

נושאים מתמטיים בספרות התלמודית והרבנית: הצעות שילוב בחינוך מתמטי

אילה רביב
מוניק חדד
נח דנא-פיקארד



ד"ר אילה רביב

ראש החוג למדעים במכללה האקדמית חמדת. תחומי מחקרה מתמקדים באספקטים שונים של חינוך מדעי ומתמטי, בהם חינוך מדעי בגיל הרך, למידה קבוצתית וחוץ-כיתתית ומאפייני השיח בשיעורי מדע.



מוניק חדד

בוגרת תואר שני בחינוך מתמטי במכללה האקדמית חמדת. מורה למתמטיקה ומשמשת רכזת ומנחה יישובית למתמטיקה באופקים. היא יזמה ועשתה פעילויות בית ספריות וקהילתיות המשלבות את תחום המתמטיקה בפעילויות חינוכיות בתחום היהדות.



פרופ' נח דנא-פיקארד

פרופ' חבר למתמטיקה וראש הקתדרה למתמטיקה חינוך ויהדות במרכז האקדמי לב. מחקריו עוסקים בחקר עקומות ומשטחים בסביבה מתקשבת, בחינוך מתמטי מבוסס טכנולוגיה, ב-STEAM Education ובתורה ומדע. במשך השנים פרסם מאמרים רבים בתחומי מחקר אלה. חבר בקבוצת העורכים של כתבי עת בין-לאומיים, ופעיל בכנסים מקצועיים רבים, במתמטיקה ובחינוך מתמטי, בארץ ומחוצה לה. עורך של סדרת הספרים "לדעת בארץ דרכך" בתורה ומדע.

תקציר

מאמר זה מתאר שני נושאים מתמטיים המופיעים במקרא ובספרות חז"ל: שורש ריבועי ושיפוע של ישר.

השילוב בין קודש לחול, בין נושאים השייכים למדעים המדויקים לבין מקורות יהודיים, הוא מסורת רבת שנים. יש דוגמאות רבות לשילוב החשיבה המתמטית, החשיבה המדעית והחשיבה התלמודית בפסיקה ובחיי היום-יום. המתמטיקה היא אחד מ"כלי העבודה" הבסיסיים לכל חקר מדעי באשר הוא, אך גם העיסוק במתמטיקה עצמה יכול לפתוח חלון לעולם מופלא ולעורר התפעמות מהחוכמה העליונה שה' הפיח באדם. שיטות של המתמטיקה המודרנית מאפשרות לנתח סוגיות בתלמוד בעזרת כלים של דורנו ולצפות בתוך כך כיצד חז"ל פתרו את הבעיות בעזרת בניית הכלים המתמטיים שלהם.

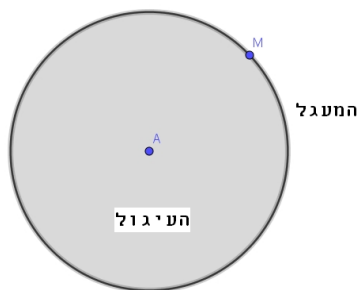
מאמר זה יוצא בקריאה למורים ומחנכים העוסקים במתמטיקה והמלמדים את מקצועות היהדות, לעסוק בתאוריה ובפרקטיקה של הוראת המתמטיקה מנקודת מבט יהודית: להציג את יחסה האוהד של היהדות כלפי מתמטיקה מצד אחד, ואת בקיאותם המופלגת של חכמי ישראל בתחום זה מצד אחר. שילוב המקורות היהודיים בהוראת נושאים מתמטיים, במשמעותם בימינו ובמשמעותם במקורות, יעשיר את למידת המתמטיקה כפי שלמידה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשירה את הלמידה המדעית. החיבור בין המקורות התרבותיים היהודיים לנושאים המתמטיים והצגתם יעודדו לפתח נקודת מבט לא שגרתית אצל הלומד. השימוש בלשון העתיקה ותרגומה לשפה בת ימינו יגונו את תהליך הלמידה והחשיבה הפורמלית. הלמידה תוכל לתאר מצבים קונקרטיים ולהיות בעלת משמעות.

שני המושגים המתמטיים שיוצגו כאן נלמדים על פי תוכנית הלימודים הפורמלית של משרד החינוך בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה של בית הספר.

מילות מפתח: ספרות תלמודית; חכמי ישראל; שורש ריבועי; שיפוע.

מעגל הוא מקום גאומטרי של הנקודות (M) במישור הנמצאות באותו מרחק (R) מנקודה נתונה (A). האזור במישור התחום במעגל נקרא עיגול וקורה שמישהו קורא למעגל "היקף המעגל", ואז מדבר לדוגמה על נקודה בהיקף המעגל. אך כאמור המעגל הוא מקום גאומטרי, כלומר קבוצת נקודות, וההיקף הוא מספר ממשי חיובי המודד לדוגמה את אורך החוט הדרוש לכסות בדיוק את המעגל (איור 1). עם זה בלשון האמוראים (חכמי התלמוד) "היקף המעגל" מציין את מה שאנו קוראים היום שטח העיגול (ראו מסכת סוכה דף ז ע"ב) בעניין הסוכה העגולה, ומסכת עירובין (דף עו ע"א) בעניין החלון העגול – בשתי הסוגיות מתוארת אותה שאלה גאומטרית, אבל בשני הקשרים שונים זה מזה). לכן כשעוסקים בנושא מתמטי לפי ניסוח מלפני מאות שנים, חשוב לתרגם אותו לשפה המתמטית בת ימינו.

בהמשך נראה מקרים נוספים שבהם יש צורך לתרגם מהשפה של תקופת העבר לשפה בת ימינו.



איור 1: מעגל ועיגול

לעיתים נמצא שימוש בנושאים מתמטיים כנושאים מחשבתיים-פילוסופיים, שאפשר לדון בהם במערך הנהגות האדם והליכותיו, גם מחוץ למישור המתמטי ומחוץ למישור החישובי. כך המדען הדגול, המתמטיקאי והפיזיקאי אייזק ניוטון, סבר שבורא העולם הצפין את סודות הבריאה במידותיו של המשכן ובמידותיהם של בתי המקדש בירושלים, וסודות כמוסים אלה הוצפנו גם בטקסי הקורבנות ובעבודת הכוהנים והלוויים. לדעת ניוטון, היחסים המתמטיים המדויקים להפליא בין גרמי השמיים במערכת השמש וחוקי הכבידה השולטים בכול היו ידועים לכוהנים בעולם העתיק, וכי פולחן של כוהנים סביב אש ביטא את המערך המופלא של גרמי השמיים ואת החישובים המתמטיים של תנועת כוכבי הלכת סביב השמש (לשם-רמתי, 2015).

נציג כאן שני נושאים מתמטיים הנמצאים במקורות היהדות והנלמדים על פי תוכנית הלימודים הפורמלית בכיתות חטיבת הביניים והחטיבה העליונה. הבאת חומר לימודי מתמטי מתוך מקורות היהדות משמשת דוגמה ללמידה רב-תחומית המתקבלת כיום בברכה במערכת החינוך. שילוב מקורות יהודיים בנושאים מתמטיים יעשיר את למידת המתמטיקה כפי שלמידה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשרה את הלמידה המדעית. החיבור בין המקורות היהודיים לנושאים המתמטיים והצגתם יפתחו הסתכלות לא שגרתית אצל הלומד. השימוש בלשון חכמינו יגוון את תהליך הלמידה, וכך יתאפשר לעודד את הצד האינטואיטיבי של החשיבה מעבר לחשיבה פורמלית. הלמידה תוכל לתאר מצבים בעולם המציאותי ולהיות בעלת משמעות.

