

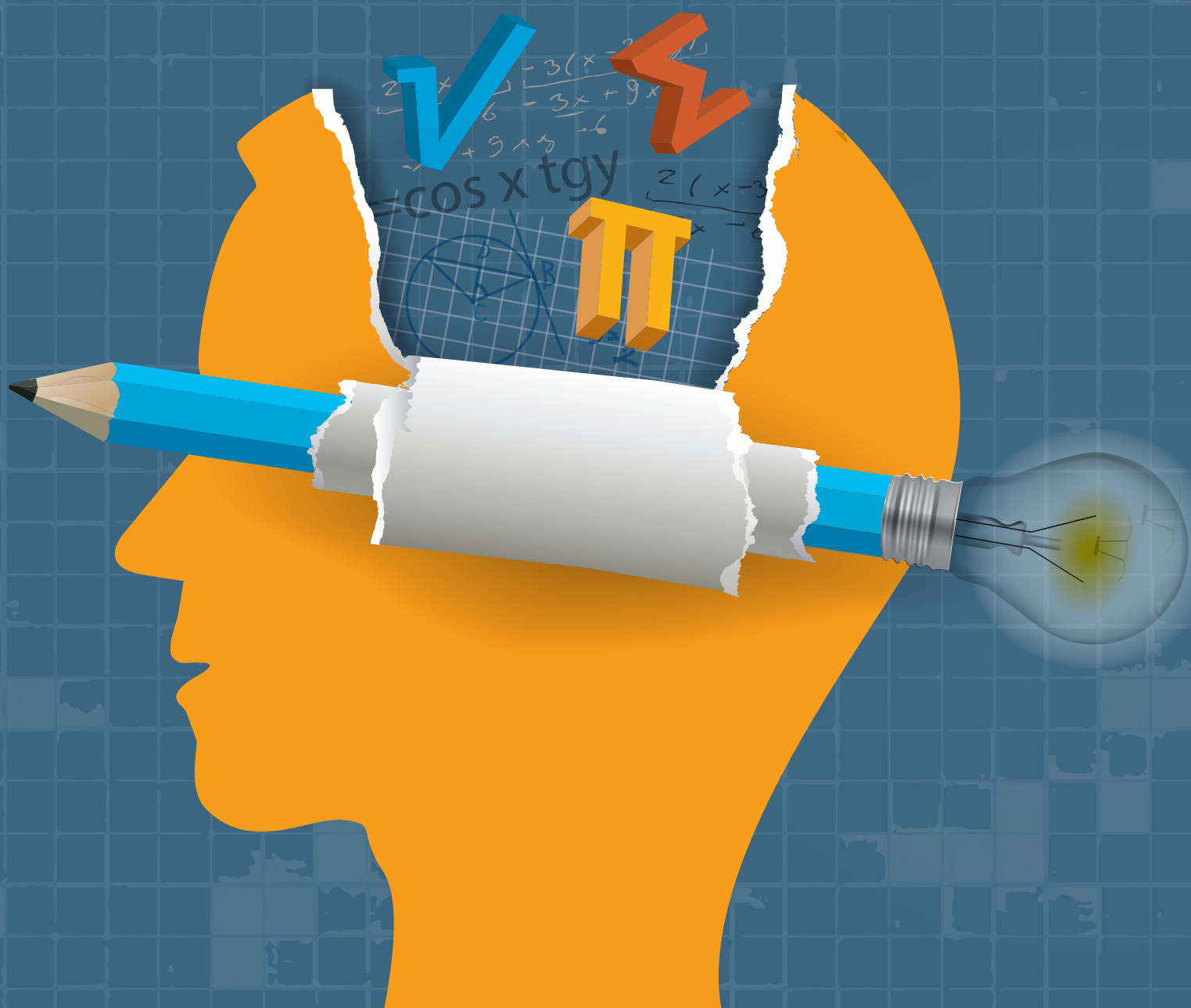


מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 8

פברואר 2021

אדר תשפ"א



”

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 8

אדר תשפ"א - פברואר 2021

”

עורך:

ד"ר יניב ביטון שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):

ד"ר מארק אפלבוים	מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך, באר שבע
פרופ' דוד בן-חיים	מינהלת מל"מ – הטכניון, חיפה
ד"ר הגר גל	שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
ד"ר אילנה לבנברג	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך, ירושלים
ד"ר טלי נחליאלי	האקדמית גורדון, חיפה
ד"ר אלכס פרידלנדר	מכללת לוינסקי לחינוך, תל אביב-יפו
ד"ר אמאל שריף-רסלאן	מכון ויצמן למדע, רחובות
פרופ' עטרה שריקי	המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה
פרופ' דינה תירוש	אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון
	אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

שמות הכותבים:

בת שבע אילני	התוכנית לחינוך מדעי/מתמטי, חמדת הדרום - המכללה האקדמית לחינוך, נתיבות; בית הספר לחינוך, האוניברסיטה העברית בירושלים.
מאיר בוזגלו	החוג לפילוסופיה, האוניברסיטה העברית בירושלים.
יניב ביטון	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
סטלה גידלביץ	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.
פירחה חמו	החוג לגיל הרך והחוג להוראת מתמטיקה, מכללת אפרתה, ירושלים.
עידן טל	החוג להוראת מתמטיקה, מכללת סמינר הקיבוצים, תל אביב-יפו.
עידית ירושלמי	המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.
נצה מובשוביץ-הדר	הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
משה סטופל	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
אבי סיגלר	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; מכללת אפרתה, ירושלים.
ליאורה נוטוב	החוג לחינוך מתמטי, האקדמית גורדון, חיפה.
אריאלה עילם	החוג לפסיכולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
אבי פולג	לשעבר מנהל המכון למצוינות בהוראה, המרכז הישראלי למצוינות בחינוך, ירושלים.
רחל פילו	החוג להוראת מתמטיקה, סמינר הקיבוצים, תל אביב; מכללת תלפיות, חולון.
עינב קיסר	החוג לחינוך ולקויות למידה, האקדמית גליל מערבי, עכו; החוג לחינוך מתמטי לבית הספר היסודי, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.
ענת קלמר	החוג להוראת מתמטיקה, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון; החוג לחינוך, האקדמית גליל מערבי, עכו.
גלית שבתאי	החוג להוראת מתמטיקה, מכללת סמינר הקיבוצים, תל אביב-יפו.
אנטולי שטרקמן	החוג למתמטיקה, מכללת תלפיות, חולון.
קרני שיר	החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
איריס שרייבר	בית ספר לחינוך, אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן; החוג למתמטיקה, מכללת סמינר הקיבוצים, תל אביב-יפו.
יחיאל תנעמי	החוג למתמטיקה, חמדת הדרום - המכללה האקדמית לחינוך, נתיבות.

עריכה לשונית:

יפעת פישר, מכללת שאנן

עימוד והבאה לדפוס:

רבקי עמר ותמי יהושע, מכללת שאנן

עיצוב וצילום תמונת שער: רחלי קדוש ורבקי עמר

עיצוב וצילום תמונת תוכן העניינים: רבקי עמר ותמי יהושע

מכללת שאנן – הוצאה לאור

ISSN 2311-5483

כתובת המערכת:

רח' הים התיכון 7, ת"ד 906, קריית שמואל, חיפה 2610901

טלפון: 04-8780000 פקס: 04-8714445

Email: laor@shaanan.org

כתובת אינטרנט של כתב העת http://shaanan.ac.il/?page_id=4244

כתב העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה

קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי"

קול קורא

אנו מזמינים את כל העוסקים בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים ואת כל העוסקים במחקר בחינוך מתמטי, לשלוח מאמרים מחקרניים בתחום החינוך המתמטי, או מאמרים העוסקים בדרכי הוראה ובתובנות שעולות מהכשרת מורים למתמטיקה ובהתפתחות מקצועית של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי בכל הרמות האקדמיות.

במערכת של כתב העת מכהנים נציגים מהמוסדות השונים להכשרת מורים למתמטיקה בארץ, והוא נחשב כתב עת שפיט.

כתב העת הוא יוזמה מבורכת של נשיא שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, פרופ' יחיאל פריש, והוא יוצא בחסות המכללה ובמימונה.

יוצא לאור באופן קבוע מאז שנת 2014.

הנחיות למחברים

כתבי היד של מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" צריכים להיכתב בשפה העברית ולהכיל לכל היותר 25 עמודים. ב-25 עמודים אלו ייכללו כל התקצירים, הטבלאות, האיורים ורשימת המקורות. אם המאמר כולל טבלאות או איורים, יש לשבץ אותם בטקסט במקום שבו הם אמורים להופיע במאמר.

יש להגיש את המאמר בגופן David גודל 12, רווח כפול, יישור דו-צדדי, ולשלוח את המאמר כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת yanivb@cet.ac.il

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100-200 מילים, ורשימה של 3-5 מילות מפתח.

המאמרים נשלחים אנונימית לשיפוט מקצועי, לכן במאמר יהיה עמוד שער ובו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושייכו האקדמי, המקצועי או אחר של המחבר.

כדי לשמור על אנונימיות הכותבים בתהליך ההערכה והשיפוט, אין לציין את שמות הכותבים בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותבים.

כתבי היד של מאמרים המוערכים כרלוונטיים לאופיו של כתב העת, מועברים לשיפוטם של קוראים המתמחים בנושא המאמר ועוברים תהליך שיפוט על פי שיטת "העיוורון הכפול": זהות המחברים אינה ידועה לקוראים, וזו של הקוראים אינה ידועה למחברים.

המחברים מתבקשים להקפיד על הדפסת מקורות המידע שבסוף המאמר לפי הכללים שנקבעו בידי ארגון APA.

מאמרים שיתקבלו לפרסום יעברו עריכה מדעית ולשונית. לאחר העריכה הגרסה הסופית תישלח למחברים לאישור ותוחזר בהקדם.

אין לשלוח מאמר אם הוא כבר התפרסם או עומד להתפרסם במקום אחר, או שהוא מצוי בתהליך שיפוט בכתב עת אחר.

מצפים לקבל בהקדם הצעות לפרסומים לגיליון הבא של כתב העת!

7

9

דברי תודה
דוד בן-חייםדבר העורך
יניב ביטוןמדור חדשות מתמטיקה
נצה מובשוביץ-הדר

11

מחקר על תהליכי למידה:
מתלמידים בודדים דרך קבוצות קטנות
וכלה בכיתה שלמה:
ריאיון עם פרופ' טומי דרייפוס
קרני שיר

14

חוויות מסמינר מתוקשב (וובינר)
JRMF - מפגשי חשיבה בצוותא
בני 99-9
אבי פולג

20

הספר "ממלכן הזהב לסדרת פיבונאצ'י",
מאת עופר ליבה
בת שבע אילני ואנטולי שטרקמן

22

שינויים בידע של סטודנטיות להוראת המתמטיקה
במהלך יצירת קורס מוק בנושא יחס ופרופורציה
ענת קלמר ועינב קיסר

52

על ארבע מורות
וחקר בהוראת המתמטיקה
גלית שבתאי

63

מסע בעקבות
משה סטופל, א

קול קורא
והנחיות
לכתיבת
מאמרים

6

הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה
בקרב תלמידי כיתה י"ב
יחיאל תנעמי ואריאלה עילם

73

"כפל מקטין, אבל חילוק מקטין יותר..." -
הבנות חלקיות ותפיסות שגויות
של כפל וחילוק בשבר פשוט
פירחה חמן, בת שבע אילני ומאיר בזוגלו

82

מה הקשר בין עיסוק באומנות
להבנה של אפס ואינסוף?
המקרה של מתכשרים להוראת מתמטיקה
ליאורה נוטוב

95

תוכן העניינים

מחקר ועיון בחינוך מתמטי - עילוי



24

ות בעיית סנגקו
אבי סיגלר ועידן סל

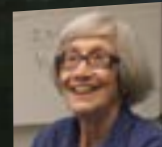
30

הכוונה לשיפוט עצמי מטה-קוגניטיבי
במהלך פתרון בעיות תובנה מספרית
בקרב תלמידים צעירים בכיתה ד'
סטלה גידלביץ'

42

כפל וחילוק מספרים טבעיים ואפס
בכיתות של תלמידים לקויי למידה:
ידע מורים וחוללות עצמית שלהם
רחל פילז ואיריס שרייבר

100



לזכרה של רומה פלק
עידית ירושלמי

DICE
מרכז המידע והחינוך לילדים
אגודת הסטודנטים והסטודנטיות
תש"פ

דברי תודה על מימון הוצאת "עיון ומחקר בחינוך מתמטי" בידי נשיא מכללת שאנן



את הרעיון של הפקת כתב העת "עיון ומחקר בחינוך מתמטי" העלה במהלך שנת 2013 פרופ' דוד בן חיים בתפקידו באותה עת כיועץ במכללת "שאנן".

לשמחתנו, פרופ' יחיאל פריש, נשיא מכללת "שאנן" – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, בירך על היוזמה ואישר לבצע אותה בתקצוב המכללה.

מתחילת היוזמה ועד היום יצאו שמונה גיליונות שנתיים, תחילה בעריכתה של ד"ר קרני שיר (חמשת הגיליונות הראשונים) ולאחר מכן בעריכתו של ד"ר יניב ביטון (מהגיליון השישי והלאה).

זכותו של פרופ' יחיאל פריש, נשיא מכללת "שאנן" ועובדי המרכזיה הפדגוגית בראשותה של גב' תמי יהושע, כתב העת ערוך ברמה גבוהה – תחילה במהדורה מודפסת ולאחר מכן במהדורה מקוונת.

זכות העורכים ומערכת כתב העת שהורכבה מחברי הסגל האקדמי בחינוך מתמטי ממספר מכללות לחינוך בארץ, כתב העת משמש במה מרכזית, כמעט יחידה בישראל, לפרסום מחקרים בתחום החינוך המתמטי בידי אנשי האקדמיה בישראל.

כתב העת "עיון ומחקר בחינוך מתמטי" זכה להכרה מיידית ככתב עת שפיט ומקור לגאווה של הקהילה הישראלית בתחום החינוך המתמטי.

בימים אלה פרופ' יחיאל פריש, נשיא מכללת "שאנן" בעשור האחרון, פורש מתפקידו. לקראת הוצאת הגיליון השמיני של כתב העת זו ההזדמנות שלנו, של כלל העוסקים בחינוך מתמטי – בהוראה ובהכשרת הדורות הבאים של המורים למתמטיקה במערכת החינוך, להודות לו על התמיכה בהוצאת כתב העת ועל הקצאת המשאבים הדרושים להפקתו באיכות טובה מאוד מכל הבחינות.

בשמי ובשם כל הקהילה של החינוך המתמטי בישראל, אני מאחל לפרופ' יחיאל פריש, הנשיא היוצא של מכללת "שאנן", בריאות טובה והרבה הצלחה בהמשך דרכו בכל אשר יפנה.

בברכה,

פרופ' דוד בן-חיים
ראש החוג למתמטיקה ויו"ר המועצה האקדמית
המכללה האקדמית הדתית לחינוך
מכללת "שאנן"

דבר העורך

יניב ביטון



ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב.
בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.
מרצה לחינוך מתמטי בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.

אני שמח ונרגש להגיש לכם את הגיליון השמיני של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

את דבר העורך של הגיליון הנוכחי אני מעוניין לפתוח בתודה והערכה לפרופ' יחיאל פריש, נשיא מכללת "שאנן" – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, על תמיכתו המקצועית והנדיבה בכתב העת "עיון ומחקר בחינוך מתמטי". לאחר עשר שנות כהונה כנשיא המכללה פורש פרופ' פריש מתפקידו. זו ההזדמנות של כל קהילת החינוך המתמטי להכיר לו תודה על כך.

אני רוצה לאחל לפרופ' יחיאל פריש בריאות איתנה והצלחה רבה בכל אשר יפנה. יהי רצון שעבודתו והישגיו יימשכו גם לאחר פרישתו.

ברצוני להודות לנשיא החדש, פרופ' אבי לוי, על תמיכתו בהוצאת כתב העת ואני מאחל לו הצלחה בתפקידו החדש.

בגיליון השמיני יש מבחר עשיר של מדורים ומאמרים מחקרניים:

את כתב העת פותח מדור החדשות המתמטיות שבו נצה מובשוביץ-הדר מחדשת לנו על בעיית הסוף הטוב, על ההתקדמות בהערת התאומים ועל כך שלפעמים השערה נשארת בלי הוכחה לאורך זמן רב לא מפני שהיא קשה להוכחה, אלא מפני ש... – מוזמנים לקרוא את מאמרה.

במדור "ראיונות עם דמויות מפתח בחינוך המתמטי" קרני שיר נפגשת עם טומי דרייפוס גם כדי לברך על זכייתו במדליית Felix Klein לשנת 2019 ובעיקר ללמוד על המעבר מהתחום של פיזיקה מתמטית לחינוך מתמטי ותרומתו לתחום. לקראת סיום הריאיון טומי משתף אותנו בכיווני התפתחות עתידיים בתחום המחקר בחינוך מתמטי.

אבי פולג משתף אותנו בחוויות מהסמינר המתקשב השבועי (בגרסה הישראלית) של JRMF (Julia Robinson Mathematics Festival) – ארגון היוזם, תומך ומקיים מאז 2007 אירועים מתמטיים לילדים ולבני נוער ברחבי העולם, הכוללים פיצוח משימות חקר מתמטיות. עם היכנס העולם לעידן הקורונה, החל הארגון לפעול גם באמצעות מפגשים מתוקשבים.

במדור המלצה על ספר, בת-שבע אילני ואנטולי שטרקמן ממליצים לנו על ספרו של עופר ליבה ז"ל "ממלכן הזהב לסדרת פיבונאצ'י". ספרו של עופר ליבה מומלץ לכל אוהבי המתמטיקה והמתעניינים בה, בהם מרצים מורים, סטודנטים ותלמידי תיכון המעוניינים לפתור משימות מאתגרות בנושא מרתק זה. זהו ספר שיענג את כל מי שיהיה מוכן לצלול לתוך פרקיו ולהשקיע את המאמץ הנדרש.

גם בגיליון זה לא חסכנו פינה חמה. משה סטופל, אבי סיגלר ועידן טל לוקחים אותנו למסע בעקבות בעיית הסנגוק. נבחרה בעיית סנגוק בעלת רקע היסטורי עם ניסוח מעניין ותוצאה מפתיעה. הבעיה מעוררת סקרנות ובעלת פוטנציאל חקירה בכיוונים שונים.

בגיליון זה יש שבעה מאמרים מחקריים:

במאמר הראשון סטלה גידלביץ' כותבת על הכוונה לשיפוט עצמי מטה-קוגניטיבי במהלך פתרון בעיות תובנה מספרית בקרב תלמידים צעירים בכיתה ד'.

במאמר השני רחל פילו ואיריס שרייבר כותבות על ידע וחוללות עצמית של מורים בנושא של כפל וחילוק מספרים טבעיים ואפס בכיתה של תלמידים לקויי למידה.

במאמר השלישי ענת קלמר ועינב קיסר מספרות לנו על שינויים בידע של סטודנטיות להוראת המתמטיקה במהלך יצירת קורס מוק בנושא יחס ופרופורציה.

במאמר הרביעי גלית שבתאי כותבת על ארבע מורות וחקר בהוראת המתמטיקה. היא חושפת במאמרה את הזיקה של נרטיב המורות כלומדות מתמטיקה לסיבה לבחירת הוראת המתמטיקה כמקצוע ולשיח הפדגוגי שלהן על הוראה חקירתית.

במאמר החמישי יחיאל תנעמי ואריאלה עילם כותבים על הקשר בין תפקודיים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב.

במאמר השישי העוסק בהבנות חלקיות ותפיסות שגויות בנושא של כפל וחילוק בשבר הפשוט, מדווחים לנו פירחה חמו, בת שבע אילני ומאיר בוזגלו, כיצד תלמידים בכיתה ו' מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים מתוך התמקדות באי הבנות הייחודיות למספרים רציונליים המבוטאים כשבר פשוט.

במאמר השביעי ליאורה נוטוב כותבת על הקשר בין עיסוק באומנות להבנה של אפס ואינסוף בקרב מתכשרים להוראת המתמטיקה.

ברצוני להודות לכל השותפים לתהליך ההוצאה לאור של הגיליון השמיני, בראש ובראשונה לצוות ההפקה והעריכה של כתב העת – תמי יהושע, רבקי עמר ויפעת פישר – מההוצאה לאור של מכללת שאנן. תודה על המקצועיות הרבה ועל השותפות המלאה בהוצאת כתב העת והצלחתו.

לכותבי המאמרים והמדורים שדאגו לשתף ולהעשיר את הידע המתמטי והידע הפדגוגי של קהילת אנשי החינוך המתמטי, לחברי המערכת ולחברי הקהיליה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי שנרתמו למשימת השיפוט, העירו ותרמו מזמנם והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון המאמרים המופיעים בגיליון ובהשבחתם – תודה גדולה לכולכם.

תודה אישית וחמה לפרופ' דוד בן-חיים ששמח תמיד לתרום מזמנו ומניסיונו העשיר לקידום כתב העת וייעולו.

אנו מקווים שתיהנו מהקריאה.

יניב ביטון



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוֹבִיץ-הדר

כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הביאה לישראל את "תוכנית קולומביה", והנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים הדורמטיים "חשבון פשוט" שעליהם הטלוויזיה החינוכית זכתה בפרסים בין-לאומיים.

פרופ' מובשוֹבִיץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער.

היא הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. בשנים האחרונות היא מתמסרת לפיתוח מבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהקמת אתר "רמזור למורה".

נצה מובשוֹבִיץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-125,000 פריטים המתפרסמים בכ-650 כתבי-עת מתמטיים למאגר המידע הבין-לאומי המנוהל בידי החברה המתמטית האמריקאית [MathSciNet](https://www.mathscinet.org/): AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info. רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים.

מדור החדשות בגיליון זה מכיל הפעם חדשות על התקדמות משמעותית לקראת פתרון של שלוש בעיות, על בעיה שנראה היה שנפתרה אבל התברר שהייתה שם טעות, על השערה ש"נפתרה" באמצעות הפרכתה ועוד הפתעות שהן כמובן רק חלק קטנטן של המתרחש השכם והערב בתחום המתמטיקה הסוער.

בעיית "הסוף הטוב"

הכול התחיל בשנת 1933 בבודפשט בירת הונגריה. יום בהיר אחד



Paul Erdős
1913-1996



George Szekeres
1911-2005

אתגרה עלמה צעירה ששמה אסתר קליין שניים מחבריה הטובים, פול ארדש בן ה-20 וג'ורג' סזקֶרס בן ה-22: "הצלחתי להוכיח שבהינתן חמש נקודות כלשהן במישור, כך שאף שלוש מהן לא נמצאות על אותו קו ישר, אפשר תמיד

למצוא ביניהן ארבע שהן הקוד קודים של מרובע קמור".¹ השניים חשבו, חיפשו ומצאו גם הם דרך להוכיח זאת.² ואז, כמקובל

1. מצולע קמור הוא מצולע שאפשר להקיף אותו סביב באמצעות פניות ימינה בלבד או פניות שמאלה בלבד. לחלופין מצולע קמור הוא מצולע שכל האלכסונים שלו פנימיים.

2. ההוכחה שאסתר קליין נתנה ומובאת במאמרם של ארדש וסזקֶרס (Erdős & Szekeres, 1935) היא כדלקמן: אם הפוליגון המינימלי שמכיל (כנקודות שפה או נקודות פנימיות) את כל הנקודות הוא מרובע או מחומש אז הטענה מובנת מאליה. נניח שהמצולע המינימלי המכיל את כל הנקודות הנתונות הוא משולש ABC, אזי שתי הנקודות הנותרות D ו-E נמצאות בתוך המשולש. שתיים מהנקודות הנתונות (נניח שאלה הן A ו-C) בהכרח נמצאות מאותו צד של הקו הישר המחבר את D ו-E. לפיכך AEDC הוא מרובע קמור.

ימצאו את מבוקשם בכתבה שהתפרסמה במאי 2017 במגזין Quanta **כאן**.

התקדמות בהוכחת השערת התאומים

כמו בעיות רבות בתורת המספרים גם השערת התאומים קלה מאוד להבנה, אבל היא אגוז קשה לפיצוח. השערת התאומים אומרת שיש אינסוף זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 (כמו למשל 3 ו-5 או 11 ו-13 ועוד רבים אחרים). יתרה מזו, בניסוחה המודרני ההשערה קובעת שהדבר נכון לא רק להפרש של 2. אלא שהדבר נכון גם למספר הזוגות של ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 4 (כמו 3 ו-7 או 19 ו-23) ולכל הפרש (זוגי) אחר. במדור החדשות המתמטיות של **גיליון מס' 1** שהתפרסם בשנת 2014 סיפרתי על פריצת הדרך שקרתה בשנת 2013 כאשר ייטאנג זאנג (Yitang Zhang, 1955-) הצליח להוכיח שיש אינסוף זוגות של ראשוניים שההפרש ביניהם לא עולה על... 70 מיליון. זמן קצר לאחר מכן הוכח שזה נכון אפילו לזוגות של ראשוניים שהפרש ביניהם קטן יחסית ועומד על 246. אבל הוכחה להשערת התאומים עדיין אין. בקרב המתמטיקאים העוסקים בכך די ברור שנחוץ רעיון חדשני של ממש כדי להגיע להוכחה. במהלך חיפושים אחר רעיון כזה, פורסמה בספטמבר 2019 ברשת האינטרנט (<https://arxiv.org/abs/1808.04001>) הוכחה להשערת התאומים בשדות סופיים. זה הישג ניכר כי זה נותן תקווה כלשהי שיהיה אפשר אולי לאמץ חלק מהרעיונות גם לשדה האינסופי של המספרים הרציונליים.

מהו שדה סופי? איך מגדירים את פעולות החשבון בשדות סופיים? ומה המשמעות של ראשוניים בשדות סופיים?

כאן יש כתבה קלה לקריאה על כל אלה ועוד.

לגוליה של בעיית ABC

עוד חדשה שכתבתי עליה בפרוטרוט **בגיליון מס' 1** קיבלה תפנית מעניינת. בשנת 2012 היה נראה שהשערת ABC באה על פתרונה החיובי והפכה למשפט, אבל מרגע שההוכחה פורסמה (ברשת) היא מעוררת ספקות לא רק בשל היקפה העולה על 500 עמודים ונשען על תוצאות קודמות רבות מאוד, אלא גם בשל סגנון הכתיבה הכבד והמעורפל האופייני להצגת הדברים ומונע הכרה בנכונותם. בשנת 2018 הספקות הביאו לידי כך שעדיין ההשערה נחשבת למשפט רק ביפן, מקום מגוריו ועבודתו של המתמטיקאי עתיר הנסיון הטוען להוכחתה, שינצ'י מוצ'יזוקי (Shinichi Mochizuki, 1969-), אבל במקומות אחרים בעולם היא חזרה להיחשב השערה פתוחה. סערה של ממש מתחוללת ברשתות החברתיות, בקרב טובי המוחות באירופה ובאמריקה המתמחים בתורת המספרים. מומלץ לקרוא **כאן** תיאור מרתק של הדרך שבה מתמטיקאים בני זמננו נזהרים בכבודו של עמיתם, אבל לא מוותרים על החתירה לקפדנות מתמטית מלאה תוך ברור כל פרט, ולא על הצגה בהירה, מלוטשת ועקבית של כל טיעון, גם אם המחבר הצליח לפרסם את גרסתו **השנויה במחלוקת**.

לפעמים השערה נשארת בלי הוכחה לאורך זמן רב לא מפני שהיא קשה להוכחה, אלא מפני ש...

בעיות צביעה של רשתות (נקודות וקווים המחברים אותן) מעסיקות את הקהילה המתמטית כבר כמעט 200 שנה. המפורסמת שבהן היא בעיית הצביעה של מפות מדיניות כך שכל שתי מדינות בעלות קו גבול משותף תהיינה צבועות בשני צבעים שונים זה מזה. זאת האחרונה נפתרה בשנת 1976 באמצעות בדיקה ממוחשבת של כל הדרכים בזכות שני מתמטיקאים אמריקאים מאוניברסיטת אילינוי:

במתמטיקה, אתגרה אותם אסתר קליין בשאלה כללית יותר: אם חמש נקודות מספיקות כדי להבטיח את קיומו של מרובע קמור, האם קיים ואם כן, מהו מספר הנקודות הכי קטן שמספיק כדי להבטיח את קיומו של מחומש קמור? משושה? או בכלל, מצולע קמור בעל מספר אחר כלשהו של צלעות n ?

לאחר מכן התברר שהבעיה הזאת מסובכת יותר. כעבור שנתיים, בשנת 1935, פרסמו ארדש וסזקס (Erdős & Szekeres, 1935) מאמר ובו הציגו את פתרון הבעיה עבור מצולעים קמורים בעלי שלוש, ארבע וחמש צלעות. ליתר דיוק הם הראו ששלוש נקודות שאינן על קו אחד מספיקות כמובן כדי להבטיח שאפשר לבנות משולש קמור, והראו את ההוכחה של אסתר קליין לכך שחמש נקודות שאף שלוש מהן אינן על קו אחד, מספיקות כדי להבטיח את קיומו של מרובע קמור, ואת ההוכחה שתשע נקודות כאלו מספיקות כדי להבטיח שקיים מחומש קמור שנתנו שני מתמטיקאים אחרים, א' מאקאי ופ' תוראן (E. Makai & P. Turan). באותו מאמר מציגים ארדש וסזקס תוצאה חדשה שמצאו, והיא $\binom{2n-4}{n-2}$ כחסם עליון למספר הנקודות המספיק כדי להבטיח קיומו של מצולע קמור בעל n צלעות. הם אף העלו את ההשערה שמספר הנקודות המינימלי שמספיק לכך הוא לפחות $2^{(n-2)} + 1$. במאמר אחר (Erdős & Szekeres, 1960-1961) הם הוכיחו זאת והעלו את ההשערה שהמספר המינימלי שווה בדיוק ל- $2^{(n-2)} + 1$. נוסף על כך ארדש הציע, כפי שעשה פעמים רבות אחרות במהלך הקריירה היצירתית שלו כמתמטיקאי שופע שאלות מעניינות, פרס בסך 500 דולר לכל מי שיצליח להוכיח שההשערה נכונה.³

הבעיה זכתה לשם "בעיית הסוף הטוב" מסיבות שאין להן כל קשר לסוגיה המתמטית. יש אומרים שהיא פרי המצאתו של ארדש. על כל פנים היא משקפת את התוצאה הלא-מתמטית העיקרית של התעניינותם של אסתר קליין וג'ורג' סזקס בה: הם התאהבו, נישאו בשנת 1937, ברחו מהונגריה עם עליית הנאציזם, וחיו יחד עד שנפטרו באוסטרליה שניהם באותו יום בשנת 2005, כ-70 שנה אחרי שהשערה הועלתה... ומה עלה בגורלה של ההשערה?

עשרות שנים חלפו ללא התקדמות. עד שנת 2006, התוצאה היחידה שהוכחה (באמצעות מחשב, בידי סזקס ועמיתו לינדי פיטרס) היא שלקיומו של משושה קמור דרושות לפחות 17 נקודות שאין ביניהן שלוש נקודות על אותו קו, וזה מאושש את ההשערה כי $17 = 2^{(6-2)} + 1$. צפו **כאן** בסרטון יו-טיוב משנת 2014 שמסביר את הקושי בהוכחת המקרה של המשושה ונעוץ בכוח החישוב הגבוה מאוד הנחוץ לשם כך.

שוב עברו שנים, עד שבשנת 2017, בעבודה שפרסם אנדרו סוק (Andrew Suk) מאוניברסיטת אילינוי שבשיקגו בכתב העת של החברה האמריקאית למתמטיקה (AMS), מופיעות ראיות חזקות לכך שהאינטואיציה שהנחתה את ארדש וסזקס הייתה ככל הנראה נכונה (Suk, 2017). אומנם העבודה של סוק איננה הוכחה מלאה, אבל בקהילייה המתמטית אין עוררין על כך שהיא מחזקת את ההשערה שלהם במידה שקשה להעלות על הדעת שהיא לא נכונה. חבל רק שארדש וסזקס לא זכו לראות את השערתם כה קרובה לאימות.

המעוניינים בפרטים על ההוכחה של סוק ופריצת הדרך שהתווה בשיטת ההתבוננות במצולעים קמורים כמורכבים מ"כוס" ו"מכסה" (Cups and Caps), התבוננות שהציגו ארדש וסזקס מלכתחילה,

3. עוד על הפרסים הכספיים שארדש הציע לפתרון בעיות רבות שהעלה (Hartnett, 2017): <https://www.quantamagazine.org/cash-for-math-the-erdos-prizes-live-on-20170605/>

קנט אפל (Kenneth Appel, 1932-2013) וולפגנג האקן (Wolfgang Haken, 1928-). הם נשענו כמובן על רעיונות של קודמיהם, אך הצליחו להימנע מטעויות שעשו רבים במשך למעלה מ-100 שנים מאז שהועלתה הבעיה בשנת 1852.

בשנת 1880 פרסם המתמטיקאי הסקוטי פיטר טייט (Peter Tait, 1831-1901) הוכחה ששלושה צבעים אינם מספיקים לצביעת כל



מפה כנדרש, אבל ארבעה כן מספיקים לכך. הוא סימן כל מדינה בקודקוד (נקודה) צבוע, וכדי לבטא את הכלל ששתי מדינות שכנות הן בעלות צבעים שונים זה

מזה, קבע שאסור לחבר בקטע שני קודקודים בעלי אותו צבע. לרוע המזל ההוכחה של טייט, כמו אחרות שקדמו לה, התבררה שגויה, אבל השיטה שנקט שימשה השראה להמשך המאמצים והביאה להתפתחותו של תחום חדש במתמטיקה – תורת הגרפים (עוד על הבעיה המרתקת הזאת אפשר למצוא בבלוג המומלץ של גדי אלכסנדרוביץ [2018א, 2018ב]).

לבעיות של צביעת גרפים, וכמוהן בעיות בתורת המספרים, יש נטייה להיות קלות להבנה ואולם קשות לפתרון. אחת מהן שנשארה בלי פתרון במשך חמישים שנה בערך, עוסקת בגרפים המתקבלים משני גרפים אחרים בדרך מסוימת הנקראת מכפלה טנזורית (בגרף G המתקבל מכפלה טנזורית של שני גרפים G1 ו-G2 כל קודקוד מייצג זוג קודקודים – אחד מ-G1 ואחד מ-G2, ושני קודקודים ב-G מחוברים זה לזה אם שני הקודקודים התואמים שלהם ב-G1 מחוברים זה לזה וגם שני הקודקודים התואמים שלהם ב-G2 מחוברים זה לזה). בשביל מה זה טוב?

כאן במאמר מיוני 2019 יש שתי דוגמאות יפות לשימוש במכפלה טנזורית של שני גרפים לפתרון בעיות יומיומיות, כמו תכנון של הזמנת אורחים למסיבה כך שלא ייווצרו אי נעימויות וזיווג של נגנים לדואט.

בעבודת הדוקטור שלו בשנת 1966 העלה סטיפן הדטניימי (Stephen Hedetniemi, 1939-), פרופסור באוניברסיטת קלמסון בדרום קרוליינה, את ההשערה כי מספר הצבעים המינימלי הנדרש לצביעת מכפלה טנזורית G של שני גרפים נתונים, הוא מספר הצבעים הקטן מבין שני מספרי הצבעים הנדרשים לצביעת הגרפים המרכיבים אותה G1 ו-G2. הניסיונות להוכיח את ההשערה או להפריך אותה באמצעות דוגמה נגדית, העסיקו מאז את טובי המתמטיקאים העוסקים בתורת הגרפים. ככל שחלפו שנים ואיש לא מצא דוגמה נגדית, גברה הנטייה להאמין שההשערה נכונה ועם זה גברה התחושה שההוכחה מהווה אגוז קשה מאוד לפיצוח.



ואז **במאמר קצר** בן שלושה עמודים בלבד שפרסם באינטרנט בחודש יוני 2019, הציג המתמטיקאי הרוסי הצעיר, ירוסלב שיטוב (Yaroslav Shitov, 1989-), דוגמה נגדית של שני גרפים סופיים (ענקיים מבחינת

מספר הקודקודים) שהמכפלה הטנזורית שלהם דורשת לצביעתה פחות ממספר הצבעים הדרושים לצביעת כל אחד ממרכיביה. (להסבר מפורט על הדוגמה הנגדית מומלץ לקרוא **כאן** את הכתבה של פרופ' גיל קלעי מהאוניברסיטה העברית).

פרופ' נוגה אלון (-1956) מאוניברסיטת תל-אביב מוסיף את הלקח: אם ההוכחה נראית קשה מאוד, יכול להיות שההשערה פשוט מוטעית... וכעת משנמצאה דוגמה נגדית אחת, המתמטיקאים המתעניינים בנושא פונים לעסוק בשאלה המתבקשת: האם יש דוגמאות נגדיות קטנות יותר? עוד על השערת הדטניימי אפשר למצוא בוויקיפדיה **כאן**. ראו גם סרטון יו-טיוב על הבעיה והדוגמה הנגדית **כאן**.

סיפור אמיתי המשקף את אופייה של המתמטיקה בת-זמננו

במאה העשרים היה מקובל להפריד בין מתמטיקה טהורה למתמטיקה שימושית. זוהי הפרדה מלאכותית ששורשיה עוד במאה התשע עשרה והיא איננה מקדמת ויש הטוענים שאפילו מהווה מכשול להתפתחות המתמטיקה הן בתאוריה והן בפרקטיקה.⁴ בתחילת המאה העשרים ואחת ניכר שינוי בגישה. על פי מסמך חשוב משנת 2013 שדן בעתידה של המתמטיקה ומנמק את הדברים, גוברת כיום הנטייה לא להפריד בין מתמטיקה טהורה לשימושית. זאת משום שהולכים ורבים המקרים שבהם נמצא שימוש לתוצאות שנחשבו בעבר לשייכות למתמטיקה טהורה, כגון השימוש במספרים הראשוניים להצפנה, וגם להפך – יישומי המתמטיקה המשרתים את המדעים (ולא רק אותם), מציבים שאלות מתמטיות תאורטיות שפתרוןן על פי המסורת שייך למתמטיקה טהורה (National Academies Press, 2013). שאלה מהסוג האחרון העלו לאחרונה שלושה פיזיקאים



והיא משקפת (לטעמי) את טבעה התוסס והעשיר של המתמטיקה ואת הדרך שבה נוצרת המתמטיקה בת זמננו.

ובכן, מעשה שהיה כך:

המתמטיקאי האמריקאי יליד אוסטרליה, טרנס טאו (Terence Tao, 1975-), היה ילד פלא של שלחי המאה העשרים וגדל להיות אחד המתמטיקאים המבריקים של ראשית המאה העשרים ואחת.

בבוקר אחד בחודש אוגוסט 2019, הוא פתח את הדואר האלקטרוני שלו וראה הודעה משלושה פיזיקאים שלא הכיר. בהודעתם הם התנצלו לפניו כי הוא ביקש בפירוש בבלוג שלו לא להטריד אותו שלא לצורך, והם הסבירו שהחליטו לפנות אליו כי קראו מאמר שלו שקשור לזהות מתמטית שהם "עלו עליה" די במקרה במהלך עבודתם ואינם בטוחים בנכונותה. באותו רגע חשב טאו לעצמו שהזהות לא יכולה להיות נכונה, כי היא כל כך פשוטה שאילו הייתה נכונה היא הייתה ידועה כבר מזמן. אבל שעתיים לאחר מכן הוא שלח לעמיתיו החדשים שלוש הוכחות שונות של הזהות שלא הכיר עד אותו יום. עשרה ימים לאחר מכן שלחו הארבעה מאמר לפרסום ובו הם עמדו על כך שהזהות, על אף פשטותה ואף שהתחום של אלגברה ליניארית שהיא שייכת אליו הוא תחום מבוסס למדי, לא זכתה להכרה עד לאחרונה אף שהוזכרה בדרך זאת או אחרת בפרסומים יותר מפעם אחת, והמוקדמת שבהן הייתה עוד בשנת 1934. בדצמבר 2019 הם עדכנו והרחיבו את **המאמר שלהם** למהדורה בת 26 עמודים, הכוללת 24 עקבות היסטוריים של אזכורי הזהות או צורות שונות שלה למטרות שונות, יחד עם שבע הוכחות שונות והכללות. באותו מאמר הם דנים גם בסיבות לכך שעד 2019 הזהות לא זכתה למעמד מוכר כמו אחרות באלגברה ליניארית (כגון חוק קרמר, נוסחת קושי). הבולטת שביניהן היא השימוש בנוסחה ככלי להשגת תוצאות

4. ראו למשל הרצאת המליאה של פרופ' זיגלר בכנס הבינלאומי ה-13 של ICME בהמבורג, יולי 2016 (Ziegler, 2016).

אחרות, תוך הזנחת חשיבותה כשהיא לעצמה. כמו כן הם עומדים על שימושיותה ובפרט על השימוש החדש שהתגלה בה בפיזיקה של חלקיק בשם ניוטרינו.⁵ כדי להקל בעתיד על המחפשים אותה, הם גם נותנים לזהות שם "The eigenvector-eigenvalue identity" שנבחר מפאת התאמתו. הזהות קושרת בין וקטורים עצמיים של מטריצה (שהם קשים לחישוב) לערכים עצמיים של מטריצה (שהם קלים יחסית לחישוב) ומאפשרת לחשב את הווקטורים העצמיים מתוך הערכים העצמיים (ראו תרגיל פשוט במטריצות מסדר 3×3 כאן). משום כך הדעת נותנת שבעתיד ימצאו לה עוד הרבה מאוד שימושים, שכן תורת המטריצות היא עתירת יישומים במיוחד בתחום הטרונספורמציות של מתיחה, כיווץ, סיבוב, שיקוף ועוד אשר פועלות על עצמים בשלמותם. כדאי לקרוא עוד הרבה פרטים נוספים המלווים באיורים והסברים כאן או כאן.

השערת קולאץ (Collatz Conjecture)

השערת קולאץ – אחת הבעיות הפתוחות המשקפות בדרך אלמנטרית את מהותה וטבעה של המתמטיקה, קיבלה "זריקת עידוד" מטרנס טאו, שהוזכר לעיל כאחד המתמטיקאים הפוריים ביותר של ימינו.

