והפאות שנראה שמאפיין פאונים רבים, המשך בתהליך שבו כמה מתמטיקאים ידועים בדקו את ההשערה כדי להוכיח אותה וכך להפוך אותה למשפט מתמטי או למצוא דוגמה נגדית שתאפשר להפריך אותה, וכלה בהוכחה הפשוטה והיפהפייה שמצא המתמטיקאי אוגוסטין לואי קושי. ההוכחה מלווה בשאלות הבנה ובסיכומי ביניים, כדי לסייע ללומדים לעקוב אחרי שלושת שלבי ההוכחה.



החלק האחרון של השיעור עוסק בקובייה באומנות, בפריסות של קובייה ובהרחבה של הקובייה לעולם הארבע-ממדי. חלק זה עוסק בדרכים שבהן יוצרים ואומנים השתמשו בתכונות המיוחדות של הקובייה ביצירות שלהם – כמו האטומיום שבבריסל או הקוביות הבלתי אפשריות של אשר, בחידת המסלול הקצר ביותר של עכביש המטייל על הקירות בחדר שצורתו היא קובייה, ובשימושים מעשיים יותר או פחות בהיפר-קובייה הארבע-ממדית.



Math and the brain: Insights for early childhood educators

Orit Elgavi-Hershler and Pircha Hamo

Abstract

This paper presents basic neuropedagogical content knowledge (N-PCK) on the development of mathematical understanding in early childhood, in order to enable early childhood educators to understand neurological findings on mathematical development in the brain in an informed way and apply these findings to educational practice. The paper presents seven neuropedagogical principles surrounding mathematical development in early childhood, together with insights and practical examples that can be used to impact early childhood education. This review might also be used by teacher educators teaching courses on early numeracy, and as a basis for future research in this field.

Keywords: brain; neuropedagogy; early childhood education; mathematics; ENC (early numeracy curriculum).



Effect of mathematical activity of the pregnant woman on the fetal brain

Dina Hassidov, Uzi A. Asher, Moshe Ben-Ami, Leandro Keselman, Ruba Sabri Al Abed and Sami Haddad

Abstract

In recent years, there has been growing interest in the effect of maternal exposure to physiological, environmental, and also psychological factors during gestation on child development. Several independent studies link maternal stress during pregnancy to emotional and behavioral problems in the child.

This study aimed to observe the effect of maternal cognitive activity on fetal brain blood flow to determine whether systematic maternal mathematical activity during pregnancy might influence child brain development.

Thirty-five women in the 28th to 40th week of pregnancy engaged in mathematical activities. Fetal middle cerebral artery (MCA), pulsatility index (PI) and peak systolic velocity (PSV) were monitored before, during, and after the activity.

Brain activity and blood flow were shown to be intimately linked. We observed a significant decrease in fetal brain MCA resistance, as evidenced by decreased MCA PI, towards the end of the mathematical activity. This may result in increased blood flow in the arteries supplying most brain regions and, possibly, increased brain activity.

A correlation between the mother's engagement in mathematical activities and fetal brain blood flow may lead to enhancement of the fetus's brain function and a cognitive advantage for the child.

Key words: fetal brain; maternal mathematical activities; blood flow; fetal programming.



Brain activity associated with logical inference in geometry in students with different ability levels

Ilana Waisman, Mark Leikin and Roza Leikin

Abstract

Mathematical processing related to solving short geometric problems that require logical reasoning was examined among students who differ in levels of general giftedness (G) and excellence in mathematics (EM) using Event-related potentials (ERP) methodology. Sixty-seven high school male students participated in this study. The study participants were divided into four major study groups designed according to various combinations of G and EM factors. The G and EM factors had a similar effect on accuracy and reaction time: students who excel in mathematics (EM) and students who are generally gifted (G) were more accurate compared to their peers who are not excellent in mathematics (NEM) and non-gifted (NG), respectively. At the same time, G and EM factors affected electrophysiological measures differently, with a significant interaction between G and EM factors related to ERP absolute amplitudes in some problem-solving stages. Based on the differences found, we suggest that our study demonstrated that G and EM factors are interrelated but are different in nature. We recommend that ability grouping in school mathematics must consider both excellence in mathematics and general giftedness, that is, the EM and G factors.

Keywords: problem-solving in geometry; logical inference; giftedness; excellence in mathematics; Neurocognition; ERP – Event Related Potentials..



Retrieval practice, spaced practice and interleaved practice in the teaching of Mathematics

Dorit Neria

Abstract

Research in neuroscience has great potential for advancing the understanding of learning and for the understanding of optimal teaching and learning approaches. One of the most important neurological principles that can be applied in teaching is neuroplasticity – assimilating new information or retrieving knowledge from memory leads to the creation of new connections (synapses) between neurons and strengthens existing connections. This article discusses three major strategies in learning in general and in learning mathematics in particular, that can be applied from the conclusions of neurological studies: retrieval practice (retrieving knowledge from memory), spaced practice (encountering content at brief periods spread out over time), and interleaved practice (practicing a mixture of topics and contexts). The three strategies focus on dividing the content into small portions, repeating and spacing sessions over time and mixing up topics. These strategies can promote meaningful learning and a deeper understanding of the topics being studied.

Keywords: retrieval practice; spaced practice; interleaved practice.