מאמר זה מתאר שני נושאים מתמטיים המופיעים במקרא ובספרות חז"ל. שילוב מושגים השייכים למדעים המדויקים במקורות יהודיים, הוא מסורת רבת שנים. ישנן דוגמאות רבות שהחשיבה המתמטית, החשיבה המדעית והחשיבה התלמודית מתקדמות ופועלות במסלולים זהים או דומים. להלן דוגמאות:

א. יש בתלמוד בעיות שאין להן הכרע, כגון האם הזמן הנקרא "בין השמשות" שייך ליום הקודם או ליום הבא (מסכת שבת). למעשה כל הסוגיות בתלמוד המסתיימות במילה "תיקו"¹ מתארות בעיות שאין להן הכרע. משפט גודל (Gödel) המפורסם קובע שבכל תאוריה מתמטית הבנויה היטב על מערכת אקסיומות שלמה ולא סותרת את עצמה, קיימים משפטים שאי אפשר להוכיח ואי אפשר להפריך, כלומר סוג בעיה שאין לה הכרע. בדומה, החתול של שרודינגר (Schrödinger) משמש דוגמה מתחום הפיזיקה הקוונטית.

ב. רבן גמליאל (עירובין מג ע"ב) נעזר בשיטות מתמטיות לחישוב מרחקים במישור ובעומקי גאיות לצורך פתרון בעיות הלכתיות. נעסוק בשיטות מתמטיות כאלה בהמשך מאמר זה בפרק שדן בנושא השיפוע.

במאמר זה נדון לא בנושאים שאפשר לתאר אותם בעזרת כלים מתמטיים אלא בנושאים שהם מתמטיים מטבעם. שיטות של המתמטיקה המודרנית מאפשרות לנתח סוגיות בתלמוד בכלים של דורנו מתוך צפייה איך חז"ל פתרו את הבעיות בעזרת בניית הכלים המתמטיים שלהם (קופל, תשנ"ג). ההלכה נעזרת לעיתים קרובות בכלים מדעיים לשם קביעת הוראות אופרטיביות. לדוגמה במסכת עירובין (דף כג ע"ב) עושים חישוב מתמטי באמצעות חלוקת מלבן לריבועים ומלבנים (בדרך חשיבה הדומה לבניית ספירלת פיבונצ'י) כדי "לרבע" את המלבן המקורי, מה שמביא לקירוב סביר של הערך של $\sqrt{2}$ (גרבר, תשע"ז). המתמטיקה היא אחד מ"כלי העבודה" הבסיסיים לכל חקר מדעי באשר הוא, כלים שאף מקרבים את האדם להכרת בוראו, על פי הרמב"ם (שמונה פרקים). העיסוק במתמטיקה עצמה פותח חלון לעולם מופלא, והמביט בו מנקודת הסתכלות מתמטית מדעית נעזר להתפעם מיופיו ולחוש בפנימיותו, בבחינת "מה רבו מעשיך ה'..." (תהלים קד, כד).

מאמר זה יוצא בקריאה למורים ומחנכים העוסקים במתמטיקה והמלמדים את מקצועות היהדות, לעסוק בתאוריה ובפרקטיקה של הוראת המתמטיקה מנקודת מבט יהודית: להציג את ההיבטים המתמטיים הנדרשים לניתוח סוגיות שבספרות התלמודית והרבנית, ולהראות את בקיאותם המופלגת ואת היצירתיות של חכמי ישראל בתחום זה. לא צירפנו למאמר מערכי שיעור, שכן אנו מציעים כאן מודל כללי לחינוך מתמטי בשכבות גיל למיניהן. כל מורה יוכל לבנות על פי המודל מערכי שיעור מפורטים להבאת הרעיונות על פי רמת התלמידים בכיתה. הנושאים המוסברים כאן מופיעים במקורות היהדות כמשמעם בימינו או כמשמעות דומה, שכן הטרימינולוגיה שמשמשת לתיאור ביטויים מתמטיים ואחרים עברה שינויים בחלוף התקופות ובמעבר בין תרבויות. הדבר טעון בדיקה, ולכן נביא דוגמה.

1. יש מקום להעיר שרבים סבורים שהמילה "תיקו" היא ראשי תיבות של "תשבי (כלומר אליהו הנביא) יתרץ קושייתו ובעיות", אבל הפשט הוא שפירוש מילה זו בארמית הוא: "תעמוד", כלומר תעמוד בלי הכרע עד בוא אליהו הנביא.

ערוגה נקראת שש טפחים על שש טפחים, זורעים בתוכה חמשה זרעונים, ארבעה בארבע רוחות הערוגה, ואחד באמצע. הנה לה גבול גבוה טפה, זורעין בתוכה שלשה עשר, שלשה על כל גבול וגבול, ואחד באמצע. לא יטע ראש הלפת בתוך הגבול, מפני שהוא מקלאהו. רבי יהודה אומר, שלשה באמצע.

דברי מפרשי התלמוד והראשונים בעניין

הרמב"ם בפירושו למשנה (כלאים ג, א):
וכשתסתכל בצורה הזאת היטב, תמצא מדת כל מסומן מן השישה המסומנים שבאמצע ג"ט, ותמצא המרחק בין שני צלעים שהם משתנים מצלעות אותם המסומנות, גדר ג' ורביע והוא אחד וד' חמישיות בקירוב...

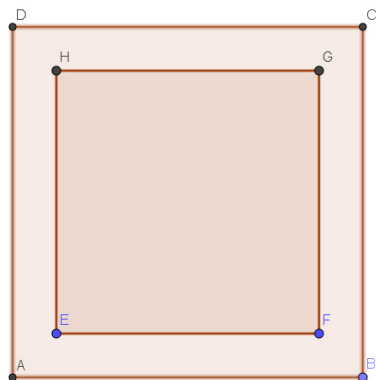
רבי סעדיה שוראקי (1973) מסביר כיצד אפשר לחשב את ה"גדר" של שלושה ורביע:

"תחלק כל טפה לחמישיות שתי וערב [...] הרי לך שיש בכאן ט' חומשין טפה, שהוא טפה וד' חומשין בקירוב, מפני הרביע הנז' עם הפ"א, אין לו גדר ידוע" (עמ' 120).

המילה גדר מציינת כאן שורש ריבועי. ערכו אינו ידוע מכיוון שהערך המבוקש כאן הוא מספר אי-רציונלי. יש לזכור שמספרים אי-רציונליים הוגדרו כעבור זמן. זאת אחת הסיבות לריבוי סוגיות בתלמוד ובספרות הרבנית שבהן יש צורך בחישובים מקורבים כגון אלה.

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת זמננו

מבקשים לזרוע כל מיני מינים של גידולים חקלאיים בחלקת שדה (ערוגה) שיש לה צורת ריבוע. אורך הצלע של הערוגה הוא 8 טפחים (איור 2). שפת הערוגה היא הריבוע EFGH ומסביב לה בנויה ערוגה אחרת, גבוהה יותר מהערוגה הפנימית. הפרש הגבהים בין הריבוע הפנימי לחיצוני הוא טפה. השפה החיצונית של הערוגה הגבוהה היא הריבוע ABCD. לשני הריבועים אותו מרכז והצלעות שלהם מקבילות בהתאמה.



