

ויקטור אוקסמן, רותי סגל ומשה סטופל

חקר דינמי של שימור ושינוי של תכונות המתרחשות בעת הפעלת שיקוף על נקודה הנמצאת בתוך צורות גאומטריות שונות

תקציר

מתואר חקר דינמי על צורת מצולע שמתקבל באמצעות שיקוף של נקודה אקראית הנמצאת בתוך מצולע נתון או מחוץ לו באמצעות נקודות האמצע של צלעותיו. הפעילות התבססה על העלאת השערות על הצורה שתתקבל למצולע השיקוף, בדיקתן בעזרת תוכנה דינמית ולאחריה מציאת הוכחה מנומקת כמקובל במתמטיקה. הפעילות נגעה גם לתכונות שנשמרות ושאין נשמרות בשל פעולת השיקוף. כמו כן נמצאה קשר מתמטי ליחס שבין שטח מצולע השיקוף למצולע מקורי כלשהו.

מילות מפתח:

חקר דינמי של תכונות שימור; שיקוף במצולעים שונים; הכללה של תכונות.

מבוא

הסימטריה מופיעה בטבע כצורה של סדר מסוים בתוך מגוון רחב של צורות בלתי מסודרות. כבר בימי קדם זיהה האדם את הסדר והיופי הגלום בסימטריה והשתמש בהם באומנות ובבנייה. הסימטריה היא אחד מהגורמים שקושרים בין מדע לאומנות. בטבע ובעצמים השונים מחיי היום-יום אפשר לראות סממנים של סימטריה.

אחד משני סוגי הסימטריה הקיימים בגאומטריה הוא "הסימטריה השיקופית" שבה יש מעין השתקפות של צד אחד לעבר הצד האחר, משני צידי קו דמיוני העובר ביניהם שנקרא "קו השיקוף" או בשם קו הסימטריה (או ציר הסימטריה). שני האובייקטים שבצידי הקו דומים זה לזה.

הפעילות

בפעילות מחקרית של פרחי הוראה למתמטיקה המשימה שלהם הייתה לחקור פעולה של שיקוף בצורות גאומטריות שונות. נבחרה באקראי נקודה בתוך הצורה, על אחת מצלעותיה (כולל הקודקודים) או מחוצה לה. לנקודה זו נעשה שיקוף עם כל אחת מנקודות האמצע של המצולע. נבחן הקשר בין שלושה מצולעים: המצולע המקורי, מצולע נקודות אמצע (של המצולע המקורי) ומצולע השיקוף – המצולע החדש, מההיבטים האלה: אילו תכונות נשמרות ואילו משתנות, שימור צורות, היחס בין צלעות של המצולעים והיחס שבין שטח מצולע השיקוף לשטח של המצולע המקורי.

בשלב הראשון הסטודנטים נדרשו לשרטט בכלים המסורתיים (עיפרון, סרגל ומחוגה) שלוש צורות הנדסיות פשוטות (משולש, ריבוע ומלבן), לבחור נקודה כלשהי ולבנות מצולע שיקוף ולהסיק מסקנות ראשוניות על מצולע השיקוף.

בשלב השני, להרחבת הפעילות המחקרית לצורות רבות באמצעות שינוי מיקום הנקודה האקראית שעוברת שיקוף, הוכן יישומון דינמי ממחושב (ג'אוג'ברה) בעל סרגל המאפשר לשנות את מספר הצלעות n של המצולע המקורי מ- $n=3$ ועד $n=10$. אפשר לגרור את כל אחד מקודקודיו ובכך לשנות את צורתו, אורכי צלעותיו וזוויותיו. כמו כן אפשר לשנות את מיקום הנקודה האקראית שנבחרה (ושתעבור שיקוף עם אמצעי הצלעות). בכל שלב מופיע על המסך היחס שבין שטח המצולע שהתקבל בשיקוף ובין שטחו של המצולע המקורי.

הכלי הטכנולוגי הממוחשב מאפשר מחקר דינמי מהיר בלי כל השוואה למצב שבו היו צריכים לצייר כל מצולע ואת המצולע שמתקבל ממנו לאחר פעולת השיקוף וזאת באמצעות כלי השרטוט המסורתיים.