מה אומרת ההשערה? אם בוחרים במספר טבעי כלשהו, ונוהגים על פי הכלל הבא שוב ושוב, התהליך מגיע בהכרח ל-1 ונעצר שם. לא חשוב באיזה מספר מתחילים. הכלל הוא: אם המספר זוגי – מחלקים אותו ב-2; אם המספר אי-זוגי, כופלים ב-3 ומוסיפים 1 (ואז מתקבל מספר זוגי שמחלקים ב-2 וממשיכים הלאה על פי התוצאה). כך למשל: אם מתחילים

ב-2 ברור שמגיעים בצעד הבא מייד ל-1 (לאמיתו של דבר ממשיכים הלאה לפי הכלל ל-4 ומשם ל-2 ושוב ל-1 וחוזר חלילה); אם מתחילים ב-3 עוברים במספרים 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. קל לראות מהסדרה האחרונה מה קורה אם מתחילים ב-4 או ב-5. אם מתחילים ב-6 מגיעים מייד ל-3 וחוזרים אל הדרך שלעיל המסתיימת ב-1, ואם מתחילים ב-7 מקבלים: 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, ומכאן ל-1 כמו שראינו. זהו שעשוע די ממכר ומסקרן. האם גם מספר פתיחה גדול מאוד יביא בסופו של דבר ל-1? לגמרי לא ברור שההתנהגות של סדרת התוצאות איננה תלויה בגודלו של מספר הפתיחה. ההשערה היא כאמור שהתהליך מגיע בהכרח ל-1 ונעצר שם אבל אף על פי שכל מתכנת מתחיל יכול לכתוב תוכנית מחשב לבדיקת ההשערה, עדיין איש לא מצא הוכחה לכך שהתהליך לא רק שאינו מתבדר בחלק מהמקרים, אלא שהוא חייב תמיד להגיע ל-1 (ושם ייעצר).⁶

אפשר להסביר שהחוקיות הנתונה מחייבת שהסדרה לא תגדל, שכן כל מספר זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-1/2 וכל מספר אי-זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-3, מוסיפים 1 וגם כן מחלקים ב-2. במילים אחרות מספר אי-זוגי מוכפל בערך ב-3/2. אם מניחים שיש אותה

5. ניוטרינו הוא חלקיק מוזר מאוד בהתנהגותו – אין לו כמעט מסה ואין לו מטען חשמלי, הוא נע בכל תווך ומשנה את עצמו במהלך תנועה בין שלושה אבות-טיפוס שונים שלו, והפיזיקאים חוקרים אותו כי הוא עשוי להסביר את היווצרות היקום. ראו עוד כאן.

6. ראוי לשים לב שבשפת היום-יום מקובל לומר "תמיד" כאשר הכוונה היא "לכל מקרה". "תמיד" הוא תואר זמן, והכוונה כמובן איננה לכך שבכל עת זה יקרה. הכוונה היא שזה קורה לכל בחירה של מספר שמתחילים בו.

הסתברות להגיע למספר זוגי או למספר אי-זוגי על פי הכלל הנזכר, אז אפשר לומר שבממוצע כופלים כל מספר בממוצע הגאומטרי של $1/2$ ו- $3/2$, היינו ב- $\sqrt{3/2}$. זהו מספר קטן מ-1 ולכן המספרים בסדרה הולכים וקטנים. אבל הנימוק הזה אין בו כדי להוכיח שסדרת מספרים הנוצרת על פי הכלל הנזכר, תמיד מגיעה ל-1, שלא לדבר על כך שההנחה של שוויון ההסתברויות איננה ברורה מאליה. עוד קושי הוא שמספר הצעדים בסדרה עד שמגיעים ל-1 משתנה במידה לא שיטתית בהתאם לנקודת ההתחלה וקשה עד מאוד לגלות איזה שהוא דפוס לכך. כך למשל דרושים 3 צעדים כדי להגיע ל-1 מ-8 אבל 19 צעדים כדי להגיע ל-1 מ-9. אם מתרחקים עד 871, דרושים 178 צעדים כדי להגיע ל-1, אבל הרבה פחות (כמה?) אם מתחילים מ-1024. (עוד פרטים מופיעים באנציקלופדיה של סדרות מספרים. כדאי גם לצפות בסרטון יוטיוב הממחיש את הדברים כאן).

המתמטיקאי ג'פרי לאגריאס (Jeffrey C. Lagarias, 1949-) ממדינת מישיגן ארה"ב, מעיד על עצמו במאמר משנת 1985 כי התודע אל השערת קולאץ בשנת 1967 בהיותו תלמיד תיכון ומאז עבד עליה מדי פעם בפעם. מתוך סקרנות מצד אחד ותסכול מצד אחר הפך ל"היסטוריון" שלה. כך בשנת 2003, כשהוא כבר מתמטיקאי מוכר, הוא מפרסם ביבליוגרפיה



מוערת על חקירת הבעיה החל משנת 1963. מאז ועד שנת 2011

הופיעו 13 מהדורות מתעדכנות שלה.

את הבעיה העלה כנראה בשנות השלושים של המאה העשרים סטודנט גרמני באוניברסיטת המבורג, לוטהר קולאץ (Lothar Collatz, 1910-1990), ועברה מפה לאוזן. במסעותיה היא גם זכתה לכינויים מגוונים מפי אנשים שעסקו בה. בשנות השבעים היא כבר הופיעה בספרים ובכתבי עת רבים. ההשערה נבדקה בטווח רחב מאוד של מספרים טבעיים (מעל 2^{60} ערכי התחלה שונים!) אבל הוכחה להשערה עדיין לא נראית לעין. המתמטיקאי הפורה של המאה העשרים, פול ארדש שהוזכר לעיל בקטע על בעיית הסוף הטוב, הציע למי שיוכיח את השערת קולאץ פרס בסך 500 דולר.

בשל טבעה האיטרטיבי (חזורי בעברית, מלשון חזרה על אותה פעולה), השערת קולאץ מעסיקה את קהיליית מדעי המחשב ומהווה אתגר שיש המשווים אותו לאתגר שהציב פרמה לפני המתמטיקאים עם "המשפט האחרון" שלו (ראו מדור החדשות בגיליון 4). רבים מנסים את כוחם בהוכחת ההשערה. חלקם חובבים, אחרים מקצועיים. בחלק ניכר מהמקרים נמצאות טעויות או מה שהמתמטיקאים קוראים לו "נפנופי ידיים", ואולם פה ושם יש כמובן גם התקדמות (להרחבה נוספת ראו בוויקיפדיה באנגלית). ב-10 בספטמבר 2019 פרסם טרנס טאו (שהוזכר כבר לעיל) מאמר [בן 48 עמודים](#) שכותרתו מכילה פעמיים את המילה "כמעט" (במשמעותה ההסתברותית):⁸

7. הממוצע הגאומטרי של שני מספרים הוא השורש הריבועי של מכפלתם (הממוצע החשבוני של שני מספרים הוא חצית סכומם).
8. המילה "כמעט" במתמטיקה מופיעה בדרך כלל כסיג לטענות אוניברסליות

רשימת מקורות

- אלכסנדרוביץ, ג' (2018, א, 10 בנובמבר). משפט ארבעת הצבעים (חלק א') https://gadal.net/2018/11/10/four_color_theorem_intro/. אוהזר מתוך
- אלכסנדרוביץ, ג' (2018, ב, 4 בדצמבר). משפט ארבעת הצבעים (חלק ב') https://gadal.net/2018/12/04/four_color_theorem_kempe_proof/. אוהזר מתוך
- Erdős, P., & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2, 463-470. Retrieved from http://www.numdam.org/article/CM_1935__2__463_0.pdf
- Erdős, P., & Szekeres, G. (1960-1961). On some extremum problems in elementary geometry. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica*, 3-4, 53-62. Retrieved from http://bsmath.hu/~p_erdos/1960-09.pdf
- Hartnett, K. (2017, June 5). *Cash for math: The Erdős prizes live on. Quanta magazine*. Retrieved from <https://www.quantamagazine.org/cash-for-math-the-erdos-prizes-live-on-20170605/>
- National Academies Press. (2013). *The mathematical sciences in 2025*. Washington, DC: Author.
- Suk, A. (2017). On the Erdős-Szekeres convex polygon problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 30, 1047-1053. doi:10.1090/jams/869
- Ziegler, G. M., & Loos, A. (2017). "What is Mathematics?" and why we should ask, where one should experience and learn that, and how to teach it. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education: ICME-13 Monographs* (pp. 69-77). Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-62597-3_5

"Almost all Collatz orbits attain almost bounded values". כשמתמטיקאי בעל שיעור קומה כמו טאו מפרסם מאמר, ובפרט שהוא בעל כותרת מסוג זה, הקהילה המתמטית נרגשת. טאו עצמו לא מתיימר לומר שהוא מוכיח את השערת קולאץ, אבל הוא מצביע על תוצאות חלקיות חדשות שטאו השיג בהשראת גישתו לפתרון בעיות בתחום התמחותו – משוואות דיפרנציאליות חלקיות (ראו פרשנות על הממצאים של טאו כאן).

פרסום מסוג זה מעורר כמובן בקרב עמיתיו המתמטיקאים הרהורי התפעלות ו... גם ערעורים. אולם זה טבעה של המתמטיקה. בעיות קשות לא נפתרות בן לילה, אלא בצעדים מדודים ושקולים, שכל אחד מהם בדרך כלל נבנה על קודמו. ההתמדה, התעוזה והבקרה הן מעמודי התווך של התחום התוסס ששמו מתמטיקה.

שמתקיימות כמעט לכל מקרה, כלומר להוציא אולי מספר סופי של מקרים. ההסבר להלן על המשמעות המדויקת של המילה "כמעט" על פי המאמר של טרנס טאו לקוח מתוך

<https://www.quora.com/How-big-of-an-improvement-is-the-latest-paper-from-Terence-Tao-for-proving-the-Collatz-Conjecture>: "The term 'almost all' actually has an exact definition here, but for our purposes it's sufficient to think of the concept as "If I pick some $n \in \mathbb{N}$ at random (i.e. following some random distribution, a logarithmic one in our case), then our result will hold with probability 1".

מחקר על תהליכי למידה: מתלמידים בודדים דרך קבוצות קטנות וכלה בכיתה שלמה ריאיון עם פרופ' טומי דרייפוס

קרני שיר



ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן - המכללה האקדמית הדתית
לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
חוקרת בפרויקט "הבזקים" - הפקולטה למתמטיקה,
הטכניון, חיפה.



פרופ' טומי דרייפוס – זוכה מדליית
Felix Klein לשנת 2019, מדליה
ש-ICMI – המועצה הבינלאומית
לחינוך מתמטי – מכבדת בה את
החברים הנכבדים ביותר בקהילת
החינוך המתמטי עבור פעילותם
רב-השנים ורחבת ההיקף בתחום
החינוך המתמטי.

מדליה זו ניתנה לטומי כהוקרה על
עבודתו רבת-הפנים: תרומתו למחקר בתחום החינוך המתמטי,
תפקידו המוביל בעיצוב וביסוס קהילת המחקר, וכן על עידוד וטיפול
הקשר בין החוקרים בתחום בכל העולם.

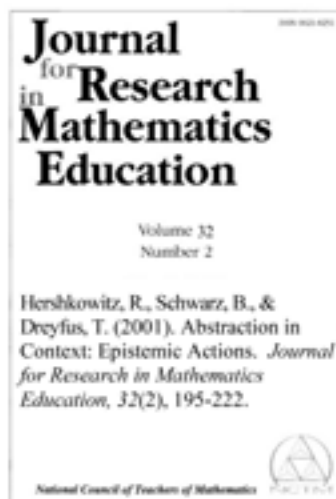
פרס Felix Klein מוענק על מפעל חיים במחקר
בחינוך מתמטי. פרס זה נועד להכיר באותם חוקרים
מצוינים שעיצבו את תחום החינוך המתמטי במהלך
חייהם.



הזוכים בפרס הם חוקרים שהשפיעו רבות על התפתחות החינוך
המתמטי הן ברמה הלאומית במדינות שלהם והן ברמה הבין-לאומית.

על פי ועדת הפרס, טומי לא רק תרם תרומות מחקריות משמעותיות,
אלא גם הציג סוגיות, רעיונות, פרספקטיבות והשקפות ביקורתיות
חדשות. שיקולים נוספים לזכייה בפרס כוללים תפקידי מנהיגות,
חונכות והכרת עמיתים, כמו גם הקשר (הפוטנציאלי והממשי) בין
המחקר ליישומו.

טקס הענקת המדליה היה אמור להתקיים בכנס ICMI שתוכנן לקיץ
2020 בשנחאי, סין. בשל וירוס הקורונה לא התקיים הכנס בפורמט
שתוכנן בו, והוא כנראה יתקיים ביולי 2021. הנימוקים המלאים של
הבחירה של ועדת הפרס בטומי כזוכה של הפרס לשנת 2019
מובאים בסוף ריאיון זה.



הראשון מבין 14 דוקטורנטים שהנחה טומי) הוא החל לעסוק בלמידה של קבוצות קטנות. השלושה פיתחו ביחד גם את התאוריה של 'הפשטה בהקשר' (Abstraction in Context) ופתחו בכך את הדלת למחקרים רבים אחרים הנשענים על מסגרת תאורטית-מתודולוגית זו.

עם השנים הזרקור של המחקר בחינוך מתמטי התחיל להיות מופנה אל התמונה השלמה שבה התלמידים לומדים במסגרת של

כיתה שלמה, ולא רק כיחידה אחת או בקבוצות קטנות. המסגרת התאורטית המקובלת עוד לא ידעה איך להסתכל על הלומד מנקודת המבט הזו ובשיתוף עם רינה הרשקוביץ, מיכל טבח וקבוצת חוקרים בארה"ב – בהובלת כריס רסמוסן (Chris Rasmussen), טומי החל לעסוק במחקרים בנושא זה. מחקרים אלה מלמדים אותנו רבות על **הידע של כיתה שלמה**, על התהליך שמתרחש במהלך הדיונים במליאת הכיתה וכיצד ידע זה מתפתח.

כפי שנכתב לפני כן, התואר השלישי של טומי הוא בפיזיקה מתמטית ולא בחינוך מתמטי. לדעת טומי חשוב שיהיו בתחום חוקרים נוספים בעלי רקע נרחב בתחום התוכן. טומי משתף כי בארצות הברית ובאירופה החלו לאחרונה לעשות מחקרים על למידה והוראה של מתמטיקה ברמה אוניברסיטאית (מחקרים מהסוג שבוודאי יתבצעו בקרוב גם בארץ). יש הרבה תלמידים שמסיימים כיתה י"ב ברמה גבוהה בלי בעיה, אבל כאשר הם מגיעים לאוניברסיטה, לפקולטות מדע וטכנולוגיה, הם לא מצליחים לעמוד בבחינות, וחוקרים בתחום החינוך מנסים לעמוד על הסיבות לכך. לידע ברמה של תואר שלישי במתמטיקה ושליטה בחומר הנלמד בקורסים אקדמיים אלה יש תרומה בהבנה טובה יותר את הלמידה ואת התהליכים המתרחשים בקורסים למיניהם, דבר המקל על ביצוע מחקר עומק בנושא.

נוסף על תרומת מחקריו של טומי לתחום החינוך המתמטי, טומי היה גם חבר צוות של כתב העת המדעי Educational Studies in Mathematics במשך 30 שנה, ומתוכן היה עורכו הראשי של כתב העת במשך שלוש שנים. הוא מילא תפקידים רבים בקבוצה הבין-לאומית לפסיכולוגיה של חינוך מתמטי (PME), באגודה האירופאית למחקר בחינוך מתמטי (ERME) ובוועדות מקצועיות רבות. השפעתו על מחקר ומדיניות הוראת המתמטיקה מורגשת היטב ברחבי העולם, ובכל תפקידיו ופעילותו טומי שם דגש על פיתוח דיאלוג ושיתופי פעולה בין-תחומיים ובין-לאומיים.

מערכת החינוך ומבחי פיז"ה

אף שטומי הגיע לארץ כעולה חדש שלא למד פה, עם השנים והמחקרים הרבים שעשה בשטח, הוא החל להכיר את מערכת החינוך בארץ יותר ויותר. בשנים האחרונות הוא היה מעורב ב**כתיבת תוכנית הלימודים לרמה של 5 יח"ל**. בתוכנית החדשה ניכרת השפעה של העבודה האקדמית של כל מי שהיה מעורב בכתיבתה ושל חוקרים אחרים. השפעה זו באה לידי ביטוי גם בנושאים נקודתיים, כגון הצגת משמעות האינטגרל, וגם מתן דגש רב יותר על חקירה והבנה, סטואציות שמאפשרות דיון, היכרות עם תיאור של סטואציות חוץ-מתמטיות, ופחות דגש על טכניקות מורכבות. בשלב זה עדיין לא יצא מכרז לספרי לימוד התואמים את

פרופ' טומי דרייפוס נולד בשווייץ, ולמד במערכת החינוך במדינה שהייתה בה באותה תקופה מערכת חינוך אליטיסטית. רק כ-15% מהתלמידים בשווייץ נבחנו בבחינות הבגרות, וכמעט כל התלמידים האלה המשיכו ללימודים גבוהים באוניברסיטה לאחר תום לימודיהם בתיכון.

הפיצול לאותם תלמידים המכוונים למסלול של קבלת תעודת בגרות והמשכם ללימודים גבוהים באוניברסיטה ולאילו שלא נעשה בבזל בסוף כיתה ד', כאשר הילדים בערך בני 10.

אל הכיתה שלו, כיתה ה' במסלול של היבחנות בבחינות הבגרות, נכנסו 33 ילדים שמתוכם בסופו של דבר רק 12 תלמידים "סיימו את המסלול" ועברו את בחינות הבגרות. התלמידים שלא היו בכיתות האלה למדו 9-10 שנות לימוד, ואז המשיכו ללמידת מקצוע (כגון חשמלאי, מלצר, סוחר ועוד).

נוסף להיותו תלמיד מצטיין, בגיל העשרה טומי היה חבר פעיל בתנועת נוער יהודית מקומית בשווייץ, תנועת נוער זו הייתה הרביעית בגודלה אחרי בני-עקיבא, השומר הצעיר והבונים. טומי המשיך ללימודים גבוהים באוניברסיטה של בזל, ב-ETH (Zürich University of Technology) וב-Swiss Federal Institute of Technology (University of Geneva) בבריטניה שב-University of British Columbia. קנדה וב-University of British Columbia.

טומי ואשתו מריאן רצו תמיד להתנסות בחיים בארץ, ובסיום לימודיו נפתח לכך חלון הזדמנויות בצורה של הצעה למשרת פוסט-דוק מהאוניברסיטה העברית וממכון ויצמן. הם עברו לארץ עם שני ילדיהם, ומאז נשארו לגור בישראל, ובה נולד להם ילדם השלישי.

טומי משקיע הרבה זמן בספורט ואוהב לרוץ. נוסף על כך הוא אוהב ללכת להצגות תיאטרון ולקרוא. אף שטומי נמצא רשמית בפנסיה, הוא ממשיך לעבוד ומעיד כי אצלו "העבודה היא גם התחביב".

במהלך השנים יצא לטומי לנסוע עם משפחתו לשישה שבטונים ברחבי העולם, בהתחלה עם שלושת ילדיו, בהמשך רק עם בנו הצעיר, וכשהילדים גדלו – רק מריאן והוא. בנסיעותיו המקצועיות הוא כיהן כפרופסור אורח ב-14 אוניברסיטאות שונות ברחבי העולם: קנדה, גרמניה, פינלנד, ניו-זילנד, נורווגיה, שוודיה, שווייץ, ארה"ב וישראל.

המעבר מהתחום של פיזיקה מתמטית לחינוך מתמטי ותרומתו לתחום

בשנות השבעים טומי עשה את הפוסט-דוק שלו באוניברסיטה העברית, והמשיך משם למחלקה למתמטיקה שימושית במכון ויצמן. הוא מספר כי לפעמים בזמן שישב בחדר וניסה להוכיח משפט, הוא עצר פתאום ושאל את עצמו "בשביל מה? מה יוצא לי מזה, ומה יוצא לעולם מזה?" שאלות מסוג זה היו אלו שבזכותן טומי מצא את עצמו נמשך לתחום של החינוך המתמטי. תחום שהוא עוסק בו למעלה מארבעה עשורים ותרומתו לתחום זה לא תסולא בפז.

טומי מספר כי שני האנשים שעזרו לו לעשות את המעבר הראשוני מהתחום של הפיזיקה המתמטית לתחום של החינוך המתמטי היו טד אייזנברג ורינה הרשקוביץ. העבודה שלו עם רינה לא הסתיימה רק במחקר, וגלשה גם לעבודה בשטח.

במשך כשני עשורים עסק טומי בעיקר במחקרים על הלומד הבודד והדרך שבה מתרחשת אצלו המשגה ונבנית הבנה מתמטית. בשנות התשעים, בעת עבודה עם רינה הרשקוביץ וברוך שוורץ (שהיה

פרס פליקס קליין - מנימוקי הוועדה

התחלתי את המדור הנוכחי בתיאור הזכייה של טומי במדליית פליקס קליין. טומי, בהיותו חוקר מוכשר מאוד, אבל גם איש צנוע מאוד, כמעט שלא דיבר על הפרס במהלך הריאיון. אני מסיימת את המדור בהבאת נימוקי הוועדה לבחירתו כלשונם. מהנימוקים אפשר ללמוד יותר לעומק על תחומי המחקר של טומי ועל תרומתו הגדולה לקידום החינוך המתמטי בישראל ובעולם כולו.

The Felix Klein Medal, with which ICMI honors the most meritorious members of the mathematics education community, is given in 2019 to Tommy Dreyfus, Professor Emeritus at Tel Aviv University, Israel, in recognition of his life-time achievement. This distinction acknowledges Professor Dreyfus's contribution to research as well as his leading role in shaping and consolidating the research community and in fostering communication between researchers.

For four decades, Tommy Dreyfus's research has been systematically deepening our understanding of mathematics learning. Trained as a mathematical physicist, Tommy has been drawing in this work on his deep understanding of mathematics and his first-hand familiarity with ways in which mathematical ideas come into being and evolve. Since the late 1970s and for the next two decades his research has been focusing on students' conceptualization of mathematical objects such as function, and on the role of intuition, visualization and aesthetics in mathematical thinking.

With years, his interests have been gradually shifting from the individual student to learning-teaching processes of the classroom. In the last twenty years, his empirical and conceptual work has been devoted to the study of epistemic activities such as proving and abstracting. These efforts resulted in the theory known as AiC – Abstraction in Context, which he developed with Baruch Schwarz and Rina Hershkowitz. Conceived in the late 1990s, the AiC framework has become increasingly influential. Since its inception, it has generated much empirical research all over the world. The theory has been found to be useful also to teachers, whom it provides with tools for monitoring student learning. As impressive in its scope, breadth, depth and impact as Professor Dreyfus's research is, it constitutes only a part of the contribution for which he is honored today with this special distinction.

Another outstanding part of his work is his ongoing project of shaping and consolidating the international community of research in mathematics education, a goal that he tries to attain in multiple ways. First and foremost, through his extensive editorial work he has been setting standards and giving directions for research in mathematics education. Particularly influential has been his 30-year long association with Educational Studies in Mathematics, which included his three-year long term as the editor-in-chief. Professor Dreyfus has also been serving in, and shaping, numerous professional organizations, with PME (the international group for the Psychology of Mathematics Education) and ERME (the European Society for Research in Mathematics Education) among them.

In addition, he played key roles in numerous professional committees in Israel, Europe and America. His influence on research and on policy directly affecting mathematics

הדגשים האלה (משרד החינוך שוקל כרגע אם לעשות זאת), אך אין ספק שבשילוב עם הדגשים שנותנת נרית כץ (מפמ"ר מתמטיקה), יציאה של ספרים מסוג זה אל השוק תיתן דחיפה נוספת לדגשים על חשיבה מסדר גבוה בלימודי המתמטיקה בארץ.

עוד נושא ששוחחנו עליו הוא מבחני פיז"ה שתוצאותיהם התפרסמו זמן לא רב לפני שנפגשנו והקימו רעש גדול בכל הארץ. מבחני פיז"ה בודקים בעיקר אוריינות מתמטית. הם עומדים על הקשר שהתלמיד עושה (או לא עושה) בין המתמטיקה לחיי היומיום.

עד לפני כמה שנים הקשר הזה קיבל מעמד נמוך בתוכנית הלימודים בארץ. יש שינוי מהותי בנושא בתוכנית הלימודים החדשה לבגרות של 3 יח"ל. כדי שיהיה שינוי ניכר בהישגים צריך להיות שינוי בתוכנית הלימודים, שינוי בדגשי ההוראה ושינוי בספרי הלימוד – ושינוי מסוג זה במערכות חינוך הוא לא דבר שקורה בן לילה.

תוכנית הלימודים בהולנד, לדוגמה, משלבת בבית הספר היסודי ב-50 השנים האחרונות (R.M.E. Realistic Mathematics Education). לכן האוריינות המתמטית טבועה בילדים ומאפשרת להם לענות על שאלות מסוג אלו שמופיעות במבחני הפיז"ה. בארצות רבות אחרות המצב דומה, וגם אם לא – הקישור של המתמטיקה לחיי היומיום הרבה יותר נוכח בתוכנית הלימודים לעומת מה שקורה אצלנו.

בארץ עובדים בעיקר על פרוצדורות לפתרון בעיות מסוגים מוגדרים היטב והבנה פנים-מתמטית. תלמידים רבים יכולים אפילו להסביר איך ולמה הפרוצדורות עובדות, אבל אין בתוכנית הלימודים קישור חזק לאוריינות מתמטית. נקווה שתוכנית הלימודים החדשה בכל הרמות וכן מדיניות המשרד לטווח ארוך יביאו לשינוי בכיוון ולשים דגש חזק יותר על אוריינות מתמטית.

יעדים במחקר בחינוך מתמטי שעדיין לא הושגו

בסוף המפגש שלנו עלה הנושא של כיווני התפתחות עתידית בתחום של המחקר בחינוך מתמטי.

כאן טומי עסק בשתי נקודות מרכזיות:

א. מחקרים לטווח ארוך

המערכת האקדמית, גם מבחינת הדרישות לקידום וגם מבחינת מקורות המימון, לא בנויה למחקרים לטווח ארוך (ב'טווח ארוך' הכוונה היא למחקרים בסדר גודל של 10 שנים). הכוונה היא למחקרים כגון "איך מתפתחת תפיסת מושג הנימוק, ההצדקה וההוכחה לאורך השנים, החל מהגיל הרך". מחקרים כאלה יכולים לתרום במידה ניכרת לידע התאורטי כמו לפרקטיקה.

ב. יישום המחקרים בשדה (upscaling)

ב-40 השנים שעברו, קהיליית החינוך המתמטי העולמית למדה הרבה מאוד על תהליכי למידה של תלמידים ומורים ועל תהליכי ההוראה. התחום מלא רעיונות מעולים והוכחות מחקריות שיישומות ויעילות במסגרת מצומצמת כגון כיתה. אבל אנחנו – כקהילייה עולמית – לא יודעים מה לעשות כדי שכל הרעיונות היפים שעובדים נהדר עם תלמיד בכיתה, או עם כיתה בבית ספר, יהיו מיושמים מבחינה מערכתית.

האוניברסיטה לא ממש דוחפת לעשות מחקרים יישומיים, ולרוב הם נחשבים פחות. לעומת תחום הרפואה, שבו חברות פרמקולוגיות גדולות מאמצות רעיונות יפים ומשקיעות בהם כך שיהיה אפשר לפתח אותם, בתחום החינוך אין פלטפורמה זו. כדי שתוכניות טובות ימשיכו להתקיים מעבר להטמעה ראשונית של כמה שנים, צריך המשך תמיכה קבועה למורים לאורך זמן.

policy, both in his own country and abroad.

For all this and his many other contributions to our community, Tommy Dreyfus is an eminently worthy candidate for the Felix Klein Award.

מראי מקום למתעניינים

להלן מראי מקום לאחד המאמרים הראשונים שכתבו פרופ' טומי דרייפוס ופרופ' טד אייזנברג, ותורגם לעברית בשנת 1990 בגליונות 6 ו-7 בעל"ה:

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics*, 6(1), 2-10.

דרייפוס, ט' ואייזנברג, ט' (1990). הרהורים על האסתטיקה של המחשבה המתמטית (חלק א'). **עלה**, 6, 5-12.

דרייפוס, ט' ואייזנברג, ט' (1990). הרהורים על האסתטיקה של המחשבה המתמטית (חלק ב'). **עלה**, 7, 5-13.

מצורף קישור לעמוד של טומי בביה"ס לחינוך של אוניברסיטת תל אביב. ניתן למצוא בעמוד זה את הרפרנס המלא למאמרים רבים אחרים שכתב לאורך השנים. <https://education.tau.ac.il/profile/tommyd>



teaching is keenly felt over the world.

In all these activities, Professor Dreyfus has been consistently promoting cross-discursive dialogues. He has done this by organizing international meetings, establishing trans-continental collaborative research projects, appearing worldwide as an invited speaker and by extensive mentoring in his own country and beyond. Probably the most important and innovative among Professor Dreyfus's consolidating activities have been his multifarious efforts to spur and improve communication among researchers working within differing theoretical frameworks. Being concerned about the fragmentation of the field of mathematics education, Professor Dreyfus has been looking for ways in which community members can engage in a productive dialogue across discursive boundaries. These attempts began with his own cross-theoretical research collaborations. It continued with his conceptual work on the possibility of "networking theories", the activity of employing multiple theories in the attempt to produce a synergetic, cumulative effect. Through these initiatives, Professor Dreyfus has contributed to changing the dominant narratives about theoretical diversity. With his help, the multiplicity of research discourses is now seen less as a problem to solve than as an opportunity to embrace.

Born in Switzerland and now living in Israel, Tommy is fluent in a number of languages, which makes him particularly well equipped for the project of consolidating the international community. After his 1975 doctorate in mathematical physics from the University of Geneva, endowed with several prestigious fellowships and awards, Tommy began visiting universities all over the world. Since then, he never stopped. In parallel to his work at the Weizmann Institute and at the Center for Technological Education in Holon, and later as a full professor of mathematics education at Tel Aviv University, Tommy served as a visiting professor in 14 universities over the world, including in Canada, Germany, Finland, Israel, New Zealand, Norway, Sweden, Switzerland, and the USA. On all these occasions, he spent much time teaching and working with both young and seasoned researchers. By all accounts, he left an indelible mark in all the places he visited.

This owes, among others, to his ability to communicate fluently and easily, to his sensitivity to other cultures and to his general sense of inclusiveness. His willingness to listen and to share his own insights and his devotion to a common effort of understanding and improving mathematics education have touched everyone with whom he has come into contact. Officially retired since 2015, he remains as active and engaged as ever.

To sum up, over the 40 years of his career, Professor Dreyfus has been contributing to our collective endeavor of promoting mathematics education in great many ways: as a researcher, as an editor, as an organizer and policy adviser, and as a teacher and mentor. So far, he has published more than 120 research papers and book chapters, 9 edited volumes, and diverse teaching materials. His writings continue to be read and cited widely, and research programs he initiated or helped establish continue to thrive and inform the field. Even now in his retirement, he continues to shape the field, to foster young researchers and to influence research and

חוויות מסמינר מתוקשב (וובינר) JRMF - מפגשי חשיבה בצוותא לבני 9-99

אבי פולה



ד"ר אבי פולה

עד לאחרונה מנהל המכון למצוינות בהוראה במרכז הישראלי למצוינות בחינוך. עוסק שנים רבות בפיתוח תוכניות לימוד ובהכשרות מורים בתחומי המתמטיקה והמדעים, בדגש על פיתוח יכולות של למידה עצמאית, חשיבה ביקורתית, יצירתיות ומוטיבציה.

בעבר שירת שנים לא מעטות במערכים הטכנולוגיים של צה"ל ומערכת הביטחון, כולל תקופה כמפקד תוכנית "תלפיות" להכשרת קציני מחקר ופיתוח מובילים.

על אי הזיקיות יש זיקיות באחד משלושה צבעים: אדום, כחול או צהוב. הן מסתובבות באי, וכאשר שתי זיקיות נפגשות, הן משנות צבע לפי הכללים האלה:

- שתי זיקיות בעלות שני צבעים שונים ישנו את צבען לצבע השלישי.
 - שתי זיקיות בעלות אותו צבע ישתנו לשתיים בעלות שני צבעים שונים, כל אחת תהיה בעלת אחד משני הצבעים האחרים.
- באחד הימים יש על האי 2 זיקיות כחולות, 3 אדומות, 5 צהובות. האם יכול לקרות לאחר זמן מה שכל הזיקיות יהיו בעלות אותו צבע? אם כן, כיצד? אם לא, מדוע לא?

כך נפתח מפגש אופייני של הסמינר המתוקשב השבועי (בגרסה הישראלית) של [JRMF \(Julia Robinson Mathematics Festival\)](#). מאז 2007 ארגון זה יוזם, תומך ומקיים אירועים מתמטיים לילדים ולבני נוער ברחבי העולם, והם כוללים פיצוח משימות חקר מתמטיות. המטרה היא לגרום לסקרנות ולעניין בתחומים הקשורים במתמטיקה בדרך שיתופית וחוויתית המערבת אף את הקהילה. עם היכנס העולם לעידן הקורונה, החל הארגון לפעול גם באמצעות מפגשים מתוקשבים.

ומה בארץ? "השלוחה הישראלית" של הארגון פועלת בניצוחה של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר. במשך כמה חודשים, מדי יום חמישי בערב התכנסו יחדיו למפגש וירטואלי ברשת כמה עשרות שוחרי חשיבה מתמטית וחינוך מתמטי (ואני בהם), ובהנחייתה של נצה התמודדו עם בעיה מתמטית פתוחה. לא תמיד היא ממש פתוחה – לרוב אין מדובר בבעיות שהמחקר המתמטי לא פתר עדיין; ברם, גם אז היא פתוחה במובן המקומי – היא אינה ידועה מראש למרבית המשתתפים. וככזאת, היא מעוררת סקרנות ועניין, מגרה את החשיבה ומדרבנת לחיפוש אחר כיווני חשיבה ודרכי פתרון. לעיתים הבעיה פשוטה יחסית, לעיתים מורכבת יותר, ובכל מקרה עשויה לפתח ערוצי חקר מעניינים ומגוונים; לעיתים הנושא והשאלות

מגלמת בתוכה בזעיר אנפין לא מעט ציפיות ממערכת החינוך המודרנית, כפי שבאות לידי ביטוי למשל [במצפן הלמידה של ה-OECD](#). לפי האמור אין הגדרה או מגבלה על הגיל או הרקע של המשתתפים – הפעילויות יכולות להתאים לבני 9-99.

האם המפגשים מתאימים לתלמידים המתעניינים במתמטיקה או למבוגרים העוסקים בחינוך מתמטי? אין צורך להכריע בכך. במפגשים עצמם עוסקים במישרין רק בחשיבה מתמטית ולא בדרכי הוראה או למידה, אך ברור שבמהלך העיסוק חולפים בראש רעיונות ומחשבות כיצד אפשר ליישם את האתגרים המוצגים ודומים להם בעבודה עם תלמידים כדי לפתח את יכולותיהם, את סקרנותם ואת אהבתם למתמטיקה.

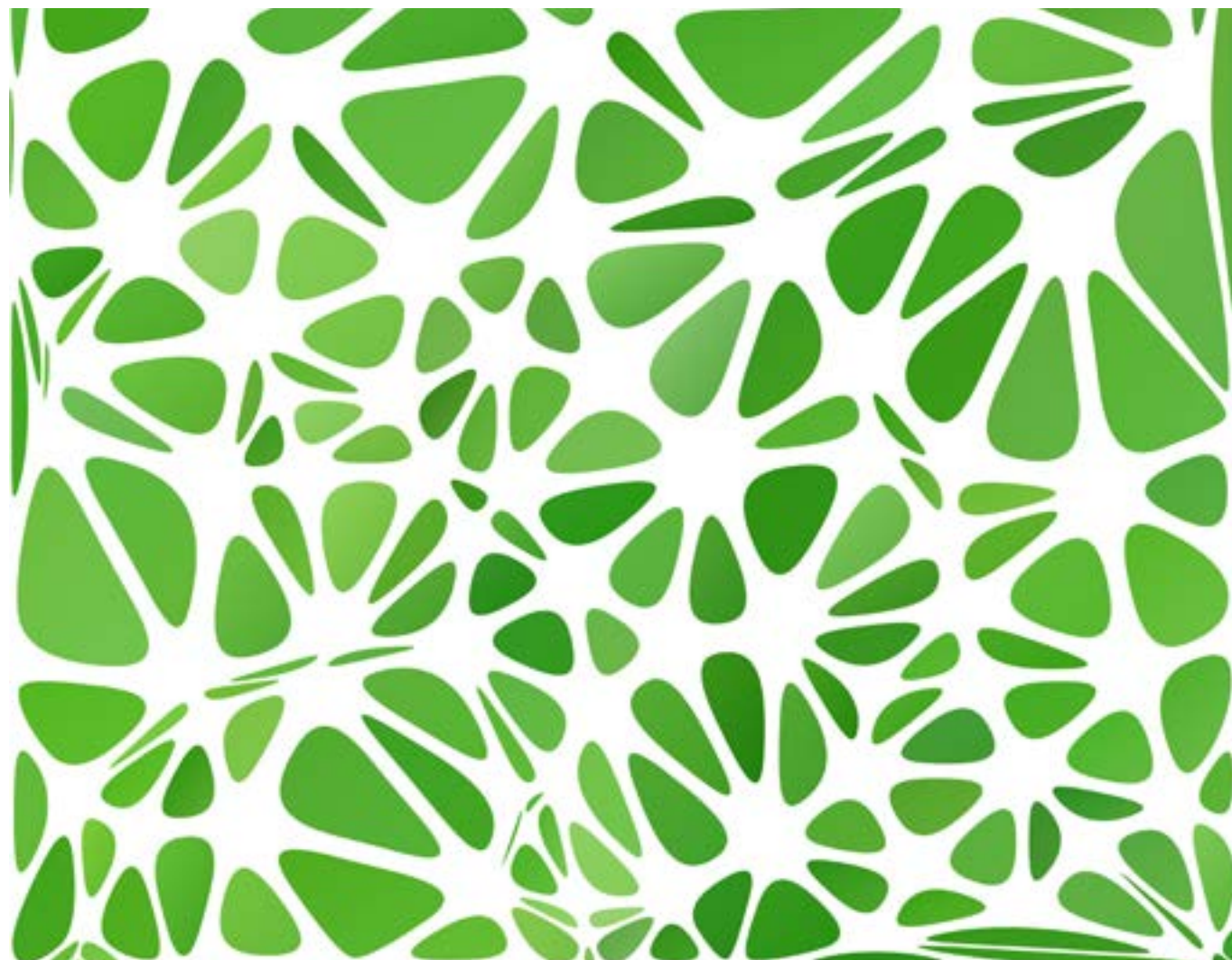
ספק אם מסגרת הפעולה שתוארה הייתה מגיעה לעולם לולא נחתה על כולנו הקורונה ששינתה את כללי המשחק הגלובליים. ברם, נראה שגם כאשר מגבלות הקורונה יתמעטו והעולם יחזור (פחות או יותר) לתפקוד חברתי כפי שהכרנו טרם המגפה, יהיו דברים טובים שיישארו עימנו. נקווה שסמינר מתקושב זה יהיה אחד מהם.

ומה באשר לזיקיות שפגשנו בתחילת הכתבה? ובכן, נוכל לרמוז לכם שלאחר זמן אכן ייתכן שהזיקיות תהיינה כולן באותו הצבע, ואולם... הדבר ייתכן רק עבור אחד הצבעים! סקרנים? מוזמנים לחקור ולנסות לגלות.

הראשונות נשלחו למשתתפים ימים אחדים מראש, וכך התאפשר למעוניינים בכך לגבש כיווני חשיבה ראשוניים, ובפעמים אחרות הנושא לא הוצג מראש טרם המפגש וההתמודדות עימו נעשתה במלואה בזמן אמת.

החשיבה מתנהלת בחלק מן הזמן בעת המליאה כולה, לעיתים בקבוצות קטנות יותר לאחר חלוקה לחדרים (בזום) ולעיתים לבד; לאחר מכן חוזרים למליאה ומשתתפים במסקנות ובתובנות שהושגו בחשיבה משותפת. ומה עם הפתרונות המלאים? נצה לא "מסגירה" אותם, אבל היא שולחת למשתתפים בשמחה את המצגת. כך המפגש מסתיים בשיתוף ובדיון בכלל התובנות שמעלים המשתתפים, ועדיין נשאר כר נרחב לחשיבה נוספת לאחר תום המפגש למעוניינים בכך כדי לעבד את התובנות ולהרחיבן.

חלק מהיופי בהצגת האתגרים הוא במסגרת שלהם ובפשטותם בעת הצגתם. המשימה אינה מוצגת כ"בעיה מתמטית", אלא כאתגר במעטפת סיפורית, בין מציאותית בין דמיונית. במשפטים קצרים אחדים, בליווי איורים וכללים בסיסיים אפשר להבין את מהות המשימה ולצאת לדרך. ומהי הדרך? היא אינה סלולה מראש. לצד השאלות הראשונות המתניעות את התהליך מוצגות שאלות רבות נוספות שאפשר לחקור, ולא אחת המשתתפים מעלים עוד רעיונות מעניינים שלא תוכננו או נצפו מראש, ואפשר לבחון ולנתח אותם. אין כל צורך בידע מתמטי עמוק, בנוסחאות או בשיטות מתמטיות מורכבות. תחת זאת נדרש הרבה היגיון בריא לצד יכולות חשיבה גבוהות, כגון התמודדות עם נושא חדש ללא הכוונה, חשיבה ביקורתית, איסוף נתונים, הסקה והכללה. למעשה התמודדות כזו



הספר "ממלבן הזהב לסדרת פיבונאצ'י" מאת עופר ליבה

בת שבע אילני
אנטולי שטרקמן



ד"ר בת שבע אילני

עוסקת בייעוץ מתמטי, פיתוח חומרי למידה ופרסום מאמרים וספרים בנושאים מתמטיים מגוונים. עובדת עם המכללה האקדמית חמדת הדרום והאוניברסיטה העברית בירושלים. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, ייעוץ ועריכה של חומרים וספרים המיועדים לגנים, לבתי ספר, להכשרת מורים למתמטיקה בנושאים מגוונים. בין הספרים: פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך - תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; שימור ושינוי - תובנות אלגבריות בעולם המספרים.



ד"ר אנטולי שטרקמן

ראש החוג למתמטיקה במכללת תלפיות, חולון. כ-30 שנה מרצה במכללות להכשרת מורים ובמכללות להנדסה. עוסק בפיתוח תוכנות למתמטיקה - מתמטיקא ופיתגורס. עוסק בכתיבה ופיתוח של חומרי למידה וגם בייעוץ ועריכה של ספרי לימוד המיועדים לתלמידים, סטודנטים ולמורים למתמטיקה. עוסק גם במחקר מתמטי, פרסם כ-60 מאמרים בארץ ובחו"ל.

על עופר ליבה ז"ל (1953-2016)



עופר אהב מתמטיקה ועסק בה מילדותו. הוא היה מורה מסור שהשקיע שעות רבות בתלמידיו, יזם וארגן כנסים במתמטיקה, וכתב אין-ספור מאמרים למורים ולתלמידים בכתבי עת למיניהם, בהם עלון למורי המתמטיקה "על"ה" שבו שימש גם חבר המערכת ועורך מדור אינטרמטיקה ועוד.

עופר יזם וארגן את הכנס "על מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י" במכון מופ"ת, את המושב החינוכי-תרבותי בכנס השנתי Annual Meeting of the Israel Mathematical Union (IMU) וכן כנסים נוספים.

עופר לימד במגוון מסגרות בירושלים, בהן המכינה הקדם-אקדמית של האוניברסיטה ומכוני הכנה לבגרות. בכל השנים היה חבר בצוותי הדרכה רבים והנחה מורים למתמטיקה מכל רחבי הארץ. הוא העניק לתלמידים מחוננים העשרה מעבר לתוכנית הלימודים הרגילה הנלמדת במערכת החינוך.