במאמר זה נתאר את הנושאים המתמטיים האלה: שורש ריבועי ושיפוע של קו ישר במישור. קופל ומרצבך (תשמ"ט) הקדישו את הגיליון הראשון של כתב העת הגיון לניתוח דרכי החשיבה המתמטית של חז"ל. עבודות כגון אלה ממשיכות להתפרסם בארץ, בכתב העת בדד ובסדרת הספרים "לדעת בארץ דרכך" (שאינה מתמקדת רק בנושאים מתמטיים). הייחודיות של מאמרנו זה היא הפנייה אל הצד החינוכי, כלומר היכולת לעשות במערכת החינוך הישראלית פעילויות של הוראה ולימוד מתמטיים באמצעות טקסטים תלמודיים ורבניים. השאלה הפדגוגית הנשאלת כאן היא דו-כיוונית: האם בדרך הוראתם של מושגים מתמטיים ראוי לקשרם גם להיבטים תרבותיים? וכנגד זה האם בדיון ולימוד של סוגיות תלמודיות ראוי לעסוק בנושאים מתמטיים בני זמננו? לדעתנו, שתי התשובות חיוביות, ולכך מכוונת תרומתנו במאמר זה.

שורש ריבועי

לפי אבן שושן (2010) שורש הוא "גודל אשר אם נעלהו בחזקה מסוימת ייתן מספר נתון"; השורש מסומן באלגברה בסימן $\sqrt{\quad}$, לדוגמה השורש השלישי של 8 שווה $2 (\sqrt[3]{8} = 2)$.

שורש ריבועי במשמעותו המתמטית

במתמטיקה פעולת חישוב השורש של מספר ממשי היא הופכית לפעולת העלאה בחזקה. סימן השורש הריבועי נגזר מן המילה radix (שורש בלטינית) והסימן הוא עיוות של האות x. לפחות כך כתב אוילר (Euler, 2021).

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

שורש ריבועי של מספר ממשי לא שלילי a נתון, הוא מספר ממשי לא שלילי שאם יוכפל בעצמו ייתן a. הפעולה החישובית של מציאת שורש ריבועי נקראת הוצאת שורש ריבועי. יש להבדיל בין המושג (concept) לתהליך (process).

בדור האחרון לא מלמדים את התהליך עצמו, ומסתמכים על ידע קודם בשביל מקרים פשוטים ועל המחשבון בדרך כלל. כשמדברים על שורש ריבועי מסמנים אותו רק בסימן $\sqrt{\quad}$ בלי צורך לציין את הספרה 2, לדוגמה $\sqrt{1.21} = 1.1$.

הוצאת שורש ריבועי במשמעותו המתמטית במקורות:

כיצד לזרוע מרב מיני זרעים מבלי לעבור על איסור כלאים?² המשנה (כלאים ג, א) דנה בנושא "זריעה בערוגה". הדיון נסוב על שיעור ההרחקה שחייבים להרחיק בין מינים שונים של זרעים:

3. טפה הוא יחידת אורך הלכתית. לפי השיטה של הגר"ח נאה טפה שווה ל-8 ס"מ. לפי שיטת החז"א טפה שווה ל-9.6 ס"מ. כדי להיות בטוחים בקביעה הלכתית הולכים לחומרה, כלומר לפעמים מחשבים מידות לפי הגר"ח נאה ולפעמים לפי החז"א.

2. התורה אוסרת לזרוע זרעים בין שורות גפנים (מה שנקרא כלאי הכרם). ישנו גם איסור לזרוע מספר סוגי זרעים במפולת יד אחת. החכמים עשו סייג לדבר וזריעת שני מינים שונים זה מזה דורשת הרחקה מסוימת. אנו דנים כאן בכמה מהשאלות הנובעות מצורות נאומטריות בשטח המיועד לזריעה.

בדוגמה המתוארת יש לחשב את השורש הריבועי של 3.25 (שלוש ורבע). הזכרנו את הדרך שבה שוראקי (1973) מציע לחשב שורש ריבועי ממספר רציונלי.

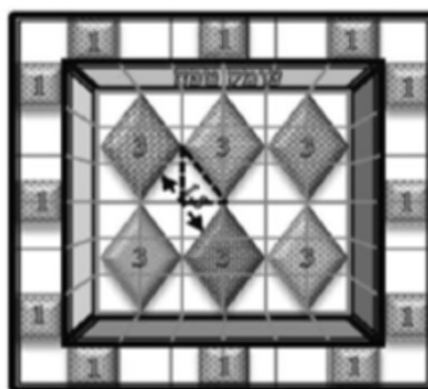
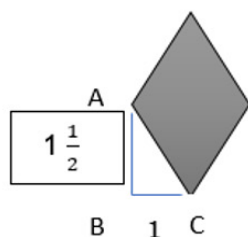
באיור 3 מתוארת חלקת שדה (ערוגה) ובה נזרעים כל מיני זרעים. השטחים הכהים באיור 3 מציינים את שטחי הזריעה. הזריעה נעשית כך שייזרעו כמה שיותר מינים מבלי שתהיה ביניהם חפיפה בשטח כלשהו משטחם. יש לחשב את אורך צלע המעוין, שהיא המרחק בין שני מינים ומתוארת בחלק השמאלי של האיור כקטע CA. אורך הקטע BC טפח אחד, ואורך הקטע CA טפח ומחצה. שוראקי (1973) מציע דרך להוצאת שורש ממספר רציונלי בהרחבת המונה והמכנה למספרים ששורשם ידוע, או בקירוב לאותם מספרים⁵.

חישוב השורש הריבועי של $3\frac{1}{4}$: $AC = \sqrt{1^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}}$

$$\frac{3\frac{1}{4} \cdot 25}{25} = \frac{81\frac{1}{4}}{25} \quad (\text{המרחק בין המינים})$$

$$\sqrt{\frac{81\frac{1}{4}}{25}} = \frac{\sqrt{81\frac{1}{4}}}{\sqrt{25}} \approx \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

בערוגות ששטחן קטן וזרעים בהן מעט מכל מין של זרעים, הקלו חכמים שאין צורך להרחיק בין שני מינים, אלא כשיעור היניקה שהוא טפח ומחצה (זו דעתם של כמה מפרשים על המשנה הנזכרת לעיל במסכת כלאים ג, א, כגון רש"י, רמב"ם, רבי עובדיה מברטנורא). נוסף על כך, יש לומר שאם שני מינים נוגעים זה בזה בנקודה בלבד, ולא בצלע שלמה או בחלק מצלע – הרי זה מותר כי נראה בבירור שהמינים לא נזרעו בערבוביה (איור 4).

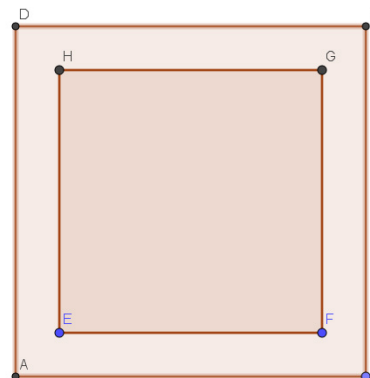


(ב)

איור 3: זריעת 18 מינים בערוגה עם גבול לפי שיטת רבי יהודה⁴

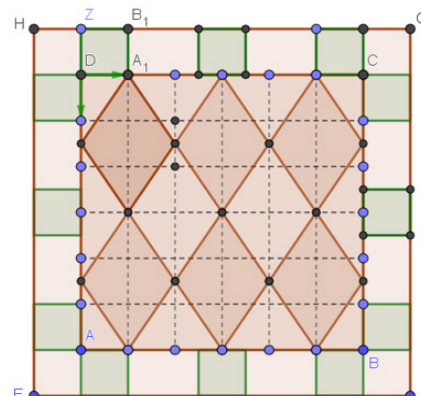
4. נכתב בקירוב, שכן שווה ל-3.24, ובמדויק יותר השורש הריבועי של 3.25 שווה ל-1.8027.

ומסביב לה בנויה ערוגה אחרת, גבוהה יותר מהערוגה הפנימית. הפרש הגבהים בין הריבוע הפנימי לחיצוני הוא טפח. השפה החיצונית של הערוגה הגבוהה היא הריבוע DCBA. לשני הריבועים אותו מרכז והצלעות שלהם מקבילות בהתאמה.