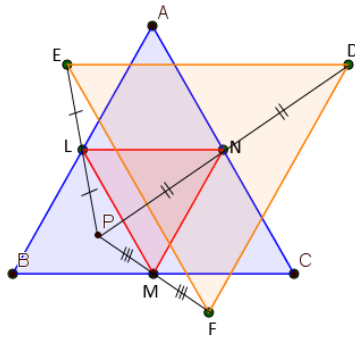
אל היישומון הדינמי אפשר להגיע בקישור הזה: <https://www.geogebra.org/m/n5v5faj9>

לאחרונה התפרסמו מאמרים על השימוש בטכנולוגיה הממוחשבת לחקר תכונות גאומטריות מעניינות (סגל, אוקסמן וסטופל, 2015; סגל, סטופל ואוקסמן, 2015; סגל ואחרים, 2016; סיגלר וסטופל, 2016; Katz & Stupel, 2015; Oxman et al., 2017; Segal & Stupel, 2015; Segal et al., 2016; Sigler et al., 2016; Stupel et al., 2017). בשלב הראשון הסטודנטים התבקשו לשער מה תהיה הצורה של מצולע השיקוף ולראות האם ההשערה שלהם הייתה נכונה. לאחר מכן הסטודנטים נדרשו לנמק מתמטית את התוצאה שהתקבלה, לציין את המאפיינים הזחים והשונים בין המצולע שהתקבל בשיקוף למצולע המקורי, וכן להגיע להכללות עד כמה שאפשר.

פעילות החקר החלה מ- $n=3$ (משולש) ועד $n=5$ כאשר בכל מצולע הראשון שנחקר היה המצולע המשוכלל (משולש שווה צלעות, ריבוע, מחומש משוכלל). לאחר שאלו נחקרו חקירה יסודית נעשתה הכללה למצולע בעל מספר גדול של צלעות, משוכלל ובלתי משוכלל.

1. משולש

1א. משולש שווה צלעות



איור 1

כפי שרואים באיור 1 המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה צלעות ונקודות האמצע L, M, N שלהן.

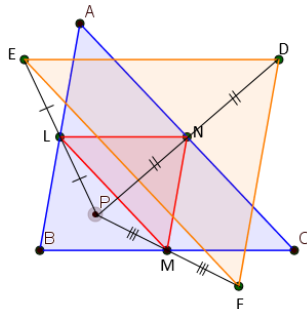
נבחרה נקודה כלשהי P ולאחר פעולת השיקוף התקבלו הנקודות D, E, F שהן הקודקודים של משולש השיקוף. הקטע LM הוא קטע אמצעים במשולש המקורי $\triangle ABC$ והוא גם קטע אמצעים במשולש $\triangle PEF$ מפעולת השיקוף.

באותה דרך LN ו- MN הם קטעי אמצעים ולכן $FD=AB$ ו- $ED=BC$, ומכאן המשולש המקורי ומשולש השיקוף חופפים ושניהם שווים צלעות. שינוי מיקום הנקודה P לכל מקום לא ישנה את התוצאה אך ייתכן ששני המשולשים יהיו נפרדים זה מזה בשל פעולת השיקוף.

1ב. משולש כלשהו

המשולש נראה באיור 2.

גם באיור זה כל אחד מהקטעים LM, LN, MN משמש קטע אמצעים בשני משולשים ומכאן $ED=BC$ ו- $FD=AB$, $EF=AC$. לכן המשולש המקורי ומשולש השיקוף חופפים זה לזה.