על הספר הזה עופר עבד שנים רבות אבל לא הספיק להוציא אותו לאור.

לכן התגייסנו לערוך, להשלים ולהביא את ספרו לדפוס.

על הספר

רבות נכתב בארץ ובעולם על מלבן הזהב ועל סדרת פיבונאצ'י. למספרי פיבונאצ'י יש תכונות רבות ומעניינות. נכתבו עליהם ספרים שלמים ואף קיים כתב עת מתמטי, The Fibonacci Quarterly (<http://www.fq.math.ca>), שמוקדש כולו לתגליות של מספרי פיבונאצ'י ולהכללות שלהם. כמו כן, נוסדה אגודת פיבונאצ'י (<http://www.mathstat.dal.ca/fibonacci>) שמטרתה לגלות מופעים חדשים של סדרת פיבונאצ'י.

ספר זה מציג מבט מיוחד מההיבט המתמטי על חתך הזהב ועל מספרי פיבונאצ'י. הוא מתחיל בחתך הזהב ומגיע ממנו אל סדרת פיבונאצ'י.

הספר מציג בדרך ברורה ומובנית דרכי עבודה והיבטים לימודיים שקרובים לליבם של כל העוסקים במתמטיקה: התמודדות עם בעיות בדרכים מגוונות, קישורים בין תחומים שונים. העמקה והרחבה של מושגים מרכזיים, העלאת השערות וביסוסן באמצעות הנמקות והוכחות וכן יצירת הכללות. הספר מאתגר ומעורר את הרצון להעמיק ולחקור.



ספרו של עופר ליבה מומלץ לכל אוהבי המתמטיקה והמתעניינים בה, בכללם מרצים מורים, סטודנטים ותלמידי תיכון המעוניינים לפתור משימות מאתגרות בנושא מרתק זה. זהו ספר שיענג את כל מי שיהיה מוכן לצלול לתוך פרקיו ולהשקיע את המאמץ הנדרש.

פרופ' רון אהרונזי מהפקולטה למתמטיקה, הטכניון, כתב על הספר:

יופי מתמטי נוצר כאשר מתגלה סדר לא צפוי בתופעות, או כאשר נושא אחד מתקשר לפתע לנושא שנראה רחוק ממנו. ספרו של עופר ליבה עוסק בקשר בין יחס הזהב, מושג עתיק שהעסיק את היוונים הקדמונים, לבין נושא מעידן חדש יותר: הסדרות המספריות של פיבונאצ'י. הקוראים נחשפים ליופי של כל אחד מהנושאים ולקשר הפורה בין שניהם. בכך מגיע הספר להישג הנדיר של כתיבה מתמטית פופולרית, שעם זאת אינה מתפשרת על התוכן המתמטי.

ד"ר מייקל פריד מהתוכנית להוראת המדע והטכנולוגיה, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, כתב על הספר:

ספר זה הוא הראשון בעברית אשר מוקדש כולו למתמטיקה של חתך הזהב ושל סדרת פיבונאצ'י, והוא מלווה את הקורא במסע מאורגן היטב. הספר כמעט אנציקלופדי בהיקפו והוא מכיל מגוון עצום של קישורים, הן בטקסט והן בתרגילים.

ד"ר עוזי ערמון ז"ל שהיה חבר סגל במכללת כנרת, שלוות אוניברסיטת בר-אילן, כתב על הספר:

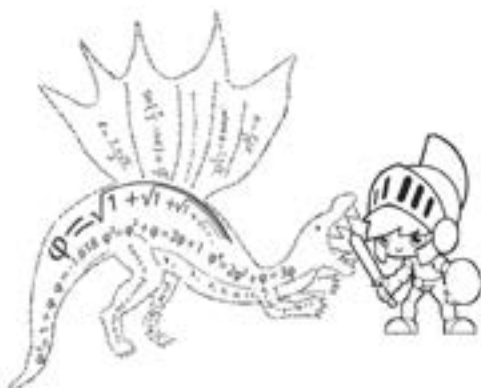
ספרו של עופר ליבה לוקח אותנו לטיול מרתק באחד התחומים המתמטיים היפים ביותר ומציג מידע רב בקשר למספר הזהב ולסדרת פיבונאצ'י. הוא מתחיל בהיכרות עם מספר הזהב $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ותכונותיו, כמו למשל $\phi^2 = \phi + 1$ או $1 - \phi = -\frac{1}{\phi}$ או $\phi + \frac{1}{\phi} = \sqrt{5}$. משם הוא עובר להיכרות עם משולשי זהב (משולשים שווים שוקיים שהיחס בהם בין הצלעות השונות הוא ϕ) ועם תכונותיהם, כגון קיומם במחומש משוכלל. בהמשך מגיעים ל"מחוזות סדרתיים": מסדרות פיבונאצ'י ולוקאס ועד לסדרות פיבונאצ'יות ולוקאסיות. לסדרות אלה יש תכונות מגוונות, כמו נוסחת קאסיני $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ או הנוסחאות $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ וגם מתקיימים קשרים מפתיעים עם מספר הזהב, כמו: $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$.

בנוסף לכך, הספר מציג באופן מרתק את המתמטיקה שנלמדת בבית הספר התיכון, תוך שימת דגש על עקרונות היסוד של מתמטיקה אמיתית, כמו אסתטיקה (למשל בצורות הגיאומטריות), רבגוניות בעשייה המתמטית (בניגוד לזו המבקשת פתרון אחד ויחיד), גישת החקר (לגילוי חוקים, הכללות, קשרים), הוכחות ידידותיות (אפשר להבין את הצורך בהן, לעקוב אחריהן ואפילו לגלותן לבד), אתגרים מחשבתיים (למשל בפרדוקסים) ופתרון בעיות (בדגש על שיטות חשיבה). בהקדמה שכתב, המחבר אכן מדגיש את חשיבות היופי של התבניות המתמטיות ושל הרעיונות

המתמטיים. לתפיסתו, יופיים הוא מבחנם החשוב ביותר.

תרומתו הגדולה של הספר, מעבר להצגת שפע ומגוון התכנים הקשורים למספר הזהב ולסדרת פיבונאצ'י, היא בבניית סביבת למידה מתמטית עשירה פעילויות ומטלות. שימוש בסביבת למידה עשירה הוא רעיון חינוכי רב עוצמה לשיפור ההוראה בכלל ולשיפור ולרענון הוראת המתמטיקה בפרט. סביבה כזו הכרחית להשגת שתי מטרות-על חינוכיות המשולבות זו בזו. מטרות-על אחת היא **החופש ללמוד**, כשם ספרו של קארל רוג'רס. סביבת למידה עשירה בפעילויות מספקת לכל לומד ולומדת את החופש לבחור את דרך הלמידה המתאימה להם, את הנושאים המעניינים אותם, את המטלות המסקרנות אותם, הכול לפי נטיות ליבם. החופש ללמוד חשוב ביותר, הן כדי לטפח את היצירתיות הטמונה בכל אחד מהלומדים, הן כדי לשפר את ההניעה שלהם והן כדי להנעים להם את הלמידה האמיתית. **למידה אמיתית** היא מטרות-העל החינוכית השנייה. הכוונה היא לפעילות עצמית ועצמאית המתבצעת עם אחריות אישית של הלומד או הלומדת. למידה כזו מושגת באמצעות פעילויות רבות, כגון קריאת חומר רלוונטי, חקירת הנושא הנלמד, התמודדות עם מטלות חשיבה, השוואת התשובות לתשובות מוכנים ועוד. למידה אמיתית בסביבת למידה עשירה בפעילויות עשויה לאפשר את הבניית המידע הנקלט ואת הפיכתו לידע מובן ובעל משמעות.

אכן, לספר זה יש פוטנציאל לסייע בשינוי של דרכי הוראת המתמטיקה ולמידתה. הוא מאפשר למידת מתמטיקה המבוססת על קריאת טקסט מתמטי, גישה שכמעט אינה מקובלת אצלנו. גישה כזו עשויה לסייע להשגת הבנה אמיתית של תכנים מתמטיים. לדוגמה, חקירת הסדרות הקשורות לסדרת פיבונאצ'י יכולה לשפר את הבנת מושגי הסדרה והטור. כיום רבים מבינים ש"סדרה" היא מושג מופשט (קבוצה מקוונת של מספרים), בעוד שהמושג "טור" עוסק בסכום הסדרה. למעשה, המושג "סכום סדרה" מתייחס לסדרת הסכומים החלקיים של סדרה, וסדרה זו היא מקרה פרטי של סדרה שנוצרת מסדרה כלשהי. מכל סדרה נוצרים "ילדים" רבים: סדרת ההפרשים (בסדרה חשבונית זו סדרה קבועה), סדרת המנות (בסדרה גיאומטרית היא קבועה, ובסדרת פיבונאצ'י היא סדרה השואפת לגבול - מספר הזהב), סדרת הריבועים, סדרת מכפלות כל שני שכנים ועוד. באופן ההולם את העיסוק ב"זהב", ספרו של עופר ליבה מצטיין בעושר. העושר מתבטא הן במגוון התחומים המתמטיים השזורים בספר, הן בשפע הפעילויות (חלקן בפרקים וחלקן בתרגילים) והן בקשרים בין התחומים המתמטיים השונים כפי שהם מתבטאים באחד הנושאים המתמטיים היפים, הקסומים והמפתיעים ביותר.



Paul R. Halmos:
Don't just read it, fight it!

מסע בעקבות בעיית סנגקו

משה סטופל
אבי סיגלר
עידן טל



פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.
מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים,
בהן שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית
שמואל, חיפה.
פרסם מאמרים רבים בכתבי עת שונים בארץ ובה"ל.
עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות
מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג
למתמטיקה ומנהל ב"ס שש-שנתי.

תקציר

נבחרה בעיית סנגקו בעלת רקע היסטורי עם ניסוח מעניין ותוצאה
מפתיעה. הבעיה מעוררת סקרנות ובעלת פוטנציאל חקירה בכיוונים
שונים. החקירה לוותה בשימוש בתוכנה ממוחשבת (ג'אוג'ברה)
להעלאת השערות ובדיקתן.

הרקע ההיסטורי לבעיות הסנגקו

יפן היא המקור לבעיות הסנגקו ולכן כהקדמה לרקע ההיסטורי שלהן
חשוב לציין אירוע שהחל לפני כ-30 שנה. מאמצע שנות השמונים
של המאה הקודמת "פרץ" בהתחלה ביפן תשבץ הסודוקו שבו צריך
לשבץ ספרות על לוח של 9X9 המורכב מתשעה תת-מצולעים
ריבועיים כך שבכל שורה ועמודה ובכל תת-ריבוע יופיע כל מספר
פעם אחת. בשנת 2005 "פרץ" המשחק למדינות המערביות של
הגלובוס וזאת לאחר צירופו למדור של תשבצים וחדות של
העיתונות הכתובה. ישנם אנשים שהפכו להיות "מכורים" לתשבצי
הסודוקו, וישנם מחקרים שלפיהם פתרון תשבצי סודוקו מעכב את
ההזדקנות המנטלית.

קדמו לתשבצי הסודוקו משימות החשיבה הנקראות **סנגקו** שאיתרו
בצורות גאומטריות את המקדשים היפניים החל מהמאה השש עשרה
ועד המאה התשע עשרה. ברבות השנים השוגונים מבית טוקוגאווה
סגרו את יפן מהעולם החיצוני במידה מוחלטת והיא נותקה
מההתערורות המדעית באירופה. אך גם בתקופה זו של בידוד,
המשיכה התרבות היפנית להתפתח מתוך עצמה. באותה עת היה
הסנגקו מילה ביפנית שפירושה לוח מתמטי – תחביב לאומי שכולם
עסקו בו, החל באיכרים וכלה באצולת הסמוראים.

הפותרים של החדות הגישו אותן על לוחות עץ שעוצבו וגולפו
בהידור רב. הלוחות האלה שעליהם נחרתו בעיות גאומטריות נתלו
כקישוטים מתחת לגגות המקדשים. בשנת 1989 פרסמו הידוטשי
פוקגאווה ודניאל פדואה את אסופת **הסנגקו** הראשונה שתורגמה
לאנגלית (Fukagawa & Pedoe, 1989). נכון להיום שרדו כ-880



ד"ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית
בירושלים וד"ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.
מרצה במכללת אפרתה, ירושלים ובשאנן - המכללה
האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.



עידן טל

בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה
למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על-יסודי)
בסמינר הקיבוצים. בוגר תואר שני בטכנולוגיות בחינוך
בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב
טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

ביישומון זה אפשר לגרור את הנקודות A, B, ו-C וכך לשנות את הרדיוסים של R ו-R₁. בשל השינויים משתנים הרדיוס של המעגל השלישי ואורכי צלעותיו של המשולש ECB ורואים שעבור כל ערך שלהם, הזווית $\angle O_2CB$ היא תמיד 90° . כמו כן ביישומון יש לחצן המאפשר לראות את שינויי הרדיוסים של המשימה עם הישר O₂C הניצב ל-AB, או בלעדיו.

עד כמה שידוע לנו, הבעיה הופיעה על הלוח שקישט את המקדש בציון התכונה הגאומטרית המאפיינת אותה תכונת הניצבות, בלי שמחבריה היפנים הוכיחו אותה. בנספח תוצגנה שתי הוכחות לנכונותה.

בנספח תוצגנה הוכחות לשתי טענות; אחת הוכחה אנליטית לבעיית הסנגוקו המקורית והשנייה הוכחה גאומטרית המובילה לבניית המעגל (O₂,R₂).

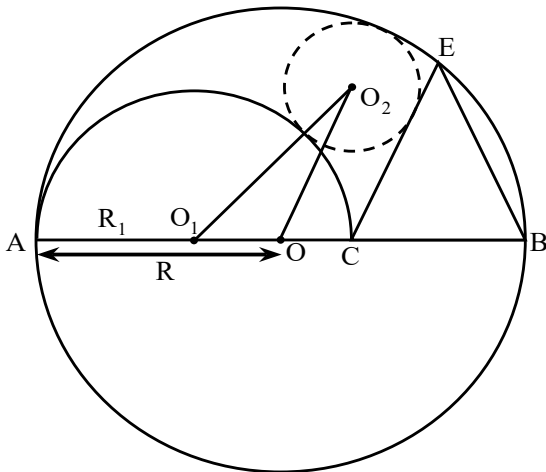
בנספח מופיעות שתי הוכחות מפורטות ועל כן נסתפק "באבני דרך" שמשמשות בסיס להוכחות המלאות.

טענה 1

הישר המחבר את מרכז המעגל O₂ עם הקודקוד C של המשולש ECB מאונך ל-AB.

תמצית הוכחה של טענה 1.

א. יש לשים לב ש $OO_2 + O_1O_2 = R + R_1$ גודל קבוע. לכן O₂ נמצא על אליפסה שמוקדה O ו-O₁ והציר הארוך שלה R+R₁. ראה איור 2.



איור 2

ב. ממקמים את האליפסה במערכת צירים כאשר הציר הגדול על ציר ה-X (AB). המוקדים ב-O ו-O₁, ואורך הציר הגדול הוא: $\frac{R_1 + R_2}{2}$ (באמצע הקטע המחבר את המוקדים עובר הציר האנכי של האליפסה).

לפיכך מקבלים את המשוואה של המקום הגאומטרי שנע עליו מרכז המעגל O₂. משוואת האליפסה היא: $\frac{4x^2}{(R_1 + R)^2} + \frac{y^2}{RR_1^2} = 1$. ג. מוצאים נקודה O₂ על האליפסה שמרחקה מ-EC שווה ל-O₂R-R₁.

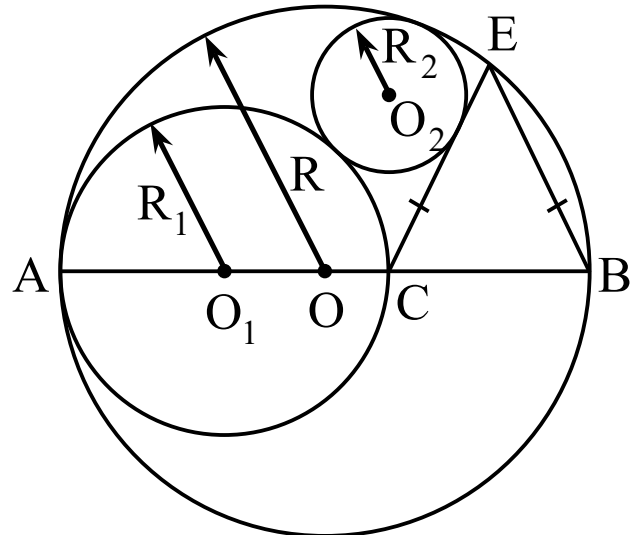
ד. מוכיחים ש-O₂C ⊥ AB.

לוחות סנגוקו. הבעיות היו בדרך כלל מעגלים בתוך מעגלים, משולשים או אליפסות ואף כדורים במרחב שנושקים זה לזה. רמת הקושי עלתה מבעיות פשוטות למדי ועד לרמת קושי כמעט בלתי אפשרית. באותן תקופות יפנים רבים אהבו לעסוק בפתרון משימות מתמטיות ושמחו לגלות את היופי הנסתר בגאומטריה שבה תכונות רבות הן בעלות גוון של שימור. למיטב ידיעתם של ההיסטוריונים, מחברי חידות הסנגוקו היו ככל הנראה מורים ותלמידיהם ויש מקום להניח שהלוחות נועדו לשמש עזרים ללימוד מתמטיקה וגם לכאלו שלא מתמטיקאים (מוסקוביץ, 2014, עמ' 15).

בשנים אחרונות אפשר למצוא מאמרים רבים העוסקים בפתרון בעיות שונות מתוך מאגר הסנגוקו.

במאמר זה יוצגו שני פתרונות לבעיית סנגוקו בצירוף חקר על הקשרים בין הגדלים של הבעיה, וכן שימוש בתכונה גאומטרית דינמית המאפשרת חקר דינמי של תכונת השימור. החקר המעמיק של הבעיה היפנית מצטרף לשורה ארוכה של מחקרים שעסקו בתכונות שימור במהלך ביצוע שינוי (Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2016; Segal & Stupel, 2015).

הצגת בעיית הסנגוקו



איור 1

נתון מעגל שרדיוס שלו R וקוטרו AB (מעגל (O,R)). למעגל זה משיק מבפנים בנקודה A מעגל שקוטרו AC (מעגל (O₁,R₁)). על קטע הקוטר CB כבסיס בונים משולש שווה שוקיים CEB (EB=EC) שקודקודו E נמצא על המעגל (O,R). מעגל שלישי, (O₂,R₂), משיק לשני המעגלים (O,R) ו-(O₁,R₁), וכן לשוק EC של המשולש ECB, כנראה באיור 1.

יש להוכיח:

$$O_2C \perp AB$$

השנה שבה הופיעה בעיה זו היא 1803.

כתובות לאנימציה וליישומון ג'אוג'ברה המציגים במידה פעילה את הבעיה ואת תכונת השימור שלה, נמצאות בקישורים 1 ו-2.

כתובת ליישומון ג'אוג'ברה המציג במידה פעילה את הבעיה ואת תכונת השימור שלה, נמצאת בקישור 1.

מקבלים אחרי חישובים שמפורטים בנספח ההוכחות:

$$R_2 = x = \frac{2R_1(R - R_1)}{R + R_1}$$

ב. מוצאים ש- x גם שווה למרחק מ- S שמצאנו למעגל R .

הערה:

הטענה השנייה משמשת בסיס לבניית המעגל שמרכזו O_2 בעזרת סרגל ומחוגה ובמידה מסוימת היא משמשת כעין משפט הפוך לטענה הראשונה.

החשיבות המתודית של הוכחות בדרכים שונות לאותה משימה

כפי שצוין, תוצגנה בנספח הוכחות מלאות לשתי הטענות אך בוודאי אפשר למצוא הוכחות בדרכים אחרות לאותן הטענות. אחת מהן היא הוכחה המשלבת טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית (המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי, ח"ת). מבחינה מתודית יש לכך חשיבות רבה. ככל "שארזו הכלים המתמטיים" העומד לרשותו של המתמודד עם הוכחת משפטים או פתרון בעיות הוא רחב יותר, כך גדל הסיכוי להצליח במשימה. חשוב לציין שאפשר לשלב כלים מתחומי מתמטיקה שונים ומתוך כך למצוא פתרונות בלתי קונבנציונליים, אלגנטיים, קצרים ויפים יותר ובכך להציג את המתמטיקה כעץ רחב בעל שורשים עמוקים וענפים המשתלבים זה בזה (Guberman & Leikin, 2013; Peled & Leikin, 2017; Stupel & Ben-Chaim, 2013).

עוד שאלות חקרניות שעוררה בעיית הסנגוק

ההתמודדות עם הוכחת התכונה גאומטריה המפתיעה הבעיה עוררו אצלנו מספר שאלות מסקרנות שתוצגנה לפני הקורא.

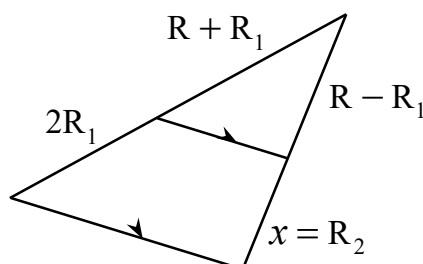
1. בחידה מדובר על מעגל המשיק לשני מעגלים משיקים ולקו ישר. איך אפשר לבנות את המעגל הזה?
2. א. מהו הערך המקסימלי של R_2 ?
- ב. האם ישנם מקרים פרטיים מעניינים?
- ג. נוצרים משולשים רבים מחיבורי הנקודות שבתצורה – מהם התנאים שחלק מהמשולשים יהיו הרוניים למחצה? הגדרה למשולשים הרוניים למחצה תובא בהמשך.

שאלה 1: איך בונים את המעגל R_2 ?

המעגל R_2 צריך להיות משיק ל- R ו- R_1 (המשיקים ביניהם) וגם משיק ל- EC .

$$R_2 = \frac{2R_1(R - R_1)}{R + R_1} \text{ ש-2 טענה}$$

לכן נבנה את הבנייה האלגברית כמתואר באיור 4.



איור 4

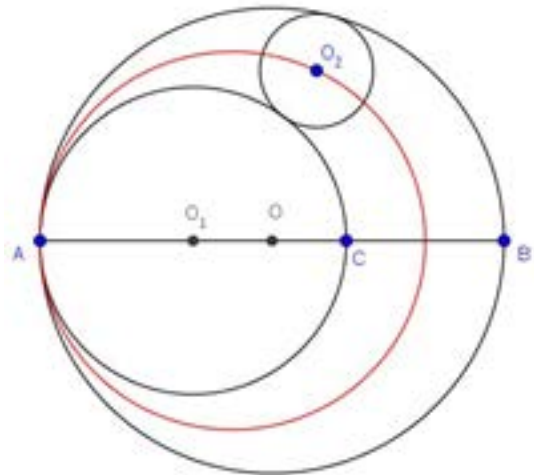
בניית הקטע מתבססת על משפט תלס.

אחרי מציאת הקטע שאורכו R_2 בונים את המשולש OO_2O_1 .

אפשר לבצע פעילות חקר דינמית ולראות את צורת העקום בעזרת קישור 3.

קישור 3: <https://www.geogebra.org/m/s8zpbqha>

כשגוררים את המרכז O_2 הוא משאיר עקבה על המסך המראה שהמרכז נע על גבי עקום של אליפסה, כנראה בתמונה 1 הלקוחה מהמסך של החקר הדינמי. עבור כל ערך של R ו- R_1 נשמרת צורת העקום. בכל שלב מופיעים על המסך הערכים של שלושת הרדיוסים: R_1 , R_2 ו- R .



תמונה 1

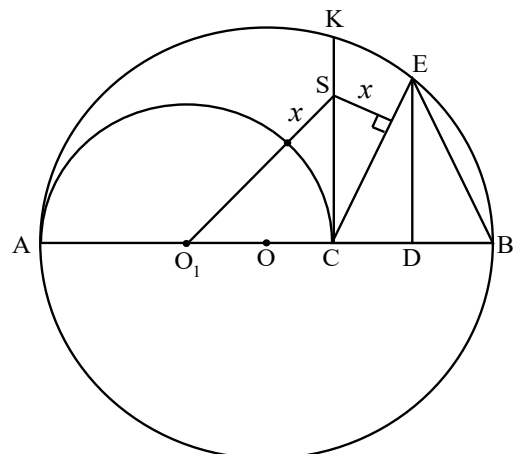
לחיצה על כפתור **Clear trace** מאפשרת למחוק את עקבת המקום הגאומטרי ולהמשיך בחקר הדינמי עבור ערכי רדיוסים אחרים.

טענה 2

על הקטע CK המאונך לקוטר AB בנקודה C קיימת נקודה שהיא מרכז המעגל O המשיק למעגלים (O_1, R_1) ו- (O, R) , וכן לשוק EC של המשולש ECB .

תמצית ההוכחה ללא שימוש בגאומטריה אנליטית

הרעיון המרכזי היה לבדוק האם הטענה ש- $O_2C \perp AB$ נכונה, ולהשתמש בטענה שאומנם $O_2C \perp AB$. כדי למצוא נקודה על האנך מ- C ל- AB המרוחקת במידה שווה ממעגל O , ממעגל O_1 ומן הישר EC . ראה איור 3.



איור 3

א. מוצאים נקודה S על האנך מ- C ל- AB כך שמרחק x מ- E שווה למרחק S מהמעגל O_1 .

א. R_1, R וצלעות המשולש O_1O_2O הם מספרים רציונליים.
ב. המשולש O_1O_2O הוא משולש הרוני רציונלי.

הוכחה

מסמנים: $AB=a, EB=b, AE=c$ כאשר a, b, c הם שלשה פיתגורית.
א. ברור ש- R רציונלי, כי $R = \frac{a}{2}$.

לפי משפט אויכלידס: $EB^2 = BD : AB$, ובמקרה שלנו:
 $BD = \frac{EB^2}{AB} = \frac{b^2}{a}$ ולכן $BD = DC = R - R_1$ ולכן $R_1 = R - BD = \frac{a}{2} - \frac{b^2}{a}$ גם R_1 רציונלי.

כפי שמצאנו בהוכחת התכונה באמצעות הנדסה אנליטית:
 $R_2 = \frac{2R_1}{R+R_1}(R-R_1)$ ולכן R_2 רציונלי, $O_1O_2 = R_1 + R_2$ וכן $OO_1 = R - R_1$ רציונלי.

ב. צריך להוכיח שהגובה O_2C במשולש O_1O_2O הוא רציונלי.
לפי הוכחת התכונה בדרך גאומטרית התקבל: $O_2C = \frac{2R_1 \sqrt{2R(R-R_1)}}{R+R_1}$

הביטוי הייחודי שמשמש בעיה הוא: $\sqrt{2R(R-R_1)}$, אבל זהו הערך של הקטע $EB=b$ ולכן כל הביטוי O_2C הוא רציונלי ועל כן שטח המשולש רציונלי משום שהוא מחצית מכפלת אורך הבסיס בגובה המשולש (גדלים רציונליים).

חקר דינמי

מאחר שמדובר בכמה תכונות שימור כשההוכחה המתמטית של התכונה המרכזית קשה במידה רבה, הוכנו שלושה יישומי גאוג'ברה המאפשרים חקר דינמי של התכונות השונות כמקובל בסוג כזה של בעיות (Segal, Stupel, & Oxman, 2016).

ביישומון אפשר לגרור את הנקודות B ו-C וכך לשנות את הרדיוסים של R_1 ו- R ולראות שעבור כל ערך שלהם, הזווית $\angle O_2CB$ היא תמיד 90° . בכל שלב מופיעים על המסך הערכים של שלושת הרדיוסים: RR_2, R_1 וכן אורכי הצלעות של משולש המרכזים O_1O_2O .

בגרירה של הנקודה C לערך של $R_1 = \frac{1}{3}R$, רואים שהמשולש O_1O_2O עבור ערך זה הוא משולש שווה צלעות.
אפשר להשתמש ביישומון באמצעות קישור 4.

קישור 4: <https://www.geogebra.org/m/kmqqzapr>

סיכום

מתוך אוסף של מאות בעיות גאומטריות הנקראות "בעיות סנגוק", שחיברו יפנים במאות השש עשרה-שמונה עשרה והוצגו כתבליטי קישוט במקדשים שלהם, נבחרה בעיה מעניינת בעלת תכונת שימור מפתיעה הממשיכה להתקיים במהלך שינוי גדלים. התבצע מחקר דינמי של תכונת השימור באמצעות הכלי הטכנולוגי הממוחשב. מאחר שאין להסתפק באישור נכונות התכונה באמצעות הכלי הטכנולוגי, הוצגו שתי הוכחות מנומקות כמקובל במתמטיקה. כמו כן הייתה התמקדות בשאלות מסקרנות אחרות שעוררה בעיית הסנגוק.

גם בעידן של טכנולוגיה ממוחשבת יש חשיבות גדולה שהמורה והתלמיד יהיו בעלי יכולת טכנית לבצע בניית גאומטריות, לפחות את הפשוטות שבהן, בעזרת הכלים המסורתיים: עיפרון, סרגל ומחוגה.

שאלה 2: מהו המקסימום של R_2 ?

כידוע: $R_2 = \frac{2R_1(R-R_1)}{R+R_1}$ מסמנים $R_1 = x, R_2 = y$ ומקבלים שאלה פשוטה לערך קיצון של פונקציה:

$$y = \frac{2x(R-x)}{R+x} = \frac{2xR-2x^2}{R+x}$$

$$y' = \frac{(2R-4x)(R+x) - (2xR-2x^2) \cdot 1}{(R+x)^2}$$

$$y' = 0 \text{ כאשר: } 2R^2 - 2Rx - 4x^2 - 2xR + 2x^2 = 0$$

$$x^2 + 2xR - R^2 = 0$$

$$x = \frac{2R \pm \sqrt{8R^2}}{2} = R \pm R\sqrt{2}$$

$$\text{הפתרון היחיד: } x = -R + R\sqrt{2} = R(\sqrt{2}-1) \approx 0.41R$$

כלומר הרדיוס המקסימלי של R_2 הוא $\approx 0.41R$.

שאלה 2: מקרים פרטיים מעניינים

מה הקשר בין R_1 ל- R כדי שהמשולש O_1O_2O יהיה שווה צלעות?
פתרון:

$$O_1O = R - R_1, O_1O_2 = R_1 + R_2, O_2O = R - R_2$$

(מעניין לשים לב ש- $O_1O = R$ קבוע)

$$\text{מציבים: } R_1 = R_2 = \frac{1}{3}R \text{ ומקבלים: } R_2 = \frac{2R_1(R-R_1)}{R+R_1}$$

$$\text{ואז: } O_1O_2 = O_2O = O_1O = \frac{2}{3}R$$

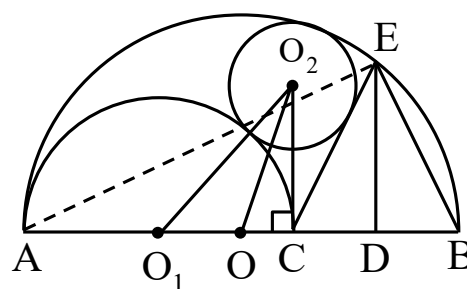
שאלה 2: משלושים הרוניים למחצה

הקדמה לשאלה:

הגדרה: משולש הרוני הוא משולש שאורכי צלעותיו מספרים טבעיים וגם שטחו מספר טבעי.

משולש הרוני רציונלי הוא משולש שאורכי צלעותיו מספרים רציונליים וגם שטחו מספר רציונלי.

טענה 2: נתון שהמשולש AEB הוא משולש שאורכי צלעותיו הם שלשה פיתגורית (איור 5).



איור 5

המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי. (ח"ת).
מעגלים מתגלגלים. אוחזר מתוך <http://newhighmath.haifa.ac.il/index.php/2015-05-11-06-53-50/515-2015-11-30-09-05-55>

מוסקוביץ, א' (2014). הספר הגדול של משחקי החשיבה 'א' שגיא, מתרגם). אור יהודה: כנרת, זמורה-ביתן, דביר.

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2016). Variance and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *The Far East Journal of Mathematical Education*, 16(4), 371-418. doi:10.17654/ME016040371

Fukagawa, H., & Pedoe, D. (1989). *Japanese temple geometry problems: San Gaku*. Winnipeg, Canada: Charles Babbage Research Centre.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 33-56. doi:10.1007/s10857-012-9210-7

Peled, I., & Leikin, R. (2017). Using variation of multiplicity in highlighting critical aspects of multiple solution tasks and modeling tasks. In R. Huang & Y. Li (Eds.), *Teaching and learning mathematics through variation* (pp. 341-353). Rotterdam: Sense Publishers. doi:10.1007/978-94-6300-782-5_19

Segal, R., & Stupel, M. (2015). An investigative task incorporating computerized technology with conserved property and generalization. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 9(2), 124-137.

Segal, R., Stupel, M., & Oxman, V. (2016). Dynamic investigation of loci with surprising outcomes and their mathematical explanations. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(3), 443-462. doi:10.1080/0020739X.2015.1075613

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(2), 129-161.

נספח

הוכחת טענה 1 – המשפט היפני (הוכחה לתכונת השימור של הניצבות $O_2C \perp AB$).

שימוש בגאומטריה אנליטית

ממקמים את הציור במערכת צירים שבה הנקודות A, B, C מונחות על ציר ה-x וציר ה-y עובר בנקודת האמצע שבין המוקדים F_1 ו- F_2 .

הפרמטרים של האליפסה הם:

$$2a = R + R_1 \Rightarrow a = \frac{R + R_1}{2}$$

$$2c = OO_1 = R - R_1 \Rightarrow c = \frac{R - R_1}{2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = R \cdot R_1$$

מכאן משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים O_2 הוא:

$$\frac{4x^2}{(R + R_1)^2} + \frac{y^2}{(RR_1)^2} = 1$$

על פי מיקום מערכת הצירים, השיעורים של הנקודות הן:

$$D\left(\frac{R + R_1}{2}, 0\right), C\left(\frac{3R_1 - R}{2}, 0\right), O\left(\frac{R - R_1}{2}, 0\right), O_1\left(\frac{R_1 - R}{2}, 0\right)$$

כאשר הנקודה D היא אמצע הקטע BC.

$$\left(x + \frac{R_1 - R}{2}\right)^2 + y^2 = R^2 \text{ היא } (O, R)$$

למציאת שיעורי הנקודה E, קודקוד המשולש השווה שוקיים ECB,

נציב את שיעורי הנקודה D במשוואת המעגל (O, R) ונקבל:

$$y_E = \sqrt{R^2 - R_1^2}$$

מכאן משוואת הישר שנמצא עליו הקטע EC הוא:

$$2\sqrt{R + R_1}x - 2\sqrt{R - R_1}y + \sqrt{R + R_1}(R - 3R_1) = 0$$

כעת מוצאים את נקודת החיתוך של האנך לקוטר AB העובר בנקודה C עם המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים (O_2, R_2) :

$$x_{O_2} = \frac{3R_1 - R}{2}, y_{O_2} = \frac{\sqrt{8}R_1}{R + R_1} \sqrt{R^2 - RR_1}$$

נשאר להוכיח ש- $R_2 = O_1O_2 - R_1$ שווה למרחק שבין O_2 לישר DC.

על פי שיעורי הנקודות O_1 ו- O_2 מקבלים: $R_2 = \frac{2R_1}{R + R_1}(R - R_1)$

בשימוש בנוסחה למציאת מרחק נקודה (x_0, y_0) מהישר

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ מוצאים שמרחק הנקודה}$$

$O_2(x_{O_2}, y_{O_2})$ מהישר העובר דרך הנקודות E ו-C גם הוא

$$d = \frac{2R_1}{R + R_1}(R - R_1), \text{ כלומר המעגל } (O_2, R_2) \text{ משיק לישר CE}$$

כאשר הנקודה O_2 נמצאת על האנך לקוטר AC שעובר דרך הנקודה C.

הערה: לצורך ההוכחה אפשר למקם את ציר ה-y גם במיקום אחר.

הוכחת טענה 1 בשימוש בגאומטריה אוקלידית בונים אנך CK ל-AB, כאשר הנקודה K היא נקודת החיתוך עם המעגל (O, R) , כנראה באיור 6.



מסמנים ב- x את המרחק SL , כך ש- $SO_1 = R_1 + x$.

$$\frac{x}{h} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{x^2}{h^2} = \frac{(R - R_1)^2}{CE^2} = \frac{(R - R_1)^2}{EB^2}$$
$$(1) \quad \frac{x^2}{h^2} = \frac{(R - R_1)^2}{2R(R - R_1)} = \frac{R - R_1}{2R}$$
$$(x + R_1)^2 = R_1^2 + h^2$$

בהצבת h^2 ממשוואה (1) במשוואה (2) וצמצום ב- x מקבלים:

$$(3) \quad x = \frac{2R_1 (R - R_1)}{R + R_1}$$

בשימוש במשוואה (3):

$$R - x = R - \frac{2R(R - R_1)}{R + R_1} = \frac{R^2 - RR_1 - 2R_1^2}{R + R_1}$$

$$(\text{SO})^2 = (\text{OC})^2 + \hbar^2$$

$OC = 2R_1 - R$, ואילו לפי משוואות (1) ו-(3),

$$h^2 = \frac{8RR_1^2(R-R_1)}{(R+R_1)^2}$$

$SO = R - x$, או: $OL = SO + R$, כאשר L היא נקודת ההשקה

של המעגל (O_2, R_2) עם המעגל (O, R) .

בכך הוכחה התכונה.

הכוונה לשיפוט עצמי מטה-קוגניטיבי במהלך פתרון בעיות טובנה מספרית בקרב תלמידים צעירים בכיתה ד'

סטלה גידלביץ'



ד"ר סטלה גידלביץ'

בוגרת לימודי דוקטורט בחינוך מתמטי מטעם אוניברסיטת בר-אילן.

מרצה ומדריכה פדגוגית במכללת אורנים ובמכללת שאנן.

עוסקת בחקר של מנגנון הוויסות העצמי בלמידה ובהתאמת תכניות התערבות מבוססות מחקר המפתחות מנגנון זה במתמטיקה ובתחומים דעת נוספים בקרב תלמידים עם מגוון יכולות בגילאים שונים.

תקציר

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לבחון השפעה של תוכנית התערבות המבוססת על שאלות מטה-קוגניטיביות עצמיות בשילוב אימון לשיפוט מטה-קוגניטיביים על תלמידי כיתה ד' ($n=12$), בהשוואה לקבוצת ביקורת ($n=12$) שלא נחשפה לתוכנית זו. ניתוח איכותני של החשיבה בקול רם עסק בשלושת השלבים של הוויסות העצמי בלמידה (SRL): תכנון, פיקוח והערכה בעת פתרון בעיית טובנה מספרית לא שגרתית. כמו כן הניתוח בכל שלב התמקד ברכיבי הוויסות העצמי: מטה-קוגניציה (ידע ובקרה של הקוגניציה), מוטיבציה (מטרות שליטה ומסוגלות עצמית) ושיפוט מטה-קוגניטיביים. מתוך ממצאי המחקר עולה כי תלמידים בקבוצת הניסוי הצליחו בפתרון בעיה לא שגרתית יותר מתלמידים בקבוצת הביקורת. נוסף על כך, נמצאו הבדלים בהיגדים הקשורים לוויסות העצמי בלמידה ובפרט לשיפוט מטה-קוגניטיביים בשלבי הוויסות למיניהם.

מילות מפתח: פתרון בעיות טובנה מספרית; הכוונה מטה-קוגניטיבית; שיפוט מטה-קוגניטיבי; ויסות עצמי בלמידה; חשיבה בקול רם.

מבוא

המחקרים הבין-לאומיים העוסקים בהערכת הישגים מתמטיים כגון TIMSS (2011) מתמקדים בשאלות לבדיקת יכולת לפתור בעיות טובנה מורכבות המצריכות שילוב בין תחומי ידע מגוונים. נוסף על ידע התוכן המתמטי ההכרחי, שאלות אלה דורשות מהלומד גם שימוש במגוון של מיומנויות קוגניטיביות. דרישות אלה תואמות לדרך הלמידה במאה העשרים ואחת, שבה המידע זמין ומהירות קבלתו ממשיך לעלות במידה דרמטית. שינוי זה משנה את מטרות החינוך עם שימת פחות דגש על העברת מידע והתמקדות רבה יותר בפיתוח של מיומנויות אוריינות ומיומנויות של ויסות עצמי בלמידה (SRL – Self-regulation in learning). ויסות עצמי בלמידה הוא

יסות עצמי בלמידה

הוויסות העצמי בלמידה (SRL) נוגע לתהליכים פרואקטיביים וקונסטרוקטיביים מחזוריים של תכנון מטרות הלמידה (חשיבה מראש), פיקוח (בעת ביצוע המטלות הלימודיות) והערכה (רפלקציה) המתרחשים בשלושת הרכיבים העיקריים: קוגניציה, מטה-קוגניציה (גם שיפוט מטה-קוגניטיביים) ומוטיבציה על פי קשר של תחום הדעת שהלמידה מתרחשת בו (Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008).

רכיב הקוגניציה והמטה-קוגניציה

קוגניציה היא תהליך הקשור לידע הבא לידי ביטוי הן בשימוש באסטרטגיות פשוטות, כגון שינון ועיבוד מידע, והן באסטרטגיות ברמות גבוהות יותר, כגון פתרון בעיות וחשיבה ביקורתית. מטה-קוגניציה היא חשיבה על חשיבה ומכוונת להבנת משימה ולאסטרטגיות פתרון (Flavell, 1979; Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008) ונוגעת לשלושה רכיבים מרכזיים: ידע של קוגניציה, שיפוט מטה-קוגניטיביים ובקרה של הקוגניציה (Pintrich et al., 2000).

ידע של הקוגניציה מביא ידע הצהרתי על אסטרטגיה / משימה ("מה?"), ידע פרוצדורלי לשימוש באסטרטגיות קוגניטיביות למיניהן ("איך?") וידע מותנה ("מתי" ו"למה?") לשימוש גמיש ומותאם באסטרטגיות קוגניטיביות מגוונות (Pintrich, 2002).

פיקוח מטה-קוגניטיבי מעריך את הבנתו של התלמיד במשימה של עיבוד ותכנון, ביצוע ורפלקציה (Pintrich et al., 2000; Zimmerman, 2008). המעקב נבדק בדקה פרופספקטיבית או רטרופספקטיבית תוך בחינת שלבים של לפני השלמת משימה, במהלכה או לאחריה באמצעות **שיפוט מטה-קוגניטיביים** סוגים של שיפוט מטה-קוגניטיביים המעורבים בתהליך הלמידה (Pintrich et al., 2000): קלות הלמידה (EOL – Ease of Learning); שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning); תחושה של ידיעה (FOK – Feeling of Knowing); ביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements).