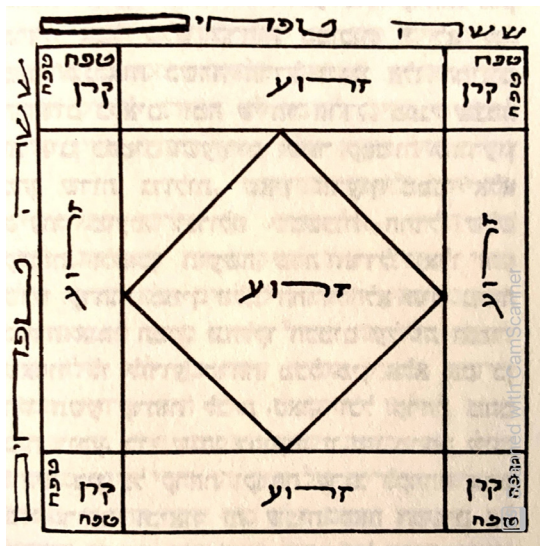
איור 2: חלקת שדה (ערוגה) בצורת ריבוע הנתון בריבוע הגבוה ממנו

הרמב"ם מפרש את דברי רבי יהודה ואומר שהמרחק בין הצלעות הוא יותר מטפח וחצי. היחס בין אורכי הצלעות הוא בקירוב 1. עם הסימונים של איור 2, נאמר שהמרחק בין הישרים (BA) ו-(FE) שווה לטפח אחד והמרחק בין הנקודות A ל-E הוא $\sqrt{2}$ טפח (בקירוב 1.414 טפח). לפי שיטת הרמב"ם המרחק המותר בין שני זרעים הוא טפח וחצי. מאחר שנוצר משולש ישר זווית (מסומן באיור 3 ומודגש בחיצים) המרחק בין הזרעים הוא היתר של אותו משולש, וכדי למצוא את אורכו של זה (ולוודא שהמרחק בין הזרעים גדול מהמינימום הנדרש) יש להשתמש במשפט פיתגורס (כהן, תשע"ז, עמ' רכ). אורך היתר של המשולש הוא השורש של סכום ריבועי שני הניצבים, מכאן הדרישה לחשב שורש ריבועי.

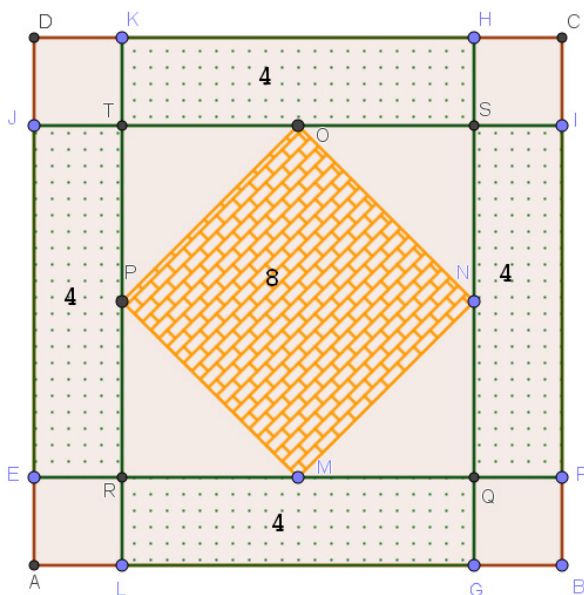


(א)

4. איור 3 נועד גם להמחיש את הפרשי הגובה בין המפלסים השונים זה מזה, ולכן הוא אינו תואם את המוסכמות המודרניות בשרטוט מפה של שטח מישורי. לפיכך אנו מראים את אותה המציאות באיור 3א. איור 3א התקבל בעזרת התוכנה GeoGebra. ישנן כמה דרכים לצייר עם התוכנה, החל מצויר נקודה נקודה וציור קטעים, כל אחד בפני עצמו, וכלה בשימוש בתכונות מתקדמות יותר, כגון ציור תאים בסיסיים (ריי-בוע אחד, מעוין אחד וכדומה) והעתקתם בעזרת טרנספורמציות המישור, כגון הזזה או סיבוב או שיקוף. היישומון (applet) שבנינו כאן נגיש לקוראי מאמר זה בכתור בת <https://www.geogebra.org/m/tnheed28>. נציין שברוב הכיתות בישראל התוכנה הדינמית הזאת בשימוש אצל המורים והתלמידים. זאת הזדמנות להשתמש בכלי מודרני להוראת נושא הקשור למקורות תורניים ותלמודיים קדומים.



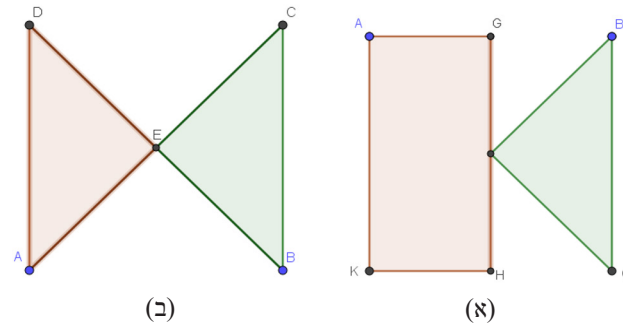
(א) ציור הרמב"ם (משה בן מימון, 1963, עמ' קי)



(ב) ציור בעזרת תוכנה

איור 6: אופן זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב (דרך א)

דרך ב (איור 7): ארבעת המינים נזרעים בארבע הפינות של הערוגה, מין בכל פינה בריבוע שאורך הצלע שלו הוא טפח וחצי, והמין החמישי זרוע באמצע בריבוע שקוקודיו הם אמצעי הצלעות של הערוגה (נשאר לקורא לבדוק האם האמצעים של צלעות הריבוע האמצעי הזה נוגעים בקודקודים של ארבעת הריבועים בפינות השדה), ועל כן שטחו של הריבוע המרכזי שווה למחצית שטח הריבוע החיצוני, כלומר 18 ט"ר. לכן השטח הזרוע שווה ל-27 ט"ר. שכן, $(1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}) \cdot 2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ ט"ר בכל פינה, הרי בכל ארבע הפינות יחד: $9 = 4 \cdot 2\frac{1}{4}$ ט"ר.



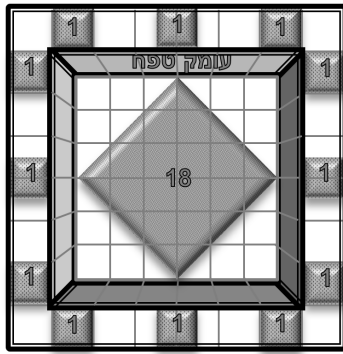
איור 4: הדרכים המותרות במצב שבו שני המינים נוגעים בקודקוד⁶

במצב שנתון בו ריבוע פנימי (נקרא לו: ריבוע חסום) שקודקודיו הם אמצעי הצלעות של הריבוע החיצוני (נקרא לו: ריבוע חוסם). להבנת המשנה לעיל, ראו איור 5. רואים בריבוע EFGH ריבוע חסום בריבוע ABCD. לא

מצאנו בספרות הגדרה מתמטית סטנדרטית של ריבוע חסום בתוך ריבוע, וכאן הרמב"ם עוסק במקרה הפרטי שתיארנו, לא בדוגמה של ריבוע כמו הריבוע IJKL (מקווקו). אפשר להיעזר בכלל הקובע ששטח המרובע החסום שווה למחצית שטחו של המרובע החוסם.