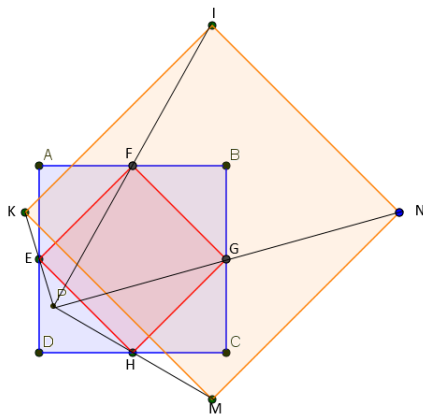


איור 2

2. מרובע

2א. ריבוע

הריבוע נראה באיור 3. מסמנים ב- a את אורך הצלע שלו. המרובע $EFGH$ שקודקודיו הם אמצעי הצלעות של הריבוע $ABCD$ הוא גם ריבוע שאורך צלעו מחצית האורך של אלכסון הריבוע המקורי. כל אחת מצלעות ריבוע המרכזים היא קטע אמצעים בשני משולשים שונים. לדוגמה הצלע FG היא קטע אמצעים הן במשולש $\triangle PIN$ והן במשולש $\triangle ABC$. לכן אורך הצלע IN של מרובע השיקוף היא $a/\sqrt{2}$. אותו דבר לגבי שאר הצלעות של מרובע השיקוף $KIMN$. מאחר שצלעות ריבוע האמצעים $EFGH$ מקבילות לצלעות של המרובע $KINM$, שהתקבל בפעולת השיקוף, הרי שגם מרובע זה הוא ריבוע ושטחו הוא כפול משטח הריבוע המקורי - $2a^2$.

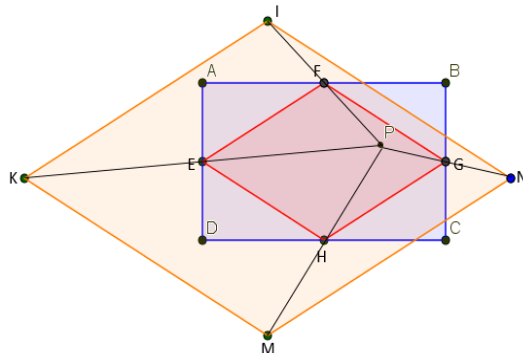


איור 3

2ב. מלבן

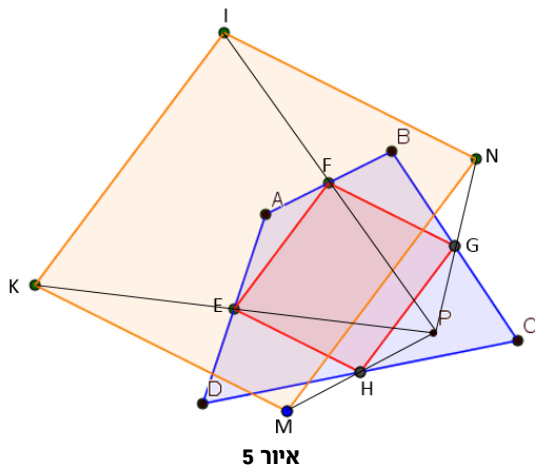
המלבן נראה באיור 4.

בדומה לסעיף 2א המרובע $EFGH$ הוא מעוין שכל אחת מצלעותיו היא קטע אמצעים בשני משולשים שונים. לכן מרובע השיקוף $KINM$ גם הוא מעוין שאורכי צלעותיו כאורכי המרובע המקורי - מלבן $ABCD$. מסיבה זו שטחו כפול משטח המלבן המקורי. הסיכום בעניין צורה זו הוא שבפעולת השיקוף השתנתה צורת המרובע המקורי ממלבן למעוין בעל שטח כפול.



איור 4

ג. מרובע כלשהו



המרובע נראה באיור 5. כידוע כשמחברים את אמצעי הצלעות של מרובע כלשהו מתקבלת מקבילית (EFGH) שצלעותיה מקבילות לאלכסוני המרובע המקורי. כל אחת מהצלעות של מקבילית אמצעי הצלעות של המרובע המקורי, היא קטע אמצעים בשני משולשים שונים, מכאן נובע שהמרובע החדש KIMN שהתקבל בפעולת השיקוף הוא מקבילית שצלעותיה מקבילות לאלכסוני המרובע המקורי ABCD ושוות להם באורכה.

שטח המרובע החדש הוא פי 2 משטחו של המרובע המקורי. החישוב המתמטי לכך הוא ששטח המרובע המקורי הוא $0.5 \cdot l \cdot k \cdot \sin \alpha$ כאשר l ו- k הם אורכי אלכסוניו ו- α הזווית שביניהם. במרובע שהתקבל

בפעולת השיקוף (המקבילית) אורכי צלעותיו הם אורכי אלכסוני המרובע המקורי והזווית שביניהם שווה לזווית שבין הצלעות של המצולע שהתקבל בשיקוף. נוצרו שני משולשים כאלו ולכן השטח כפול.

סיכום צורתו של המרובע שהתקבל לאחר פעולת השיקוף

הטבלה למטה מתארת תוצאות של פעולת השיקוף עבור מרובעים שונים.