שיפוט קושי או קלות הלמידה (EOL – Ease of Learning) עוסק בהערכה פרופספקטיבית של הלומד את הקושי או הקלות שלדעתו יצליח לפתור את המשימה הנתונה. שיפוט זה נעשה לרוב לפני העיבוד בפועל של משימת הלמידה ("האם המשימה קשה או קלה עבורי?"), "מה יהיה קל/קשה לבצע בה?" (Mihalca et al., 2017). מחקרים שנעשו בקרב סטודנטים לתואר ראשון הראו כי יכולת שיפוט זה עשויה להשתפר לאחר תרגול ארוך של הכוונה מפורשת המשולבת בהוראת תוכן (למשל, Cao & Nietfeld, 2005).

שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning) עוסק במודעות של הלומד לאסטרטגיית הלמידה שנבחרה ושיפוט פוטנציאלי של יעילותה של דרך העבודה שנבחרה. למשל, עצם הדבר שתלמיד יאמר לעצמו "אני לא מבין את הבעיה הזו", עשוי להביא אותו לקריאה נוספת של הבעיה (Azevedo et al., 2011). שיפוט JOL נוגע גם ליכולתו של הלומד להעריך את יכולתו העתידית לזהות את החומר שכבר למד ומתרחש בדרך כלל בעת הלמידה במהלך שלב הביצוע (Jemstedt, Kubik, & Jönsson, 2017; Pintrich et al., 2000). תלמידים עם הערכת יתר בשיפוט JOL עשויים להפסיק את ביצוע המטלות לפני השגת מטרות הלמידה (Isaacson & Fujita, 2006). מחקרים שבחנו התערבויות לשיפור הדיוק של השיפוט

אוסף של מיומנויות מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות המאפשרות ללומד להעריך במידה ביקורתית את ביצועיו ואת השגת מטרותיו הלימודיות וגם לבחון אסטרטגיות למידה שהשתמש בהן תוך בחינת למידה עתידית (Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008).

התלמידים לא רוכשים בספונטניות את מיומנויות הוויסות העצמי (Pintrich, Wolters, & Baxter, 2000; Zimmerman, 2008), אך החוקרים מציינים את היעילות בהוראה של מיומנויות אלה בעניין תחום התוכן שהלמידה מתרחשת בו (למשל, Pintrich, 2000; Zimmerman, 2000). בעוד הכוונה המכוונת למטה-קוגניציה ומוטיבציה נחקרה במידה רבה בתחום תוכן של פתרון בעיות במתמטיקה (Dignath, Büttner, & Langfeldt, 2008; Mevarech, 2014; Kramarski, &), רק מחקרים מעטים בחנו את תפקיד השיפוט מטה-קוגניטיביים בפתרון בעיות מתמטיות, במיוחד בקרב תלמידים צעירים (9 שנים).

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לבחון באמצעות ניתוח איכותני של חשיבה בקול רם את השפעתה של התוכנית הייחודית של הכוונה מטה-קוגניטיבית לשיפוט עצמי, הנוגעת לשלושה שלבים מחזוריים של הוויסות העצמי ולרכיבו: מטה-קוגניציה, שיפוט מטה-קוגניטיביים (מארבעה סוגים) ומוטיבציה, בהשוואה לקבוצת ביקורת שלא נחשפה לתוכנית זו.

בעיות תובנה מספרית בחתמטיקה

פתרון בעיות תובנה מספרית ידוע כאחד הנושאים הקשים ביותר להבנת תלמידים (למשל, TIMSS, 2011; Schoenfeld, 1992). תובנה מספרית היא רגישות לתהליך הדורש "הבנה של מצבים, הקשרים או מושגים תוך חיבורם לידע קיים או ניסיון קודם" (NCTM, 2009, p. 4). כדי לפתור בעיות תובנה מספרית נדרשות מיומנויות קוגניטיביות ברמה גבוהה, כגון יישום של תהליכים מתמטיים בנושא לא מוכר או מורכב (TIMSS, 2011).

מורים למתמטיקה מעוניינים שתלמידיהם יעסקו בחשיבה מתמטית. המונח 'חשיבה' משולב לעיתים קרובות ברעיונות של העמקת ההבנה והיישום של מושגים מתמטיים (Van Velzen, 2016). יש בספרות המחקרית כל מיני תובנות על המקור ליכולת של התובנה המספרית. כך תובנה מספרית היא יכולת מפורשת של הפרט ליצור הבנה באמצעות רפלקציה על החלטות ופעולות שעשה (Weick, Sutcliffe, & Obstfeld, 2005). כלומר על פי הגדרה זו, תובנה מספרית נובעת מרפלקציה מעמיקה שנעשתה לאחר הפתרון והיא תוצאה של גישה רטרופספקטיבית. על פי גישה אחרת, תובנה מספרית היא המקור למוטיבציה להשקיע מאמץ מתמשך בהבנת קשרים (שיכולים להיות בין אנשים, מקומות או אירועים), כדי לצפות מראש דרכי פתרון ולפעול ביעילות (Klein, Moon, & Hoffman, 2006). במילים אחרות, תובנה מספרית היא פרופספקטיבית. בדרך השילוב בין שתי הגישות אפשר לסכם שהחלטות הלומד ופעולותיו עשויות להשפיע על חשיבתו במתמטיקה הן פרופספקטיבית הן רטרופספקטיבית (Biccard, 2018).

מחקרים הראו כי אף שלאורך השנים נעשו מאמצים רבים להקנות לתלמידים מיומנויות לפתרון בעיות תובנה מספרית, לומדים רבים בגילים מסוימים עדיין מתקשים להפנים תהליכים אלה (Schoenfeld, 1992; TIMSS, 2011). סוגי בעיות אלה דורשים מהלומד להיות ערני במהלך כל תהליך הלמידה, לתכנן, לפקח ולהעריך את תהליך הפתרון. כמו כן הוא נדרש למוטיבציה. במילים אחרות, על התלמיד לווסת את תהליך הלמידה שלו.

ובקרה נמצאו קשורות למטרות שליטה (Al-Harthy, Was, & Isaacson, 2010).

מסוגלות עצמית מתארת את תחושת היכולת של האדם להגיע לתוצאה מסוימת (Bandura, 1986). מסוגלות עצמית קשורה לתובנה עצמית ומשפרת את השפעת היכולת על ביצוע (Tzohar- Rozen & Kramarski, 2014).

מחקרים בתחום הוויסות העצמי מראים שלעיתים קרובות לומדים מתקשים לפתח מיומנויות הקשורות לרכיבי הוויסות העצמי. ברכיב המטה-קוגניציה עולים קשיים בידע, שיפוט, פיקוח ובקרה, במיוחד בכל הנוגע לדיוק בשיפוט (Isaacson & Fujita, 2006; Jemstedt et al., 2017). קשיים נוספים נמצאים ברכיב המוטיבציוני כאשר נדרשות מטרות שליטה להשגת הבנה מעמיקה והצבת מטרות לטיפול הוויסות העצמי. תוכניות ההתערבות קודמות בחנו רכיבים שונים מתהליך הוויסות העצמי (Jacobse & Harskamp, 2012; Mevarech & Kramarski, 2014). לרבות שיפוט עצמי. עם זאת, הראיות האמפיריות על טיפוח שיפוט מטה-קוגניטיביים לסוגיהם אינם אחידים (Roderer & Roebbers, 2014; Roebbers et al., 2010). ריבוי סוגי השיפוט והקושי בהבחנה מדויקת ביניהם מקשים על יישומם בתהליך הוויסות העצמי, במיוחד בקרב תלמידים צעירים יותר (Huff & Nietfeld, 2009; Metcalfe & Finn, 2012). כמו כן לא נערכו עד כה מחקרים המכוונים לכל הרכיבים של הוויסות העצמי במתמטיקה בקרב תלמידים צעירים תוך שימוש במתודולוגיה של ניתוח חשיבה בקול רם.

אחת הדרכים לטיפול הוויסות העצמי בלמידה היא הכוונה מטה-קוגניטיבית לצורך שיפור הישגים בפתרון בעיות מתמטיות. הכוונה זו נשענת על שאלות מטה-קוגניטיביות עצמיות כמו מה? מתי? למה? כיצד? במהלך שלושת השלבים של הפתרון: תכנון, פיקוח והערכה (Kramarski & Mevarech, 2003; Mevarech & Kramarski, 1997, 2014). שאלות כלליות אלו מכוונות במפורש לשלבי הוויסות העצמי ומסייעות ללומד להגיע לאינטגרציה של הידע העומד לרשותו בפתרון בעיות באמצעות רעיונות, יצירה של קישורים ותובנות, זיהוי אסטרטגיות יעילות ופיתוח חשיבה מתמטית.

הערכה של תהליכי הוויסות העצמי בלמידה

אחד הנושאים המרכזיים שמעסיק חוקרים בתחום הוויסות העצמי הוא הערכת התהליך של הוויסות העצמי העומד מאחורי הצלחה או כישלון במהלך הלמידה (Zimmerman, 2008). החוקרים מציינים את החשיבות הרבה בשימוש בשיטות ובכלים אותנטיים להערכה של תהליך הוויסות העצמי בזמן אמת בהתחשב במורכבות התהליך ולצורך הבנתו (Azevedo, 2014; Greene & Azevedo, 2007). דוגמה לכלי מסוג זה הוא פרוטוקולים של חשיבה בקול רם (Veenman, Wilhelm, & Beishuizen, 2004). פרוטוקולים אלה מספקים דיווח ספונטני של הלומד על פתרון הבעיות בזמן אמת. שיטת החשיבה בקול רם יכולה לחשוף בזמן אמת את מטרותיו של הלומד בהגדרת משימת למידה, הבנת בעיה, תכנון פתרון, בחירת אסטרטגיה, מעקב אחר למידה, שיפוט מטה-קוגניטיביים מותאמים ולבסוף בקרה וקבלת החלטות. יתר על כן, שיטה זו יכולה להביא לידי ביטוי את המוטיבציה של הלומד בהתמודדות עם קשיים במגוון הדרכים (Greene & Azevedo, 2007). ניתוח מעמיק של החשיבה בקול רם תורם פרספקטיבה נוספת להבנת תהליכים דינמיים של שלבי הוויסות העצמי.

מסוג JOL בקרב הסטודנטים לתואר ראשון הראו שהסטודנטים לא תמיד מצליחים להשיג את מטרות הלמידה שהציבו לפנייהם (Logan, Castel, Haber, & Viehman, 2012; Townsend & Heit, 2011). לפיכך החוקרים ממליצים לטפח סוג זה של שיפוט בקרב סטודנטים לתואר ראשון.

תחושה של ידיעה (FOK – Feeling of Knowing) היא שיפוט מטה-קוגניטיבי פוטנציאלי ש"מתרחש כאשר אדם אינו יכול לזכור איך לבצע מטלה כלשהי, אך יש לו תחושה חזקה שהוא מכיר את דרך הביצוע" (Pintrich et al., 2000, p. 49). FOK מתבטא בשלב הביצוע כאשר הלומדים שואלים את עצמם: "האם קראתי, שמעתי או בדקתי בעבר משהו על בעיה זו?" (Azevedo et al., 2013). חוקרים העוסקים בסוג זה של שיפוט מצאו קשיים בטיפול של FOK. לדוגמה בקרב הסטודנטים לתואר ראשון לא מצאו קשר מובהק בין שיפוט זה לרכישת התוכן (Hicks & Marsh, 2002).

ביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements) הוא הערכה רטרופקטיבית הנוגעת לאמונה של התלמיד בפתרון ומתרחשת בעיקר בסוף תהליך הלמידה ("אני בטוח שצדקתי") (Mihalca et al., 2017). סוג זה של שיפוט מעריך את נכונות הפתרון (Roebbers, 2014; Krebs, & Roderer, 2014). מחקרים הראו נטייה גבוהה של הערכת יתר בשיפוט CJ בקרב תלמידים. יש סבירות גבוהה שהלומד עם שיפוט CJ גבוה לא יחפש את הטעות ולא יתקן אותה (Shin, Bjorklund, & Beck, 2007). מחקרים קודמים עמדו על כך שאפשר לפתח את שיפוט ה-CJ בקרב ילדים צעירים יותר שגילם נע בין 9 ל-10 שנים (למשל, Roebbers et al., 2014).

בקרה של הקוגניציה היא "תהליך, פעילות מתמשכת" (Pintrich et al., 2000, p. 50). בקרה מטה-קוגניטיבית נוגעת לבחירה ושימוש באסטרטגיות למידה ולחשיבה על תיקון טעויות. הבקרה קשורה לפיקוח מטה-קוגניטיבי ושיפוט מטה-קוגניטיביים המודיעים על עיבוד קוגניטיבי וביצועיו (Nelson & Narens, 1994).

רכיב המוטיבציה

המחקר הנוכחי מתמקד בתאוריית מטרות ההישג (Achievement Goals Orientation Theory) (Ames, 1992) שהתפתחה בשנים האחרונות כאחת התאוריות הדומיננטיות של מוטיבציה אקדמית הקשורה ישירות לתאוריית הוויסות העצמי (Efklides, 2008; Pintrich, 2000). תאוריה זו מתמקדת בהשגת המטרות שהציבו התלמידים במטרות הלמידה (Kaplan & Maehr, 1997; Elliot, 2002). יש הסכמה על הבחנה בסיסית בין סוגים מסוימים של מטרות למידה: **מטרות שליטה** ומטרות ביצוע (**מטרות ביצוע-התקרבות ומטרות ביצוע-הימנעות**) (Ames, 1992; Dweck, 1986). תלמידים המאופיינים במטרות שליטה מעריכים את הלמידה כמביאה תועלת ומעדיפים מצבי למידה שבהם אפשר להרחיב מיומנויות חדשות ולרכוש ידע חדש (Ames, 1992). מטרות שליטה מסייעות ללומדים לשפר את ביצועיהם, לקדם את למידתם ולרכוש אסטרטגיה מעמיקות (Nolen, 1988). לעומת התלמידים עם מטרות שליטה, תלמידים המאופיינים במטרות ביצוע התקרבות מעדיפים מצבים שבהם יוכלו להוכיח את יכולתם ולהשוות אותה ליכולת של תלמידים אחרים (Ames, 1992). תלמידים עם מטרות ביצוע הימנעות שואפים להימנע מהצגת חוסר יכולת לאחרים. הם משקיעים מאמץ מינימלי ומשתמשים לרוב באסטרטגיות שטחיות. ממצאים של מחקרים רבים מעידים כי תלמידים בעלי מטרות שליטה מדווחים על רמות גבוהות יותר של אסטרטגיות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות יעילות (Pintrich, 2000). אסטרטגיות תכנון, פיקוח

השאלות העצמיות הותאמו לגיל התלמידים (ראו תרשים 1).



תרשים 1: שאלות מטה-קוגניטיביות עצמיות בזיקה לשלבי הוויסות העצמי

(מבוסס על Mevarech & Kramarski, 1997, 2014)

מפגשים 2-6 הוקדשו לפתרון ארבע בעיות טובנה מספרית (בארבעה מפגשים פתרו המשתתפים בעיות שגרתיות ובמפגש החמישי פתרו בעיות לא שגרתיות) בזיקה לתוכנית הלימודים של משרד החינוך לכיתה ד' (משרד החינוך, 2006). מבנה המפגשים כלל שלושה שלבים עיקריים: (א) חזרה על שלושת סוגי השאלות המטה-קוגניטיביות העצמיות; (ב) פתירת ארבע בעיות טובנה מספרית לצד מענה בכתב על השאלות העצמיות במהלך התקדמות בפתרון הבעיה. כמו כן התלמידים התבקשו להעריך את עצמם בסרגל לשיפוט עצמי. כל סרגל שולב בבעיה אחת (ראו בנספח 2 דוגמה לדף העבודה); (ג) דיון באסטרטגיות לפתרון ובשאלות המטה-קוגניטיביות העצמיות.

במפגש 7 נערך סיכום תוכנית ודיון על תרומתה להבנה המתמטית של המשתתפים.

קבוצת ביקורת: תוכנית זו התמקדה בתכונותיהן של בעיות טובנה מספרית ובאסטרטגיות לפתרון בעיות אלה, על פי המלצת שיטת הלימוד בבית הספר. במפגש הראשון נחשפו התלמידים לנושא הבעיות המילוליות, נערך דיון לציון חשיבותן ברכישת מיומנויות כישורי חיים בלימוד מתמטיקה בהמשך. במפגשים 2-6 התלמידים פתרו ארבע בעיות טובנה מספרית והותו לאלה שפתרו התלמידים בקבוצת הניסוי. הזמן לפתרון הבעיות היה זהה בשתי הקבוצות. קבוצת הביקורת לא נחשפה לשאלות המטה-קוגניטיביות וסרגלים לשיפוט עצמי. עם זה הוסבר למשתתפים בקבוצה זו על החשיבות של הערכת הפתרון. כמו כן הומלץ למשתתפים לחשוב על פתרונם בעזרת השאלה "עד כמה אתה מאמין שהצלחת לפתור את הבעיה?". במפגש 7 נערך סיכום של לימוד הנושא בעיות מילוליות.

בעיית טובנה מספרית וחשיבה בקול רם: בתום תוכנית ההתערבות התבקשו התלמידים לפתור בעיה לא שגרתית בשיטת החשיבה בקול רם (Veenman et al., 2004). פתרון הבעיה שימש לשתי מטרות עיקריות: בחינה של השפעת ההתערבות על פתרון בעיה לא שגרתית; בחינה של השפעת ההתערבות על תהליכי הוויסות העצמי. החוקרת נפגשה עם כל תלמיד בנפרד, הציגה לפניו את המשימה וביקשה לבטא את דרך הפתרון. לא הייתה הגבלת זמן לפתרון הבעיה. הפתרון נמשך עשר דקות במוצא. פתרונות התלמידים הוקלטו ותועדו במסמכים כתובים, לרבות התנהגויות לא מילוליות שהחוקרת ראתה במהלך תהליך החשיבה.

לצורך המחקר הנוכחי נבחרה בעיית טובנה מספרית לא שגרתית, המחייבת את הלומד ליישם שיקולים לוגיים, חשיבה שיטתית, העברת ידע ומיומנויות למצבים חדשים וכן יכולת לשלב מיומנויות בעיה זו לא הייתה מהסוג שהתלמידים התנסו בו במהלך ההתערבות.

במחקר הנוכחי נעשה שימוש במתודולוגיה זו. לצורך הפיתוח של תוכנית ההתערבות, ארבעת הסוגים של השיפוט המטה-קוגניטיביים העצמיים – קלות הלמידה (EOL – Ease of Learning); שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning); תחושה של ידיעה (FOK – Feeling of Knowing); ביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements) – הותאמו ל"סרגלי השיפוט" ששולבו בתוך שלבי הוויסות העצמי. פרטים על התוכנית המלאה מוצגים בפרק השיטה ובנספח.

מטרת המחקר

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לבחון באמצעות ניתוח החשיבה בקול רם את השפעתה של תוכנית ההתערבות מטה-קוגניטיבית המשלבת אימון לשיפוט מטה-קוגניטיביים בשלבי הוויסות העצמי בהשוואה לקבוצת ביקורת שלא נחשפה לתוכנית זו. השפעת ההתערבות נבדקה במדדים האלה:

- פתרון בעיית טובנה מספרית.
 - רכיבי הוויסות העצמי בלמידה: מטה-קוגניציה (ידע ובקרה של הקוגניציה); מוטיבציה (מטרות שליטה ומסוגלות עצמית); שיפוט מטה-קוגניטיביים – קלות הלמידה (EOL – Ease of Learning); שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning); תחושה של ידיעה (FOK – Feeling of Knowing) וביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements).
- על פי מחקרים אמפיריים נבדקת השערה כי קבוצת הניסוי תגיע להישגים גבוהים יותר בפתרון בעיית טובנה מספרית לעומת קבוצת הביקורת. נוסף על כך, במהלך החשיבה בקול רם בקבוצת הניסוי מצופה ליותר היגדים הנוגעים למטה-קוגניציה ולמוטיבציה בכל שלבי הוויסות העצמי, בהשוואה למשתתפים בקבוצת הביקורת (לדוגמה Mevarech & Kramarski, 1997, 2014; Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014). לא גובשה השערה בנושא השיפוט המטה-קוגניטיביים, מאחר שממצאי מחקרים קודמים אינם חד-משמעיים או חסרים בתחום ארבעת סוגי השיפוט בהקשר המתמטי בקרב גילים צעירים (למשל, Roebers et al., 2014).

שיטה

משתתפים

במחקר השתתפו 24 תלמידים (10 בנים ו-14 בנות) בני 9-10 משתי כיתות ד' מבתי הספר היסודיים בצפון הארץ. הם חולקו לשתי קבוצות אקראיות: ניסוי וביקורת, 12 תלמידים בכל קבוצה. המורות ציינו כי הם תלמידים טובים עם ממוצע ציונים שנע בין 85 ל-100 במבחן מיפוי במתמטיקה שנעשה לפני ההתערבות. לכל קבוצה הייתה מורה אחת. שתי המורות בעלות תואר B.Ed. וניסיון של 15-20 שנים בהוראת מתמטיקה. המורות קיבלו הדרכה מעורכת המחקר. תוכנית ההתערבות בשתי הקבוצות ארכה שבעה מפגשים, 12 שעות הוראה. המפגש הראשון והמפגש האחרון ארכו שעה ומפגשים 2-6 ארכו שתיים.

תיאור תוכנית ההתערבות

קבוצת ניסוי: במפגש הראשון הוצגה תוכנית ההתערבות וחשיבותה. במהלך המפגש הוסברו לתלמידים שלושת שלבי הוויסות העצמי, השאלות העצמיות, ארבעת הסרגלים לשיפוט עצמי ושימוש בהם (ראו נספח 1). התלמידים התנסו בדוגמה לשימוש בסרגלים. השאלות המטה-קוגניטיביות העצמיות במחקר זה מכוונות להבנה, לבחירת אסטרטגיה ולרפלקציה על פי שלושת השלבים של הוויסות העצמי: תכנון, פיקוח והערכה (Zimmerman, 2000).

בבית הספר רכשו דגי זהב לאקווריומים הכיתתיים.

הילדים במועצת התלמידים תחילה חשבו לשים בכל אקווריום 4 דגי זהב, אך אחרי חלוקה זו דג אחד היה נשאר ללא אקווריום.

לאחר חישוב נוסף התברר שאם ישימו בכל אקווריום 5 דגי זהב, כל הדגים ייכנסו לאקווריומים.

כמה דגי זהב רכשו בבית הספר?

נמקו



דרך ניתוח הממצאים

1. פתרון הבעיה: התשובה הנכונה נוקדה בציון 1 והתשובה הלא נכונה ב-0. חושב אחוז התלמידים שנתנו תשובה נכונה בכל קבוצה.

2. תהליכי הוויסות העצמי עובדו בשני שלבים:

א. ניתוח תוכן של המסמכים (שקדי, 2011): יחדית תוכן הייתה ביטוי המבטא רעיון אחד; רוב ההיגדים היו מורכבים ממשפטים פשוטים. משפטים מורכבים שכללו יותר מרעיון אחד, חולקו למספר היגדים.

ב. מיון וסיווג של היגדים על פי רכיבי הוויסות העצמי: מטה-קוגניציה (ידע ובקרה של הקוגניציה), מוטיבציה (מטרות שליטה ומסוגלות עצמית) ושיפוט מטה-קוגניטיביים (ראו תרשים 2). בתהליך זה התמקדו בהתנהגויות לא מילוליות המעידות על תהליכי הוויסות העצמי (Pintrich et al., 2000).

כדי לבדוק את המהימנות של חלוקת ההיגדים לפי רכיבי הוויסות העצמי בכל אחד משלבי הפתרון נערך שיפוט בין שני שופטים. בעת שלושת השלבים של תכנון, פיקוח והערכה נמצאה מהימנות גבוהה בכל הרכיבים: 92% מטה-קוגניציה, 85% מוטיבציה ו-90% שיפוט עצמי.

שלבי הוויסות העצמי	תכנון	פיקוח	הערכה
מטה-קוגניציה: ידע של הקוגניציה בקרה של הקוגניציה	"אחרי שאקרא שוב את הבעיה, אני אבין אותה טוב יותר" (בקרה) "קודם כול, אני מדמיין לי את הסיטואציה של הבעיה" (ידע פרוצדורלי)	"הנתונים לא ברורים לי עד הסוף" (בקרה) "אני חושב שאני צריך להתחיל עם כפולות של 5" (ידע פרוצדורלי)	"בדקתי את כל האפשרויות" (בקרה)
מוטיבציה: מטרות שליטה ומסוגלות עצמית	"אני תמיד מצליח בבעיות מילוליות" (מסוגלות עצמית)	"חשוב לי מאוד לפתור את הבעיה הזאת" (מטרות שליטה)	"אחרי שפתרתי את הבעיה הזאת, אני חושב שאני אפתור כל בעיה" (מסוגלות עצמית)
שיפוט מטה-קוגניטיביים: שיפוט קושי או קלות הלמידה (EOL – Ease of Learning); שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning); תחושת הידיעה (FOK – Feeling of Knowing); ביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements).	"אני בטוח שאצליח בפתרון של הבעיה הזו" (EOL)	"אני לא בטוח שאצליח לפתור את הבעיה, הפתרון שחשבתי עליו לא נכון" (JOL) "אני לא חושב שראיתי קודם בעיות דומות" (FOK)	"אני בטוח שאין פתרונות אחרים" (CJ)

תרשים 2: דוגמאות להיגדים מתוך ניתוח החשיבה בקול רם השייכים לרכיבי הוויסות העצמי בלמידה ולשלבי

2. ניתוח איכותני-תהליכי של רכיבי הוויסות העצמי

מעתה היגדים המכוונים לידע ולבקרה של הקוגניציה ייקראו **היגדים מטה-קוגניטיביים**, היגדים המכוונים למטרות שליטה ולמסוגלות עצמית ייקראו **היגדים מוטיבציוניים** והיגדים המכוונים לשיפוט מטה-קוגניטיביים ייקראו **היגדי שיפוט**. הניתוח נעשה על פי השלבים של הוויסות העצמי בלמידה. בהמשך יוצגו דוגמאות

תוצאות

1. הישגים בפתרון בעיית תובנה מספרית

אחוזי ההצלחה הגבוהים ביותר היו בקרב קבוצת הניסוי שבה 70% מהם ענו תשובה נכונה. בקבוצת הביקורת רק 12% מן הנבדקים ענו תשובה נכונה.

טבלה 1: שכיחות בשימוש בהיגדים השייכים לשלבי הוויסות העצמי השונים בזיקה לקבוצות המחקר

שכיחות	ניסוי	ביקורת	סך הכול
היגדים מטה-קוגניטיביים			
תכנון			
שכיחות	54 (100%)	9 (45%)	63
ממוצע	4.5	0.75	
פיקוח			
שכיחות	46 (100%)	5 (28%)	51
ממוצע	3.8	0.42	
הערכה			
שכיחות	28 (92.3%)	0	28
ממוצע	2.3	0	
היגדים מוטיבציוניים			
תכנון			
שכיחות	5 (25%)	2 (17%)	7
ממוצע	0.42	0.17	
פיקוח			
שכיחות	3 (25%)	1 (8%)	4
ממוצע	0.25	0.08	
הערכה			
שכיחות	4 (25%)	1 (8%)	5
ממוצע	0.33	0.08	
היגדי שיפוט			
תכנון			
שכיחות	24 (100%)	8 (42%)	58
ממוצע	2	0.67	
פעולה			
שכיחות	26 (100%)	8 (58%)	144
ממוצע	2.2	1.5	
הערכה			
שכיחות	18 (92%)	7 (50%)	25
ממוצע	15	0.58	

שלב הפיקוח

בשלב זה נמצאו בסך הכול 51 היגדים מטה-קוגניטיביים, 46 (90%) היגדים נמצאו בקרב קבוצת הניסוי ו-5 (10%) היגדים בקרב קבוצת הביקורת. רק שליש מהתלמידים בקרב קבוצת הביקורת השתמשו בהיגדים מהסוג הזה לעומת כל התלמידים בקבוצת הניסוי שהשתמשו בממוצע בכמעט ארבעה היגדים לתלמיד (ראו טבלה 1). ההיגדים המטה-קוגניטיביים עסקו הן בידע של הקוגניציה (הצהרתי ופרוצדורלי) הן בבקרה של הקוגניציה. 35 היגדים המשמשים 68% מכלל ההיגדים שייכים לידע של הקוגניציה ו-16 (32%) לבקרה של הקוגניציה.

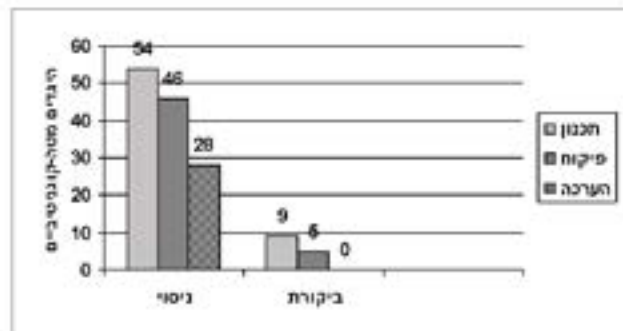
להלן דוגמאות של היגדים מטה-קוגניטיביים של נבדקים בשלב הפיקוח בקבוצות אלה:

אורית (ניסוי): אם אכפיל 4 ב-5, זה לא טוב, כי 20 מתחלק בדיוק, ובעיה כתוב שדג אחד נשאר... (בקרה)

להיגדים שהופיעו בשתי קבוצות המחקר. עם זה ניתוח ההיגדים נשען על כלל התשובות שניתנו ולפי זה נערכה הכללה עליהן.

היגדים מטה-קוגניטיביים בכל שלבי הוויסות העצמי

מעיון בתרשים 3 אפשר להבחין כי יש פער ניכר בשכיחות בהיגדים מטה-קוגניטיביים לטובת קבוצת הניסוי ($n=63$) לעומת קבוצת הביקורת ($n=14$). כמו כן נמצא שהנבדקים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדים מטה-קוגניטיביים בכל שלבי הפתרון, בעוד הנבדקים בקבוצת הביקורת לא השתמשו בהיגדים מסוג זה בשלב הערכה. נוסף על כך, בקבוצת הניסוי נצפתה שכיחות גבוהה יותר של שימוש בהיגדים מטה-קוגניטיביים בשלב התכנון, כלומר הנבדקים בקבוצה זו העמיקו בבירור הנתונים ובתכנון הפתרון בטרם החלו לפתור את הבעיה.



תרשים 3: הבדלים בין הקבוצות בשכיחות השימוש בהיגדים מטה-קוגניטיביים בשלושת השלבים של הוויסות העצמי

שלב התכנון

בשלב הזה נמצאו בסך הכול 63 היגדים בשתי הקבוצות, בהם 54 (86%) בקרב קבוצת הניסוי ו-9 (14%) בקרב קבוצת הביקורת. כל התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בסוג זה של ההיגדים, 4.5 היגדים בממוצע לכל תלמיד. בקרב קבוצת הביקורת לא כל תלמיד השתמש בסוג זה של ההיגדים ונמצא שימוש בפחות מהיגד אחד בממוצע לכל תלמיד (ראו טבלה 1). כמו כן נמצא כי 56 היגדים מכלל ההיגדים המטה-קוגניטיביים המשמשים 89.6% מכלל ההיגדים בשלב זה הם היגדים של ידע של הקוגניציה, ואילו רק 7 היגדים (10.4%) מכלל ההיגדים שייכים לבקרה על הקוגניציה.

להלן דוגמאות של היגדים מטה-קוגניטיביים בשלב התכנון בכל אחת מהקבוצות.

עין (ניסוי): נראה לי שזאת בעיה של כפל. (ידע הצהרתי)

איתן (ניסוי): אני מבין שצריך לפתור דווקא מהסוף. (בקרה)

עי (ביקורת): אפשר לא לקרוא בקול, אני רוצה לקרוא בלב... ככה אני מבינה טוב יותר את מה ששואלים אותי. (ידע הצהרתי)

מניתוח ההיגדים עולה כי הנבדקים התעמקו בהבנת השאלה וחיפשו אסטרטגיות שנמצאו יעילות בעבורם. עם זה נמצא כי תדירות הופעת ההיגדים ועוצמתה שונה בין הקבוצות. למשל התלמידים בקבוצת הניסוי העריכו את הבנתם את הבעיה וחיפשו אסטרטגיה לפתרון תוך הבנה והצלחה של נתוני הבעיה ושימוש בשפה מתמטית. בשלב זה לא נצפתה בקבוצת הביקורת בחינת אסטרטגיות יעילות של דרך הפתרון או אסטרטגיות למידה יעילות.

דילן (ניסוי): הילדים חילקו פעמים את הדגים... (ידע פרוצדורלי)

לא נכון להתייחס רק לחלוקה הראשונה... (בקרה)

ניכר מההיגדים כי הנבדקים העריכו אם האסטרטגיה שבחרו יעילה לפתרון (ידע), וכן אם היא מתאימה לנתוני הבעיה (בקרה). ניכר שימוש בשפה מתמטית יפה להמללת תהליכי הפתרון, וכן הצלבה בין נתוני הבעיה ובין התובנה כי הפתרון יגיע רק מתוך התבוננות מקיפה בכל הנתונים.

גיא (ביקורת): נראה לי... שצריך להכפיל... (ידע הצהרתי)

גלית (ביקורת): אבדוק קודם את פעולת הכפל (ידע הצהרתי)

בהיגדי הנבדקים בקבוצה הביקורת בלט הצורך בבחירת אסטרטגיה של תוכן לפתרון הבעיה, אך ללא המללה מספקת של תהליך הבחירה ובקרתו. בהיגדים לא ניכרת התבוננות מעמיקה בנתוני הבעיה, ועולה מהם שלא נעשה ניסיון להתבונן בנתונים בראייה כוללת.

שלב ההערכה

ההיגדים המטה-קוגניטיביים בשלב זה עסקו בבקרה מטה-קוגניטיבית ונמצאו בקרב קבוצת הניסוי בלבד 28 היגדים (ראו טבלה 1).

להלן דוגמאות של היגדים מטה-קוגניטיביים של המשתתפים בשלב הערכה:

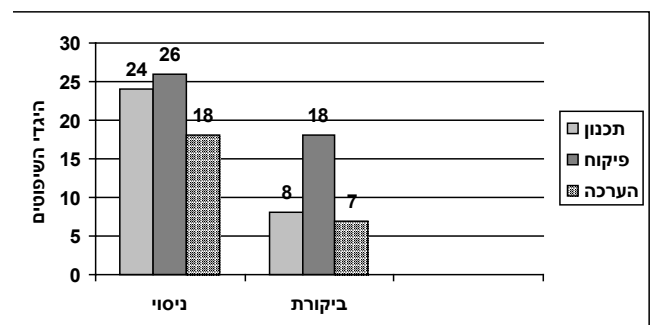
נאיה (ניסוי): התשובה היא 24, זה נכון כי השתמשתי בכל הנתונים: 4 ו-5 ודג אחד בלי אקווריום.

גלעד (ניסוי): התשובה היא 25. זה מתחלק ב-5 בלי שארית ו-4 עם שארית 1. בדקתי והפתרון הוא הגיוני.

מהיגדי הנבדקים בקבוצה זו ניכר כי הם מודעים לצורך בתהליך בקרה, חוזרים שנית לנתוני הבעיה, הן מילוליים הן מספריים, כדי לבדוק את נכונותו של הפתרון. כמו כן ניכר יישום של המונחים המטה-קוגניטיביים שנלמדו במהלך ההתערבות ושימוש בשאלה עצמית: האם הפתרון הוא הגיוני? מכאן שהמשתתפים בקבוצה זו הצליחו להפנים וליישם את עקרונות תוכנית ההתערבות שהשתתפו בה.

היגדי שיפוטם בכל שלבי הוויסות העצמי

כפי שמוצג בתרשים 4, המשתתפים בשתי הקבוצות השתמשו בהיגדי השיפוטם בכל שלבי הוויסות העצמי. עם זה תדירות השימוש בהם הייתה שונה בין הקבוצות, ותלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדי השיפוטם בתדירות גבוהה יותר ($n=68$) לעומת קבוצת הביקורת ($n=33$). ממצא מעניין שמוצג בתרשים 4 מראה כי רוב ההיגדים בשתי הקבוצות נצפו בשלב הפיקוח. ממצא המעיד על כך שהתלמידים העריכו את תהליך הפתרון.



תרשים 4: הבדלים בין הקבוצות בשכיחות השימוש בהיגדי השיפוטם בשלושת השלבים של הוויסות העצמי

שלב התכנון

מניתוח ההיגדים עולה כי הנבדקים הסתמכו בשיפוטיהם על נתוני הבעיה, על הניסיון הקודם שלהם בפתרון בעיות ועל הידע המתמטי שלהם. בסך הכול נמצאו 32 היגדים בשלב זה, בקבוצת הניסוי נמצאו 24 היגדים (75%) ובקבוצת הביקורת נמצאו רק שמונה היגדים (25%). כל התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדי השיפוטם (בשני היגדים בממוצע כל אחד), לעומת חמישה תלמידים בקבוצת הביקורת שהשתמשו בפחות מהיגד אחד בממוצע לתלמיד (ראו לעיל טבלה 1). היגדי השיפוטם בשלב זה עסקו כולם בשיפוט הקלות או הקושי של מטלת הלמידה (EOL – Ease of Learning).

להלן דוגמאות של היגדי שיפוטם של נבדקים בקבוצות אלה בשלב התכנון:

ני (ניסוי): אני לא בטוח שאדע לפתור. לא פתרנו בעיות כאלה...

רותם (ביקורת): אני בטוחה שאפתור... למרות שיש הרבה נתונים והיא מסובכת...

שלב הפיקוח

היגדי השיפוטם שנמצאו בשלב זה היו שיפוט הלמידה (JOL – Judgement of Learning) ותחושת הידיעה (FOK – Feeling of Knowing). מתוכם 26 (59%) היו בקבוצת הניסוי, ו-18 (41%) בקבוצת הביקורת. כל התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדי השיפוטם בשלב זה (2.2 היגדים בממוצע), לעומת ארבעה תלמידים בקבוצת הביקורת שהשתמשו ב-1.5 היגדים בממוצע (ראו טבלה 1). חשוב לציין כי השיפוט JOL היה השכיח ביותר בשלב זה (38 היגדים, 86% לעומת FOK – שישה היגדים (14%), כנראה בשל המורכבות של הבעיה הלא שגרתית. מכיוון שהנבדקים לא פתרו בעיות מסוג זה בעבר, הם התקשו להביע את תחושתם ולציין אם הם בטוחים בידיעת הדרך או הפתרון. גם השיפוטם בשלב זה, בדומה לאלה שבשלב התכנון, נמצאו בקרב שתי הקבוצות אך בתדירות שונה. עד כה הנבדקים הסתמכו בשיפוטיהם על הפתרון שכלל ידע מתמטי על סמך ניסיון קודם, ובדקו את תחושתיהם על הדרך בשלב זה של הפתרון. כמו כן ניכר כי השיפוטם סייעו להם בתהליך קבלת החלטות לקראת ההמשך.

להלן דוגמאות של שימוש בהיגדי שיפוטם בשלב הפיקוח בכל אחת מהקבוצות.

תומר (ניסוי): אם אכפיל 4 ב-5, זה לא טוב, כי 20 מתחלק בדיוק ואני צריך שדג אחד יישאר בלי אקווריום... נראה לי שאני לא מבין... (JOL)

אזיז (ניסוי): התשובה 5 מתאימה לפי הנתונים... אבל זה לא נראה לי הגיוני שיהיה רק אקווריום אחד... (JOL)

לא חושב שראיתי בעיה כזו פעם... (FOK)

גיאן (ביקורת): נראה לי שאני לא מבין... (JOL)

לאחר עיון מעמיק בהיגדי ה-JOL בשלב הפיקוח יש מקום להסיק שההיגדים בקבוצת הניסוי מכוונים לאסטרטגיות פתרון ומאפיינים אותן. הנבדקים בקבוצה זו, לעומת קבוצת הביקורת, העניקו להסבר של הדרך חשיבות רבה יותר. כמו כן מהמללת תהליך הפתרון אפשר ללמוד על התובנות שהגיעו אליהן הנבדקים.

אֵלֶּה (ביקורת): היה נראה לי קל בהתחלה אך עכשיו אני רואה שלא... אני רוצה להצליח בפתרון הבעיה הזו.

שלב הערכה

בדומה לשלב הפיקוח, ההיגדים המוטיבציוניים בשלב הערכה נמצאו לרוב בקבוצת הניסוי (80%) והשתמשו בהם שלושה משתתפים.

בקבוצת הביקורת נמצא היגד מוטיבציוני אחד. ארבעה היגדים (80%) נגעו למסוגלות עצמית והיגד אחד למטרות שליטה.

אֵלֶּה (ניסוי): אני רציתי לפתור את הבעיה כי זה היה מאתגר אבל גם מעניין. (מטרות שליטה)

אֵלֶּה (ביקורת): היה קשה אבל פתרתי את זה. (מסוגלות עצמית)

דין

מטרת המחקר הנוכחי היא להציג את חשיבות התפקיד של תהליך הוויסות העצמי בלמידה בשלושת השלבים (תכנון, פיקוח והערכה) במהלך פתרון בעיית תובנה מספרית לא שגרתית בתהליך החשיבה בקול רם. השימוש בחשיבה בקול רם נבע מהצורך לחשוף תהליכים ספונטניים הנוגעים למטה-קוגניציה, מוטיבציה ושיפוטיות במהלך פתרון בעיות. הערכה של תהליך הוויסות העצמי בזמן אמת משמשת בסיס מדויק יותר למסקנות על יכולתם של הנבדקים לשפוט ולבקר את תהליך הלמידה ולכוון לרכיבי המוטיבציה, ההתנהגות וההקשר (Azevedo, 2014). ממצאי המחקר מעידים כי תלמידים בקבוצת הניסוי שנחשפו להכוונה מטה-קוגניטיבית ולאומון לשיפוטיות הגיעו לתוצאות גבוהות יותר בפתרון הבעיה הלא שגרתית לעומת התלמידים בקבוצת הביקורת. כמו כן בקרב קבוצת הניסוי נצפו היגדים רבים יותר המעידים על מטה-קוגניציה, מוטיבציה ושיפוטיות מטה-קוגניטיביים.

פתרון בעיות תובנה מספרית לא שגרתית

הספרות המקצועית ממליצה על הקניית מיומנויות מטה-קוגניטיביות הן ללומדים צעירים הן למבוגרים משום שכלים אלה מסייעים בשיפור הישגיהם בתחום המתמטיקה (Dignath et al., 2008; Mevarech & Kramarski, 2014). המשימה שנבחרה למטרות המחקר הייתה בעיה לא שגרתית. בעיות לא שגרתיות הן מעצם הגדרתן בעיות שהתלמידים לא נחשפו אליהן בעבר והן דורשות מלומדים להפגין תובנות במהלך הפתרון ולהסיק מסקנות (TIMSS, 2011). נראה כי יצירת אסטרטגיות מהותיות המצויות במפורש בשאלות עצמיות של הכוונה מטה-קוגניטיבית, יכולה לעזור לתלמידים להעריך את ביצועיהם בכל אחד משלבי הפתרון, ובכך ליצור תובנה מספרית על פי גישה רטרופקטיבית (Weick et al., 2005). היתרון של שאלות מטה-קוגניטיביות העצמיות בפתרון בעיה לא שגרתית טמון בטיב השאלות המסייעות לקשר תהליכים ספציפיים של הפתרון עם תהליכים גנריים הקשורים לוויסות העצמי בעת הערכה ורפלקציה לצורך פיקוח ובקרה. תהליך חוזר זה אפשר לתלמידים להיות מודעים להיבטים המטה-קוגניטיביים של ידע ובקרה ולהפעיל אותם במשימה המורכבת. מסקנות אלה תואמות למחקרים קודמים המעידים על כוחם של מודלים מטה-קוגניטיביים מחזוריים במחקרי ההתערבות על הישגי התלמידים (למשל, Kramarski, Weisse, & Sharon, 2013; Zimmerman, 2008).