דרך א: באיור 6 אפשר לראות את אופן זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב. השטח הזרוע: 24 ט"ר.⁷ כדי לקיים את הכלל המופיע באיור 4 שלפיו המינים השונים נוגעים רק בקודקודי המצולעים, זורעים ארבע ערוגות בארבע רוחות השמיים באורך ארבעה טפחים וברוחב טפח. ליד כל קודקוד של הריבוע QRTS, משאירים ריבוע ריק שאורך צלעו הוא טפח אחד (לדוגמה DKTJ), ומין אחד באמצע בצורת ריבוע. במצב זה השטח הזרוע של הערוגה הוא 24 ט"ר. 4 ט"ר מכל צד, לכן בכל הצדדים יחד – 16 ט"ר. הריבוע האמצעי שווה בשטחו למחצית השטח הפנימי שנשאר, כלומר 8 ט"ר.

6. הציורים האלה דומים לציורים במאמר של רובינשטיין (2016), עמ' 5, https://stwww1.weizmann.ac.il/wp-content/uploads/2016/08/8_3.pdf
7. ט"ר הוא ראשי תיבות של טפח רבוע, כמו שמ"ר הוא ראשי תיבות של מטר רבוע.



איור 8: זריעת הערוגה ב-13 מינים (כהן, תשע"ז, עמ' רכ)

של 3×2 טפחים, ועל כן שטח כל מעוין הוא מחצית משטח המלבן שהוא חסום בו. מאחר ששטח המלבן הוא 6 טפחים, שטח המעוין יהיה 3 טפחים רבועים. נמצא שהשטח של 6 מעוינים אלה שווה ל-18 (3×6) ט"ר, ובכל הערוגה יחד עם הגבול 30 ($18 + 12 =$) ט"ר.



(א) ציור הרמב"ם (משה בן מימון, 1963, עמ' קיא)

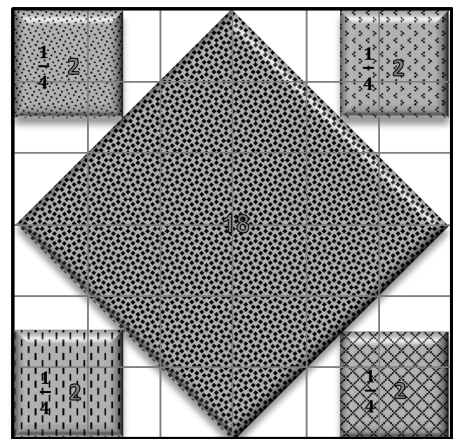
שיפוע של ישר

אחת מאבני היסוד של המתמטיקה, במיוחד בחטיבת ביניים ובבית הספר התיכון, היא הטיפול בשיפועים (של קווים ישרים במישור) ובמדידתם. האנליזה הנשענת על חקירת פונקצייה וניתוחה בנויה במהותה על חישוב השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בכל נקודה ונקודה (אם יש משיק כזה). נשתמש בסימונים המקובלים בימינו. נסמן ב- f פונקציה ממשית של משתנה ממשי. הגרף של f הוא המקום הגאומטרי של הנקודות $M(x, y)$. במתמטיקה בת זמננו חישוב השיפוע נשען על מדידת היחס בין מידת השינוי ב- y כפ $y = f(x)$ אם f היא פונקציה קווית, כלומר פונקציה הנתונה בנוסחה מהצורה $f(x) = ax + b$ (כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים נתונים), אזי הגרף של f הוא קו ישר לא מקביל לציר ה- y (נסמן אותו ב- L), המספר הממשי a הוא השיפוע של הישר L הזה. במילים אחרות: יהיו x_1 ו- x_2 שני מספרים ממשיים שונים. נסמן $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ ו- $\Delta x = x_2 - x_1$ ו- $\Delta y = y_2 - y_1$. בהמשך נקרא ל- Δx ההפרש האופקי ול- Δy ההפרש האנכי.

השיפוע של הישר L הוא $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. הוא בלתי תלוי בבחירה של x_1, x_2 . המנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ מבטאת את היחס בין קצב הגידול של שיעור y לקצב הגידול של x .

בגאומטריה יש המתארים את השיפוע של ישר כ"עוצמת התלילות" שלו, ערך (מוחלט) גדול של השיפוע מראה על תלילות גדולה, כלומר זווית קטנה יותר בינו לקו ניצב אנכי.⁹ תזכורת:

- לכל ישר שאינו מקביל לציר ה- y יש שיפוע. השיפוע הזה הוא מספר ממשי. לישר המקביל לציר ה- y אין שיפוע.
- במונחים של הנדסה אנליטית, ישרים מקבילים כאשר השיפועים שלהם שווים או ששניהם מקבילים לציר ה- y .
- ישרים ניצבים זה לזה כאשר מכפלת השיפועים שלהם שווה ל-1 או שאחד מהם מקביל לציר ה- x והשני מקביל לציר ה- y .



(ב) ציור על פי הרמב"ם (רוזנבוים, 2003, עמ' 76)⁸

איור 7: זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב (דרך ב)

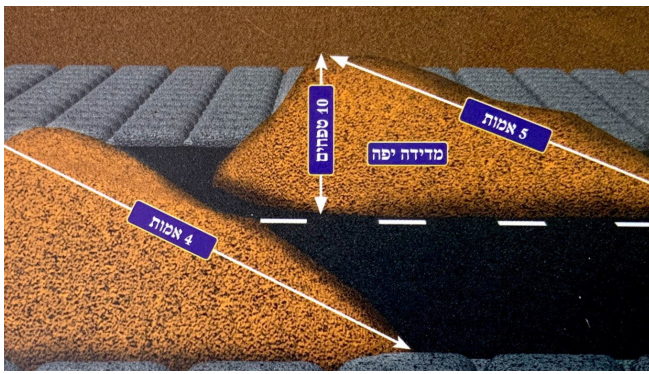
עוד מצב שהמשנה דנה בו הוא שסביב הערוגה יש טפח אחד גבוה נוסף מכל צדדיה (בהמשך נקרא לאזור הזה ה"גבול", כלומר הערוגה בגודל 8×8 טפחים). במצב זה המשנה מביאה שתי דרכים נוספות המגדירות כיצד אפשר לזרוע בה מינים מגוונים של גידולים חקלאיים.

- דרך זו מתוארת באיור 8. נזרעים 21 מיני זרעים על הערוגה הגבוהה, שלושה מכל צד, ומין נוסף נזרע בתוך ערוגה בצורת ריבוע חסום בריבוע הערוגה המקורי. על כן שטח הריבוע החסום הוא 18 ט"ר, ובסך הכול נזרעים 13 מינים. נמצא שסך כל השטח הזרוע בערוגה עם הגבולות שווה ל-30 ($12 + 18 =$) ט"ר.

- זריעת ערוגה לפי שיטת רבי יהודה. דרך זו מתוארת בציור 3 לעיל. נזרעים 21 מינים על הערוגה הגבוהה ו-6 מינים באמצע ב-6 ערוגות בצורת ריבוע בערוגה הפנימית, כלומר 81 מינים ביחד. לפי הצעה זו ששת המינים הנזרעים בתוך הערוגה יזרעו בשישה ריבועים הנוגעים זה בזה בקודקודיהם בלבד, כאשר כל מעוין חסום במלבן בגודל

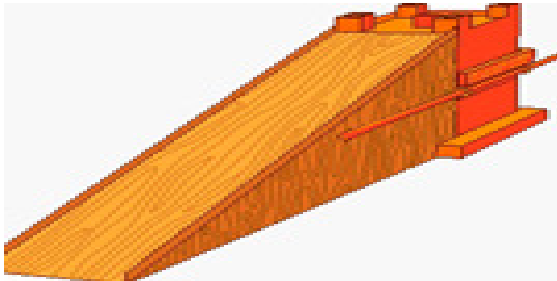
⁸ בזמן פעילות בנושא כגון זה, אנו מציעים שלא להסתמך על ציור קיים בספרות, אלא להטיל על התלמידים לשרטט את הציור כחלק ממשמורת הלימוד. אפשר לעשות את זה ידנית בסרגל ובעיפרון, אבל הצעתנו היא להשתמש בתוכנה לגאומטריה דינמית כגון GeoGebra. בעינינו יש תועלת רבה לשימוש בטכנולוגיה מודרנית כדי להבין סוגיה מהספרות התלמודית הקלסית.