Professional well-being of mathematics and science expert teachers in effective professional development programs

Mirela Widder and Anat Even-Zahav

Abstract

Examining psychological and neurological aspects of the Self-Determination Theory led scholars to theorize that professional well-being is essential for teachers' satisfaction and personal-professional growth. However, teacher professional development programs primarily focus on promoting student achievement and only partially and indirectly address teachers' professional well-being. In particular, the absence of teachers' voices in this discrepancy is noticeable. This study aimed at confronting teachers' perceptions about their professional well-being needs with how actual practices in effective teacher professional development programs address these needs. Well-being components (competence, relatedness, autonomy, and aspirations) were implicitly identified within 20 interviews with expert STEM teachers. The findings show that teachers attribute importance to their professional well-being in all components. In particular, aspirations for personal-professional growth, indicated by all teachers as most important, were not evident at all in effective teacher professional development programs. The findings emphasize the need to establish professional well-being as an additional characteristic of effective teacher professional development programs. This additional characteristic may provide an answer to psychological and neurological needs in the context of teachers' learning processes and therefore may have practical and theoretical implications for planning and evaluating the effectiveness of professional development programs for teachers.

Keywords: self-determination theory; neurobiology and learning; professional well-being of teachers; effective teacher professional development programs; expert STEM teachers.



Teaching for mathematical literacy: Why does the traditional mathematics instruction fail to do the trick?

Anna Sfard

Abstract

Today, diverse literacies, and mathracy (mathematical literacy) among them, are considered "21st-century skills", indispensable for those who live in the ever-changing reality rife with increasingly sophisticated technology. Findings of research conducted in recent decades in many places around the globe has consistently shown that mathracy is not an automatic result of school learning: even those who manage to master school mathematical discourse do not tend to use this discourse in life. This fact leads to several questions: If we agree that mathracy is a combination of two abilities, the ability to participate in mathematical discourse and the ability to apply this discourse in life activities, why is the first ability not enough to develop the second? What makes school graduates unwilling to resort to mathematical discourse in everyday life? Finally, what are the ways in which it is possible to overcome the obstacles and thereby promote the development of mathracy? The answers to these questions offered in this article are based on a theory, according to which all our moves – everything we do in various life situations – is built from routines we have developed over the course of our lives. This claim is reinforced by what can be deduced from what the new neuroscience tells us about our responses to diverse needs and requirements. The article ends with a number of practical tips for teachers who aspire to develop mathracy in their students.

Keywords: mathematical literacy (mathracy); discourse; routine; simulation; situativity.



Extending the trail and pushing back the boundary: Attempts to apply theoretical ideas from educational and cognitive psychology in teacher training and M.Ed. mathematics education programs

Tikva Ovadiya

Abstract

The attached article describes three examples taken from three different studies in which attempts were made to design learning environments and teaching methods in accordance with concepts used in studies dealing with cognitive or other types of psychology in order to maximize the learning processes of the individual and the group. The analysis of the events presented seek to focus on the interpretation of the learning situations based on theoretical ideas from the fields of neuroscience and psychology. In the three examples presented in this article, the researcher focuses on the participants' attention so as to understand what attracted their attention and what actions they took as a result.

In the first example, the researcher observes the attention of a teacher who altered the learning environment for her students so that they would act independently for a large part of the lesson; in this case, the teacher tried to focus her attention on her new role in the classroom. In the second example, the researcher observed the focus of an individual who had to solve a non-routine mathematical problem in a work group. In the third example, the researcher observed the attention of a teacher who was documenting her teaching processes, focusing on the teacher's interpretation of those events that drew her attention and events that she overlooked.

Observing the attention of the learner undergoing a learning process or of a teacher while teaching promotes understanding of the practices taken by learners and teachers during teacher education processes that are a result of their attention. It also imparts awareness of the necessity of characterizing those events that were overlooked. This awareness can stimulate the design of teaching learning processes and environments that will increase teachers' and learners' attention to important events that might be overlooked. Observing the examples presented in the article through lenses borrowed from theories from fields other than mathematics education promotes in-depth understanding of the processes that took place in them.

Keywords: noticing; neuro-pedagogy; cognitive load; episodic memory; collaboration; geometry; foolproof environment; problem solving; cooperative working memory.

7	דבר העורך יניב ביטון
8	על נירופדגוגיה והשלכותיה להוראה ולמידה ריאיון עם פרופסור יצחק פרידמן קרני שיר ומירלה וידר
12	הספר "נירופדגוגיה: כשמוח וחינוך נפגשים" מאת אורית אלגאוי-הרשלר הדס כהן רוזנברג
16	מדור חדשות מתמטיות נצה מובשוביץ-הדר
22	מוח ומתמטיקה: תובנות לאנשי חינוך לגיל הרך אורית אלגאוי-הרשלר ופירחה חמו
35	השפעת פעילות מתמטית של האישה ההרה דינה חסידוב, עוזי אשר, משה בן-עמי, יורי פרליץ, לאונרדו קסלמן, רובא סברי אבן עבד וסמי חדד
44	פעילות מוחית הקשורה להסקה לוגית בגאומטריה בתלמידים בעלי רמות שונות של יכולת אילנה ווייסמן, מרק לייקין ורוזה לייקין
60	תרגול שליפה, תרגול מרווח ותרגול משולב בהוראת מתמטיקה דורית נריה
68	רווחה מקצועית של מורים מומחים למתמטיקה ולמדעים בתוכנית פיתוח מקצועי יעילות מירלה וידר וענת אבן-זהב
84	שופכים אור על אוריינות מתמטית מה משתנה במעבר מהוראת מתמטיקה לפיתוח מקצועי אנה ספרד
98	להרחיב את השביל ולהרחיק את הגבול ניסיונות ליישום רעיונות תאורטיים מפסיכולוגיה חינוכית וקוגניטיבית בהכשרה להוראה בהוראת מתמטיקה (M.Ed.) ובתוכניות לתואר שני תקוה עובדיה
122	Mooc: מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההווה האנושית בועז זילברמן
125	תקצירים באנגלית