היגדי השיפוטיות בשלב הערכה נגעו לביטחון בשיפוט (CJ – Confidence Judgements) ונמצאו בקרב שתי קבוצות המחקר. 18 (72%) מתוך כלל ההיגדים נאמרו בקבוצת הניסוי (11 תלמידים מתוך 12), ואילו 7 (28%) היגדים נאמרו בקבוצת הביקורת (6 תלמידים מתוך 12) (ראו טבלה 1).

להלן דוגמאות של שימוש בהיגדי שיפוטיות בשלב ההערכה בכל אחת מהקבוצות:

אֵלֶּה (ניסוי): הצלחתי טוב, אבל הדרך הייתה לי ארוכה.

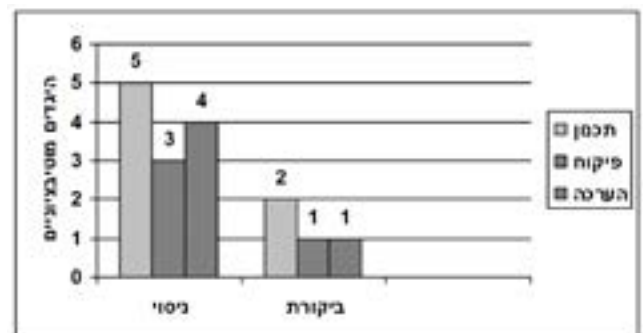
אֵלֶּה (ניסוי): הפתרון טוב, בדקתי וזה הגיוני.

אֵלֶּה (ביקורת): הצלחתי לפתור.

הנבדקים ציינו את שביעות רצונם מתהליך הפתרון וציינו את האתגר שעלה בעת פתרון הבעיה. התלמידים בקבוצת הניסוי הביעו יותר את רגשותיהם והציגו היגדים רבים מאוד בהשוואה לקבוצת הביקורת.

היגדים מוטיבציוניים בכל שלבי הוויסות העצמי

מתוך תרשים 5 אפשר לראות שהמשתתפים בשתי הקבוצות השתמשו בהיגדים מוטיבציוניים, אם כי בתדירות נמוכה יותר מאשר בהיגדים המטה-קוגניטיביים (n = 16). המשתתפים בקבוצת הניסוי אמרו את רוב ההיגדים המוטיבציוניים (75%). רוב ההיגדים נצפו בשלב התכנון (ראו טבלה 1).



תרשים 5: הבדלים בין הקבוצות בשכיחות השימוש בהיגדים מוטיבציוניים בשלושת השלבים של הוויסות העצמי

שלב התכנון

חמישה היגדים מוטיבציוניים נמצאו בקבוצת הניסוי (השתמשו בהם שלושה תלמידים) ושניים בקבוצת הביקורת (השתמשו בהם שני תלמידים). שלושה היגדים (43%) נגעו למטרות שליטה וארבעה היגדים (57%) נגעו למסוגלות עצמית.

אֵלֶּה (ניסוי): אני מאוד רוצה לפתור את הבעיה הזאת. (מטרות שליטה)
אני חושב שאוכל לפתור אותה בלי עזרה. (מסוגלות עצמית)

אֵלֶּה (ביקורת): אני חושבת שאוכל לפתור. (מסוגלות עצמית)

שלב הפיקוח

בשלב הזה רוב ההיגדים נמצאו בקרב שלושה תלמידים בקבוצת הניסוי (75%) ובקרב תלמיד אחד בלבד בקבוצת הביקורת. כל ההיגדים בשלב הזה עסקו במטרות שליטה (טבלה 1).

אֵלֶּה (ניסוי): אני חייבת לפתור את הבעיה.

ממצאי המחקר הראו כי בקרב קבוצת הניסוי בכל שלבי הוויסות העצמי (תכנון, פיקוח והערכה) נצפו יותר היגדים מטה-קוגניטיביים לעומת קבוצת הביקורת. ממצא מעניין נוסף היה שהתלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדים מטה-קוגניטיביים (ידע של קוגניציה ובקרה של הקוגניציה) בכל שלבי הוויסות העצמי, לעומת התלמידים בקבוצת הביקורת שלא השתמשו בהיגדים מהסוג הזה במהלך שלב הערכה. נוסף על כך, כל התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדים מטה-קוגניטיביים לעומת תלמידים מעטים בקבוצת הביקורת. יתר על כן, רוב ההיגדים המטה-קוגניטיביים בקבוצת הניסוי נמצאו בשלב התכנון.

ממצאים אלה בקרב תלמידים צעירים לא עולים בקנה אחד עם ממצאי מחקרים קודמים בספרות המקצועית המעידים על נטייה להשתמש בהיגדים המטה-קוגניטיביים בשלב הפיקוח במהלך פתרון בעיות מתמטיות. לדוגמה, במחקר שבדק את תהליכי הוויסות העצמי בקרב המורים למתמטיקה, ספרוס וכול (Spruce & Bol, 2015) מצאו כי השימוש בהיגדים השייכים למטה-קוגניציה היה נפוץ יותר בשלב הפיקוח. במחקר של קרמרסקי ופרידמן (Kramarski & Friedman, 2014) נמצא כי תלמידי כיתה ט' השתמשו בהיגדים המטה-קוגניטיביים בכל שלושת השלבים של פתרון בעיות מילוליות, אך עם שכיחות גבוהה יותר בשלב הפיקוח. יש מקום להניח שהבעיה הלא שגרתית במחקר הנוכחי דרשה תכנון מדוקדק יותר שהביא לידי תדירות גבוהה של היגדים מטה-קוגניטיביים בשלב התכנון בשתי קבוצות המחקר. לסיכום, הממצאים של מחקרים הנוכחי תומכים בהשערת המחקר ומרחיבים ממצאים של מחקרים קודמים המעידים כי תמיכה מטה-קוגניטיבית באמצעות שאלות עצמיות מסייעת ללומדים לשפר את הידע והבקרה המטה-קוגניטיביים בכל שלבי הוויסות העצמי.

היגדי השיפוט

ממצאי המחקר עומדים על כך שתלמידים משתי הקבוצות השתמשו בהיגדי השיפוט (שיפוט קושי או קלות הלמידה EOL – Ease of Learning; שיפוט הלמידה JOL – Judgement of Learning; תחושת הידיעה FOK – Feeling of Knowing; ביטחון בשיפוט CJ – Confidence Judgements) בכל שלבי הוויסות העצמי (תכנון, פיקוח והערכה), בעוד תדירות הופעת ההיגדים בקבוצת הניסוי גבוהה מזו שהייתה בקבוצת הביקורת.

היבט מעניין נוסף הוא ההבדלים בין סוגי השיפוט בשלושת השלבים של הוויסות העצמי:

בשלב התכנון הייתה התמקדות בשיפוט של הקושי או קלות של משימה הלמידה (EOL). כדי להעריך את עצמם על פי שיפוט זה, הסתמכו התלמידים על נתוני הבעיה, על הידע הקודם שלהם בפתרון בעיות דומות ובידע מתמטי כללי. בשלב זה, בקרב קבוצת הניסוי נצפו יותר היגדים השייכים לשיפוט EOL בהשוואה לקבוצת הביקורת. ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם ממצאי מחקרים של קאו ונייטפלד (Cao & Nietfeld, 2005) המראים שאימון לשיפוט ששולב בתחום התוכן, הביא לידי שיפור הדיוק בשיפוט מהסוג של EOL. עם זה מחקר זה (Cao & Nietfeld, 2005) נעשה בקרב סטודנטים, ואילו ממצאי המחקר הנוכחי מרחיבים את הממצאים האלה לתלמידים צעירים בכיתה ד'.

בשלב הפיקוח נצפו היגדים השייכים לשיפוט הלמידה JOL ולתחושת הידיעה FOK. המשתתפים בקבוצת הניסוי, בדומה לשלב התכנון, השתמשו בהיגדי השיפוט בתדירות גבוהה יותר מהמשתתפים בקבוצת הביקורת. חשוב לציין שהספרות המחקרית מעידה על חוסר אחידות בממצאים של תוכניות ההתערבות המשלבות אימון לשיפוט JOL ו-FOK ונראה כי אימון זה לא תמיד מביא לידי שיפור הדיוק בשיפוט (Hicks & Marsh, 2002; Logan et al., 2012; Townsend & Heit, 2011). אף על פי כן, במרבית המחקרים האימון לשיפוט JOL ו-FOK לא שולב בהוראה בתחום התוכן. ממצאי המחקר הנוכחי מראים כי האימון לשיפוט הלמידה ולשיפוט של תחושת הידיעה המשולב בתחום המתמטיקה, הגביר את המודעות של הלומדים בכיתה ד' לשיפוט של JOL ו-FOK.

בשלב הערכה בקרב שתי הקבוצות נמצא שימוש בשיפוט מסוג הביטחון בשיפוט (CJ). ממצאי המחקר מעידים שהתלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בשיפוט מסוג זה בתדירות גבוהה יותר מהלומדים בקבוצת הביקורת. ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם מחקרים קודמים שמצאו כי אימון לביטחון בשיפוט במהלך הוראת תחום תוכן תורם לשיפור בשיפוט CJ (Huff & Nietfeld, 2009; Roderer & Roebbers, 2010). לאחר תוכניות התערבות המשלבות אימון לביטחון בשיפוט, תלמידים צעירים שיפרו את יכולתם להעריך את נכונות ביצועיהם לאחר הפתרון (Roderer & Roebbers, 2010). לפיכך ממצאי המחקר הנוכחי תומכים בממצאי המחקרים הקודמים ומדגימים שיפור בביטחון בשיפוט לאחר האימון.

ההבדלים ברכיב השיפוט המטה-קוגניטיביים הבא לידי ביטוי בתדירות גבוהה יותר בשימוש בכלל השיפוט בקרב קבוצת הניסוי לעומת קבוצת הביקורת בשלושת השלבים של הוויסות העצמי נובעים מטיב תוכנית ההתערבות, שבה שולב אימון מפורש לארבעת השיפוט. ידוע כי תלמידים שנחשפו להכוונה מפורשת, מוכנים להשקיע זמן ומאמץ רבים בהסתגלות לגישה חדשה המסייעת להם להצליח (Davis, 2003). הסבר נוסף הוא כי השימוש ב"סרגלי השיפוט" סייע לתלמידים בקבוצת הניסוי לפשט את השיפוט ששלולים להיות מורכבים עבור לומדים צעירים בכיתה ד' ובכך לחוות את תהליך השיפוט הכללי. בהדגשת התהליך השיפוטי הספציפי באמצעות אימון, התלמידים שיפרו את המודלים המנטליים. מודלים אלה הם ייצוגים של מצבים הנשענים על ידע קודם ואפשר ליישם בקלות במשימות בהקשר חדש (Hattie & Yates, 2014). במחקר הנוכחי התלמידים בקבוצת הניסוי הצליחו להעביר ידע לבניה לא שגרתית לא מוכרת.

היגדים מוטיבציוניים

ממצאי המחקר מעידים כי משתתפים משתי הקבוצות לא השתמשו לרוב בהיגדים מוטיבציוניים, אם כי התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדים מוטיבציוניים יותר מהתלמידים בקבוצת הביקורת. ממצאים אלה נתמכים בממצאי מחקר של צוהר-רוזן וקרמרסקי (Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014) שבו לא נמצאו הבדלים במוטיבציה ובמסוגלות עצמית במהלך פתרון בעיות מילוליות בקרב תלמידי כיתה ה', בין הקבוצה שנחשפה להתערבות מטה-קוגניטיבית לעומת קבוצת הביקורת. חשוב לציין כי הממצאים במחקר של צוהר-רוזן וקרמרסקי התקבלו מניתוח שאלונים המבוססים על הצהרת הלומד, לעומת ניתוח של תהליכים המתרחשים בזמן אמת במהלך פתרון בעיה מסוימת, כמו שנעשה במחקר הנוכחי.

characteristics of self- and socially-regulated learning. *Metacognition and Learning*, 9(2), 217-228. doi:10.1007/s11409-014-9123-1

Azevedo, R., Cromley, J. G., Moos, D. C., Greene, J. A., & Winters, F. I. (2011). Adaptive Content and Process Scaffolding: A key to facilitating students' self-regulated learning with hypermedia. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 53(1), 106-140.

Azevedo, R., Harley, J., Trevors, G., Duffy, M., Feyzi-Behnagh, R., Bouchet, F., & Landis, R. (2013). Using trace data to examine the complex roles of cognitive, metacognitive, and emotional self-regulatory processes during learning with multi-agent systems. In R. Azevedo & V. Aleven (Eds.), *International handbook of metacognition and learning technologies* (Vol. 28, pp. 427-449). New York, NY: Springer.

Biccard, P. (2018). Mathematical sense-making through learner choice. *Pythagoras*, 39(1), 1-9. doi:10.4102/pythagoras.v39i1.424

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Cao, L., & Nietfeld, L. J. (2005). Judgment of learning, monitoring accuracy, and student performance in the classroom context. *Current issues in Education*, 8(4), 1-36.

Davis, E. A. (2003). Prompting middle school science students for productive reflection: Generic and directed prompts. *Journal of the Learning Sciences*, 12(1), 91-142. doi:10.1207/S15327809JLS1201_4

Dignath, C., Büttner, G., & Langfeldt, H. P. (2008). How can primary school students learn self-regulated learning strategies most effectively?: A meta-analysis on self-regulation training programmers. *Educational Research Review*, 3(2), 101-129. doi:10.1016/j.edurev.2008.02.003

Dweck, C. S. (1986). Motivational processes affecting learning. *American Psychologist*, 41(10), 1040-1048. doi:10.1037/0003-066X.41.10.1040

Elliot, A. J. (1997). Integrating the "classic" and "contemporary" approaches to achievement motivation: A hierarchical model of approach and avoidance achievement motivation. In M. L. Maehr & P. R. Pintrich (Eds.), *Advances in motivation and achievement* (Vol. 10, pp. 143-179). Greenwich, CT: JAI Press.

Efklides, A. (2008). Metacognition: Defining its facets and levels of functioning in relation to self-regulation and co-regulation. *European Psychologist*, 13(4), 277-287. doi:10.1027/1016-9040.13.4.277

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911. doi:10.1037/0003-066X.34.10.906

Greene, J. A., & Azevedo, R. (2007). Adolescents' use of self-regulatory processes and their relation to qualitative mental model shifts while using hypermedia. *Journal of Educational Computing Research*, 36(2), 125-148. doi:10.2190/G7M1-2734-3JRR-8033

Hattie, J., & Yates, G. C. R. (2014). *Visible learning and the science of how we learn*. London, UK: Routledge.

לפיכך ראוי להסיק כי טיפוח הרכיב המטה-קוגניטיבי אינו מביא בהכרח לידי העלאה במוטיבציה של הלומדים, כפי שנצפה במהלך פתרון בעיה לא שגרתית במחקר הנוכחי.

תרומת המחקר, מגבלות המחקר והצעות למחקר המשך

חידושו של המחקר הנוכחי הוא פיתוח של תוכנית התערבות ייחודית המתמקדת בהכוונה לטיפוח של השיפוט המטה-קוגניטיביים EOL, JOL, FOK ו-CJ המושלבת במודל של שאלות עצמיות בזיקה לשלושת השלבים של הוויסות העצמי. התוצאות של תוכנית ההתערבות נבדקו במהלך פתרון בעיה לא שגרתית באמצעות החשיבה בקול רם. תרומה נוספת של המחקר הנוכחי באה לידי ביטוי ביישום ההתערבות המבוססת על כל סוגי השיפוט בכל שלבי הוויסות העצמי בתחום המתמטי בקרב תלמידים צעירים, מתוך ניגוד למרבית המחקרים העוסקים בשיפוט מטה-קוגניטיבי מסוג מסוים בגילים הבוגרים והמבוגרים.

ממצאי המחקר מעידים על יתרונותיה של תוכנית ההתערבות, המאפשרים ללומדים לפתח את הרכיב המטה-קוגניטיבי ולשפר את יכולתם בתחום התוכן המתמטי. מסקנה זו חלה גם בתחום השיפוט המטה-קוגניטיבי ותומכת בהמלצות של מחקרים קודמים, למשל, רמדם וצימרמן (Ramdass & Zimmerman, 2008), שבחנו את יכולת השיפוט במהלך הוראת מתמטיקה. חוקרים אלה טוענים כי פתרון בעיות דורש שימוש באסטרטגיות מטה-קוגניטיביות לצד הדיוק בשיפוט, הקשור לקבלת החלטות במהלך הפתרון.

ממצאי המחקר הנוכחי מוגבלים בשל מיעוט המשתתפים ובשל השימוש בניתוח איכותני בלבד ללא התמקדות בנתונים כמותיים שעשויים ללמד על שיפור אפשרי בדיוק של השיפוט העצמי. יש צורך בעריכת מחקרים בתחומים אחרים עם תלמידים רבים יותר או מאפיינים של תלמידים לסוגיהם, כגון תלמידים מצטיינים או תלמידים עם לקויות למידה. כדי להעלות את אמינות הממצאים, יש להשתמש בהקלטות וידאו. יתר על כן, חשוב לבדוק את השפעתה של תוכנית ההתערבות לאחר שהיה מתום ההתערבות, ולא רק בסיום ההתערבות. לדוגמה, שלושה חודשים לאחר ההתערבות.

לסיכום, חשוב לשלב במחקרים עתידיים בתחום הוויסות העצמי כלים מתודולוגיים מגוונים המכוונים לעיבוד הנתונים, כגון חשיבה בקול רם. התמקדות בנתונים שנאספו במהלך תהליך הוויסות העצמי תתרום לקידום התאוריה, המתודולוגיה והפרקטיקה ולפיכך תביא לידי שיפור הגישות והשיטות בשדה החינוך (Azevedo, 2014).

רשימת מקורות

משרד החינוך. (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. ירושלים: המחבר. אוחר מתוך http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf

שקדי, א' (2011). *המשמעות מאחורי המילים: מתודולוגיות במחקר איכותני: הלכה למעשה*. תל-אביב: רמות.

Al-Harthy, I. S., Was, C. A., & Isaacson, R. M. (2010). *Goals, efficacy and metacognitive self-regulation: A path analysis*. *International Journal of Education*, 2(1), 1-20. doi:10.5296/ije.v2i1.357

Ames, C. (1992). *Classrooms: Goals, structures, and student motivation*. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 261-271. doi:10.1037/0022-0663.84.3.261

Azevedo, R. (2014). Issues in dealing with sequential and temporal

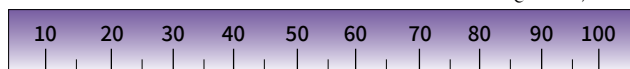
innovative societies: *The role of metacognitive pedagogies*. Paris, France: OECD.

- Mihalca, L., Mengelkamp, C., & Schnotz, W. (2017). Accuracy of metacognitive judgments as a moderator of learner control effectiveness in problem-solving tasks. *Metacognition and Learning*, 12(3), 357-379. doi:10.1007/s11409-017-9173-2.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2009). *Focus on high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.
- Nelson, T. O., & Narens, L. (1994). *Why investigate metacognition?* Cambridge, MA: The MIT Press.
- Nolen, S. B. (1988). Reasons for studying: Motivational orientation and strategies. *Cognition and Instruction*, 5, 269-287.
- Pintrich, P. R. (2000). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of Educational Psychology*, 92, 544-555. doi:10.1037/0022-0663.92.3.544
- Pintrich, P. R. (2002). [The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing](#). *Theory into Practice*, 41(4), 219-225. doi:10.1207/s15430421tip4104_3
- Pintrich, P. R., Wolters, C. A., & Baxter, G. P. (2000). Assessing metacognition and self-regulated learning. In G. Schraw & J. C. Impara (Eds.), *Issues in the Measurement of Metacognition* (pp. 43-97). Lincoln, NE: Buros Institute of Mental Measurements.
- Ramdass, D., & Zimmerman, B. J. (2008). Effects of self-correction strategy training on middle school students' self-efficacy, self-evaluation, and mathematics division learning. *Journal of Advanced Academics*, 20(1), 18-41. doi:10.4219/jaa-2008-869
- Roderer, T., & Roebers, C. M. (2010). Explicit and implicit confidence judgments and developmental differences in metamemory: An eye-tracking approach. *Metacognition and Learning*, 5(3), 229-250. doi:10.1007/s11409-010-9059-z
- Roebers, C. M., Krebs, S. S., & Roderer, T. (2014). Metacognitive monitoring and control in elementary school children: Their interrelations and their role for test performance. *Learning and Individual Differences*, 29, 141-149. doi:10.1016/j.lindif.2012.12.003
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Shin, H., Bjorklund, D. F., & Beck, E. F. (2007). The adaptive nature of children's overestimation in a strategic memory task. *Cognitive Development*, 22(2), 197-212. doi:10.1016/j.cogdev.2006.10.001
- Spruce, R., & Bol, L. (2015). Teacher beliefs, knowledge, and practice of self-regulated learning. *Metacognition and Learning*, 10(2), 245-277. doi:10.1007/s11409-014-9124-0
- Townsend, C. L., & Heit, E. (2011). Judgments of learning and improvement. *Memory & Cognition*, 39(2), 204-216. doi:10.3758/s13421-010-0019-2
- Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). (2011). *Mathematics Frameworks*, 2011. Retrieved from <https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/>
- Hicks, J. L., & Marsh, R. L. (2002). On predicting the future states of awareness for recognition of unrecalable items. *Memory & Cognition*, 30(1), 60-66. doi:10.3758/BF03195265
- Huff, J. D., & Nietfeld, J. L. (2009). Using strategy instruction and confidence judgments to improve metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning*, 4(2), 161-176. doi:10.1007/s11409-009-9042-8
- Isaacson, R. M., & Fujita, F. (2006). [Metacognitive knowledge monitoring and self-regulated learning: Academic success and reflections on learning](#). *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 6(1), 39-55.
- Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition Learning*, 7(2), 133-149. doi:10.1007/s11409-012-9088-x
- Jemstedt, A., Kubik, V., & Jönsson, F. U. (2017). What moderates the accuracy of ease of learning judgments? *Metacognition and Learning*, 12(3), 337-355. doi:10.1007/s11409-017-9172-3
- Kaplan, A., & Maehr, L. M. (2002). Adolescents' achievement goals: Situating motivation in socio-cultural contexts. In F. Pajares & T. Urdan (Eds.), *Academic motivation of adolescents* (pp. 125-167). Greenwich, CT: Information Age.
- Klein, G., Moon, B., & Hoffman, R. R. (2006). [Making sense of sensemaking 1: Alternative perspectives](#). *Making Intelligent Systems, IEEE*, 21(4), 70-73. doi:10.1109/MIS.2006.75
- Kramarski, B., & Friedman, S. (2014). Solicited versus unsolicited metacognitive prompts for fostering mathematical problem solving using multimedia. *Journal of Educational Computing Research*, 50(3), 285-314. doi:10.2190/EC.50.3.a
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: Effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40(1), 281-310. doi:10.3102/00028312040001281
- Kramarski, B., Weisse, I., & Sharon, S. (2013). Generic versus context-specific prompts for supporting self-regulation in mathematical problem solving among students with low or high prior knowledge. *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 12(2), 197-214. doi:10.1891/1945-8959.12.2.197
- Logan, J. M., Castel, A. D., Haber, S., & Viehman, E. J. (2012). Metacognition and the spacing effect: The role of repetition, feedback, and instruction on judgments of learning for massed and spaced rehearsal. *Metacognition and Learning*, 7(3), 175-195. doi:10.1007/s11409-012-9090-3
- Metcalfe, J., & Finn, J. (2012). Hypercorrection of high confidence errors in children. *Learning and Instruction*, 22(4), 253-261. doi:10.1016/j.learninstruc.2011.10.004
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, 34(2), 365-394. doi:10.3102/00028312034002365
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). Critical maths for

נספח 1: סרגלים לשיפוט עצמי

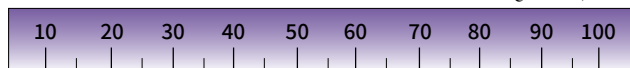
שיפוט הקלות או הקושי של מטלת הלמידה (EOL - Ease of Learning)

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שתצליחו לפתור את הבעיה.



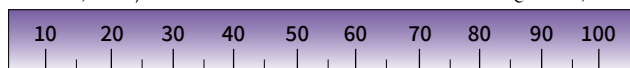
שיפוט הלמידה (JOL - Judgment of Learning)

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שאתם מבינים את הבעיה.



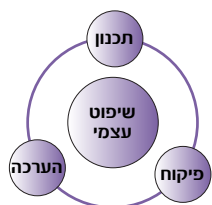
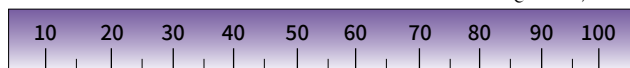
תחושה של ידיעה (FOK - Feeling of Knowing)

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שאתם יודעים את הדרך לפתרון הבעיה.



ביטחון בשיפוט (CJ - Confidence Judgments)

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שהצלחתם לפתור את הבעיה.



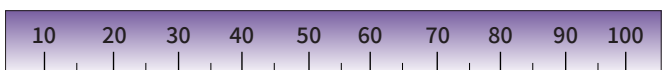
נספח 2: דף עבודה בקבוצת הניסוי בשילוב שאלות מטה-קוגניטיביות עצמיות וסרגלים לשיפוט עצמי

בעיה 2

באונייה הראשונה הגיעו 65 נוסעים.
באונייה השנייה הגיעו 15 נוסעים יותר מאשר באונייה הראשונה.
באונייה השלישית הגיעו 7 נוסעים פחות מאשר באונייה השנייה.
כמה נוסעים הגיעו ב-3 האוניות?

- האם הבנתי את הבעיה?
- מהי הדרך שאני בוחר?

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שאתם מבינים את הבעיה.



חשובים:

- האם הפתרון הגיוני?
- האם יש דרך אחרת?

תשובה:

בעיה 4

רכבת עצרה ב-4 תחנות. לתחנה הראשונה היא הגיעה ריקה ועלו 145 נוסעים. בתחנה השנייה עלו 85 נוסעים וירדו 18. בתחנה השלישית עלו 15 וירד נוסע אחד. אחרי התחנה הרביעית היו ברכבת 245 נוסעים.
כמה עלו בתחנה הרביעית?

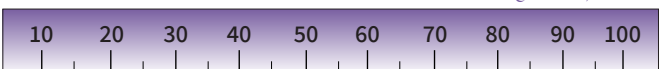
- האם הבנתי את הבעיה?
- מהי הדרך שאני בוחר?

חשובים:

- האם הפתרון הגיוני?
- האם יש דרך אחרת?

תשובה:

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שהצלחתם לפתור את הבעיה.

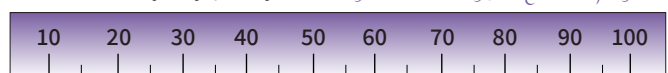


בעיה 1

לרכבת עלו 340 נוסעים.
בתחנה הראשונה ירדו 30 נוסעים.
בתחנה השנייה ירדו 60 ועלו 25 נוסעים.
כמה נוסעים המשיכו ברכבת?

- האם הבנתי את הבעיה?

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שתצליחו לפתור את הבעיה.



- מהי הדרך שאני בוחר?

חשובים:

- האם הפתרון הגיוני?
- האם יש דרך אחרת?

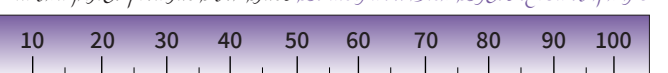
תשובה:

בעיה 3

בית ספר רכש 5 ארונות במחיר של 60 ש"ח. בחנות ביקשו 300 ש"ח במזומן והשאר בתשלומים שווים.
כמה תשלומים ישלם בית הספר? (ייתכנו מספר אפשרויות)

- האם הבנתי את הבעיה?
- מהי הדרך שאני בוחר?

ציין בקוץ הסרגל שלפניכם באיזו מידה נראה לכם שאתם יודעים את הדרך לפתרון הבעיה.



חשובים:

- האם הפתרון הגיוני?
- האם יש דרך אחרת?

תשובה:

downloads/TIMSS2011_Frameworks-Chapter1.pdf

Tzohar-Rozen, M., & Kramarski, B. (2014). [Metacognition, motivation and emotions: Contribution of self-regulated learning to solving mathematical problems](#). *Global Education Review*, 1(4), 76-95.

Van Velzen, J. H. (2016). Evaluating the suitability of mathematical thinking problems for senior high-school students by including mathematical sense making and global planning. *The Curriculum Journal*, 27(3), 313-329. doi:10.1080/09585176.2016.1174140

Veenman, M. V. J., Wilhelm, P., & Beishuizen, J. J. (2004). The relation between intellectual and metacognitive skills from a developmental perspective. *Learning and Instruction*, 14(1), 89-109. doi:10.1016/j.learninstruc.2003.10.004

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). San Diego, CA: Academic Press.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45(1), 166-183. doi:10.3102/0002831207312909

Weick, K. E., Sutcliffe, K. M., & Obstfeld, D. (2005). Organizing and the process of sensemaking. *Organization Science*, 16(4), 409-421. doi:10.1287/orsc.1050.0133

כפל וחילוק מספרים טבעיים ואפס בכיתות של תלמידים לקויי למידה: ידע מורים וחוללות עצמית שלהם

רחל פילו
איריס שרייבר



ד"ר רחל פילו

מרצה להוראת המתמטיקה, הוראה מותאמת במתמטיקה ומדריכה פדגוגית במכללת סמינר הקיבוצים. מרצה להוראת המתמטיקה במכללת תלפיות בחולון ובעלת ניסיון עשיר בהדרכת מורים. תחומי עניין עיקריים: ידע וחוללות עצמית של מורים ומתכשרים להוראה, התאמת מודלים מתמטיים לפתרון בעיות ותפיסת תפקיד המתמטיקה.

תקציר

מאמר זה מציג חלק ממחקר המתמקד בהוראת פעולות החשבון כפל וחילוק, שבו השתתפו 64 מורים המלמדים בכיתות של תלמידי לקויי למידה. במחקר נבדקו שני משתנים העשויים להשפיע על תהליך ההוראה-למידה: 1. ידע המורים הכולל ארבעה מרכיבי ידע שונים (ידע תוכן שגורתי, ידע תוכן לא שגורתי, ידע פדגוגי של תוכן והוראה וידע פדגוגי של תוכן ותלמידים). מרכיבי ידע אלה נקבעו על פי המסגרת התאורטית של דבורה בול ועמיתיה; 2. רמת החוללות העצמית (self-efficacy) של המורים במרכיבי ידע אלו.

במחקר נמצאו הבדלים ניכרים בין רמות הידע ובין רמות החוללות העצמית של המורים בארבעת מרכיבי הידע שנבדקו. רמת הידע הגבוהה ביותר ורמת החוללות העצמית הגבוהה ביותר של המורים נמצאו בידע תוכן שגורתי. רמת הידע הנמוכה ביותר ורמת החוללות העצמית הנמוכה ביותר של המורים נמצאו בידע פדגוגי של תוכן ותלמידים. ממצאי המחקר עשויים להשפיע על הכשרה והדרכת מורים למתמטיקה בכיתות חינוך המיוחד המלמדים כפל וחילוק במספרים טבעיים.

מילות מפתח: ידע תוכני; ידע פדגוגי-תוכני; חוללות עצמית; חינוך מיוחד; כפל; חילוק.

מבוא

הוראת הכפל והחילוק במספרים טבעיים ואפס היא חלק מרכזי בתוכניות לימודים במתמטיקה בארץ ובעולם ונדונה בהרחבה בספרות המחקרית זה מספר עשורים. חוקרים רבים עסקו בדרכי הוראה מומלצות לפעולות הכפל והחילוק המסייעות להבנה, וממליצים על שימוש בחוקים ועקרונות מתמטיים ללימוד האלגוריתמים, יצירת קשר בין הפעולות, שימוש באמצעי המחשה ומשחקים, שימוש במודלים ושילוב של שאלות מילוליות מחיי יום-יום (Bakker et al., 2016; Boaler, 2015; Downton, 2013;)



ד"ר איריס שרייבר

ראש המסלול להכשרת מורים למתמטיקה באוניברסיטת בר-אילן, מרצה למתמטיקה ולהוראת מתמטיקה בסמינר הקיבוצים. כיהנה במגוון תפקידים במערכת החינוך, בין השאר כמנהלת בית ספר תיכון וכמדריכה מחוזית מטעם הפיקוח על הוראת המתמטיקה. תחומי מחקר עיקריים: שילוב תקשוב בהוראת מתמטיקה, ידע מורים, חוללות עצמית של מורים.

(Fuson, 2003; Jong & Magruder, 2014). כמו כן חוקרים עסקו בדרכי חשיבה של תלמידים ובשינויות אופייניות שלהם, שמקורן שימוש שגוי בחוקים או אינטואיציות שגויות שהתגלו במהלך פתרון בעיות כפל וחילוק (Bainbridge, 1981; Fischbein, 1994; Radatz, 1997).

במחקר הנוכחי נבדקו שני משתנים העשויים להשפיע על איכות תהליך ההוראה-למידה בכלל והוראת כפל וחילוק בפרט:

משתנה אחד הוא הידע הנדרש להוראת מתמטיקה, אשר חוקרים רבים ניסו להגדיר את מרכיביו (Ball et al., 2008; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Shulman, 1986). טענה רווחת היא שלהוראה יעילה של מתמטיקה נדרש בין השאר ידע של תחום התוכן (למשל, הידע לפתור, ידע של מושגים, חוקים ואקסיומות) וידע פדגוגי-תוכני (למשל, דרכי ייצוג לבעיה, זיהוי תפיסות נכונות ושגויות של תלמידים). ידע מורים למתמטיקה נמצא משפיע על תהליכי ההוראה-למידה, על הישגי לומדים בכלל ועל הישגי לומדים בכיתות חינוך מיוחד בפרט (Brownell et al., 2010; Van-Ingert et al., 2016).

משתנה שני העשוי להשפיע על איכות תהליך ההוראה-למידה הוא חוללות עצמית הקשורה לתחום הרגש. חוללות עצמית היא אמונה של האדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה סדרת פעולות הדרושות לשם השגת תוצאה רצויה (Bandura, 1977, 1986). החוללות העצמית היא נתון חשוב בתפקוד המורה: מחקרים מראים שככל שהחוללות העצמית של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו ותפקודם של תלמידיו (Skaalvik & Skaalvik, 2010).

למיטב ידיעתנו, טרם נערך מחקר המשלב בדיקת ידע מורים המלמדים כפל וחילוק בכיתות חינוך המיוחד עם תחושת החוללות העצמית שלהם בידע זה. לפיכך מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון ידע של מורים בכיתות של תלמידים לקויי למידה בעניין ארבעה מרכיבים של ידע (ידע תוכן שגורתי, ידע תוכן לא שגורתי, ידע של תוכן והוראה וידע של תוכן ותלמידים) ולבדוק את רמת תחושת החוללות העצמית שלהם במרכיבי הידע למיניהם.

רקע תאורטי

לימודי כפל וחילוק (במספרים טבעיים ואפס) בבית הספר היסודי

אחת המטרות המרכזיות של הוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי היא לפתח את הבנת מושג המספר בכלל והמספר הטבעי בפרט כבסיס לבנייה של מערכת המספרים כולה. על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה לחינוך היסודי, הכפל והחילוק הם חלק ניכר מהוראת המספרים הטבעיים והפעולות בהם, וכוללים מספר מרכיבים: משמעות הפעולות, שליטה בעובדות הכפל והחילוק במסגרת לוח הכפל ולימוד האלגוריתמים המבוססים על המבנה העשרוני ועל חוקי פעולה. במהלך הוראת נושאים אלו עוסקים בפיתוח מיומנויות חישוב לצד עידוד תובנה מספרית המתבטאת בין השאר בשימוש והבנה של דרכי פתרון מגוונות ובגילוי פתיחות לדרכים חדשות (משרד החינוך, 2006). בקרב העוסקים בחינוך המתמטי ישנה הסכמה כי יש חשיבות גדולה לעסוק בכפל וחילוק במספרים טבעיים ואפס. כדי לבסס את ידע התלמידים בנושאים אלו יש לחזק תובנה מספרית ולהשתמש בעקרונות המבנה העשרוני, בחוקי פעולה לביצוע הפעולות, ביצירת קשרים בין הפעולות ובפתרון תרגילים בדרכים למיניהן. חוקרים רואים חשיבות רבה להצגת אלגוריתמים שונים לאותה פעולה כחלק מפיתוח רהיטות חישובית ולעידוד תלמידים ליצור אלגוריתמים חלופיים במהלך שימוש בהמחשות

ובחוקי פעולה (תירוש, 1996; Fuson, 2003). כדי לבסס את משמעותיות הפעולות ולהעמיק את ההבנה בנושא חילוק, חוקרים ממליצים לשלב שאלות מילוליות, להשתמש במודלים במשימות מגוונות ולחזק את הקשר בין החילוק לכפל (Downton, 2013; Jong & Magruder, 2014). גם בכיתות החינוך המיוחד הכפל והחילוק במספרים טבעיים ואפס משמשים חלק מרכזי בלימודי המתמטיקה. כדי לסייע למורים לענות על הצרכים הייחודיים של תלמידים הלומדים מתמטיקה במסגרות של החינוך המיוחד נכתב מסמך ובו ההתאמות הנדרשות לתוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי (משרד החינוך, 2014). מסמך זה הוא ביטוי מעשי למגמה ההולכת ומתרחבת בעשרות האחרונים, למודעות לזכויותיהם של תלמידים עם צרכים מיוחדים מבחינה אקדמית, קוגניטיבית, חברתית ורגשית כדי לקדם אותם ולהכניס לחיים עתידיים כבוגרים המשתלבים בחברה ובקהילה. על פי מסמך זה, יש לעסוק בנושא פעולות הכפל והחילוק בביצוע חישובים שונים, בקשר בין הפעולות לייצוגים שונים, בפתרון שאלות מילוליות, בהיכרות עם חוקי פעולה הקשורים לתרגילי כפל וחילוק ובביצוע קשרים בין פעולות אלו.

חוקרים שעסקו בהוראת פעולות הכפל והחילוק בכיתות חינוך מיוחד הדגישו את החשיבות בבסיס משמעותיות הכפל והחילוק באמצעות שאלות מחיי יום-יום, שימוש במודלים להמחשת משמעותיות הפעולה (כגון ציר מספרים להדגמת משמעות הכפל כחיבור חוזר, שטח מלבן לייצוג חוק הפילוג המורחב בכפל), שימוש בחוקי חשבון, פיתוח תובנה מספרית ושימוש באמצעי המחשה ומשחקים (Bakker et al., 2016; Boaler, 2015; Cimen, 2014). מחקרים למיניהם אפיינו קשיים ושינויות של תלמידים בפתרון בעיות כפל וחילוק וגילו בין השאר שגיאות בשימוש בחוקים ובאלגוריתמים (Bainbridge, 1981; Radatz, 1997), שגיאות הנובעות מהכללת יתר או מאינטואיציות הקשורות לניסיון או לידע מתמטי קודם (Fischbein, 1994).

הידע הנדרש להוראת מתמטיקה בכלל ולהוראת נושאי הכפל והחילוק בפרט

בעשורים האחרונים עוסקים אנשי חינוך רבים בסוגיית הידע הנדרש להוראה ובהגדרת מרכיביו (Ball et al., 2008; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Shulman, 1986; Sullivan, 2011; Tchoshanov, 2011). אחת הטענות הרווחות היא שלהוראה יעילה של מתמטיקה נדרש בין השאר ידע של מה התלמיד יודע, מה הוא צריך ללמוד ומהן תפיסותיו הנכונות והשגויות. שולמן, אחד החוקרים המרכזיים שעסק בהגדרת הידע הנדרש להוראה (Shulman, 1986, 1987), טען כי הידע הנדרש למורים הוא שילוב של ידע תוכן עם ידע פדגוגי ויש בו שלושה מרכיבים: 1. ידע של תחום התוכן (subject matter knowledge) הנוגע למתמטיקה ויש בו מושגי יסוד, אקסיומות, הגדרות, חוקים ומשפטים; 2. ידע של תוכנית הלימודים (curricular knowledge) הכולל היכרות עם תוכנית הלימודים והנושאים השונים במתמטיקה הנלמדים לאורך השנים; 3. ידע פדגוגי-תוכני (pedagogical content knowledge) הכולל מרכיבים המקשרים בין ידע התוכן לפדגוגיה בנושא מתמטיקה ויש בו, למשל, דרכי הצגת רעיון מתמטי, אנלוגיות מתמטיות, דוגמאות, הדגמות והסברים מתמטיים, תפיסות נכונות ושגויות של תלמידים וידע של מה קל/קשה לתלמידים בתחומים ספציפיים במתמטיקה. תרומתו העיקרית של שולמן היא בהגדרת המושג ידע פדגוגי-תוכני שעורר עניין רב בקרב חוקרים רבים.

קבוצות חוקרים ובראשם דבורה בול (Ball & Bass, 2003; Ball et

al., 2008) ניסו להגדיר במדויק את המושג ידע פדגוגי-תוכני בנושא מתמטיקה והגדירו שני מרכיבים של ידע תוכני (ידע תוכן שגרתי וידע תוכן ייחודי) ושני מרכיבים של ידע פדגוגי-תוכני (ידע של תוכן ותלמידים וידע של תוכן והוראה):

ידע תוכני

1. ידע תוכן שגרתי (CCK–Common Content Knowledge) הוא סוג ידע מתמטי שנדרש גם למי שאינם מורים. למשל, ידע לפתור או לחשב והידע הנדרש לביצוע פתרון נכון של בעיות חשבוניות. במחקר הנוכחי, פתרון תרגילי כפל וחילוק על פי האלגוריתמים המקובלים.

2. ידע תוכן ייחודי (SCK–Specialized Content Knowledge) הוא ידע ומיומנות מתמטית ייחודיים להוראה. למשל, בחינת דרכי פתרון לא שגרתיות לבעיה ובניית ייצוגים שונים לאותה בעיה. במחקר הנוכחי, הצגת מספר דרכי פתרון לאותו תרגיל.

ידע פדגוגי-תוכני

1. ידע של תוכן והוראה (KCT–Knowledge of Content and Teaching) הוא שילוב ידע תחום התוכן עם הוראה. למשל, אילו דוגמאות מתאימות להצגת נושא, עם אילו דוגמאות להעמיק את התוכן הנלמד, הערכת יתרונות וחסרונות של משימות שונות והיכרות עם דרכי ייצוג שונות לבעיות. במחקר הנוכחי, הצגת מגוון דרכי הוראה והמחשה לפתרון תרגילי כפל וחילוק.