⁹ אפשר לקבל המחשה בעזרת היישומון גאוגברה בקישור <https://www.geogebra.org/m/vpepmdcf> (דנא-פיקארד, ח"ת).



איור 11: הר המתלקט¹⁰

הבעיה היא למדוד מה שנקרא תחום שבת. החכמים קבעו שהאדם לא יצא בשבת יותר מאלפיים אמה (כקילומטר אחד) ממקום מושבו. לא כאן המקום לסכם את הדפים המרובים המוקדשים לכך בתלמוד. נעסוק בבעיה המקומית שהבאנו: אם המדידה היא על קרקע אופקית, מודדים כרגיל. אם בדרך פוגשים תל, מודדים את התלילות של החלק המשופע: אם הוא קטן מהמספר המתואר בדברי רבא, מודדים על פני הקרקע. אם השיפוע גדול יותר, מודדים את ההיטל על מישור אופקי (תאורטי). על פי הסימונים של איור 10, במקרה השני, האורך של הצלע b קובע, ולא האורך c . ההר המתלקט עשרה מתוך ארבע משמעותו שאורך היתר הוא 4 אמות כאשר אורך הניצב BC הוא 10 טפחים (4 אמות מהוות בערך 2 מטרים, ועשרה טפחים הם בערך 80 ס"מ לפי שיטת הגר"ח נאה, ומטר אחד לפי שיטת החזון איש). דוגמה נוספת: נאמר בספר שמות (כ, כב): "וְלֹא תַעֲלֶה בְּמַעֲלֹתַי עַל מִזְבְּחִי". התורה אוסרת את העלייה למזבח באמצעות מדרגות, ולכן עולים אליו באמצעות כבש (ראו איור 12). רש"י מפרש: "כשאתה בונה כבש למזבח לא תעשהו מעלות מעלות, אשקלונ"ש בלע"ז¹¹ (שטופען שטאפלען), אלא חלק יהא ומשופע".



איור 12: כבש המזבח¹²

מידות הכבש מתוארות במשנה (מידות ג, ג) ושם כתוב: "וכבש היה לדרומו של מזבח, שלושים ושתיים (אורכו) על רוחב שש עשרה".

לכאורה יש סתירה ממשנה למשנה, שהרי המשנה כותבת במידות ה, א-ב: "המזבח שלושים ושתיים [...] הכבש והמזבח שישים ושתיים...". נתרגם לסימונים שלנו:

"הכבש" (כלשון המשנה) הוא $62-32=30$ אמה. 1310 אם כך, מה אורך הכבש? שלושים אמה או שלושים ושתיים אמה?

10. מתוך המאמר המבואר על מסכת עירובין, מאורות הדף היומי, תשרי תשס"ו.

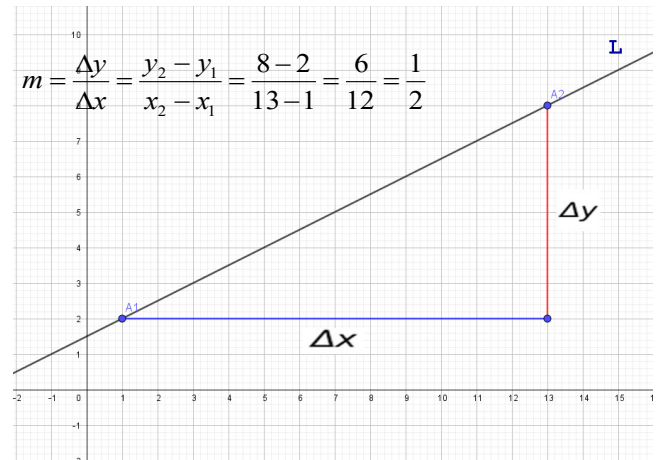
11. Escalier בצרפתית.

12. <https://sites.google.com/a/madaimas.org.il/the-mscan/mzbh-hnhoset>

13. אמה היא יחידת מידה קדומה למדידת אורך של חפצים. על פי רוב שיעור האמה הוא שישה טפחים. לשיטת הרמב"ם אורכה במידות ימינו 46.71324 ס"מ (אמה (יחידת מידה), 2020).

דוגמה: נתון ישר L העובר דרך הנקודות: $A_1(1,2)$ ו- $A_2(13,8)$ (ראו איור מס' 9). כיוון ששיעורי ה- x של הנקודות שונים, הישר L אינו מקביל לציר ה- y . השיפוע m של הישר L מתקבל ככתוב בהמשך:

ההפרש האנכי וההפרש האופקי:



איור 9: המחשה של חישוב השיפוע של הישר L

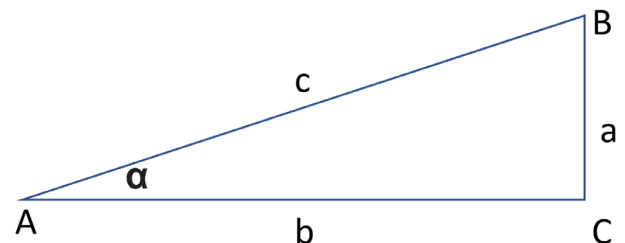
השיפוע במשמעותו המתמטית ובמקורות היהודיים

נבחן כאן כיצד מודדים שיפועים בתלמוד, לאילו מטרות ובאלו הקשרים מודדים שיפועים. נבדוק כיצד מבטאים זאת במקורות מבחינה מתמטית, ומהי "השפה" המתמטית שמשמשים בה כדי לבטא את הדברים. בדרך כלל אפשר לומר שכפי הנראה נקודת המוצא של מדידת שיפוע בעבר הייתה הפוכה לגישה שאנו נוקטים היום. המדידה עסקה ביחידת האורך האנכית, בעוד היום אנו עוסקים ביחידה האופקית לפי המפורט להלן:

נדון באיור 10. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית כך שהניצב AC (שאורכו מסומן באות b) הוא על ה"קרקע". הניצב CB הוא מאונך לקרקע. חכמי התלמוד מעוניינים במדידת מה שהיום היינו מכנים התלילות של היתר AB. הדבר הזה נמדד כיום במתמטיקה באמצעות השיפוע של הישר AB שהוא הטנגנס של הזווית α . ידוע ש- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$.

לא כך מודדים את התלילות בתלמוד, אלא מתארים אותה ב- $\sin \alpha$ ששוויו אורך הצלע a מחולק באורך היתר c .

במסכת עירובין נח ע"ב: "אמר רבא: לא שנו אלא בהר המתלקט עשרה מתוך ארבע. אבל בהר המתלקט עשרה מתוך חמש – מודדו מדידה יפה" (ראו איור 11).



איור 10: השיפוע המיוצג כצלע היתר במשולש ישר זווית

שיטה ב' על פי תוספות יום טוב למשנה¹³, עירובין ה, ד: "שהכבש ל' אמה זהו במשך שטחה על הארץ [...] אבל מדרון שיפועו [...] שהוא ל"ב אמה".