המרובע המקורי	המרובע לאחר פעולת השיקוף
ריבוע	ריבוע
מלבן	מעוין
מעוין	מלבן
דלתון	מלבן
טרפז שווה שוקיים	מעוין
טרפז שאלכסוניו מאונכים	מלבן
טרפז כלשהו	מקבילית
מרובע בעל אלכסונים מאונכים	מלבן
מקבילית	מקבילית
מרובע כלשהו	מקבילית

כל מרובע שנוצר בפעולת השיקוף שטחו פי 2 משטח המרובע המקורי.

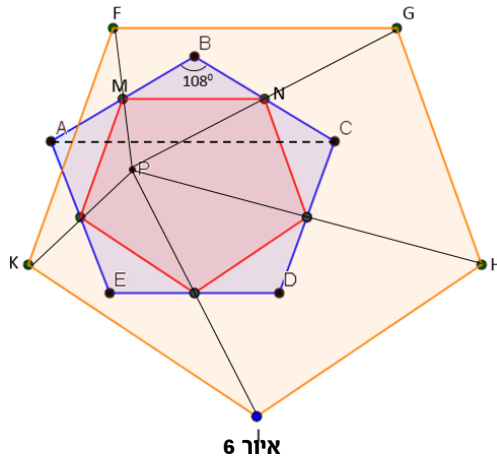
היופי המתמטי הוא:

1. מרובע מרכזי הצלעות דומה למצולע שהתקבל בשיקוף.
 2. המרובע שהתקבל בשיקוף דומה למרובע מרכזי הצלעות.
 3. שימור יחס השטחים בין המצולע שהתקבל בשיקוף לשטח המצולע המקורי.
 4. לפעמים המצולע שהתקבל בשיקוף, דומה בצורתו למצולע המקורי, ולפעמים יש שינוי צורה בגלל השיקוף.
- פעולת השיקוף היא למעשה פעולת הומוטטיה ביחס של 1:1.

3. מחומש

3א. מחומש משוכלל

ראה איור 6.

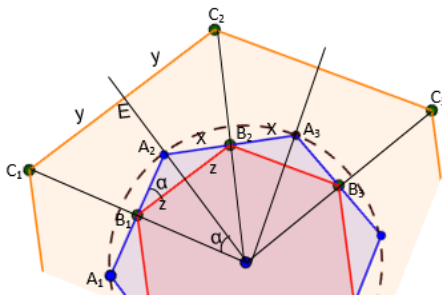


גם במצולע זה וכך גם בכל מצולע עבור $n > 5$ בין שהם משוכללים ובין שלא, כל אחת מהצלעות של מרכזי הצלעות של המצולע המקורי היא קטע אמצעים בשני משולשים שונים ועל כן המצולע שיתקבל לאחר פעולת השיקוף יהיה דומה למצולע מרכזי הצלעות.

יחס הדמיון בין הצלעות הוא $2\cos(180^\circ/n)$, ואילו יחס השטחים בין המצולע החדש למצולע המקורי הוא $4\cos^2(180^\circ/n)$. עבור מחומש יחס השטחים הוא $4\cos^2(180^\circ/5)=2.168$.

חישוב היחס בין שטח המצולע שהתקבל בפעולת השיקוף לשטח המצולע המקורי עבור מצולע משוכלל בעל n צלעות

לצורך החישוב ייעשו סימונים כנראה באיור 7.



איור 7

הם קודקודיו של המצולע המקורי שאורך צלעו A_1, A_2, A_3 הנקודות האמצע של המצולע המקורי. הנקודה O היא מרכז המעגל שחוסם את המצולע. הקטע OA_2 הוא אנך אמצעי לקטע B_1B_2 . ערכה של הזווית $\angle B_1OB_2$ הוא $2\alpha = 360^\circ/n$. $(\alpha = 180^\circ/n)$.

השיקוף של הנקודה O בנקודות האמצע B_1 ו- B_2 הוא הנקודות C_1 ו- C_2 . אורך הצלע C_1C_2 של המצולע שהתקבל

בשיקוף הוא $2y$, וכן $B_1D=B_2D=2z$. לפי שגם הזווית $\angle A_2B_1B_2 = \alpha$ נובע ש- $z = x \cos \alpha$ $\Rightarrow \frac{z}{x} = \cos \alpha$.

לפי הדמיון שמתקבל מפעולת השיקוף מקבלים $y=2z=2x \cos \alpha$, מכאן היחס שבין צלע המצולע שהתקבל בשיקוף לצלע המצולע המקורי הוא $C_1C_2/A_1A_2=2\cos(180^\circ/n)$.