2. ידע של תוכן ותלמידים (KCS–Knowledge of Content and Students) הוא שילוב ידע של תחום התוכן והיכרות עם תלמידים. למשל, שגיאות נפוצות של תלמידים, היכרות עם סיבות הגיוניות לשגיאות תלמידים וזיהוי מה קל/קשה לאוכלוסייה מסוימת של לומדים. במחקר הנוכחי, הצגת שגיאות מתאימות של תלמידים בתרגילי כפל וחילוק ומקורן והצעות לדרכי תיווך והמחשה לטיפול בשגיאות אלו.

הספרות המחקרית מדגישה את חשיבות הידע המתמטי והפדגוגי של מורים בהוראת הכפל והחילוק. במחקר שבו השוו ידע מתמטי של תלמידים, נמצא כי לידע המורים ולדרך ההוראה הנגזרת מידע זה, יש קשר להישגי התלמידים. תלמידים הצליחו יותר כאשר למדו עם מורים בעלי ידע רחב יותר שלימדו הבנת משמעות האלגוריתמים ולא למידה טכנית בלבד (Ma, 1999). במחקר אחר נמצא כי כאשר המורה מציג יותר מדרך אחת ומצדיק מדוע כל אחת מהדרכים נכונה, התלמידים גילו ידע מעמיק, יצרו קשרים בין פעולות למושגים ודרכי הפתרון שלהם היו מגוונות יותר (Takker & Subramaniam, 2018). בדומה למה (Ma, 1999), מרקוביץ' (2000) התומכת בגישת הוראה קונסטרוקטיביסטית, טוענת ששליטה באלגוריתם של הכפל דורשת כמה מיומנויות: הבנת משמעות הפעולה, זכירה של עובדות הכפל, הבנת המבנה העשרוני של המספר וערך מקום הספרות והבנת חוק הפילוג. לטענתה, הלמידה אינה יכולה להיות יעילה אם היא נעשית באמצעות "העברה" של ידע מהמורה לתלמיד. התלמיד לומד רק כאשר הוא בונה בעצמו את הידע. לשם כך למורה נדרש ידע פדגוגי-תוכני רחב והיכרות רחבה עם המיומנויות השונות ומשמעותן. אהרוני (2004) וסלבסקי (2003) מחזקים את הדעה כי יש חשיבות בהוראת האלגוריתם של החילוק באמצעות הבנה ומציניים כי יש ללמדו במשמעות של הפעולה, מבנה העשרוני ואומדן. גם בקרב חוקרים העוסקים בחינוך מתמטי בכיתות חינוך מיוחד יש הסכמה כי לידע המורים חשיבות תהליכי הוראה-למידה. במחקרים שבדקו מרכיבי ידע של מורים

למתמטיקה בחינוך המיוחד נמצא כי איכות ההוראה של המורים בכיתות חינוך מיוחד קשורה בידע שלהם (התוכני והפדגוגי) בתחום הדעת, לצד הידע שלהם בהיבטים ספציפיים לחינוך מיוחד (Brownell et al., 2010; Van-Inger et al., 2016). כמו כן, נמצאו קשרים בין ההכשרה, ההדרכה, והפיקוח שקיבלו המורים לידע שלהם ולאיכות ההוראה בכיתה (Treahy & Gurganus, 2010).

עוד משתנה העשוי להשפיע על איכות תהליך ההוראה-למידה הוא חוללות עצמית הקשורה לתחום הרגש.

חוללות עצמית (self efficacy)

לפי בנדורה (Bandura, 1977, 1986) המונח חוללות עצמית הוא אמונה של האדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה סדרת פעולות הדרושות לשם השגת תוצאה רצויה המתווכת בין היכולת לביצוע. לשם ביצוע אפקטיבי של מטלה דרושים לאדם הן הכישורים המתאימים והן האמונה והביטחון ביכולתו להפעילם כנדרש. על פי בנדורה ועמיתיו (Bandura et al., 2003), חוללות עצמית משפיעה על התנהלותו של האדם ועל תפקודו. אנשים נוטים להימנע ממצבים שהם רואים אותם מאיימים וחורגים מיכולותיהם או מתחום הידע שלהם. לעומת זאת, הם פועלים בביטחון במצבים שלא נראים להם מאיימים. לרמת החוללות העצמית יש השפעה ישירה על הבחירה בדרכי פעולה ומכך גם נגזרים מידת המאמץ שהאדם ישקיע ומשך הזמן שישקיע בניסיון לבצע משימה מסוימת: ככל שרמת החוללות העצמית שלו גבוהה יותר כך יתמיד במאמץ ובעשייה. חוללות עצמית היא משתנה העשוי להשפיע על תהליך ההוראה-למידה כיוון שתפקוד המורה והתלמיד בכיתה יכולים להיות קשורים לרמת הביטחון של כל אחד מהם למלא את תפקידו בהצלחה (Dellinger et al., 2008). חוללות עצמית של מורה נוגעת לשני אספקטים: חוללות עצמית בהוראה בכלל, הנוגעת לאמונה שתהליך ההוראה-למידה בבית הספר יכול להשפיע על מאפייני הלמידה ועל הישגי תלמידים, וחוללות עצמית של מורים בהוראה שלהם בפרט, הנוגעת לאמונתם שההוראה שלהם יכולה להשפיע על הלמידה ועל הישגי תלמידיהם (Bandura, 1986). מורים עם חוללות עצמית נמוכה בהוראה בכלל או בהוראה בפרט לא משקיעים מאמץ ולא מתמידים כאשר הם מלמדים תלמידים מתקשים מתוך אמונה שהתלמידים אינם מסוגלים ללמוד או שלהם עצמם אין הכישורים או המשאבים ללמד אותם. חוללות עצמית נמצאה קשורה גם לרמת השחיקה של המורה: ככל שהחוללות העצמית נמצאה נמוכה יותר, כך עלתה רמת השחיקה ורמת הניתוק מהלומדים וחוסר אמונה ביכולותיהם. מורה שרמת החוללות העצמית שלו נמצאה גבוהה חש יותר סיפוק וגילה מעורבות בהכנת תוכניות לימוד אישיות לתלמידים, בשיתופי פעולה עם הורים ועם עמיתים (Brouwers & Tomic, 2000). בעניין חוללות עצמית של מורים במסגרות חינוך מיוחד, נמצא כי ככל שהחוללות העצמית של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו בבניית שיעורים ובקידום תלמידים (Skaalvik & Skaalvik, 2010) וכי מורים בעלי חוללות עצמית גבוהה מאמינים יותר ביכולת התלמידים ומצליחים יותר לקדם הישגים ולתת מענה הולם לתלמידים עם צרכים מיוחדים (Tschannen-Moran & Barr, 2004).

חוללות עצמית היא משתנה הנבדק במיוחד בנושא מסוים. למיטב ידיעתנו לא נמצאו מחקרים שבדקו את רמת החוללות העצמית של מורי חינוך מיוחד בתחום הידע שלהם על הוראת כפל וחילוק של מספרים טבעיים.

מטרות ושאלות המחקר

מטרת המחקר לבחון את הידע התוכני והפדגוגי ואת רמת תחושת החוללות העצמית של מורים המלמדים מתמטיקה בחינוך המיוחד בכיתות של תלמידים לקויי למידה בנושאים כפל וחילוק במספרים טבעיים ואפס. ממטרת המחקר נגזרו שאלותיו: 1. מהו הידע המתמטי-תוכני והפדגוגי-תוכני של קבוצת המורים הנחקרת; 2. מהי רמת תחושת החוללות העצמית לגבי הידע המתמטי-תוכני והפדגוגי-תוכני של קבוצת המורים הנחקרת.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 64 מורים לחינוך מיוחד בכיתות של תלמידים לקויי למידה המלמדים מתמטיקה בכלל ואת הנושאים כפל וחילוק במספרים טבעיים ואפס בפרט. כל המורים בעלי תואר ראשון בחינוך מיוחד, בעלי מגוון שנות ותק בהוראת מתמטיקה (כמחציתם ותיקים בהוראת מתמטיקה עם ותק של מעל 10 שנים, ומחציתם עם ותק נמוך יותר).

המורים באו ממסגרות הכשרה מגוונות: 29 מורים התמחו בהוראת מתמטיקה כחלק מההכשרה האקדמית שלהם, 19 מורים הוכשרו במסגרות הדרכה והשתלמויות שונות במהלך שנות עבודתם ו-16 מורים לא קיבלו הכשרה להוראת מתמטיקה.

כלי המחקר

המחקר כמותי ויש בו שני שאלונים שפותחו לצורך המחקר על פי מטרות המחקר: שאלון חוללות עצמית ושאלון ידע.

שאלון חוללות עצמית

השאלון לבדיקת רמת החוללות העצמית כלל 24 היגדים שדירגו המורים בסולם של 1 עד 5 על פי מידת הביטחון שלהם לבצע את הכתוב בהיגד (5 = בטוח מאוד, 1 = לא בטוח כלל). השאלון פותח ונבנה על פי מדריך בניית שאלוני חוללות עצמית תקפים של בנדורה (Bandura, 2006) ועל פי שאלון מסוגלות עצמית של פרידמן וקס (2000). ניסוח ההיגדים השונים נשען על מחקרים קודמים שבהם נעשתה בדיקת רמת חוללות עצמית עם שאלונים תקפים ומהימנים (Hackett & Betz, 1989; Tirosh et al., 2011), ומומחים להוראת מתמטיקה תיקפו את השאלון. נעשה מחקר מקדים על 12 מורים, נבדקה מהימנות והושגה רמת מהימנות מתקבלת על הדעת במבחן אלפא של קרונברך עם ערך גדול מ-0.7. דוגמאות להיגדים אפשר לראות בטבלה 1.

שאלון ידע

השאלון לבדיקת ידע שכלל 24 פריטים פתוחים, בדק את ידע המורים בארבעה מרכיבי ידע על פי התאוריה של דבורה בול ועמיתיה (Ball et al., 2008), ועל פי מחקרים קודמים (McCray & Chen, 2012), בהתאמה לנושא שנבדק במחקר זה: 1. לבדיקת ידע תוכן שגרתי ניתנו שאלות שבהן המורים נדרשו לפתור תרגילי כפל וחילוק (לוח הכפל, עשרות שלמות ומעבר ללוח הכפל); 2. לבדיקת ידע תוכן לא שגרתי ניתנו שאלות שבהן המורים נדרשו לפתור תרגיל בדרך אחרת או לאמוד תוצאת תרגיל מבלי לפתור; 3. לבדיקת ידע של תוכן והוראה ניתנו שאלות שבהן המורים נדרשו להציג דרך להוראה או להמחשת תרגיל; 4. לבדיקת ידע של תוכן ותלמידים ניתנו שאלות שבהן המורים נדרשו לתאר שגיאות אופייניות שתלמידים עושים בפתרון תרגיל או להסביר את הסיבות

לשגיאות אלו.

דוגמאות לפריטים אפשר לראות בטבלה 1. מומחים להוראת מתמטיקה תיקפו את השאלון, נעשה מחקר מקדים על 12 מורים, נבדקה מהימנות והושגה רמת מהימנות מתקבלת על הדעת במבחן אלפא של קרונברך עם ערך גדול מ-0.7.

לכל שאלה בשאלון הידע (ידע תוכני וידע פדגוגי-תוכני) הופיע היגד מתאים בשאלון החוללות העצמית.

טבלה 1: דוגמאות לפריטים מתאימים משני השאלונים

שאלון הידע	שאלון חוללות עצמית	"מה מידת הביטחון שלך..."
ידע תוכן שגרתי (CCK)	פתור 70×60	לפתור תרגילי כפל בעשרות שלמות
	פתור $1407:7$	לפתור תרגילי חילוק מעבר ללוח הכפל
ידע תוכן לא שגרתי (SCK)	אמדו את תוצאות התרגיל $326:25$	לאמוד תוצאות תרגילי חילוק מעבר ללוח הכפל
	פתור את התרגיל 59×28 בדרך נוספת	לפתור תרגילי כפל מעבר ללוח הכפל ביותר מדרך אחת
ידע של תוכן והוראה (KCT)	תארו את דרך ההוראה שלכם לתרגיל 6×7	להורות תרגיל כפל במסגרת לוח הכפל
ידע של תוכן תלמידים (KCS)	אילו שגיאות יעשו תלמידים בפתרון התרגיל $1407:7$	לצפות שגיאות של תלמידים בפתרון תרגיל חילוק מעבר ללוח הכפל

מהלך המחקר

המדגם נאסף באמצעות פנייה אישית למורים למתמטיקה בבתי ספר שבהם יש כיתות חינוך מיוחד ללקויי למידה. נערכה פגישה עם המורים שהביעו הסכמה להשתתף במחקר והם מילאו את השאלונים בסדר הזה: ראשית, הם מילאו פרטים דמוגרפיים וותק בהוראת מתמטיקה והכשרה, לאחר מכן מילאו שאלון חוללות עצמית ולבסוף קיבלו את שאלון הידע. המורים לא ראו את שאלון הידע לפני שמילאו את שאלון החוללות העצמית כדי שמילוי רמת הביטחון לא יהיה מוטה ולא יושפע מידע או אי-ידיעה של שאלות ספציפיות בשאלון הידע. לא הייתה מגבלת זמן על מילוי השאלון ואולם אפשר לומר כי זמן מילוי השאלונים ארך לכל מורה בממוצע כחצי שעה.

ממצאים

במחקר זה נבדקו הן מרכיבים מגוונים של ידע הנדרש להוראת כפל וחילוק במספרים טבעיים בכיתות חינוך מיוחד והן רמת החוללות העצמית של המורים על ידע זה. ברמת החוללות העצמית נמצא במחקר כי הדירוג הכללי של רמת הביטחון של המורים היה בינוני-גבוה, בין 3 ל-5. אולם רמת הביטחון במרכיבי הידע המגוונים לא הייתה אחידה ונמצאו הבדלים ברמת הביטחון שהעניקו המורים לידע שלהם במרכיבים האחרים. רמת הביטחון הגבוהה ביותר נמצאה בידע תוכן שגרתי ורמת הביטחון הנמוכה ביותר נמצאה בידע על תלמידים. בדומה נמצאו הבדלים בין ידע המורים במרכיבים המגוונים. רמת הידע הגבוהה ביותר נמצאה בידע תוכן שגרתי ורמת

בעניין ידע של תוכן והוראה (KCT) המורים התבקשו להציג דרך הוראה לתרגיל הכפל. מרבית המורים (81%) הציעו כדרך עיקרית וראשונה את האלגוריתם של הכפל המורחב או המקוצר, הנשען על חוק הפילוג, ו-25% מהמורים הציעו דרך אחרת. אלה הן דרכי ההוראה שהציעו המורים: 12 מורים לא הציעו דרך הוראה; 36 מורים הציעו רק את האלגוריתם; 12 מורים הציעו מהלכים מקדימים להמחשת האלגוריתם והצדקתו; מורה הציע להשתמש במשמעות הכפל כחיבור חוזר של מחוברים שווים; מורה אחד הציע להתחיל בהצגת חוק הפילוג מורחב ולקשרו לאלגוריתם; ושתי מורות הציעו להשתמש בייצוג גרפי, מלבן כפל המתואר באיור 2.

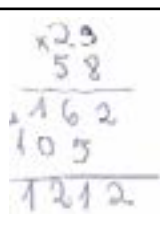
50x20=1000	50x9=450
8x20=160	8x9=72

כלומר: $58 \times 29 =$

$$50 \times 20 + 50 \times 9 + 8 \times 20 + 8 \times 9$$

איור 2: הוראת התרגיל 58×29 בעזרת מלבן הכפל

בעניין ידע של תוכן ותלמידים (KCS) המורים התבקשו להציג שגיאות נפוצות ולהסביר את הסיבות לשגיאות אלה. המורים עסקו בעיקר בשגיאות חישוביות הנובעות מחוסר שליטה בעובדות הכפל או חוסר שליטה באלגוריתם. כמו כן מורים ציינו קשיים כלליים ושגיאות הקשורות למבנה העשרוני, אך לא הסבירו אילו תפיסות שגויות הקשורות במבנה העשרוני גורמות לשגיאות אלו. רק מורה אחת ציינה אפשרות להכללת יתר מהאלגוריתם של החיבור. דוגמאות לשגיאות שהציעו המורים אפשר לראות באיור 3.

שגיאות הקשורות לאלגוריתם:	שגיאות הקשורות לערך המקום:
	$29 \times 58 =$ $2 \times 5 + 9 \times 5 + 2 \times 8 + 9 \times 8 = 143$
$\begin{array}{r} 29 \\ \times 58 \\ \hline 232 \\ + 1450 \\ \hline 1672 \end{array}$	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 58 \\ \hline 232 \\ + 1450 \\ \hline 1672 \end{array}$

איור 3: שגיאות אופייניות שהציעו המורים לתרגיל הכפל

דרכי ההתערבות לטיפול בשגיאות שהוצגו התמקדו בעיקר בשגיאות באלגוריתם, לדוגמה: "יש לטפל בסדר פעולות חשבון שמבצעים באלגוריתם". אמצעי ההמחשה העיקרי שצוין היה "טבלה העשרונית", כלומר אמצעי סימבולי המדגיש בעיקר את הפוזיציה. רק שלושה מורים ציינו שהשתמשו באמצעי המחשה כמותיים, כגון "לבני בסיס 10" המדגישים את ערכי הספרות במספר והיחס ביניהן.

נערכה בדיקת מובהקות בין ממצאי מרכיבי הידע המגוונים, ומבדיקה זו עולה כי יש הבדלים מובהקים בין סוגים שונים של ידע כמוצג בטבלה 3.

הידע החלקית ביותר נמצאה בידע על תלמידים. הממצאים שיוצגו להלן נוגעים לשני פריטים, 58×29 ו- $1407:7$, שניהם מעבר ללוח הכפל. על כל פריט נבדק ידע המורים והחוללות העצמית בארבעת מרכיבי הידע שהוזכרו לעיל.

ממצאי ידע על פעולת כפל

בשאלון הידע המורים נשאלו על תרגיל הכפל 58×29 ארבע שאלות שנועדו לבדוק ידע בארבעת מרכיביו (תוכן שגרתי, תוכן לא שגרתי, תוכן והוראה, תוכן ותלמידים). ממצאי השאלות מראים הבדלים ברמת הידע של המורים במרכיבים השונים על שאלה זו (טבלה 2).

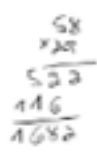
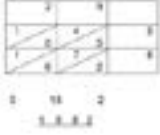
טבלה 2: אחוז המשיבים נכון על שאלות הידע בתרגיל 58×29

שאלה	סוג הידע שנבדק	אחוז המשיבים נכון
פתור את התרגיל	תוכן שגרתי CCK	89%
פתור את התרגיל בדרך אחרת	תוכן לא שגרתי SCK	64%
הציגו שתי דרכים להוראת התרגיל	תוכן והוראה KCT	הציגו שתי דרכים 25%
		הציגו דרך אחת 56%
הציגו שתי שגיאות שיעשו תלמידים (לדעתכם) בפתרון התרגיל	תוכן ותלמידים KCS	הציגו שתי שגיאות 20%
		הציגו שגיאה אחת 55%

הממצאים בטבלה 2 מעידים כי יש הבדלים ברמת הידע של המורים בין מרכיבי הידע השונים. רמת הידע הגבוהה ביותר נמצאה בידע תוכן שגרתי ורמת הידע הנמוכה ביותר בידע של תוכן ותלמידים. להלן מספר דוגמאות מייצגות לתשובותיהם של המורים שמדגימות ומחזקות את הממצאים.

בידע תוכן (שגרתי CCK ולא שגרתי SCK) המורים התבקשו לפתור את התרגיל ולאחר מכן לפתור אותו בדרך אחרת. מרבית המורים (89%) שפתרו את התרגיל נכון, הציעו כדרך פתרון ראשונה את דרך האלגוריתם של הכפל במאונך. חלק מן המורים (64%) פתרו נכון בדרך אחרת. דרכי פתרונות לדוגמה מוצגות באיור 1.

אלה הן דרכי הפתרון שהציעו המורים: 7 מורים – לא פתרו נכון; 57 מורים פתרו בדרך האלגוריתם; 38 מורים הציעו כדרך פתרון אחרת פילוג בחיבור; שני מורים הציעו פילוג בחיסור; מורה אחד הציע פתרון בעזרת טבלת שריג.

דרך א: אלגוריתם הכפל	דרך ב: פילוג בחיבור
	$58 \times 29 = 50 \times 20 + 50 \times 9 + 8 \times 20 + 8 \times 9 = 1682$
דרך ג: פילוג בחיסור	דרך ד: טבלת שריג
$58 \times 29 =$ $60 \times 30 - 2 \times 30 - 1 \times 60 + 1 \times 2 =$ $1800 - 118 =$ 1682	

איור 1: דרכי פתרון שהציעו המורים לתרגיל הכפל 58×29

טבלה 3: מובהקות ההבדלים בין רמות ידע המורים במרכיבי הידע השונים לגבי כפל, מבחן T

תוכן ותלמידים	תוכן והוראה	תוכן לא שגרתי	תוכן שגרתי	
—	—	—	—	תוכן שגרתי
—	—	—	-4.598***	תוכן לא שגרתי
—	—	-10.564***	-7.823***	תוכן והוראה
—	-2.996**	-6.887 ***	-4.730***	תוכן ותלמידים

** p<0.01, ***p<0.001

ממצאי ידע על פעולת החילוק

בשאלון הידע המורים נשאלו על תרגיל החילוק 1,407:7 ארבע שאלות שנועדו לבדוק ידע בארבעת מרכיביו (תוכן שגרתי, תוכן לא שגרתי, תוכן והוראה, תוכן ותלמידים). ממצאי השאלון מראים הבדלים ברמת הידע של המורים במרכיבים השונים על שאלה זו (טבלה 4).

טבלה 4: אחוז המשיבים נכון על שאלות הידע בתרגיל 1,407:7

שאלה	סוג הידע שנבדק	אחוז המשיבים נכון
פתור את התרגיל	תוכן שגרתי CCK	94%
פתור את התרגיל בדרך אחרת	תוכן לא שגרתי SCK	61%
הציגו שתי דרכים להוראת התרגיל	תוכן והוראה KCT	הציגו שתי דרכים 25% הציגו דרך אחת 53%
הציגו שתי שיטות (לדעתכם) בפתרון התרגיל	תוכן ותלמידים KCS	הציגו שתי שיטות 6% הציגו שיטה אחת 60%

בדומה לממצאי הידע בפעולת הכפל, אפשר לראות על פי טבלה 4 כי גם בפעולת החילוק רמת הידע של המורים שונה בין מרכיבי הידע המגוונים. רמת הידע הגבוהה ביותר נמצאה בידע תוכן שגרתי ורמת הידע הנמוכה ביותר בידע של תוכן ותלמידים. נדגים ממצאים אלו במספר דוגמאות מייצגות לתשובותיהם של המורים.

בעניין ידע תוכן (שגרתי CCK ולא שגרתי SCK) המורים התבקשו לפתור את תרגיל החילוק ולאחר מכן לפתור אותו בדרך אחרת. 94% מהמורים פתרו את התרגיל נכון בדרך האלגוריתם של חילוק ארוך. 61% מהמורים פתרו את התרגיל בדרך אחרת כאשר כולם הציגו דרך של שימוש בפילוג. דרכים אלה מודגמות באיור 4.

--	--

איור 4: דרכי פתרון לתרגיל החילוק 1,407:7

בין דרכי הפתרון שהוצגו נצפתה דרך אחת שגויה: פילוג שגוי של המחולק על פי המבנה העשרוני ויחס לכמות העשרות שבמספר 1407 כיחידות: "14 לחלק ל-7 שווה 2, אז 140 לחלק ל-7 שווה 20. יש עוד 7 אחד אז מוסיפים עוד אחד, ואז התוצאה היא 21". מורים אחרים ציינו כי שגיאה מסוג זה היא אחת השגיאות הנפוצות שתלמידים יכולים לבצע, ועל כך יורחב בהמשך בדיון על תוכן ותלמידים.

בעניין ידע של תוכן והוראה (KCT), בדומה לפעולת הכפל, 53% מהמורים הציגו דרך הוראה הנשענת בעיקר על טכניקה של אלגוריתם החילוק הארוך. 16 מורים הציגו דרך אחרת להוראה כאשר מתוכם 14 מורים הציגו ללמד בעזרת פילוג כפי שפתרו בעצמם (איור 4), ושני מורים הציגו הסברים קונספטואליים, ציינו את הקשר בין המבנה העשרוני לאלגוריתם והציגו מהלך הוראה מדורג המתחיל משימוש בחוק הפילוג ומשמעות החילוק לחלקים: "עלינו לחלק 1407 ל-7 קבוצות. 1400+7=1407 (אפשר להראות באמצעי המחשה במספרים קטנים מדוע נכון לעשות כך), נחלק תחילה את 1400 ל-7 ולאחר מכן את ה-7 שנשארו. 1400:7=200 200=1400:7".

בעניין ידע על תוכן ותלמידים (KCS), 60% מהמורים ציינו את השגיאה שהוזכרה בעניין ידע תוכן, ובה יש קושי בהבנת המבנה העשרוני וקבלת תוצאה שגויה של 21 במקום 201. 4 מורים הציגו שגיאה נוספת הקשורה לאלגוריתם: החלפת מקום ספרות או 'דילוג' על שלב באלגוריתם וקבלת תוצאה שגויה של 102 או 210. בהצעת דרך התערבות לטיפול בשגיאות, שני מורים בלבד הציגו לאפשר לתלמידים לבחון ולבקר את תשובותיהם באמצעות אומדן או תרגיל כפל בטרם יטפלו בדרך הפתרון.

נערכה בדיקת מובהקות בין ממצאי מרכיבי הידע המגוונים, ומבדיקה זו עולה כי יש הבדלים מובהקים בין סוגים שונים של ידע כמוצג בטבלה 5.

טבלה 5: מובהקות ההבדלים בין רמות ידע המורים במרכיבי הידע השונים לגבי חילוק, מבחן T

תוכן ותלמידים	תוכן והוראה	תוכן לא שגרתי	תוכן שגרתי	
—	—	—	—	תוכן שגרתי
—	—	—	-2.777**	תוכן לא שגרתי
—	—	-9.150***	-7.175***	תוכן והוראה
—	-4.623**	-4.163***	-2.924**	תוכן ותלמידים

p<0.01, * p<0.001

ממצאי חוללות עצמית

שאלת המחקר השנייה עוסקת ברמת תחושת החוללות העצמית של המורים על הידע שלהם. בטבלה 6 מוצג אחוז המורים שהצהירו על מידת הביטחון במסוגלות שלהם בסולם של 1-5 (כאשר 1 = חוסר ביטחון מוחלט ו-5 = ביטחון מלא) לבצע משימות הקשורות בארבעת סוגי הידע בכל אחת מהפעולות. בדומה לממצאי הידע (בהם נמצא שלמורים פחות ידע פדגוגי על הוראה ותלמידים מאשר ידע תוכני), גם ברמת הביטחון נמצא כי המורים בטוחים בידע הפדגוגי שלהם על הוראה ותלמידים פחות מאשר בידע התוכני שלהם.

טבלה 6: אחוזי המורים שדירגו כל רמת ביטחון בעניין ידע על כפל, הממוצע וסטיית התקן

ממוצע וסטיות M(Sd) תקן	1	2	3	4	5	סוג הידע	ההיגד "הקיפו מספר בין 1 ל-5 המציין את מידת הביטחון שלכם..."
4.67 (0.61)	0	0	6	17	77	תוכן שגרתי CCK	לפתור תרגילי כפל במספרים טבעיים ואפס מעבר ללוח הכפל
4.51 (0.9)	2	2	14	9	73	תוכן לא שגרתי SCK	לפתור תרגילי כפל במספרים טבעיים ואפס מעבר ללוח הכפל ביותר מדרך אחת
4.47 (1.3)	0	6	9	27	58	תוכן והוראה KCT	להורות את האלגוריתם של כפל טבעיים מעבר ללוח הכפל
3.85 (2.05)	3	4	25	41	27	תוכן ותלמידים KCS	לצפות מראש שגיאות תלמידים בתרגילי כפל מעבר ללוח הכפל

בטבלה 8 אפשר לראות כי מרבית המורים דירגו את הביטחון שלהם ברמות 3-5 ברוב ההיגדים. בדומה לממצאי חוללות עצמית על כפל, בולטים גם כאן אותם ממצאים: פיזור הממצאים גדל יותר במרכיבי ידע פדגוגי מאשר במרכיבי ידע תוכני. מצד אחד אחוז המורים שדירגו רמת ביטחון 5 יורד במידה ניכרת כאשר מדובר במרכיבי ידע פדגוגי לעומת מרכיבי ידע תוכני ומצד אחר עולה אחוז המורים שאינם בטוחים בעצמם (ודירגו רמת ביטחון 1-2). נערכה בדיקת מובהקות של ממצאי החוללות על מרכיבי הידע השונים ומבדיקה זו עולה כי יש הבדלים מובהקים בין רמת הביטחון בסוגי הידע המגוונים בפעולת החילוק כמוצג בטבלה 9.

בטבלה 6 אפשר לראות כי רוב המורים דירגו את הביטחון שלהם ברמות 3-5 ברוב ההיגדים, ואולם פיזור הממצאים בעניין מרכיבי ידע פדגוגי (KCT, KCS) ממחיש כי בעוד בידע תוכן שגרת רוב המורים דירגו את רמת הביטחון 4-5, הרי במרכיבי הידע הפדגוגי אחוז המורים שדירגו רמת ביטחון 5 יורד במידה ניכרת, וכן עולה אחוז המורים שאינם בטוחים בעצמם (דירגו את רמת הביטחון 1-2). בדיקת מובהקות של ממצאי החוללות על מרכיבי הידע השונים (טבלה 7) מעלה כי יש הבדלים מובהקים בין רמות הביטחון של המורים בסוגי הידע השונים.

טבלה 7: מובהקות ההבדלים בין רמות ביטחון המורים במרכיבי הידע השונים על כפל, מבחן T

טבלה 9: מובהקות ההבדלים בין רמות ביטחון המורים במרכיבי הידע השונים, מבחן T

תוכן ותלמידים	תוכן והוראה	תוכן לא שגרתי	תוכן שגרתי	
—	—	—	תוכן שגרתי	
—	—	—	לא משמעותי	תוכן לא שגרתי
—	—	לא משמעותי	-2.194**	תוכן והוראה
—	-2.966**	-9.992***	-8.776 ***	תוכן ותלמידים

** p<0.01, *** p<0.001

תוכן ותלמידים	תוכן והוראה	תוכן לא שגרתי	תוכן שגרתי	
—	—	—	—	תוכן שגרתי
—	—	—	לא משמעותי	תוכן לא שגרתי
—	—	לא משמעותי	-1.435*	תוכן והוראה
—	-2.922**	-7.732***	-8.709***	תוכן ותלמידים

* p<0.05, ** p<0.01, *** p<0.001

ממצאי רמת החוללות העצמית של המורים באשר לתרגילי חילוק מעבר ללוח הכפל (טבלה 8) מעידים כי בדומה לממצאי הידע בפעולת החילוק ובדומה לממצאי החוללות בפעולת הכפל, המורים בטוחים בידע הפדגוגי שלהם על הוראה ותלמידים פחות מידיע התוכן.

טבלה 8: אחוז המורים שדירגו כל רמת ביטחון תוך בחינת ידע על חילוקי הממוצע וסטיית התקן

ההיגד	סוג הידע	5	4	3	2	1	ממוצע וסטיות M(Sd) תקן
"הקיפו מספר בין 1 ל-5 המציין את מידת הביטחון שלכם..."	תוכן שגרתי CCK	64	19	12	5	0	4.43 (0.88)
לפתור תרגילי חילוק במספרים טבעיים ואפס מעבר ללוח הכפל	תוכן לא שגרתי SCK	58	19	16	6	1	4.27 (1.05)
לפתור תרגילי חילוק במספרים טבעיים ואפס מעבר ללוח הכפל ביותר מדרך אחת	תוכן והוראה KCT	48	33	9	8	2	4.17 (1.67)
להורות את האלגוריתם של חילוק טבעיים מעבר ללוח הכפל	תוכן ותלמידים KCS	30	36	23	8	3	3.82 (1.99)
לצפות מראש שגיאות תלמידים בתרגילי חילוק מעבר ללוח הכפל							

מחקר זה עסק בבדיקה של ארבעת מרכיבי ידע תוכני ופדגוגי-תוכני הנדרשים להוראת מתמטיקה כפי שהגדירו בול ועמיתיה (Ball et al., 2008) ובתחושת המסוגלות של המורים על ידע זה. המחקר התמקד במורים המלמדים כפל וחילוק במספרים טבעיים בכיתות של תלמידים לקויי למידה.

למחקר מספר ממצאים מהותיים שהבולט בהם הוא ההבדלים שנמצאו ברמת הידע של המורים על מרכיבי ידע מגוונים. רמת הידע הגבוהה ביותר נמצאה בשאלות של ידע תוכני שגרת ורמת הידע הנמוכה ביותר נמצאה בשאלות של ידע פדגוגי של תוכן ותלמידים. כלומר הרוב המוחלט של מורים ידעו לפתור היטב את התרגילים בדרך אחת, אך כמה מהם התקשו למצוא דרך חלופית לפתרון אותו תרגיל. מרבית המורים לא הציגו דרכי הוראה שונות מהדרך האלגוריתמית-טכנית, ללא הצדקה של האלגוריתמים על בסיס עקרונות וחוקים מתמטיים. כמו כן לא הוצגו כמעט המחשבות כחלק מדרך ההוראה, זאת על אף ההמלצות המופיעות בתוכנית הלימודים ובספרות המקצועית והמחקרית להוראה בדרכי פתרון מגוונות (Ma, 1999; Takker & Subramaniam, 2018). ייתכן שהידע החלקי של המורים נובע מהיעדר הכשרה מעמיקה בהוראת מתמטיקה בקרב חלק מן המורים. ממצא זה תומך בהמלצה לדרישת התמקצעות ממורים העוסקים בהוראת מתמטיקה לצד ליווי והדרכה לכלל מורי המתמטיקה ובפרט למורים בלי הכשרה מתאימה. המלצה זו תואמת ממצאים בספרות המחקרית המדגישים את החשיבות בהכשרה והדרכה (Treahy & Gurganus, 2010). פערי הידע בלטי במיוחד בידע של תוכן ותלמידים, כמחצית מהמורים התקשו להצביע על שגיאות אופייניות של תלמידים ולציין את מקורן. ייתכן שהמורים מלמדים בכיתות לקויי למידה שבהן לתלמידים יש מאפיינים רבים ומגוונים וכמה מהשגיאות שהם עושים קשורות ללקות הלמידה שלהם ולא דווקא לקשיים ספציפיים במתמטיקה. סיבה נוספת יכולה להיות חוסר ניסיון בהוראה של חלק מהמורים שהשתתפו במחקר. מחצית ממשותפי המחקר הוגדרו מורים בעלי ותק של למטה מ-10 שנים, 19 מתוכם בעלי ותק של עד 5 שנים. ייתכן שהיעדר ניסיון מספיק עם תלמידים הביא לידי חוסר ידע על שגיאות של תלמידים. ממצא זה ממליץ לכלול ידע על תלמידים בהכשרת המורים כך שמורים ידעו מה קל/קשה לאוכלוסיות מסוימות, יכירו תפיסות ותפיסות שגויות של תלמידים ויוכלו לתת מענה טוב יותר לתלמידיהם. כמו כן ממצא זה מחזק את ההמלצה שהוזכרה לעיל להדרכה וליווי של מורים בכיתות חינוך מיוחד, ובפרט של מורים חדשים.

פערי הידע שגילו המורים בעניין ידע תוכן לא שגרת, ידע של תוכן והוראה וידע תוכן ותלמידים מעלים שאלה על איכות ההוראה של המורים וייתכן כי כמו במחקרים קודמים שבדקו את הקשר בין ידע מורים לאיכות ההוראה (Sullivan, 2011; Tchoshanov, 2011; Van-Inger et al., 2006), איכות ההוראה של משותפי המחקר איננה מיטבית.

עוד ממצא עוסק בהלימה ובחוסר ההלימה שהתגלו בין רמת הידע במרכיבי הידע המגוונים לתחושת הביטחון של המורים במרכיבי ידע אלו. נמצאה הלימה בין רמת הביטחון של המורים לרמת הידע שהפגינו בשניים ממרכיבי הידע: בידע תוכן שגרת נמצאה תחושת חוללות עצמית גבוהה, שתאמה לרמת הידע במרכיב זה, ובידע תוכן ותלמידים נמצאה תחושת חוללות עצמית נמוכה, שתאמה גם לרמת הידע במרכיב זה. ממצאים אלה מחזקים ממצאים במחקרים שבדקו קשרים בין חוללות עצמית של מורים בחינוך המיוחד לקידום

תלמידיהם, שבהם נמצא קשר בין רמת החוללות לתפקודם של המורים ואמונותיהם על יכולתם לתת מענה הולם לתלמידיהם ולקדם את הישגיהם הלימודיים (Skaalvik & Skaalvik, 2010; Tschannen-Moran & Barr, 2004). בשני מרכיבי הידע האחרים, ידע תוכן לא שגרת וידע תוכן והוראה, לא נמצאה הלימה בין רמת החוללות העצמית לרמת הידע. המורים גילו תחושת ביטחון גבוהה ביכולתם לפתור תרגילי כפל וחילוק ביותר מדרך אחת וביכולתם להורות תרגילים אלה, אולם בשאלון הידע הממצאים לא תאמו לתחושת ביטחון זו. אחוז המשיבים נכון על שאלות מסוגים אלו (הצעה לפתרון תרגיל בדרך אחת, או הצגת דרך הוראה באמצעות המחשה) היו נמוכים במידה ניכרת. ממצאים אלו מעלים תהייה על יכולתם של המורים שהשתתפו במחקר לתת מענה ממוקד ולקדם את תלמידיהם בנושאים פעולות הכפל החילוק.

המחקר הנוכחי מוסיף על הקיים בספרות המחקרית בכמה היבטים: היבט אחד הוא הבדיקה בו בזמן הן של הידע והן של החוללות העצמית בכל אחד מארבעת מרכיבי הידע שפורטו לעיל; היבט שני הוא ביצוע המחקר בקרב אוכלוסיית מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד. מחקרים קודמים שבדקו ידע מורים בנושא כפל וחילוק נערכו בקרב מורים המלמדים בחינוך הרגיל.

המלצות והשלכות פדגוגיות

השלב הראשון בהוראה במסגרת החינוך המיוחד הוא אבחון ידע ממוקד וניתוחו הכולל זיהוי שגיאות של הלומד ומקורותיהן. ממצאי האבחון עשויים לשמש בסיס לבניית תוכנית עבודה אישית הממוקדת בטיפול בקשיים של הלומד ובמקור לשגיאותיו. היכולות של המורים ותחושת החוללות העצמית שלהם שנבדקו במחקר הנוכחי (להציג מגוון דרכי פתרון, זיהוי שגיאות ומתן הסבר למקורן ובניית תוכנית לטיפול בשגיאות האלה) משמשים תשתית ידע הכרחית להוראת מתמטיקה בחינוך המיוחד. לפיכך לממצאי המחקר עשויה להיות תרומה מהותית הן במישור התאורטי והן במישור היישומי. במישור התאורטי, תרומתו היא הרחבת תשתית הידע המחקרי על הידע המתמטי והפדגוגי ותחושת המסוגלות של מורי חינוך מיוחד המלמדים בשיעורי מתמטיקה את הנושאים כפל וחילוק בטבעיים ואפס. במישור היישומי, ממצאי המחקר עשויים לספק תשתית להבניית תוכניות התערבות ממוקדות להוראת מתמטיקה למורי החינוך המיוחד בהכשרת מורים ובהשתלמויות.

מגבלות המחקר והצעות למחקר המשך

ההשתתפות במחקר הייתה על בסיס התנדבותי ולא בהכרח מייצגת את הידע ורמת החוללות של כלל המורים המלמדים מתמטיקה בכיתות של תלמידים לקויי הלמידה. לפיכך אנו ממליצים להרחיב את היקף אוכלוסיית המחקר. נוסף על כך, אפשר לבדוק ידע וחוללות עצמית גם בקרב אוכלוסיות מורים אחרות, מורים המלמדים מתמטיקה בחינוך היסודי, ולהשוות ביניהן ברמת הידע ובתחושת החוללות העצמית. במחקר זה לא נבדק קשר בין ידע וחוללות עצמית של המורים ובין הישגי תלמידיהם ולכן אנו ממליצים לבדוק קשרים אלו במחקר המשך.

רשימת מקורות

אהרונ, ר' (2004). אפשר גם אחרת: החילוק הארוך – כאבן בוחן לכמה עקרונות הוראה. **מספר חזק 2000**, 8, 47-42.
זסלבסקי, א' (2003). החילוק הארוך כמשל. **מספר חזק 2000**, 6, 43-38.