רש"י מתאר בפירושו לזבחים סג ע"א את השיפוע של הכבש:

אמר רמי בר חמא [...] כל הכבשים גדולים וקטנים שהיו שם היה להן שיפוע שלש מאות לאמה גובה, חוץ מכבש הגדול של מזבח, שעולין בו במשא איברים כבידים, והוא חלק, צריך שיהא משופע ביותר ונוח לעלות. לכך האריכוהו ל"ב שיפוע לט' אמות הרי לכל אמה (גובה), שלוש אמות ומחצה, ואצבע, ושליש אצבע... [ההדגשות לא במקור] (טפח = 4 אצבעות, אמה = 6 טפחים = 24 אצבעות).

הגמרא אומרת ששיפוע כל הכבשים שהיו בבית המקדש היה ביחס של שלוש אמות לאמה, שיפועם (היתר) היה 3 אמות וגובהם אמה. אם כן, שיפוע הכבש היה כזה שלכל אמה בגובה היו שלוש אמות באורך. כבש מזבח העולה היה מתון יותר, לכל אמה בגובה כשלוש וחצי אמות באורך, שיפועו (היתר) היה 32 אמות וגובהו 9 אמות כדי להקל על הכהנים בנשיאת איברי העולה ומחשש להחלקה. פרט נוסף שהגמרא מביאה הוא שהכבש לא היה מחובר למזבח: "אומר היה ר"ש בן יוחי איר יש בין כבש למזבח" (זבחים סב ע"ב).

16. רבי גרשון שאול יום-טוב ליפמן הלוי ה'תרס"ט, 1579-1580 באלול ה'ת"ד, (1654 מכונה ה'תוספות יום טוב'). היה מגדולי חכמי אשכנז ופולין ומגדולי פרשני המשנה, בעל פירוש "תוספת יום טוב" על המשנה שמכונה על שמו (מתוך אתר Wikipedia).

הרמב"ם (הלכות בית הבחירה, פרק ב' הלכה י"ג), מתייחס לקושי הזה: "וכבש היה בנוי לדרומו של מזבח, אורכו שלושם ושתיים אמה ... והיה אוכל בארץ שלושם אמה מצד המזבח, ופורח ממנה אמה על היסוד ואמה על הסובב, וגובה הכבש תשע אמות..." כלומר מדובר ב-32 אמות אופקיות, כששתי אמות חופפות לכבש ולמזבח.

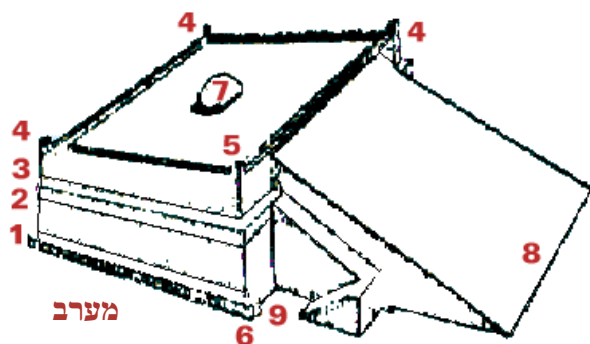
לפני כל דבר, נסביר בקצרה מהו הסובב על פי האתר ויקישיבה (מזבח העולה, 2012):

סובב – מעין מדרגה ברוחב אמה, לאחר שהמזבח עלה שש אמות מעל פני הקרקע. הסובב מקיף את כל המזבח (אורכו 30 אמה לכל כיוון), וכבש מיוחד הוביל אליו. הכהנים הולכים על הסובב בעשיית חלק מן הקרבנות.ח"ת

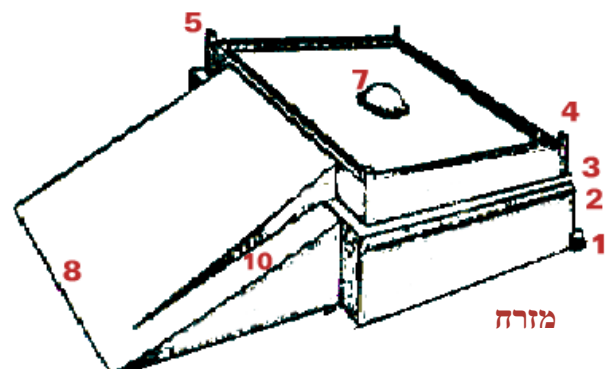
באיור 13, בחלק המסומן בחץ – חלק 3, מופיע המשטח שהכוהן עומד עליו ונקרא "הסובב".

שתי שיטות החישוב של שיפוע הכבש מתוארות באיור 14. שיטה א' על פי ביאורי הגר"א¹⁵ למסכת מידות ג, ג: "אורכו שלושם ושתיים אמה" ... למטה בארץ היה כן אבל בשיפועו היה יותר".

14. בשביל מאמרנו זה, אין צורך בכל הפרטים והמידות ועניינו הוא הסובב, חלק 3. ביקשנו להביא משהו נאמן למקור, והצגנו את שני הצידדים זה ליד זה כפי שמופיעים באתר. ציון המידות יכול לתת רעיונות נוספים לקורא להרכיב משימה מתמטית הקשורה למזבח. רבי אליהו בן שלמה זלמן (ט"ו בניסן ה'ת"פ, 23 באפריל 1720 – י"ט בתשרי ה'תקנ"ה, 9 באוקטובר 1797), שנועד בכינויים: הגאון מווילנה ובראשי תיבות: הג"א (הגאון רבנו אליהו), היה פוסק, מקובל ואיש אשכולות, שבלט במעמדו החריג בתקופת האחרונים כסמכות רבנית עליונה. הגר"א היה גדול במקרא, בתלמוד ובקבלה, פוסק מקורי ומרכזי, ובקיא במדעים. הוא כתב את הספר "איל המשולש: בהנדסת המישור. אגדות רבות נכרכו בשמו. הוא היה ידוע בהתמדתו הבלתי רגילה (מתוך אתר Wikipedia, עם שינויים).



6. השיתין
7. התפוח באמצע המזבח שהוא מקום המערכה הגדולה
8. הכבש
9. כבש קטן שמשם יורדים מהסובב
10. כבש קטן שמשם עולים לסובב



1. היסוד
2. חוט הסיקרא
3. הסובב
4. קרנות המזבח
5. שני הנקבים בקרן דרומית מערבית שלשם מגסכים הנסכים ויורדים לשיתין

מידות המזבח: גובהו 10 אמות המתחלקות בדרך זו: היסוד (1) אמה, מסוף היסוד ועד הסובב (3) חמש אמות, מהסובב ועד פני המזבח שלוש אמות, קרנות המזבח אמה אחת. שטח המזבח: 32 אמות על 32 אמות שטח היסוד. 30 אמות על 30 אמות גוף המזבח מסוף היסוד ועד הסובב. 28 אמות על 28 אמות מהסובב ומעלה. האמה: 57 או 48 ס"מ גובה המזבח כ-5 מטרים שטח היסוד כ-16 על 16 מטרים

איור 13: חלקי המזבח

(מזבח העולה במקדש, ח"ת)¹⁴

שנקרא עד לא מזמן STEM Education, דבר שהורחב בשנים האחרונות ל-STEAM Education (ראשי תיבות של Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics). הדיון לא הושלם במאמר זה, ובכוונתנו להציג נושאים מתמטיים נוספים במאמר המשך.

רשימת מקורות

אבן שושן, א' (2010). שרש, שורש. בתוך **מלון אבן-שושן המרכז: מחדש ומעדכן לשנות האלפים** (עמ' 999). אמה (יחידת מידה). (2020, 22 בדצמבר). בתוך ויקיפדיה.