כלומר היחס תלוי ב- n - מספר צלעות המצולע.

יחס השטחים הוא כיחס ריבוע הצלעות ולכן $\frac{S_1}{S_2} = 4\cos^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, כאשר S_1 - שטח מצולע מקורי ו- S_2 - שטח מצולע שיקופי.

לסיכום: במשולש יחס השטחים הוא 1, במרובע יחס השטחים הוא 2, במחומש יחס השטחים הוא 2.168. כאשר $n \rightarrow \infty$ יחס השטחים ישאף ל-4. זה מצב שהמצולע המקורי שואף להיות מעגל ולכן גם המצולע שהתקבל בפעולת השיקוף ישאף למעגל בעל רדיוס כפול ולכן יחס השטחים ישאף ל-4.

"הוכחה למחצה" בשימוש בסביבה גאומטרית דינמית

(DGE - Dynamic Geometry Environment)

הכנסת תוכנות גאומטריות דינמיות (Dynamic Geometry Software [DGS]) (כגון ה-Geogebra) לכיתות יוצרת אתגר למקובל בלמידת משפטים והוכחות דדוקטיביות בהוראה ובלמידה של גאומטריה אוקלידית. סטודנטים או לומדים יכולים להתנסות באמצעות גרירות שונות ושינויים תכופים של אובייקטים גאומטריים שהם בונים, ולסיפק יכולים להסיק תכונות, הכללות, והשערות על ההווה הגאומטרית.

פעולות הגרירה של אובייקט גאומטרי מאפשרות לסטודנטים להבין או לגלות מחלקה שלמה של אובייקטים

שבהם ההשערה המסוימת היא אינוריאנטית (אינה משתנה), ולכן הסטודנטים משתכנעים שההשערה שלהם תהיה תמיד נכונה (De Villiers, 1998).

עם זה מחמת הטבע האינדוקטיבי של הסביבה הגאומטרית הדינמית, אנו מכנים את התהליך הזה "הוכחה למחצה". אי לכך, בשל השימוש בסביבה הגאומטרית הדינמית, הפער הקיים בין הניסוי לתאוריה ברכישת ידע גאומטרי והצדקתו הופך לדאגה פדגוגית ואפיסטמולוגית חשובה (Leung & Lopez-Real, 2002). הסטודנטים חייבים להיות מודעים שעדיין הם צריכים להוכיח כנדרש במתמטיקה מאשר לסמוך על הניסוי הווירטואלי.

יש חשיבות רבה ל"חקירות אמפיריות" כיוון שהן מבהירות פונקציות של הוכחה שבעבר היו מעוררות דילמות (De Villiers, 2004). דוגמאות של פונקציות כאלו הן הסבר, תובנה, הבנה, תקפות וגילוי. שיטות החקירה האלה שאינן דדוקטיביות, שמסתמכות על ניסוי, אינטואיציה ושכילה אינדוקטיבית (De Villiers, 2004) נראות מספקות יותר דרכים להעלאת השערות להוראת-למידת הגאומטריה בעזרת הסביבה הגאומטרית הדינמית, שלא כמו הגישה הקלאסית של הוכחה שהיא דרך לקבלת ודאות מלאה.

מתוך הנזכר לעיל בסביבה הגאומטרית הדינמית שבאמצעותה יכלו הסטודנטים לבנות ולשלוט בצורת המצולע במיקום הנקודה האקראית שנבחרה ובכל שלב לדעת את יחס השטחים. ל-Geogebra יש יתרון שמקבלים בכל רגע נתון את הצורות השונות שנוצרו לאחר פעולת הגרירה, מתוך שמירה על התנאים הבסיסיים של הבעיה.

הקלות שבה אפשר להעלות השערות ראשוניות באשר לסוג הצורה שתתקבל למצולע השיקוף באמצעות שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית, הביאה אותנו לידי מסקנה שיהיה אפקטיבי להתחיל להציג את הבעיה בתוכנת ה-Geogebra שמאפשרת לסטודנטים לבנות את המצולע הדרוש, להציג תנאים שיש לפקח עליהם ולהשתמש בגרירה של האובייקט הגאומטרי עד לקבלת התוצאה. ברגע שמתקבלת ההשערה צריך לבקש מהסטודנטים להוכיח את התוצאה באופן דדוקטיבי באמצעות כלים גאומטריים מקובלים. התוכנה בסביבה הגאומטרית הדינמית משמשת כלי מתווך לגישור הפער בין המודל הפיזי ובין ההוכחה הסימבולית הפורמלית.