- Cimen, O. A. (2014). How do children multiply: Reflection and prospective pedagogical Implications. *Procedia- Social and Behavioral Sciences*, 159, 593-597. doi:10.1016/j.sbspro.2014.12.431
- Dellinger, A. B., Bobbett, J. J., Olivier, D. F., & Ellett, C. D. (2008). Measuring teachers' self-efficacy beliefs: Development and use of the TEBS-Self. *Teaching and Teacher Education*, 24(3), 751-766. doi:10.1016/j.tate.2007.02.010
- Downton, A. (2013). Making connections between multiplication and division. In V. Steinle, L. Ball, & C. Bordini (Eds.), *Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 242-249). Melbourne, Victoria, Australia: MERGA.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straber, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Fuson, K. C. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 300-305. doi:10.5951/TCM.9.6.0300
- Hackett, G., & Betz, N. E. (1989). An exploration of the mathematics self-efficacy/mathematics performance correspondence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 261-273.
- Jong, C., & Magruder, R. (2014). Beyond cookies: Understanding various division models. *Teaching Children Mathematics*, 20(6), 366-373.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McCray, J. S., & Chen, J. Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26(3), 291-307. doi:10.1080/02568543.2012.685123
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- Radatz, H. (1979). [Error analysis in mathematics education](#). *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi:10.3102/0013189X015002004
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411
- Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2010). Teacher self-efficacy and teacher burnout: A study of relations. *Teacher and Teacher Education*, 26(4), 1059-1069. doi:10.1016/j.tate.2009.11.001
- מרקוביץ, צ' (2000). מה קורה כאשר מה שרואים ושומעים משם, זה לא מה שרואים ושומעים מכאן. **מספר חזק 2000**, 1, 5-8.
- משרד החינוך. (2006). [תכנית לימודים במתמטיקה: לכיתות א'-ו' בכל המגזרים](#). ירושלים: המחבר.
- משרד החינוך. (2014). [מסמך התאמת תכנית הלימודים: במתמטיקה של בית הספר היסודי: לתלמידי החינוך המיוחד](#). ירושלים: המחבר.
- פרידמן, י' וקס, א' (2000). [תחושת המסוגלות העצמית של המורה: המושג ומדידתו](#). ירושלים: מכון הנרייטה סאלד.
- תירוש, ד' (1996). [מתמטיקה: מחקר והוראה](#). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- Bakker, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2016). Effect of mathematics computer games on special education students' multiplication reasoning ability. *British Journal of Educational Technology*, 47(4), 633-648. <https://doi.org/10.1111/bjet.12249>
- Bainbridge, R. (1981). To err is human: Towards a more positive approach to young children's mistakes in arithmetic. *Mathematics in school*, 10(5), 10-13.
- Ball, D. L., & Bass H. (2003). [Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching](#). In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceeding of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps G. C. (2008). Content knowledge for teaching - What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554
- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological review*, 84(2), 191-215. doi:10.1037/0033-295X.84.2.191
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bandura, A., Caprara, G. V., Barbaranelli, C., Gerbino, M., & Pastorelli, C. (2003). Role of affective self-regulatory efficacy in diverse spheres of psychosocial functioning. *Child Development*, 74(3), 769-782. doi:10.1111/1467-8624.00567
- Bandura, A. (2006). [Guide for constructing self-efficacy scales](#). In F. Pajares & T. Urdan (Eds.), *Self-efficacy beliefs of adolescents* (Vol. 5, pp. 307-337). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Boaler, J. (2015). [Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts](#). *YouCubed*, 1-28.
- Brouwers, A., & Tomic, W. (2000). A longitudinal study of teacher burnout and perceived self-efficacy in classroom management. *Teacher and Teacher Education*, 16(2), 239-253. doi:10.1016/S0742-051X(99)00057-8
- Brownell, M. T., Sindelar, P. T., Kiely, M. T., & Danielson, L. C. (2010). Special education teacher quality and preparation: Exposing foundations, constructing a new model. *Exceptional Children*, 76(3), 357-377. doi:10.1177/001440291007600307

- 
- Sullivan, P. (2011). Identifying and describing the knowledge needed by teachers of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 171-173. doi:10.1007/s10857-011-9188-6
- Takker, S., & Subramaniam, K. (2018). [Teacher knowledge and learning in-situ: A case study of the long division algorithm](#). *The Australian Journal of Teacher Education*, 43(3), 1-20.
- Tschannen-Moran, M., & Barr, M. (2004). Fostering student achievement: The relationship between collective teacher efficacy and student achievement. *Leadership and Policy in Schools*, 3(3), 189-207. doi:10.1080/15700760490503706
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 141-164. doi:10.1007/s10649-010-9269-y
- Tirosh, D., Tsamir, P., Tabach, M., Levenson, E., & Barkai, R. (2011). Geometrical knowledge and geometrical self-efficacy among abused and neglected kindergarten children. *Scientia in Education*, 2(1), 23-36. doi:10.14712/18047106.52
- Treahy, D. L., & Gurganus, S. P. (2010). Models for special needs students. *Teaching Children Mathematics*, 16(8), 484-490.
- Van-Inger, S., Eskelson, S. L., & Allsopp, D. (2016). Evidence of the need to prepare prospective teacher to engage in mathematics consultations. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2), 73-91.

שינויים בידע של סטודנטיות להוראת המתמטיקה במהלך יצירת קורס מוק בנושא יחס ופרופורציה

ענת קלמר
עינב קיסר



ד"ר ענת קלמר

מרצה באקדמית גליל מערבי ובמכללת אורנים.
תחומי מחקר עיקריים: התפתחות ההבנה המתמטית
באמצעות המחשה ויזואלית של מושגים ופעולות
ושילוב כלים ממוחשבים בהתמודדות עם פתרון בעיות
מתמטיות.

תקציר

מאמר זה מתאר שינויים בידע של סטודנטיות להוראת המתמטיקה
בבית ספר יסודי במהלך יצירת קורס מוק בנושא יחס ופרופורציה.

בסמינריון במכללה בצפון הארץ למדו 29 סטודנטיות את נושא
היחס והפרופורציה באמצעות יצירת קורס מוק המשלב כלים
ממוחשבים דינמיים. היחידות בקורס המוק נבנו בקבוצות שיתופיות,
מתוך ניסיון להתמודד ולתת מענה לקשיים בהבנת המושגים ותפיסות
שגויות של תלמידים אבל גם של סטודנטים להוראת המתמטיקה.
הקורס שהסטודנטיות בנו מציע שבע יחידות הוראה, כאשר כל
יחידה נפתחה בדילמה, המשיכה בפיתוח תובנה לצד שילוב כלים
ממוחשבים והסתיימה בשאלות הערכה. התהליך כלל שיתוף של
יחידות והערכת עמיתים בפיתוח הקורס.

מילות מפתח: ידע מורה; יחס ופרופורציה; טכנולוגיות ממוחשבות;
קורס מוק (MOOC); הערכה.



ד"ר עינב קיסר

מרצה במכללת אורנים ובאקדמית גליל מערבי.
בוגרת החוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה.
תחומי מחקר עיקריים: דידקטיקה של המתמטיקה
בסביבות טכנולוגיות, תכנות משחקים ותהליכי הוראה
של בעיות מתמטיות (מסוג בעיות מידול).

הקדמה

חוקרים רבים דנים בהכשרה של מורים למתמטיקה ובסוגי הידע
הנדרשים להוראת התחום (Leikin, 2006; Ball, Thames, &
Phelps, 2008; Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014; Fischbein,
1994). בעידן הטכנולוגי הרשתות רוויות בחומרי הוראה ולמידה,
במגוון כלים ממוחשבים דינמיים, בסרטונים ובאפליקציות. המורה
צריך לדעת להתנהל בין כל ההיצע ולכוון את דרך ההוראה שלו על
פי דרישות תוכנית הלימודים והתייחסות לתלמיד בעידן הטכנולוגי.
המציאות הדינמית והצמיחה המואצת של המידע הנגיש הופכת את
השיתופיות, הן בפן של הבניית הידע הן בפן של הערכתו, להכרחית.
במאמר זה נתאר השתנות של ידע תוכן מתמטי במשולב עם ידע
תוכן פדגוגי וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי, באופן שיאפשר למורים
לרכוש מיומנויות וכישורים הנדרשים להוראת המתמטיקה, הכוללים
השיבה ביקורתית, פתרון בעיות, אוריינות מידע, התמחות בסוגי ידע

פדגוגי. ידע זה מציע דרך לבנות גשר בין העולם האקדמי של הידע הדיסציפלינרי ועולם ההתנסות של ההוראה. ידע זה כולל:

1. **שילוב בין הידע המתמטי לידע על התלמידים (KCS – Knowledge of Content and Student)** – ידע זה דורש אינטראקציה בין הבנת התחום המתמטי הספציפי והיכרות עם התלמידים וחשיבתם המתמטית. בתחום ידע זה על המורה להעריך את חשיבת התלמידים, לנתח את המשימות תוך בחינת הלבטים, הקשיים והטעויות הנפוצות. המורה צריך לצפות מראש את תשובות התלמידים ולהעריך את רמת הקושי של המשימות שהוא מזמן לכיתתו. כמו כן עליו להעריך אילו משימות יעוררו עניין ומוטיבציה בקרב תלמידיו.

2. **שילוב בין הידע המתמטי להוראה (KCT – Knowledge of Content and Teaching)** – ידע מתמטי הנדרש לעבודתו של מורה למתמטיקה כאשר ההתמקדות היא בהוראה. כלומר כל מה שהמורה חייב לעשות כדי לתמוך בלמידה של התלמידים. ידע זה משפיע על תכנון רצף ההוראה, שלפיו יש בחירה במשימות פתיחה ומשימות העמקה בחומר הנלמד, הערכת היתרונות והחסרונות של הייצוגים הוויזואליים המסייעים בהוראה והיכרות עם השיטות והפרוצדורות להוראת הנושא. כל אחת מהמשימות האלה דורשת אינטראקציה בין ידע מתמטי לידע פדגוגי שמשפיע על למידת התלמידים. ידע מסוג זה משפיע על השיח בדיון הכיתתי שבמהלכו למורה יש כלים להחליט מתי לעצור ולהסביר שוב את הנלמד, מתי לנצל הזדמנויות שעולות בכיתה כדי להבהיר היבטים מתמטיים מסוימים, מתי לשאול שאלות חדשות ולהציע משימות חדשות להמשך הלמידה.

3. **ידע קוריקולרי (KCC – Knowledge of Curriculum)** – ידע על נושאי הלימוד בכל הכיתות, מבנה הספירלי של תוכנית הלימודים, ספרי הלימוד הקיימים בתחום הדעת, מודלים מוחשיים ועזרים טכנולוגיים להוראת התכנים.

מישרה וקוהלר (Mishra & Koehler, 2006) עוסקים בסוג ידע נוסף של מורה הפועל בסביבה טכנולוגית – **ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי (TPCK – Technological Pedagogical Content Knowledge)**. המאפיינים שבאו לידי ביטוי בתאוריה זו והודגשו בסביבת המוק נוגעים לייצוג מושגים בטכניקות פדגוגיות המשתמשות בטכנולוגיה בדרך הבנייתית.

למידה שיתופית והערכת עמיתים

היבט אחר הנוגע לידע בסביבת קורס מוק, עוסק בתהליכים של שיתופיות בלמידה ובהערכה. יש חשיבות רבה בחינוך להבניה שיתופית של ידע ולהערכת עמיתים את הידע הנבנה ואף על פי כן משלבים זאת באקדמיה מעט מדי (Zevenbergen, 2001). באמצעות למידה שיתופית והערכת עמיתים הלומדים מקבלים עצמאות בהובלת הלמידה שלהם ומפתחים מיומנויות חשיבה ברמות גבוהות (Black & Wiliam, 1998; Topping, 1996, 1998). הערכת עמיתים מחזקת כישורים של עבודת צוות מעצם השיח שנוצר בין נותן ומקבל המשוב (Riley, 1991; Marcoulides & Simkin, 1995). באמצעות הלומדים מפתחים תובנות על עצמם כמו יכולת להעריך סוגים של ידע מתחום ההתמחות שלהם.

נתאר את התפתחות ידע התוכן בנושא יחס ופרופורציה ששימש בסיס לבניית קורס המוק במחקר זה.

מגוונים והערכת עמיתים (Rotherham & Willingham, 2009). נראה כיצד התנסות בבניית קורס מוק, בעבודה שיתופית והערכת עמיתים קידמה את ההתמקצעות בתחום הידע המתמטי וברכישת כלים פדגוגיים וטכנולוגיים להוראה.

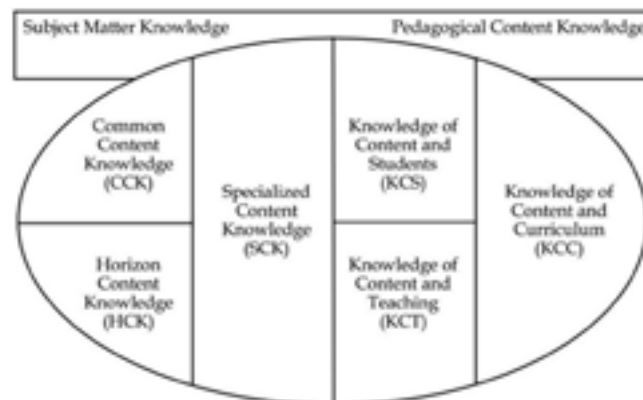
לאחר סקירת סוגי הידע הנדרשים להוראה והתמקדות בהבנת תחום התוכן של יחס ופרופורציה, נתאר את יחידות ההוראה בקורס המוק, הרציונל לבנייתן והטכנולוגיה הממוחשבת ששולבה בהן. בפרק הממצאים נשיב על שאלת המחקר שבאה לבדוק השתנות בידע תוכן, ידע תוכן פדגוגי וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי של סטודנטיות להוראה במהלך בניית קורס מוק העוסק ביחס ופרופורציה.

רקע תאורטי

סוגי ידע של מורים

שולמן הציע מודל תאורטי מקיף להתפתחות ידע של מורים (Shulman, 1987). מודל זה המדגיש את תחום התוכן הפדגוגי הורחב ונבדק במחקרים רבים. באחד מהם פותחה תאוריה המתמקדת בידע של מורים למתמטיקה (Ball et al., 2008). תאוריה זו מחלקת את הידע הדרוש למורים למתמטיקה לשניים: ידע תוכני (Subject matter knowledge) שהוא מתמטי בלבד וידע פדגוגי (Pedagogical content knowledge) שמערב ידע מתמטי עם ידע אחר, כגון ידע על תלמידים, ידע על דרכי הוראה וידע על תוכנית הלימודים (איור 1).

Domains of Mathematical Knowledge for Teachers



איור 1: תחומי ידע מתמטי להוראה (Ball et al., 2008)

על פי התאוריה של בול ועמיתיה (Ball et al., 2008), ידע תוכן מתמטי כולל:

1. **ידע תוכן כללי (CCK – Common Content Knowledge)** – ידע וכישורים מתמטיים הבאים לידי ביטוי במסגרות שונות מחוץ להוראה. ידע זה הוא בסיסי ולא ייחודי למורים.
 2. **ידע תוכן ייחודי להוראה (SCK – Specialized Content Knowledge)** – ידע זה נדרש להוראת המתמטיקה כדי לאתר דפוסים שגויים בחשיבה של התלמידים, הערכת גישות מתמטיות, בחירה ושימוש בייצוגים מוחשיים להוראה וכדומה. הידע של המורה כולל דרכים לפיתוח אלגוריתמים לפעולות חשבוניות, הרחבת רעיונות, קשרים ועקרונות מתמטיים שונים.
 3. **ידע מתמטי מתקדם (HCK – Horizon Content Knowledge)** – ידע מתמטי שאינו כלול בתוכנית הלימודים, יש בו ראיית הקשרים מתמטיים במבט רחב יותר.
- לפי מודל זה, החלק השני של ידע הדרוש למורים, הוא ידע תוכן

התפתחות ההבנה של תלמידים בתחום יחס ופרופורציה

חשיבה פרופורציונלית עוסקת ביחסים מתמטיים שהם כפליים מטבעם. הגדרת פרופורציה מבחינה טכנית היא שוויון של שני יחסים. היחס הוא מנה המתקבלת בעזרת פעולת החילוק בין שני מספרים, גדלים, כמויות או ביטויים. למשל, בהינתן המספרים n_1 ו- n_2 היחס ביניהם מוגדר $n_1:n_2$. פרופורציה עוסקת בהשוואה בין יחסים. כלומר הקשר הכפלי שיוצר את היחס הראשון נשמר ושווה לקשר הכפלי, היוצר את היחס השני. בהינתן שני יחסים, היחסים יהיו שווים או בעלי אותה פרופורציה, כאשר $n_1:n_2 = n_3:n_4$ (בן-חיים, קרית ואילני, 2006; Ben-Chaim et al., 2012). במונחים של בול ועמיתיה (Ball et al., 2008) מדובר כאן בידע תוכן כללי (CCK – Common Content Knowledge).

חשוב שמורים ידעו לשלב בין הידע המתמטי לידע על התלמידים (KCS – Knowledge of Content and Student). בשלבים הראשונים להתפתחות מושג היחס, התלמידים נוטים לתת הסברים איכותיים ולא כמותיים לקשרים בין ממדים. בשלב זה חשוב לפתח אצלם את החוש לפרופורציה. השימוש בבעיות מילוליות ללא מספרים מאפשר לתלמידים לבחון את הקשרים הבסיסיים בין המשתנים במצבי פרופורציה בדרך לא פורמלית. חשיפת התלמידים למצבי פרופורציה ללא מספרים הכרחית כדי לסייע להם לפתח חוש לפרופורציה (Billings, 2001). בשלב הבא, התלמידים עוברים להתמחות כמותית ורואים את הקשרים בין הממדים כאדיטיביים ביסודם. בהדרגה הם מבחינים בקשרים הכפליים, תחילה של מספרים שלמים ובהמשך בכל יחס (בן-דוד, קרית ואילני, 2006). סוקניק (1992) דנה במחקרה בטעויות של תלמידים הנובעות משימוש באסטרטגיה חיבורית בבעיות יחס, במקום באסטרטגיה כפלית. לטענתה, הם נוטים לחבר או לכפול לפי נוחות המספרים המופיעים בבעיה. אחת המסקנות ממחקרה וגם ממחקרו של ורניו (Vergnaud, 1988) היא ש"יש להדגיש את המבנה הכפלי הקבוע העומד בבסיס כל בעיות היחס, ללא קשר למספרים המסוימים המופיעים בהן" (סוקניק, 1992, עמ' 130).

הקשיים המלווים את תפיסת מושגי היחס והפרופורציה מעלים את הצורך לאתר או לבנות כלים שיתמכו בתהליכים העומדים מאחורי הבנת המושגים. הכלים יכולים להיות מודלים קונקרטיים או טבלאות פורמליות, כמו כל דבר אחר (אלגוריתמים, למשל) שיעזור לתלמיד לפשט ולהבין. האנלוגיות שיקשרו בין הייצוג למושג היחס צריכות לאפשר לתלמיד לחבר מושגים חדשים עם מצבים מוכרים ולפתח גמישות בתפיסת המושג (English, 1997).

עיקרון נוסף להוראת המושגים המודגש בתוכנית הלימודים במתמטיקה (משרד החינוך, 2006) הוא עיקרון המציאות, שלפיו יש לקשר את הנושאים הנלמדים לחיי היום-יום. הוראת המתמטיקה בהקשר מציאותי עוזרת לתלמידים ללמוד תוכן מתמטי בעל משמעות שישמש גשר בין העולם המופשט של המתמטיקה ובין העולם שמחוץ לכיתה (Boaler, 1994).

ידע של מורים על מושגי יחס ופרופורציה

הספרות המחקרית העוסקת בידע של מורים למתמטיקה ברובה אינה מתמקדת בידע תוכן בזיקה להוראה (KCT) של יחס ופרופורציה למרות חשיבות הנושא והקשיים של המורים ללמד אותו ושל התלמידים ללמוד אותו (Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012; Lamon, 2007).

מחקר שנעשה באינדונזיה (Ekawati, Lin, & Yang) מדווח על כלי

מחקרי שפותח לאבחון ידע תוכן מתמטי להוראה של יחס ופרופורציה בקרב מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים. המחקר מצא שמורים מצליחים יותר בבעיות פרופורציה עם ערך חסר לעומת בעיות השוואה שנשאלת בהן שאלה על שוויון בין היחסים. 271 המורים שנבדקו במחקר זה, התמודדו עם בעיות הנעלם באמצעות כפל באלכסון בלי שהבינו בהכרח את משמעות היחס. המורים במחקר השתמשו באסטרטגיה חיבורית שגויה כאשר היו מעורבים מספרים "לא נוחים" לחישוב היחס.

בעבודה שנעשתה בישראל ובדקה ידע של מורים בבתי ספר יסודיים, נמצאה הכללת יתר של "איסור" השימוש בפעולת חיבור בבעיות יחס ופרופורציה. למורים לא היה ברור שיחס המתקיים בין שתי קבוצות בכמות השלמה ממשיך להתקיים בקבוצות חלקיות מתוכה (Klemer & Peled, 1998). המורים שילבו בכיתותיהם דרכי הוראה מגוונות: משיטות מובנות ועד ללמידה מחיי היום-יום, אבל בהבנת נושא היחס נצפה קושי אצל כולם. במהלך 7 סדנאות בנות 90 דקות כל אחת נחקר נושא היחס ומשמעותו. נותחו תשובות של תלמידים ואסטרטגיות שהשתמשו בהן בפתרון שאלות יחס ובהמשך הוצגה למורים הבעיה הזו:

בקבוצה יש 32 בנות ו-52 בנים. מה היחס בין מספר הבנות למספר הבנים? האם ניתן לחלק את הקבוצה הכוללת לקבוצות שוות קטנות, כך שבכל אחת מהקבוצות הקטנות יתקיים אותו יחס?

בחלק הראשון של השאלה היה ברור למורים שצמצום מספר הבנים והבנות יניב את היחס המבוקש. החלק השני כלל לא היה ברור למורים וכולם שגו. למורים לא היה ברור שיחס המתקיים בכמות הגדולה ממשיך להתקיים בקבוצות חלקיות מתוכה. לאחר ניתוח הבעיה והסקת מסקנה שאפשר לחלק את הקבוצה הכוללת לקבוצות קטנות יותר השומרות על אותו יחס המתקיים בקבוצה הכוללת, הוצגה למורים בעיה אנלוגית ועדיין נמצא כי תובנה זו לא הוטמעה. לאחר דיונים, התמודדות עם בעיות וניתוחן נוכחו המורים בתפיסות השגויות שהחזיקו בהן. יש לציין שלמרות התפיסות השגויות הם ידעו להשתמש באלגוריתמים המקובלים לפתרון בעיות יחס, על פי תוכנית הלימודים (Klemer & Peled, 1998). המסקנות צריכות להתמקד בנקודות הקושי שנמצאו אצל המורים ובדרך הטיפול בתפיסת מושג היחס בקרב התלמידים. תהליכים אלו באו לידי ביטוי במחקר הנוכחי כאשר סטודנטים להוראת המתמטיקה פיתחו קורס מוק למורים למתמטיקה.

מטרת המחקר

מטרת המחקר הייתה לבדוק השתנות ידע תוכן, ידע תוכן פדגוגי וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי של סטודנטיות להוראת מתמטיקה במהלך בניית קורס מוק העוסק ביחס ופרופורציה.

אוכלוסייה

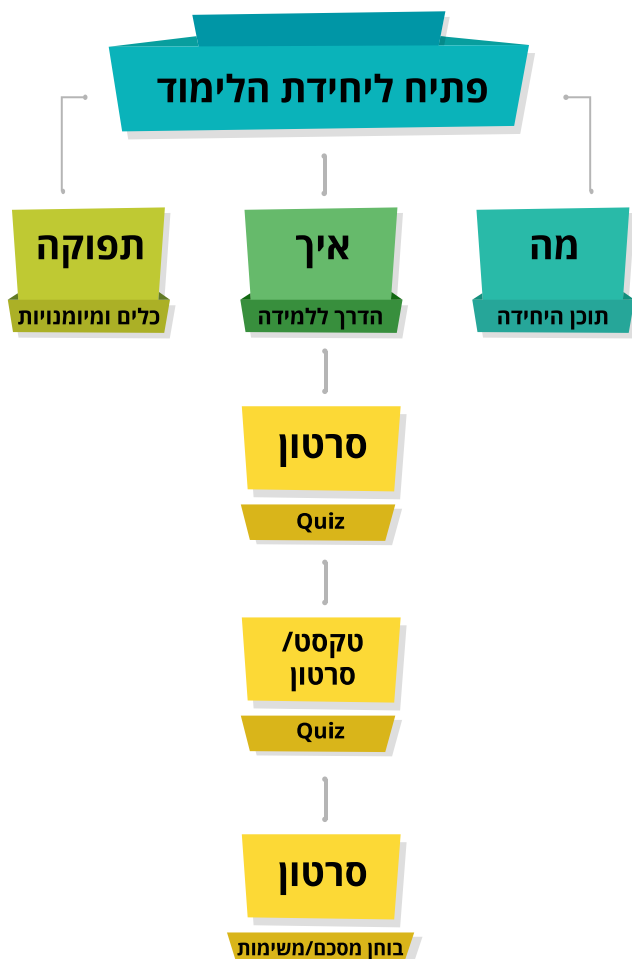
במחקר השתתפו 29 סטודנטיות שפיתחו קורס מוק בסמינריון "מחקרים בחינוך המתמטי". הסטודנטיות היו פרחי הוראה בשנה הרביעית ללימודיהן לתואר ולימדו באותו זמן מתמטיקה בבתי ספר יסודיים. הכיתה חולקה לשבע קבוצות, כאשר בכל אחת מהן היו 5-4 סטודנטיות.

מהלך המחקר

החלק הראשון של הסמינריון היה בעיקרו תאורטי, ובו הסטודנטיות נחשפו לסקירה ספרותית על התפתחות של מושגי יחס ופרופורציה, שלבים וקשיים בהוראה ולמידה של הנושא, מודלים מוחשיים

ופרופורציה. השאלון הוצג לסטודנטיות בשיעור השני, לפני שלב הלמידה התאורטית. כל סטודנטית השיבה על השאלון, השאלונים נאספו ונבדקו והתקיים דיון כיתתי על התשובות של הסטודנטיות במשך שיעור כפול.

2. **תכנון וכתובת יחידת ההוראה:** מבנה היחידות בקורס המוקד היה אחד ומפורט (איור 2). הפתח מציג את תוכן היחידה, הדרך שבה היא תועבר והמיומנויות הנרכשות. שלושת החלקים האלה משלבים סרטונים/טקסטים המעלים דילמות המאפשרות חקר בכלים ממוחשבים דינמיים. כל אחד מהחלקים מסתיים במשימת הערכה (Quiz).



איור 2: מבנה יחידת הוראה בקורס המוקד

יחידת ההוראה המפורטת של כל קבוצה עודכנה שלוש פעמים במהלך החלק היישומי, לאחר הצגת היחידה או התנסות בה והערכת עמיתים (נספח 1).

3. מחוונים להערכת עמיתים: הערכת עמיתים התקיימה בשלושה שלבים לאורך הפקת קורס המוקד. המשובים שימשו את הקבוצות בביצוע שינויים ביחידות שלהן (נספח 2).

שלב א': הערכת עמיתים על פי הצגה ראשונית של היחידה של כל קבוצה במליאת הכיתה. הסטודנטיות נתנו משוב ספונטני ליחידות.

שלב ב': הערכת עמיתים על פי הצגה חוזרת של היחידות. הערכה לכל אחת מהיחידות התבססה על מחוון מובנה. הסטודנטיות בחרו באילו קריטריונים להתמקד מתוך המחוון, בבואן למשב את היחידה המוצגת.

שלב ג': הערכת עמיתים בוצעה על פי הצגה חוזרת של היחידות והתנסות אישית של כל אחת מהסטודנטיות בשתיים מהן. שתי היחידות שהעריכו בכתב במהלך מענה על כל הקריטריונים המפורטים במחוון, כללו את היחידה

להוראה, קישור הנושא לידע פורמלי קודם, קישור למציאות ורלוונטיות ללומד. נעשו דיונים בכיתה והועלו בעיות מתמטיות בנושא יחס ופרופורציה כדי לבסס את למידת תחום התוכן ולהכיר בקשיים בלמידה והוראה של הנושא. בהוראת מבנים של קורסי מוקד, הסטודנטיות התנסו בלמידת קורסי מוקד בהוראת המתמטיקה וקראו מאמרים בתחום (לדוגמה מאמרם של ברק, ותד, בר-שגב וחאיק, 2014).

החלק השני של הסמינריון היה מעשי, ובו הסטודנטיות התבקשו לתכנן תשתית לקורס מוקד בנושא יחס ופרופורציה עבור מורים למתמטיקה. כל אחת משבע הקבוצות בכיתה בחרה נושא שתמקד בו ובחנה כלים ממוחשבים דינמיים היכולים לסייע בבניית יחידות התוכן. אלה הן יחידות התוכן שבנו את קורס המוקד: 1. חוש ליחס ופרופורציה; 2. בניית מחרוזות במהלך שמירה על דגם חוזר; 3. שמירה על גוון בערבוב צבעים; 4. קבלת החלטה על הקנייה הכדאית ביותר; 5. שינוי מתכונים לצד שמירה על הטעם; 6. קנה מידה; 7. יחס כשבר פשוט.

כל יחידה נפתחה בדילמה, שאלות להבניית היחידה המשלבות שימוש בכלים ממוחשבים ושאלות הערכה. נסביר את יחידות ההוראה מתוך התמקדות במטרות שהציבו הקבוצות בפיתוחן.

יחידות ההוראה

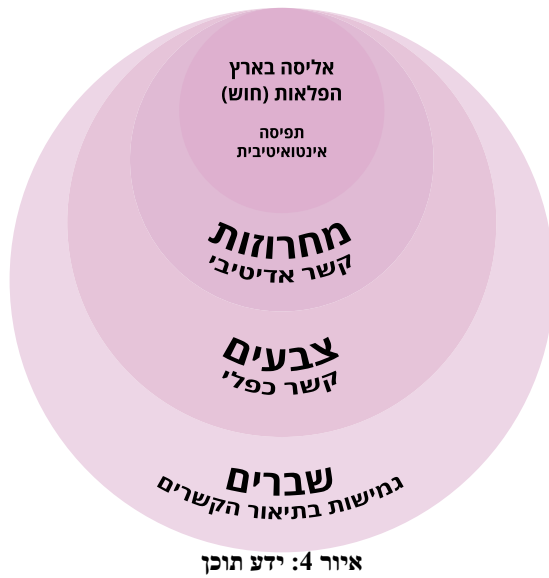
יחידת ההוראה הראשונה העוסקת בחוש לפרופורציה, עוצבה בהשראה של אגדת הילדים "אליסה בארץ הפלאות". הפעילויות ביחידה כוללות מצבים המקדמים את יכולת התלמידים לדון בכמויות ובקשרים השונים ביניהן במצבים של פרופורציה. מטרת היחידה הייתה לעודד תלמידים לפתח חוש לפרופורציה, ועל כן נוסחו בעיות שאינן מתבססות על חישובים מתוך כוונה לטפח בשלבים הראשונים את ההבנה המושגית על פני פיתוח כישורים פרוצדורליים. יחידת ההוראה השנייה התבססה על התפתחות הידע האינטואיטיבי והחלה הבנייה פורמלית של מושגי היחס והפרופורציה במודל של מחרוזות. באמצעות מודל זה המטרה הייתה ליצור קשרים בין הדגם הבסיסי של המחרוזות למחרוזת השלמה, לצד השוואה בין שתי מחרוזות על פי כמות המחרוזות מכל צבע בכל אחת מהן. יחידת ההוראה השלישית עסקה בערבוב צבעים וחיידה את התוכנה שהחלה להיכנות ביחידה קודמת של בניית מחרוזות על הקשר הכפלי כשומר על פרופורציה. התווסף חקר של משתנים רציפים לעומת המשתנים הבדידים שאפיינו את מודל המחרוזות. החקר ביחידה זו הביא לידי תובנה שקשרים חיבוריים בין צבעים לאו דווקא שומרים על אותו גוון, כלומר לאו דווקא שומרים על פרופורציה. שתי היחידות הבאות, הרביעית והחמישית, עוסקות במצבים מחיי היום-יום. ביחידות אלו העוסקות במצבים של קנייה ומכירה ובהתאמת מתכונים לסועדים, המטרה הייתה להפעיל את הפרוצדורה המתמטית לצד שיקולי דעת אחרים בקבלת החלטות על הפתרון. יחידת ההוראה השישית מרחיבה את העיסוק במודל היחס והפרופורציה בחיי היום-יום ועוסקת בקנה מידה. היחידה השביעית, המסיימת את הקורס, עוסקת בשברים פשוטים כמתארים יחסים, ללא הקשר סיפורי. בהתבסס על הבניית המודל הפורמלי של יחס ופרופורציה ביחידות הראשונות, המטרה הייתה להראות כי אפשר לשמור על פרופורציה גם בחיבור מונים ומכנים של שברים שקולים.

כלי המחקר

1. **שאלון לאבחון ידע מקדים** של סטודנטיות בנושא יחס ופרופורציה (שאלון מקדים). בפתחת הקורס הסטודנטיות השיבו על שאלון כדי לבדוק את הידע המקדים שלהן בנושא יחס

הקודמת והעוקבת לזו שקבוצתן בנתה.

איור 3 מתאר מודל של הפקת המוקד מתוך הדגשת תהליכים שיתופיים והערכת עמיתים.



איור 5: ידע תוכן פדגוגי

השתנות סוגי הידע בקבוצות העבודה:

4. ידע תוכן - הבנת משמעות היחס והפרופורציה

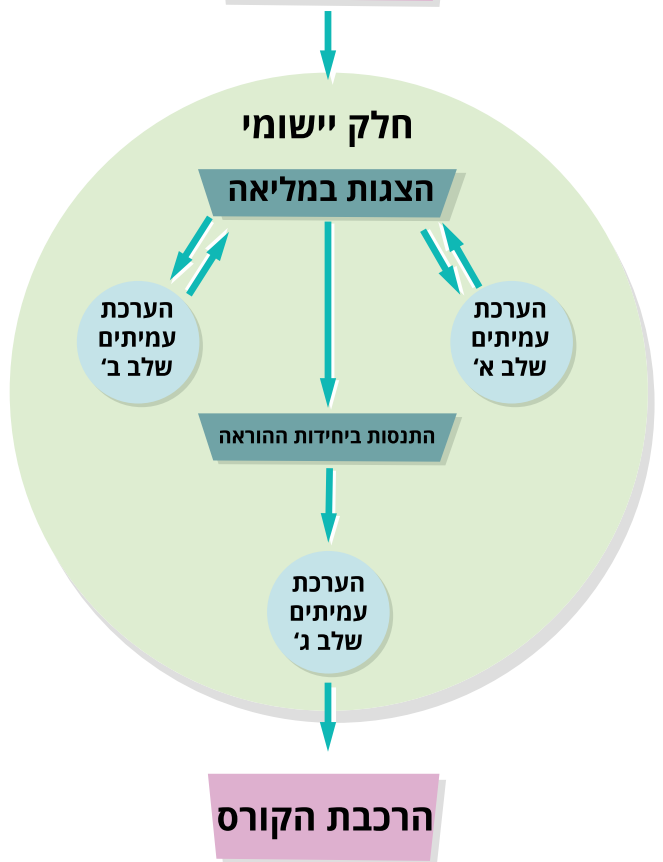
בסעיף זה נתמקד בתפיסה שגויה שעלתה בשאלון המקדים, שבו בדקנו את הידע של הסטודנטיות בנושא יחס ופרופורציה. בהמשך נראה כיצד הקבוצות נתנו מענה לקושי זה בפיתוח יחידות המוקד.

בחלק התאורטי של הסמינריון, הסטודנטיות התמודדו עם הבעיה הזו:

קניתי מוצרים בסך כולל של 900 ש"ח. המוצרים נקנו משתי מחלקות שונות באותה חנות. היחס בין הוצאותי בשתי המחלקות הוא 2:7. אילו אפשרויות עומדות בפניי, אם אני רוצה לשלם את הסכום בשלושה תשלומים (לא בהכרח שווים) ואם לשתי המחלקות אני צריכה לשלם בנפרד (באותו מספר תשלומים, תוך שמירה על אותו יחס)? סכומי התשלומים צריכים להיות ללא אגורות.

בבדיקת התשובות של הסטודנטיות לא זיהינו קושי במענה לשאלה זו, מלבד שלוש סטודנטיות שתשובתן לא הייתה נכונה. הבדלים נמצאו בדרכי הפתרון: בדיקת יחס בין מחלקות או בדיקת יחס בין התשלומים. כלומר הסתכלות אופקית ושמירה על קשר של "פי 3.5" בין מחלקות (באותה שורה) או הסתכלות אנכית והכפלת שני הערכים של שתי המחלקות על פי אותו מספר (בטור). בשני המקרים הן דאגו לשמור על הסכום הנתון בכל מחלקה (איור 6).

חלק תאורטי



איור 3: מודל הפקת קורס מוקד

בשלב של הערכת עמיתים ביצעו החוקרות תצפיות. תועדו רשמים ומשובים שנתנו הקבוצות ונאספו יחידות ההוראה שהוצגו בכל שלב. ניתוח הגרסאות של יחידות ההוראה בכל קבוצה היה על סמך סוגי הידע האלה: ידע תוכן, ידע פדגוגי (Ball et al., 2008) וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי (Mishra, & Koehler, 2006). ניתוח של סוגי הידע בשלוש נקודות זמן שונות אפשר לחוקרות להשוות את השתנותם בכל קבוצה במהלך בניית קורס המוקד.

ממצאים ודין

בפרק זה ננתח את סוגי הידע שבאו לידי ביטוי בתכנון יחידות ההוראה: 1. ידע תוכן – הבנת משמעות היחס והפרופורציה; 2. ידע תוכן פדגוגי – בחינת שיקולים מציאותיים; 3. ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי – בחירת כלים ממוחשבים דינמיים.

איורים 4 ו-5 מציגים תיאור סכמתי של התפתחות ידע התוכן (איור 4) והתפתחות ידע התוכן הפדגוגי (איור 5) שנרחיב עליהם בסעיפים האלה:



איור 7: פעילות בלוח הכפל

בבחינת השתנות ידע התוכן נוכל לסכם שהחשיפה של הקבוצות ליחידות הנוספות במהלך שיתופן במליאה, הביאה לידי בחינה מחודשת של מטרות כל יחידה ותורמתה למכלול הקורס. כך, לדוגמה, קבוצת הצבעים הרחיבה את התכנים למשתנים רציפים ולא רק משתנים בדידים שהציגה קבוצת המחרוזות. יותר מכך, השתנות ידע התוכן היה מהותי בקבוצת השברים לאחר שהן זיהו הזדמנות להרחיב את מטרות היחידה ולאפשר התמודדות עם תפיסות שגויות שהן חוו בתחילת הקורס.

2. ידע תוכן פדגוגי - התמקדות בהיבט המציאותי

הנושאים שבחרו הסטודנטיות לפתח ביחידות הלימוד כללו בחינת היבטים שונים של מושגי היחס והפרופורציה בחיי היום-יום. החל מפיתוח חוש לפרופורציה בעת שימוש בסיפור מעולם הילדים, שילוב מצבים הכוללים הקשר מחיי היום-יום וכלה בהערכה של הסיטואציה במציאות ובחינתה. התהליך של בניית היחידות כלל חשיפות חוזרות ליחידות השונות והערכת עמיתים כדי לעמוד על הייחודיות והתרומה לרצף המוק.

קבוצת החוש (יחידה 1 בקורס המוק), שילבה שאלות ברוח הסיפור של אליסה בארץ הפלאות מתוך מטרה שהתלמידים ינתחו את המשתנים המשפיעים על היחסים בסיטואציות למיניהן. דוגמה לשאלה מתוך היחידה:

אליסה טעמה מהתה וקראה: "מה עשית? התה שלי מרו" עצר הכובען ואמר: "אוי אליסה, לך הכנתי את קנקן התה המתוק ביותר. היכן הוא נמצא? את כל הקנקנים מילאתי עד הסוף במים אבל בקנקן הלבן שמתי 5 כפיות סוכר, בקנקן הוורוד שמתי 5 כפיות סוכר ואילו בקנקן הירוק שמתי 3 כפיות סוכר". אליסה אמרה: "אבל הקנקן הירוק והקנקן הוורוד שווים בגודלם ואילו הקנקן הלבן יותר גדול משניהם".

הקבוצות של המחרוזות והצבעים (יחידות 2-3 בקורס המוק), שילבו שאלות עם הקשר מציאותי, כמו שמירה על יחסים בין צבעים לקבלת גוון רצוי לצביעת חדר.

קבוצות הקנייה והמתכונים (יחידות 4-5 בקורס המוק) הרחיבו את התוכן המציאותי כך שלאחר חישוב היחס בשאלות מחיי היום-יום, הפותר נדרש לבחון את התשובה בהקשר למציאות. דוגמה לשאלה מיחידה זו:

בזמן שרוני ואמה ערכו קניות הן הבחינו בשני מארזים של עוגיות מאפינס: מארז קטן המכיל 12 עוגיות ב-34 ש"ח, מארז גדול המכיל 29 עוגיות ב-87 ש"ח. אמר: "ניקח את המארז הקטן הוא משתלם ביותר". רוני: "אני חושבת שעבור הכיתה שלי המארז הגדול משתלם יותר".

תשלום	מחלקה ב 200 ש"ח	מחלקה א 200 ש"ח
1	70	20
2	350	100
3	280	80

איור 6: פתרון בעיית הקנייה בתשלומים

בדיון שהתקיים בשיעור העוקב, שיתפו הסטודנטיות באסטרטגיות שלהן. בהמשך התבקשו להסתכל על אחת החלוקות שלהן ונשאלו:

האם אפשר לעשות שינויים ולהיות בטוחים שהיחסים יישמרו? לדוגמה, אם נוציא 2 ש"ח מתשלום כלשהו ממחלקה א' ו-7-1 ש"ח מאותו מספר תשלום ממחלקה ב' ונעביר אותם לתשלום אחר, האם היחס בין המחלקות בכל תשלום יישמר?

27 סטודנטיות השיבו שהיחס לא יישמר במצב של חיבור וחסור, מלבד שתי סטודנטיות שבדקו במחשבון וראו שהיחס אכן נשמר. כשהתבקשו להסביר האם זה מקרי או מתקיים גם במקרים אחרים הן לא הצליחו לענות על כך בוודאות.

בהמשך הדיון הגיעו הסטודנטיות למסקנה כי הסיטואציה מתארת מצב של כפל כחיבור חוזר, ולכן כל עוד אנחנו מוסיפים או מחסרים כפולות של היחס הבסיסי, נשמור על היחס הקיים בתשלומים לשתי המחלקות. בשלב זה הבחנו שלסטודנטיות לא היה ברור מדוע פעולות חיבוריות שומרות על היחס והאם זה תמיד נכון. ממצא זהה דווח במחקר קודם (Klemer & Peled, 1998) שבו נמצאה הכללת יתר של "איסור" השימוש בפעולת חיבור בבעיות יחס ופרופורציה. העמקה בקשרים החיבוריים והכפליים של מושגי היחס והפרופורציה, באה לידי ביטוי בתכנון חוזר של יחידות ההוראה בשתי קבוצות (צבעים ושברים). נציג ממצאים המתארים את השתנות ידע התוכן בקבוצות אלה.

קבוצת המחרוזות (יחידה 2 בקורס המוק) פתחה בהבניה פורמלית של מושגי היחס והפרופורציה באמצעות מציאת דגמים חוזרים כדי להביא להבחנה בקשרים חיבוריים בין הדגם הבסיסי של המחרוזות ובין המחרוזות כולה. קבוצת הצבעים (יחידה 3 בקורס המוק) שמה לעצמה מטרה להדגיש את הקשר הכפלי כשומר על פרופורציה. התנסות ברצף המשימות ביחידה מאפשרת לגלות כי קשרים חיבוריים בין הצבעים לא בהכרח שומרים על הגוון, כלומר על היחס. השוואה בין תכנון הסבב השני והשלישי של יחידת ההוראה בקבוצת הצבעים הראתה שהסטודנטיות הוסיפה שאלות ויישומונים כדי להרחיב את ההתנסות בשאלות עם משתנים רציפים (כמויות רציפות של צבע) ולא רק במשתנים בדידים (כמות קופסאות צבע) שנחשפו אליה בהערכת העמיתים הראשונה.

יחידת הוראה העוסקת בשבר הפשוט כיחס (יחידה 7 בקורס המוק) הראתה שוויון יחסים באמצעות לוח הכפל. לדוגמה $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ כפי שאפשר לראות באיור 7, בשורות 1 ו-3 בעמודות 2 ו-4 בהתאמה.

לאחר שהקבוצה נחשפה ליחידת המחרוזות וליחידת הצבעים, טענו הסטודנטיות שהן לא מחדשות דבר ביחידה שלהן על פני יחידות קודמות, מלבד מציאת יחסים בלוח הכפל. בהמשך, הקבוצה זיהתה הזדמנות לשבור את התפיסה השגויה על איסור חיבור וחסור כאשר עוסקים ביחס ופרופורציה. הן הראו שאפשר לשמור על פרופורציה גם בחיבור יחסים בלוח כפל, כלומר חיבור מונים ומכנים של שברים השווים ביניהם מניב שבר חדש המתאר את אותו יחס בין מונה למכנה. שינוי זה מתבטא בסבב השלישי של תיקון יחידת ההוראה. בשלב זה הן הוסיפו דילמה דומה לזו שהתמודדו איתה בשאלון הידע המקדים ושילבו משימות חקר בלוח הכפל לגילוי מצבים שיש בהם קשרים חיבוריים אפשריים (איור 7).