[https://he.wikipedia.org/w/index.php?title=%D7%90%D7%9E%D7%94_\(%D7%99%D7%97%D7%99%D7%93%D7%AA_%D7%9E%D7%99%D7%93%D7%94\)&oldid=30178070](https://he.wikipedia.org/w/index.php?title=%D7%90%D7%9E%D7%94_(%D7%99%D7%97%D7%99%D7%93%D7%AA_%D7%9E%D7%99%D7%93%D7%94)&oldid=30178070)

גרבר, ד' (תשע"ז). הקירוב ל- $\sqrt{2}$ במקורות היהודית. בתוך נ' דנא-פיקארד וג' מורלי (עורכים), **לדעת בארץ דרך** (כרך א, עמ' 159-188). המרכז אקדמי לב וספריית בית-אל.

דנא-פיקארד, נ' (ח"ת). בדיקת ההשפעה של הפרמטרים על גרף של פונקציה קוית. **גאוגברה**. <https://www.geogebra.org/m/vpepmdcf>

דנא-פיקארד, נ' והרשקוביץ, ש' (תש"פ). היבטים גאומטריים ומספריים באתרים יהודיים וחינוך מתמטי: חקירה באמצעות סביבה מתוקשבת אינטראקטיבית. בתוך נ' דנא-פיקארד וג' מורלי (עורכים), **לדעת בארץ דרך** (כרך ב, עמ' 362-399). המרכז אקדמי לב וספריית בית-אל.

כהן, ש' (תשע"ז). **ספר דין וחשבון: ביאור מקיף ומפורט של סוגיות הש"ס והפוסקים העוסקות בחכמת המספרים, החשבון וההנדסה**.

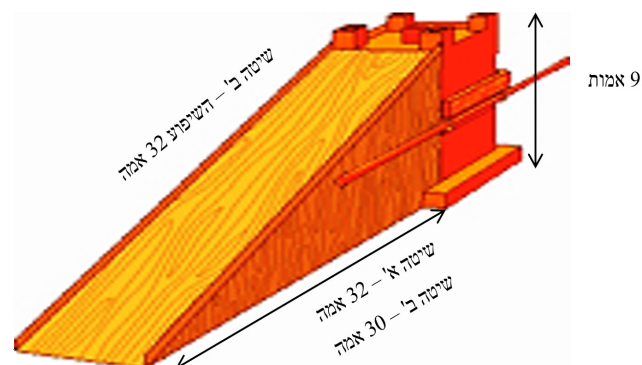
לשם-רמתי, ע' (2015). איך הגיע אייזק ניוטון לבית המקדש? **סגולה**. <https://segulamag.com/articles/הגיע-אייזק-ניוטון-לבית-המקדש/>

מזבח העולה. (2012, 16 באוקטובר). בתוך ויקישיבה. https://www.yeshiva.org.il/wiki/index.php/מזבח_העולה

מזבח העולה במקדש [איור]. (ח"ת). **דעת**. <https://daat.ac.il/daat/multi/korbanot/15.html>

משה בן מימון (1963). **משנה עם פירוש רבינו משה בן מימון** (י' קאפח, מתרגם ומהדיר). הוצאת מוסד הרב קוק. קופל, מ' (תשנ"ג). משפט קומבינטורי במסכת קינים. **הגיון**, ב, 96-102.

קופל, מ' ומרצבך, ע' (עורכים). (תשמ"ט). **הגיון: מחקרים בדרכי חשיבה של חז"ל**. אלומה.



איור 14: חישוב מידות כבש העלייה למזבח לפי שתי שיטות

מסקנות חלקיות

ישנם מחנכים הסוברים שהמתמטיקה היא נושא שראוי ליחס אחיד בעולם כולו. אלה מעבירים את הידע המתמטי בדרך מופשטת המנותקת מהסביבה של הלומדים. אבל הדבר נתקל לפעמים במחסומים לא צפויים. לדוגמה כאשר ניסו ללמד את בסיסי החשבון (אריתמטיקה) לעם האינדיאני החי בצפון הרחוק של קנדה, גילו שאוכלוסייה זו מכירה מספרים טבעיים קטנים, לכל היותר אולי עד 40. הכיצד? משום שאין לה צורך מעבר לזה. שלא כעמדה זו, התפתח תחום מחקר הנקרא אתנו-מתמטיקה (D'Ambrosio, 1985). המשמעות של "אתנו" אינה קשורה לאתנולוגיה במובן של המאה התשע עשרה, אלא קשורה לרקע התרבותי של אוכלוסיית הלומדים. המחקר באתנו-מתמטיקה בוחן אוכלוסיות ספציפיות, כגון האינדיאנים בקנדה, הרומיים ביוון, הבדואים בישראל ועוד. מטרת המחקרים האתנו-מתמטיים היא להבין את התרבות של הלומדים ולפתח באמצעותה סביבה אוהדת ללימוד המתמטיקה, כאשר היא נשענת על אלמנטים תרבותיים מוכרים ואהובים על הלומדים.

לדוגמה דנא-פיקארד והרשקוביץ (תש"פ) הדגימו איך נושא מתמטי אחד, יחס הזהב וסדרת פיבונצ'י, מתבטא בתחומים רבים באומנות בכלל ובארכיטקטורה בפרט, וכן גם במוזיקה, באסטרונומיה ובתחומי דעת אחרים. בתחום הארכיטקטורה הם מראים כיצד יחס הזהב בא לידי ביטוי בתרבויות מגוונות, בין במבנים ידועים כמו מבנה הטאג'-מאהל בהודו, ובין במבנים ידועים פחות כמו מבנים בקמבודיה. אך מעבר לכול, יחס הזהב מופיע בתרבות היהודית כבר בתיבת נוח ובעניינים רבים במבנה המשכן, והוא קשור למבנה מערכת השמש וללוח השנה העברי (דנא-פיקארד והרשקוביץ, תש"פ; Dana-Picard et al., In press).

במאמר זה הראינו שתי דוגמאות של שאלות מתמטיות הנלמדות בחטיבת ביניים במדינת ישראל. מקורות מהמקרא, מהתלמוד ומהספרות הרבנית לדורותיה מלאים בנושאים מתמטיים, כפי שתיארנו לעיל. שימוש בתרבות של אוכלוסיית הלומדים יכול למשוך את תשומת ליבם של התלמידים והתלמידות. לעיתים אפילו הישענות על דוגמאות מהתרבות היהודית בת אלפי השנים יכולה לחבר ולקשר תחומי דעת מגוונים ולכנות גשרים בין הנושאים. בעולם המודרני הרב-תחומיות היא מילת המפתח בתחום החינוך בכל הרמות והיא משמשת בסיס למה

קרליץ, א"י (1940). ספר חזון איש: הלכות כלאים, ערלה: (ובסופו ליקוטים שונים). דפוס ח' צוקרמן.
 בן יחיאל, א' (ח"ת). פסקי הרא"ש על מנחות, הלכות כלאים
 ה. מהדורת וילנא.
 רובינשטיין, א' (2016). מתמטיקה במקורות היהדות.
 שבבים: עלון מורי מתמטיקה, 8, 1-8. https://stwww1.weizmann.ac.il/wp-content/uploads/2016/08/8_3.pdf
 רוזנבוים, ר' (2003). חכמת התשבורת: המתמטיקה
 באספקלריה יהודית. הוצאת מוסד הרב קוק.
 שוראקי, ס' (1973). מונה מספר (ג' צרפתי, עורך).
 אוניברסיטת בר-אילן.

Leonhard Euler. (2021, December 31). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard_Euler&oldid=1063008055
 D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
 Dana-Picard, T. H., HersHKovitz, S., Lavicza, Z., & Fenyvesi, K. (In press). One Mathematical topic and several levels of implementation: Golden section's viewing the sounds. *South Asia Journal of Mathematics Education*.