חלק מהגדים של הסטודנטים בסוף הפעילות

- ביצוע המחקר התווה לי דרך לביצוע מחקרים נוספים בעתיד.
- במהלך המחקר התגלו תכונות מעניינות חלקן בלתי צפויות.
- שימוש בטכנולוגיה הממוחשבת הוא כלי חשוב להשגחת הוראת מתמטיקה בעידן שלנו.
- המחקר הראה את היופי הנסתר בעולמה של המתמטיקה. 70% מהסטודנטים הביעו את רצונם להטמיע את השימוש בטכנולוגיה הממוחשבת להוראת מתמטיקה.

הצעות לפעילות המשך

במחקר זה פעולת השיקוף נעשתה באמצעות נקודות האמצע של המצולע המקורי. אפשר להמשיך את הפעילות בחקר צורתו של מצולע השיקוף כאשר:

- נקודות השיקוף תהיינה הקודקודים של המצולע המקורי.
- שיקוף הנקודה האקראית יתבצע בצלעות המצולע המקורי שישמשו קווי השיקוף.

סיכום

המחקר עורר עניין רב בקרב הסטודנטים והסטודנטיות בפרט הגילוי של תכונות מפתיעות ובלתי צפויות. השילוב בין העלאת השערות ובדיקתן בכלי הממוחשב ולאחר מכן הצגת ההוכחות האדירו את העולם הקסום החבוי במתמטיקה ועוררו את הרצון ללמוד את המקצוע.

רשימת מקורות

- סגל, ר', אוקסמן, ו' וסטופל, מ' (2015). חקר דינמי של מקומות גיאומטריים בשילוב הוכחות מתמטיות בדרכים שונות. **שאנן, כא**, 140-121. [/https://www.shaanan.ac.il/laor/shaanan](https://www.shaanan.ac.il/laor/shaanan)
- סגל, ר', סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (2015). חקירת מקומות גיאומטריים בסביבה גיאומטרית דינמית – מה ניתן ללמוד מזה. **על"ה, 52**, 17-7.
- סגל, ר', סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (2016). תכונות נסתרות של משולש שווה-צלעות – גילוי בשילוב כלי טכנולוגי. **שאנן, ב**, 278-251.
- סיגלר, א' וסטופל, מ' (2016). הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 3**, 155-146. [/https://www.shaanan.ac.il/laor/ktav_et_math](https://www.shaanan.ac.il/laor/ktav_et_math)
- De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9780203053461>
- De Villiers, M. (2004). [The role and function of quasi-empirical methods in mathematics](https://doi.org/10.1080/14926150409556621). *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 4(3), 397-418. <https://doi.org/10.1080/14926150409556621>
- Katz, S., & Stupel, M. (2015). Reflection on self-efficacy training and skill training to foster student performance in geometry: A case study. *Far East Journal of Mathematical Education*, 14(2), 103-135. http://dx.doi.org/10.17654/FJMEMay2015_103_135
- Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). [Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction](https://doi.org/10.1023/A:1021195015288). *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 145-165. <https://doi.org/10.1023/A:1021195015288>
- Oxman, V., Stupel, M., & Segal, R. (2017). On teaching extrema triangle problems using dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(4), 603-619. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1259514>
- Segal, R., & Stupel, M. (2015). An investigative task in incorporating computerized technology with conserved property and generalization. *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 9(2), 124-137.
- Segal, R., Stupel, M., & Oxman, V. (2016). Dynamic investigation of loci with surprising outcomes and their mathematical explanations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(3), 443-462. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1075613>
- Sigler, A., Segal, R., & Stupel, M. (2016). The standard proof, the elegant proof and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1226-1243. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1164347>
- Stupel, M., Oxman, V., & Sigler, A. (2017). Dynamic investigation of triangles inscribed in a circle, which tend to an equilateral triangle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 149-161. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1206978>
- Stupel, M., Segal, R., & Oxman, V. (2016). Teaching locus with a conserved property by integration mathematical tools and dynamic geometric software. *Australian Senior Mathematics Journal*, 30(1), 25-44.