קבוצת המחרוזות וקבוצת המתכונים (יחידות 2 ו-5 בקורס המוקד) בנו משימות חקר בעזרת יישומונים. קבוצת המחרוזות הוסיפה שאלות של יחס לבנייה ביישומון על פי סיפור המסגרת שהוצג ביחידה. ההנחיה שלהן הייתה לעקוב אחר רצף המשימות ולהתעלם מהתרגול המובנה שהוא חלק מהיישומון. היה מעניין לראות בשלב ב' של הערכת עמיתים לאחר הצגת היחידות כיצד קבוצת המחרוזות ייעצה לקבוצת המתכונים לשנות את השימוש ביישומון כמתרגל ידע בסוף היחידה, ליישומון המאפשר הבניית ידע בגוף היחידה. לפיכך קבוצת המתכונים הצליחה להגמיש את החשיבה שלה על שילוב היישומון ביחידה. אם בהתחלה היה להן ברור שיש להשתמש בשאלות מובנות ביישומון, או לשלב יישומונים למטרות של תרגול בלבד, הרי שעל פי המשובים שהתקבלו בהערכת עמיתים הן שינו את סוג השאלות ושילבו את היישומון ללא התרגול המובנה שלו. קבוצת המתכונים תיארה את השתנות הידע הפדגוגי-טכנולוגי שלה:

מצאנו שלושה יישומונים שיכולים להתאים ליחידה. מתוך השלושה שני יישומונים אפשרו תרגול יחס במתכונים ויישומון שלישי בעל פוטנציאל לבניית תובנה. שני היישומונים מוקמו בסוף היחידה כהצעה לתרגול והיישומון בעל הפוטנציאל לבניית תובנות שולב בהבניית היחידה. על מנת שהיישומון יתאים ליחידתנו ויעודד הפקת תובנות שרצינו להוביל, ערכנו שינוי שבא לידי ביטוי בהשמטת התרגול ביישומון.

דוגמה נוספת באה לידי ביטוי בקבוצת הצבעים (יחידה 3 בקורס המוקד). לאחר הצגת היחידות בשלב ב' של הערכת עמיתים, הקבוצה הוסיפה לתכנון היחידה יישומון שמאפשר חקר במצבי יחס שבהם המשתנים רציפים (כמויות רציפות של צבע) ולא רק במצבים בדידים (שפורפרות בדידות של צבעים), כפי שקיים בקבוצת המחרוזות (איורים 8-10).



איור 8: בניית מחרוזות (אתר "10 אצבעות")



איור 9: ערבוב צבעים עם שפורפרות בדידות (אתר "אופק")

השוואת המחירים בין המארזים מובילה לכך שעוגיית מאפינס במארז הקטן זולה יותר מהמארז הגדול. בחינת הפתרון בהיבט מציאותי הביאה לידי פתרון שאיננו חד-משמעי והתבסס על הכמות הנדרשת כפי שמוצג בטבלה הזו:

מספר תלמידים בכיתה	מארז קטן	מארז גדול
24-20	2 מארזים 62 ₪	1 מארז 87 ₪
29-25	3 מארזים 93 ₪	1 מארז 87 ₪
36-30	3 מארזים 93 ₪	2 מארזים 174 ₪
41-37	1 מארז גדול + 1 מארז קטן 118 ₪	

איור 7: הקנייה הכדאית ביותר

בחינת התשובה במציאות (כמו מספר התלמידים בכיתה) לא הייתה חלק מהמטרות שהציבה קבוצת הקנייה בתכנון היחידה בסבב הראשון. בשלב הערכת עמיתים (בשלב ב') שתי קבוצות אחרות טענו ששאלות הדורשות חישוב עלויות למוצר בודד בתוך מארז מופיעות בספרי לימוד. קבוצת הקנייה והמכירה עסקה במשוב זה בתכנון האחרון של יחידת ההוראה, כאשר הוסיפה שאלות שנדרש בהן לחשב עלויות לקנייה המשתלמת ביותר אך גם לבחון אותה על פי הצרכים של הקונה.

3. ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי

אפשר להבחין בשלוש רמות בהתפתחות ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי במהלך בניית קורס המוקד.

רמה 4: הבחנה בין כלים מחושבים

הקבוצות איתרו משחקים, סרטונים, תוכנות ויישומונים על פי הידע האינטואיטיבי שלהן על תרומת המחשב ללמידה.

ברמה זו, הקבוצות ניתחו את היתרונות והמגבלות של הכלים הממוחשבים כדי לבחון ולבחור את אלו המתאימים לרצף היחידה והמקדמים את מטרותיה: חלק מהתוכנות והיישומונים הציגו משוב לשמירה על פרופורציה, לדוגמה ביחידה של הצבעים היה אפשר לערבב כמויות של צבעים כדי להגיע לגוון הרצוי. הגוון שהתקבל שימש בקרה לשמירה על היחס. לעומתם היו יישומונים שהמחישו סיטואציה אך לא נתנו משוב. לדוגמה ייצוג מחרוזות וייצוג מצרכים להכנת מתכונים.

רמה 2: שילוב כלים מחושבים כתרגול

ברמה שנייה, הקבוצות שילבו את היישומונים שנראו להן מתאימים למטרות היחידה. תהליך זה בא לידי ביטוי בסבב הראשון של תכנון היחידות שכלל יישומונים לתרגול הנלמד ביחידה, אך לא ככלי לחקר ופתרון הבעיות המוצגות בה. 5 מתוך 7 הקבוצות שילבו יישומונים לתרגול התכנים רק בסוף היחידה. שתי קבוצות לא שילבו יישומונים בשלב זה.

רמה 3: שינוי/הוספה של כלים מחושבים על פי הערכת עמיתים

תכנון יחידות ההוראה בשלושה סבבים באמצעות קבלת משובים בתהליך של הערכת עמיתים והתנסות ביחידות של הקבוצות האחרות, הביא לידי חשיבה מחדש על שילוב כלים דינמיים ממוחשבים. ברמה זו, שולבו הכלים הממוחשבים לא רק כתרגול אלא הם הותאמו באמצעות שינוי השאלות כדי שיוכלו לשמש חלק אינטגרלי מהיחידה עצמה.

בלוח הכפל, ושחיבור "מונים" וחיבור "מכנים" של שברים שקולים מניב אותו יחס. שני רעיונות מקבילים שנצפו בקבוצת המחרוזות ובקבוצת השברים, הביאו לידי רכישת תובנות מתמטיות חדשות. תובנות שאינן טריוויאליות גם אצל מורים ותיקים למתמטיקה (Klemer & Peled, 1998).

השלכות חינוכיות

סביבת הלמידה שהתנסו בה הסטודנטיות פתחה הזדמנות לבניית יחידות הוראה כחלק מקורס מוקדש למורים, בתחום דעת של יחס ופרופורציה. ההתנסות בסביבה השיתופית הביאה לידי תהליכים של קבלת החלטות וחשיבה רפלקטיבית על המטרות וייחודן של כל היחידות ברצף הקורס. אנחנו ממליצות על תהליכים דומים בנושאים מתמטיים מגוונים למטרת התמקצעות של מורים והבניית ידע תוכני, ידע פדגוגי וידע טכנולוגי שיוכלו ליישם בהוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

בן-חיים, ד', קרת, י' ואילני, ב' (2006). **יחס ופרופורציה: מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה**. קריית ביאליק: אה.

ברק, מ', ותד, ע', בר-שגב, מ' וחאיק, ח' (2014). סוגיות בפיתוח קורסי מוקדש: אתגרים והזדמנויות. **הוראה באקדמיה**, 4, 39-36.

משרד החינוך. (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: המחבר.

סוקניק, מ' (1992). **האם הצבעים יודעים מתמטיקה? השימוש באנלוגיות פורמליות בפתרון בעיות יחס** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת חיפה.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, 62(3), 317-335. doi:10.1080/00071005.2014.959466

Ben-Chaim, D., Keret, Y. Z., & Ilany, B. (2012). Diagnostic questionnaire in ratio and proportion. In D. Ben-Chaim, Y. Z. Keret, & B. Ilany (Eds.), *Ratio and proportion: Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)* (pp. 233-243). Rotterdam: Sense.

Billings, E. M. H. (2001). [Problems that encourage proportion sense](#). *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(1), 10-14.

Black, P., & Williams, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74. doi:10.1080/0969595980050102

Boaler, J. (1994). When girls prefer football to fashion? An analysis of female under achievement in relation to 'realistic' mathematics contexts. *British Educational Research Journal*, 20(5), 551-564. doi:10.1080/0141192940200504

Ekawati, R., Lin, F. L., & Yang, K. L. (2015). Developing an instrument for measuring teachers' mathematics content knowledge on ratio and proportion: A case of Indonesian primary teachers. *International Journal of Science and*

הכנייה

רוני צבעה את חדרה בצבע ורוד שעורבב מ-9 פחיות בצבע ורוד עם 15 פחיות בצבע לבן.



שירה ביקשה לצבוע את חדרה בגוון ורוד זהה. בעקבות גודל החדר, הגדול מחדרה של רוני, המוכר ידע שעליו להשתמש ב-72 פחיות צבע. עזרו לו להחליט כמה פחיות מכל צבע לערבב כדי להגיע לגוון הוורוד שבחדרה של רוני.

איור 10: ערבוב צבעים, במשמעות רציפה (אתר <http://trycolors.com>)

קבוצת חוש יחס ופרופורציה וקבוצת השברים (יחידה 1 ו-7 בקורס המוקדש) לא שילבו יישומונים בסבב הראשון בתכנון היחידות. קבוצות אלה מצאו פתרונות אחרים לשילוב המחשב. לדוגמה קבוצת חוש יחס ופרופורציה ערכה סרטונים הממחישים את הסיפור של אליסה בארץ הפלאות עם שילוב של שאלות יחס בתוכם. קבוצת השברים רצתה למצוא יישומון שימחיש במדויק שאלות של השוואת שברים. אף שלא מצאה, החליטה לבנות פעילויות וסיטואציות באמצעות לוח הכפל.

החיפוש אחר יישומון לא היה פשוט כלל, לא היינו מרוצות מהיישומון מכיוון שהוא אינו משחקי אלא מהווה כלי חקר. בהמשך ראינו בלוח הכפל הממוחשב את היחס בין מונה למכנה וכיצד היחס שומר על פרופורציה.

סיכום

במאמר זה הראינו כיצד השתנו סוגי הידע של סטודנטיות בנושא יחס ופרופורציה במהלך בניית קורס מוקדש בקבוצות עבודה שיתופיות. בניית יחידות ההוראה יצאה מתוך הקשיים המתוארים בספרות ועל פי התפתחות מושגי היחס והפרופורציה (בן-דוד, קרת ואילני, 2006).

ברמת כל יחידה כל קבוצת סטודנטיות הפעילה שיקול דעת בתכנון רצף המשימות תוך הבחנה בתרומה של כל משימה להשגת המטרות. בניית קורס מוקדש עבור מורים הציבה אתגרים חדשים שבאו לידי ביטוי בבניית יחידות לימוד ייחודיות ואטרקטיביות: "הפעלנו שיקולי דעת פדגוגיים ביחס לרמות החשיבה, כך שהמורה יוכל לשלב את התכנים בהתאם לצרכים שעולים בכיתה". "התנסות זו אפשרה לנו לראשונה להתמודד עם בניית יחידת הוראה למורים למתמטיקה, דבר מאתגר, דורש שימוש ברמות חשיבה גבוהות ומפתח מאוד מבחינה מקצועית".

ברמה השנייה של קורס המוקדש הסטודנטיות פיתחו ראייה רחבה של נושא היחס והפרופורציה בתוך רצף הקורס כולו. תהליך זה התקיים לנוכח העבודה בסביבה שיתופית שאפשרה גישה לכל אחת מהיחידות, חשיפתן במליאת הכיתה בהערכת עמיתים בין הקבוצות. במפגש בין היחידות התפתחה אחריות אישית ליצירת התוצר השלם. נוסף על כך, הסטודנטיות הרחיבו את ידיעותיהן בנושא היחס והפרופורציה ורכשו כלים פדגוגיים המאפשרים חשיבה ביקורתית על הקיים, הצבת מטרות נוספות ועדכון חומרים שיקדמו מטרות אלו. כך לדוגמה הסטודנטיות היו מסוגלות להגדיר ביחידה השנייה, שהיחס הקיים במחרוזות כולה ממשיך להתקיים בדגמים חלקיים מתוכה. יחידת הצבעים הוסיפה הבחנה בין מצבים שבהם אפשר לחבר יחסים ובין מצבים אחרים שבהם אי אפשר לחבר אותם. סטודנטיות שהפיקו את יחידת השברים באמצעות פעילויות בלוח כפל דינמי ממוחשב, הבחינו שאפשר למצוא יחסים שווים בין שורות

- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). [Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge](#). *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. doi:10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x
- Riley, S. M. (1995). Peer responses in an ESL writing class: Student interaction and subsequent draft revision. *Dissertation Abstracts International*, 56, 3031.
- Rotherham, A. J., & Willingham, D. (2009). 21st Century: The challenges ahead: To work, the 21st century skills movement will require keen attention to curriculum, teacher quality, and assessment. *Educational Leadership*, 67(1), 16-21. Retrieved from <http://cesa7ita2009.pbworks.com/f/21st+Century+Skills+Curriculum+Teachers+Assessment.pdf>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21.
- Topping, K. (1996). *Effective peer tutoring in further and higher education* (SEDA Paper). Birmingham: SEDA.
- Topping, K. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research*, 68(3), 249-276. doi:10.2307/1170598
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Zevenbergen, R. L. (2001). Peer assessment of student constructed posters: Assessment alternatives in preservice mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(2), 95-113. doi:10.1023/A:1011401532410
- Mathematics Education, 13(1), 1-24. doi:10.1007/s10763-014-9532-2
- English, D. E. (Ed.). (1997). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Klemer, A., & Peled, I. (1998). Inflexibility in teacher's' ratio conceptions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 128-134). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED427969.pdf>
- Lamon, S. J. (2007). Rational and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 1, pp. 629-668). Charlottes, NC: Information Age.
- Leikin, R. (2006). Learning by teaching: The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In R. Zazkis & S. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 115-140). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marcoulides, G. A., & Simkin, M. G. (1991). Evaluating student papers: The case for peer review. *The Journal of Education for Business*, 67(2), 80-83. doi:10.1080/08832323.1991.10117521

נספח מספר 1: תכנון הפקת יחידת מוק

תכנון להפקת יחידת מוק בנושא:

שמות של חברות הקבוצה:

מטרות כלליות שהיחידה עתידה ללמד מורים למתמטיקה:

1.

2.

3.

פירוט חלקי היחידה	תוכן	הפקה בפועל
פתיחת היחידה הסבר על תוכן היחידה, הדרך ללמידה והתפוקה		
לאחר הגדרת מטרות היחידה הסבירו באופן כללי את תוכנה. נסו לשווק אותה באמצעות: - פיתוח היחידה לאור הדגשים והקשיים שנחשפתן אליהם בספרות המחקרית. - למידה בדרך חדשנית וזמינה. - הכלים והמיומנויות שאותם המורים עתידים לפתח על סמך ההתנסות וכו'....		
חלק ראשון	סרטון	הגדרת המטרה שעוסק בה החלק הראשון ביחידה והרציונל בבחירתה. הסבירו את תפקידה ברצף של היחידה כולה. כלומר מדוע היא נבחרה בשלב הזה ברצף המוקד?
	Quiz	כיצד השאלות בודקות את הבנת המטרות של החלק הראשון? מה הרציונל בבחירת רצף השאלות (האם הן בנויות בדרך הדרגתית? במה כל שאלה מוסיפה על קודמתה?) האם כדי לענות על השאלות יש לעבוד ביישומון? הסבירו את הערך המוסף שלו בשלב זה, במה הוא תורם להשגת המטרות.
חלק שני	סרטון / טקסט	הגדרת המטרה של החלק השני ביחידה והרציונל בבחירתה. הסבירו את תפקידה ברצף היחידות. כלומר מדוע המטרה נבחרה בשלב הזה ברצף המוקד?
	Quiz	כיצד השאלות בודקות את הבנת המטרות של החלק השני? מה הרציונל בבחירת רצף השאלות (האם הן בנויות בהדרגה? במה כל שאלה מוסיפה על קודמתה?) האם כדי לענות על השאלות עליהם לעבוד ביישומון? הסבירו את הערך המוסף שלו בשלב זה, במה הוא תורם להשגת המטרות.
חלק שלישי	סרטון	סרטון סיכום המשלב בין מטרות היחידה.
	מבחן מסכם	כיצד השאלות בודקות את הבנת מטרות היחידה. מה הרציונל בבחירת רצף השאלות (האם הן בנויות בהדרגה? במה כל שאלה מוסיפה על קודמתה?) האם השאלות משלבות התנסות בכלים ששולבו ביחידה (כמו התנסות ביישומונים)?

מחוון להערכת יחידת לימוד בנושא:

קריטריון	היגד	הערכה כמותית (1) (2) (3) (4) (5) במידה רבה במידה נמוכה	הערכה מילולית
דילמה לפתיחת היחידה	הדילמה יצירתית ומעוררת גירוי ועניין	(1) (2) (3) (4) (5)	
	הדילמה מתאימה לרמת התלמידים ומאפשרת ניתוח וחשיבה מעמיקה המעלה תהיות והתלבטויות	(1) (2) (3) (4) (5)	
	הדילמה מאפשרת למורה להבין את המטרה ותובנות שהיחידה עתידה להבנות	(1) (2) (3) (4) (5)	
הבניית היחידה	השאלות מתאימות לרמת התלמידים	(1) (2) (3) (4) (5)	
	השאלות בנויות בדרך הדרגתית, כל שאלה מוסיפה על קודמתה	(1) (2) (3) (4) (5)	
	רצף הבעיות מוביל לבניית התובנות והמטרות ומאפשר חזרה ומענה על הדילמה בפתיחת היחידה	(1) (2) (3) (4) (5)	
	תוכני היחידה מאפשרים למורה לפתח שיעורים ולהוסיף בעיות לפי רמת תלמידיהם	(1) (2) (3) (4) (5)	
	היחידה כוללת יישומנים או כלים ממוחשבים רלוונטיים, המאפשרים למורה לפתח משימות נוספות בעת שימוש ביישומנים/ כלים אלו	(1) (2) (3) (4) (5)	
הערכת היחידה	שאלות הערכה מאפשרות יישום של התובנות הנרכשות לאורך היחידה	(1) (2) (3) (4) (5)	
	שאלות הערכה בהלימה לתוכן היחידה	(1) (2) (3) (4) (5)	
	שאלות הערכה בהלימה לרמת ההבנה הנדרשת ביחידה	(1) (2) (3) (4) (5)	
הערכה כללית	היחידה מוצגת בדרך יצירתית ורלוונטית לתוכנה	(1) (2) (3) (4) (5)	
	היחידה מקורית ומוסיפה חדשנות על הקיים בספרי לימוד	(1) (2) (3) (4) (5)	

הערות/הארות נוספות שארצה לתת עליהן את הדעת בהערכת היחידה:

(כולל: קשר לתוכנית הלימודים, קשר לסקירה הספרותית, הצעות ליישומנים נוספים, רעיונות לשאלות הערכה נוספות וכל הצעה שיכולה לתרום למורה שיקבל את יחידת ההוראה הזו.)

על ארבע מורות וחקר בהוראת המתמטיקה*

* מאמר זה נכתב על סמך מחקר רחב יותר שנערך במסגרת פוסט-דוקטורט בהנחיית פרופ' עינת הד-מצויינים. תודה לעינת שפתחה בעבורי צוהר למחקר איכותני ולעיסוק בזהות של מורים כנקודת מוצא הכרחית ללמידה על תהליכים חינוכיים ועל האתגרים הכרוכים בהנעתם.

גלית שבתאי



ד"ר גלית שבתאי

בעלת תואר ראשון בחינוך עם התמחות בהוראת המתמטיקה לחטיבת הביניים; תואר שני בחינוך מתמטי מאוניברסיטת תל אביב. עבודת המחקר שלה עסקה בניתוח הבניית ידע של תלמידים בכיתה ד' הלומדים השוואת שברים לפי הכלל של "המשלים לשלם" בהנחיית פרופ' טומי דרייפוס.

את הדוקטורט סיימה באוניברסיטת בר-אילן בהנחיית פרופ' זמירה מברך וד"ר טובה מיכלסקי, ומחקר זה עסק בניתוח סיטואציות פדגוגיות מכיתת המתמטיקה בדגש על SRL.

המחקר הנוכחי הוא חלק מעבודת פוסט-דוקטורט שלה ועוסק בזהות מורים למתמטיקה ובקשרים בין זהות המורים לנרטיבים שלהם ולשיח על אובייקטים מתמטיים.

בעברה המקצועי גלית שימשה מורה למתמטיקה, מדריכת מורים, מדריכה מחוזית במחוז תל אביב ומרצה במכללת אחוה ובמכללת סמינר הקיבוצים.

תקציר

בשני העשורים האחרונים נעשים מאמצים רבים לקדם תהליכי הוראה-למידה הממוקדים בחקר ונבנים על הידע הקודם של הלומדים, בעת התמודדות עם משימה בעלת דרישות קוגניטיביות גבוהות וחשיפת המושגים העולים מהמשימה, כלומר תהליכי הוראה אלו מובילים להבנה קונספטואלית. הוראה זו נקראת לרוב הוראה חקירתית. המורים הם סוכני השינוי המרכזיים ולכן מידת הצלחת המאמצים לקידום הוראה זו תלויה בהם. המאמר מתמקד בארבע מורות למתמטיקה שרואיינו על רקע היותן תלמידות להוראה בכיתתן ויחסן להוראה חקירתית לעומת הוראה מסורתית. מטרת המחקר היא לחשוף זיקה של נרטיב המורות כלומדות מתמטיקה לסיבה לבחירת הוראת המתמטיקה כמקצוע ולשיח הפדגוגי שלהן על הוראה חקירתית. מהממצאים עולה כי העבר של המורות כלומדות עם היסטוריה קשה הוא בסיס לשיח הפדגוגי שלהן ולהזדהות שלהן עם סגנון הוראה. נמצא מבנה דומה בסיפור שלהן, ובאמצעותו נחשף הצורך שלהן ב'תיקון'. התיקון להוראה שקיבלו מנחה אותן בשיח הפדגוגי שלהן על ההוראה והן דנות בצורך של הדרישות הקוגניטיביות או חשיבה קונספטואלית בהוראה כמרכיבים שהיו חסרים להן בלמידתן. תרומת המחקר נובעת מהצורך שלנו כמכשירי מורים להבין את השיקולים המעכבים ומקדמים את המורים לאמץ הוראה חקירתית ולהבנות שיח בנושא במהלך ההכשרה והפיתוח הפדגוגי.

מילות מפתח: הוראה חקירתית/ריטואלית; שיח פדגוגי; נרטיב התיקון; דרישות קוגניטיביות.

מבוא

חוקרים רבים (Hiebert & Grows, 2007; Schoenfeld, 2014; Sztajn, Borko, & Smith, 2017) מסכימים כי הוראה חקירתית היא דרך יעילה לטיפול הישגים גבוהים והבנה קונספטואלית בתהליך למידת מתמטיקה. הוראה חקירתית כוללת התמודדות עצמאית של התלמידים עם משימות בעלות דרישות קוגניטיביות גבוהות, הכוונה

והדרכה של המורה, ויצירת קשרים בין רעיונות מתמטיים ואסטרטגיות פתרון (Stein, Correnti, Moore, Russell, & Kelly, 2017). עם זה בכיתות רבות אנו רואים הוראה מסורתית, הוראה שבה המורה במרכז, והוא שמסביר את הרעיונות המתמטיים ואת הפרוצדורות המתמטיות הנדרשות לפתרון (Resnick & Schantz, 2015). במסגרת הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) נהוג לקרוא להוראה מסורתית 'הוראה ריטואלית'. הוראה ריטואלית היא למעשה הוראה שבה התפקיד המרכזי של הלומד לשנן או לתרגל את התוכן שהמורה לימד, ולכן התפקיד המרכזי של המורה הוא 'להעביר ידע'. כדי לחשוף מדוע מורים ממשיכים בדרכי הוראה מסורתיות ונמנעים מהוראה חקירתית, יש להבין מה מונע מהם לעשות זאת. ממחקרים (e.g., Goodson & Gill, 2014) עולה כי להתנסויות המהותיות בחיים של המורים ולמשנתני רקע מסוימים יש מידה מסוימת של תהליך רפלקטיבי המהדהד במרכיבים המעצבים את הפרקטיקה של ההוראה. המחקר הנוכחי שמוצג כאן חושף באמצעות ראיונות עומק אישיים את הקשרים בין ההתנסויות שלהן כתלמידות עם הישגים נמוכים במתמטיקה לשיח הפדגוגי שלהן בכלל ולהצדקה שלהן להימנעות מהוראה חקירתית בפרט.

סקירת הספרות תישען על המסגרת הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) ותתמקד בשיח פדגוגי כמרכיב בעל משמעות בהבניית זהות המורים, בהוראה ובשיח של המורים על פרקטיקות הוראה ותהליכי הוראה-למידה.

על פי הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) שיח הוא אירוע תקשורתי בין-אישי או תוך-אישי המתנהל על פי דפוסים ייחודיים. שיח נתון מחלק את בני האדם לאלה שמסוגלים להשתתף בו ולאלה שלא, כלומר הוא מגדיר קהילה. קהילת שיח היא כזו שהשתתפים בה מתקשרים ופועלים על פי דפוסים מקובלים. ספרד (Sfard, 2008) טוענת כי אפשר להבחין בין סוגי השיח המתפתחים בקרב קהילות מקצועיות למיניהן באמצעות ארבעה מאפיינים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שגרות ונרטיבים מקובלים. המילה נרטיבים היא למעשה מכלול הסיפורים המסופרים במסגרת במהלך השיח. אם כך, מכלול הסיפורים הפדגוגיים יוצר מושג חדש שיח פדגוגי.

סקירת ספרות

מתוך ניסיון להגדיר את המונח 'שיח פדגוגי', שבתאי והד-מצויינים (Shabtay & Heyd-Metzuyan, 2017) הסתמכו על ההגדרה של טבח ונחליאלי (Tabach & Nachlieli, 2016) ל'מונח פדגוגי'. על פי טבח ונחליאלי (Tabach & Nachlieli, 2016), הפדגוג הוא "הפרט המקבל את התפקיד של המשתתף המוביל בשיח" (שם, עמ' 1448). מכאן, שבתאי והד-מצויינים (Shabtay & Heyd-Metzuyan, 2017) הגדירו כי שיח פדגוגי "תקשורת העוסקת בתפקיד הפדגוג, כלומר, בהובלת הלמידה" (שם, עמ' 177). בדומה לכל שיח, גם השיח הפדגוגי מאופיין במילות מפתח, נרטיבים וכללים (Sfard, 2008). נרטיבים אלו מתארים: א. מה התלמידים ילמדו; ב. איך הם ילמדו; ג. אילו תלמידים ילמדו (או לא). כמו כן השתתפות בשיח פדגוגי כרוכה בנרטיבים של המורים על עצמם, על דרך הלמידה ועל מבנה השיעורים בכיתתם (Goos, 2005).

יש הסכמה רחבה כי הוראה חקירתית המבוססת על התלמיד במרכז ועל ההתמודדות האישית שלו עם משימה בעלת דרישות קוגניטיביות גבוהות, היא הוראה המאפשרת הבנה קונספטואלית (e.g., Schoenfeld, 2014; Sztajn et al., 2017; Hiebert, 2007) וטוענים כי הוראה זו מתמקדת בשני מאפיינים עיקריים: מתן הזדמנות להתמודדות תלמידים עם משימות מתמטיות

שטיין ועמיתיה (Stein et al., 2017) מציעים להציב את שני המאפיינים האלה (SOS+EAC) זה כנגד זה במטריצה (תרשים מספר 1) המגדירה ארבעה סגנונות הוראה: רבעון ראשון (Q1) שבו ההוראה מאופיינת בכך ששני המאפיינים (SOS+EAC) באים לידי ביטוי במידה ניכרת; רבעון שני (Q2) שבו ההוראה מאופיינת בשיעורים שיש בהם המשגה גבוהה והתמודדות נמוכה של התלמידים; רבעון שלישי (Q3) שבו ההוראה מאופיינת בשיעורים שבהם המשגה נמוכה אך התמודדות התלמידים גבוהה; רבעון רביעי (Q4) שבו ההוראה מאופיינת בהורדת שני המאפיינים האלה, כלומר שיעורים שבהם התמודדות התלמידים ותשומת הלב למושג נמוכים. שטיין ועמיתיה קידמו פיתוח פדגוגי של מורים להוראה שבה שני ההיבטים גבוהים (Q1).

		Students' Opportunities to Struggle	
Explicit Attention to Concepts		High	Low
	High	Q1	Q2
	Low	Q3	Q4

תרשים 1: מתן הזדמנות להתמודדות תלמידים לעומת תשומת לב מפורשת למושגים (Stein et al., 2017, p. 3)

בכל זאת קיימות עדויות מחקריות (Nachlieli & Tabach, 2019; Resnick & Schantz, 2015) המוכיחות שהוראה חקירתית המדגישה מושגים לצד הזדמנות להתמודדות התלמידים, היא הוראה נדירה. יתרה מזו, מחקרם של שטיין ועמיתיה (Stein et al., 2017) מראה כי מורים רבים מזדהים דווקא עם סגנונות הוראה המאופיינים ב-SOS או ב-EAC נמוכים. יש עדויות מחקריות (Shabtay & Heyd-Metzuyan, 2017) שעירבו ראיונות עומק עם מורים ונמצא כי חלק מהמורים בוחרים במכוון להציב SOS או EAC נמוכים עבור תלמידיהם. הסיבות להוראה מסוג זה או אחר כפי שהעלו המורים במהלך הראיון נעוצות בכמה משתנים. כמה מהמשתנים שהעלו המורים נובעים מהנרטיבים האישיים שלהם. הנרטיבים האישיים של המורים נאמרו לעיתים במפורש והיו גם מורים שהשיח הפדגוגי שלהם היה גלוי פחות וזהותם נחשפה במידה חלקית.

אין הסכמה בקרב רבים על הגדרת המושג זהות ויש ביקורת עליה (e.g., Brubaker & Cooper, 2000). שץ-אופנהיימר (2008), מתארת את המושג הזהות כך:

באמצעות הסיפור נשמעים הקולות המגוונים של היחיד ואלה מנהלים דיאלוג פנימי רפלקטיבי עד להיווצרותו של מארג מורכב. האירועים שהפרט בוחר לספר; הדרך שבה הוא בוחר לארגן את אירועים הללו; ההקשרים והמשמעויות שהוא נותן להם; האופן שבו הסיפור מסופר, על ריבוי הקולות שבו - כל אלה מאפשרים למספר להבין את עצמו ובה-בעת לחקור אלמוד על המשמעויות ועל הפרשנויות שלו למציאות הפנימית והחיצונית שהוא מתמודד עימה (עמ' 28).

ברונר (Bruner, 1987) מוסיף כי הסיפור עשוי לכלול מבנה טמפורלי, כלומר יש בו זמנים שונים, ויש בכך מעלה: היחס לעבר

ולעתיד מעניקה למספר ולמאזין משמעות חדשה באשר להווה. אם כך, השיח על העבר והיחס בזמן הווה, ההליכה אחורה בזמן ושוב קדימה להווה ואולי אף לעתיד, וכך חוזר חלילה היא חלק מסיפור החיים של האדם, ומסייעת בהבניית זהותו.

שץ-אופנהיימר (2008) טוענת כי יש שני מנגנונים עיקריים המלווים את התהליכים של הבניית הזהויות. הראשון הוא תהליך של השוואה אל ה"אחר" והאחר הוא בחינת שייכות. תהליך ההשוואה ובחינת השייכות נעשים מתוך עימות ומלווים במתחים, בפערים ובדילמות המכוננים את התהליך של הבניית הזהות. תהליכי ההשוואה ובחינת השייכות שהפרט מנהל הם תלויי הקשר אפשר ללמוד על הדיאלוג עם הסביבה וגם על הדיאלוג הפנימי באמצעות הסיפור במקומות שמתגלים בהם פערים, מתחים, מעברים וקונפליקטים (Kunnen, 2006).

כדי להתגבר על הערפול שקיים בהגדרת המושג, ספרד ופרוסק (Sfard & Prusak, 2005) הגדירו זהות כך: "אוסף של סיפורים בנוגע לאדם שהם תוצר של רה-איפיקציה ואשר הם מקובלים ומשמעותיים" (עמ' 15). הרה-איפיקציה מתקבלת כאשר במקום לדבר על מה האדם עושה, מדברים על מהותו של האדם (מי הוא) (Heyd-Metzuyanim, 2013).

הגדרה זו למושג זהות מבוססת על תקשורת בין אנשים (מילולית ושאינה מילולית) והיא שימושית עבור חוקרים רבים בעיקר בשל היותה אופרטיבית לניתוח ובנויה על השתתפות בשיח (Graven, 2011; Heyd-Metzuyanim, 2013). יתרה מזו, הגדרה זו מאפשרת לעקוב אחר מקורותיה החברתיים-תרבותיים של הנרטיבים האלה בשיח מסוים. היא מתאימה מאוד כאשר אנשים מתבקשים לדבר על עצמם, לדוגמה בריאיון (Heyd-Metzuyanim, 2013).

המחקר העוסק בסיפורים אישיים מדגיש כי "התיאור של סיפור החיים הוא תמיד תלוי מצב ומשרת פונקציה" (Alasuutari, 1997, p. 5). כלומר הסיפור מושפע מהנסיבות שהוא מסופר בהן, ויש לו תפקיד – הוא משרת כוונה כלשהי של המספר, כוונה הקשורה לנסיבות שהוא עולה בהן. מכאן שהעבר המסופר נבנה כל פעם מחדש והעצמי יכול להיות מוצג בדרכים מגוונות בהקשרים מסוימים. אלאסוואטרי (Alasuutari, 1997) מכנה זאת גישה דיסקורסיבית: העצמי המציג את עצמו, המספר סיפור מחייו, משתמש בכלי התרבות של הסביבה, אלה המקובלים באותה עת והוא נמצא בשיח עימם, שיח של הסכמה והשתלבות או של התרסה והתנגדות או כל מה שביניהם.

זהות מורים היא נושא שנחקר רבות לאחרונה. נעשו מחקרים רבים גם בנושא של פרחי הוראה (Ma & Singer-Gabella, 2011; Kaasila, 2007) וגם בנושא של מורים בפועל (Heyd-Metzuyanim, 2018; Shabtay, 2019; Lutovac & Kaasila, 2018). מה וסינגר-גבאלה (Ma & Singer-Gabella, 2011) חקרו פרחי הוראה שהבנו את זהותם בעת שנדרשו ללמוד בעולם הוראה-למידה אקספלורטיבי, בעודם מורגלים ללמידה בעולם מסורתי (הוראה ריטואלית) והעלו את הקושי הכרוך בהסתגלות ללמידה אקספלורטיבית. קאסילה (Kaasila, 2007) התמקד בנרטיבים של שישה פרחי הוראה על הלמידה שלהם כלומדים בבית הספר ועל הלמידה שלהם במהלך ההכשרה להוראה. במחקר של קאסילה (Kaasila, 2007) נמצא קשר בין הנרטיבים של המורים כתלמידים ובין התפיסות שלהם כלפי ההוראה. הד מציוינים ושבתאי (Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019) מתמקדות בזהות מורים הנבנית על שיח פדגוגי ושיח מתמטי וקושרות בין שני השיחים (Discourses), ואילו לוטווק וקאסילה (Lutovac & Kaasila, 2018) עסקו באמונות מורים וקשרו את אמונות המורים לפרקטיקות שלהם בכיתה.

צ'פמן (Chapman, 2008) עוסקת בנרטיבים של מורים למתמטיקה שמשולבים בהם נקודות מפנה של חייהם המקצועיים. לדעתה יש משמעות גדולה לנקודת מפנה בחיים המקצועיים של מורים אך מציינת כי המחקר בתחום עדיין בראשית דרכו. לתפיסתה של צ'פמן (Chapman, 2008) נקודת מפנה היא לא תמיד אירוע חד-פעמי, וייתכן שנקודת המפנה היא תהליך מתפתח שמביא לידי מפנה בהוראה או רצף של אירועים שמביאים לידי מפנה ביחס כלפי המקצוע ובתפיסת המקצוע שלהם.

שץ-אופנהיימר (2008) מוסיפה על צ'פמן בהבחנה כי בחינת זהויות היא תהליך המשולב בצמתים, באירועים, במקום שבו מבוצעת פעולת הבחירה. הבחירה כוללת תהליך של העדפה בין אפשרויות המתרחשת במקומות שבהם מוצעות חלופות, או נדרשים להחליט בעת שיש התלבטות ונדרשת הכרעה.

מפנה בחייהם המקצועיים של מורים מכוון לא אחת ל"תיקון" (Lutovac & Kaasila, 2011). במחקרם של לוטווק וקאסילה (Lutovac & Kaasila, 2011) נמצאו מורים שחלה אצלם נקודת מפנה בלימודיהם. מתלמידים שהיה להם קושי בלמידת המתמטיקה הם נהיו מורים למתמטיקה. בניתוח המחקר לוטווק וקאסילה (Lutovac & Kaasila, 2011) השתמשו במושג תיקון כמושג שסייע להם להבין את הבחירה של פרחי ההוראה שעברו תהליך מתלמידים שהיה להם קושי בלמידת המתמטיקה למורים למתמטיקה.

עוד חוקרים ניסו למצוא את ההשפעות של משתני רקע אחרים על המורים: לדוגמה החוקרים גודסון וגיל (Goodson & Gill, 2014), טענו כי התנסויות משמעותיות בחיים של המורים ומשתני רקע אחרים הם מרכיבי מפתח של האישיות ומעצבים את הפרקטיקה של ההוראה. בדומה החוקרים אלטן ופרבר-לאני (Altan & Farber, 2018) ניתחו נרטיבים של מורים ומצאו כי להעדפות בילוי בילדות יש השפעה על פרקטיקות הוראה ועל למידה של מורים. לטענתם הסיפורים האישיים של המורים וההתנסויות המהותיות שלהם הם מקור בעל משמעות להבניה של תוכנית לפיתוח מקצועי יעיל של מורים.

כמה מהחוקרים התחילו לתעד את ההשפעות של התנסויות מסוימות על הלמידה של פרחי ההוראה (Darling-Hammond, 2006; Zeichner & Conklin, 2008) אבל מחקר חשוב שחוקר את הקשרים בין ההתנסויות האלה על ההוראה בפועל ועל הלמידה של המורות עדיין נמצא בראשית דרכו (Matheny, 2016; Zeichner, 2010).

מכאן עולה כי הרקע והתנסויות הלמידה של המורה תורמים לתפיסת המורה על ההוראה שלו, על הנטייה שלו לסגל פרקטיקות הוראה ועל הדרך שבה יפעל כמורה.

גם בתחום המדעים התעסקו בנושאים המטרידים מורים בעניין הוראה חקירתית. החוקרים (Davis, Beyer, Forbes, & Stevens, 2011) עקבו אחרי שתי מורות המלמדות מדעים בבית ספר יסודי שנדרשו להטמיע תוכנית לימודים אקספלורטיבית בכיתתן. הם הגיעו למסקנה שיש צורך לתמוך במורים אלו לצד פיתוח פדגוגי צמוד והדרכה אישית. חוקרים אלה מדגישים כי הידע התוכני של מורים המלמדים בבית הספר היסודי מוגבל למדי.

בסקירת הספרות נמצא כי הרקע וההתנסויות של המורה משפיעים על הדרך שבה הוא מסגל פרקטיקות הוראה ועל הנטייה שלו לאמץ פרקטיקה זו או אחרת (Gill, 2014; Altan & Farber Lane, 2018; Goodson & Gill, 2014). נקודות המפנה בחיי המורים הן מרכיב חשוב כיוון שבאמצעותן אפשר להבין את הבחירה וההסתגלות של המורים לפרקטיקות הוראה (Chapman, 2008). כמו כן עלה כי מורים בבתי ספר יסודיים זקוקים לתמיכה רבה הן בידע התוכן הן בידע הפדגוגי.

מסקנה זו בולטת כשהם נדרשים לסגל הוראה הכרוכה בשינוי ההוראה המסורתית (Davis et al., 2011).

מכאן צומחת מטרת המחקר הנוכחי: חשיפה של נרטיבים הנוגעים במפורש לנקודת מפנה של המורות בלמידת מתמטיקה. נוסף על כך, המחקר הנוכחי בוחן את קיומם של קשרים בין הנרטיב של המורות כתלמידות מתמטיקה לשיח הפדגוגי שלהן בכלל ולעמדות שלהן כלפי תהליך ההוראה-למידה האקספלורטיביים והריטואליים בפרט.

מתודולוגיה

מאמר זה מתבסס על מחקר רחב יותר שכלל 12 מורים למתמטיקה ובחן את הקשרים בין השיח הפדגוגי שלהם לשיח המתמטי שלהם (Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019). מתוך 12 המורות זיהינו 8 מורות שחווי קושי בילדותן בלמידת מתמטיקה וזוהו אצלן נקודות מפנה. מאמר זה מתמקד ב-4 מורות מתוכן, שהנרטיב שלהן כולל קושי בלמידת המתמטיקה אך גם נקודות מפנה בתהליך לימודי המתמטיקה. במהלך המחקר ענו המורות על שאלון שעסק בסגנונות הוראה (Stein et al., 2017), תורגם ועבר התאמה לנורמות בישראל. בשאלון הוצגו לפני המורות ארבעה סיפורי הוראה המייצגים סגנונות הוראה מסוימים בנושא למידה אקספלורטיבית. המורות התבקשו לבחור בסגנון הוראה שהן מזדהות עימו ולהצדיק את בחירתן.

הסיפורים תיארו שיעורים של ארבעה מורים שלימדו את הנושא: שקילות בין שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים. המורים ברבעונים Q1, Q2, Q3 (ראו איור 1), השתמשו במשימה זוהי שאפשרה לתלמידים לקשור בין השטח המוצג, השברים הפשוטים, העשרוניים והאחוזים.

המורה ניצה מייצגת את ההוראה ברבעון הראשון (Q1) – היא הציגה את הנושא של השיעור וחילקה לתלמידים משימה כדי שיעבדו בקבוצות. היא הסתובבה בין הקבוצות וסייעה לתלמידים בעזרת שאלות ספציפיות שמיועדות לקדם את חשיבת התלמידים. לקראת סוף השיעור היא הזמינה שני תלמידים שהגיעו לדרכי פתרון שונות זו מזו להציג ולדון בעבודתם. היא הסבה את תשומת הלב של התלמידים לשקילות של שלושת הייצוגים (שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים) כפי שנראה במודל השטח המיוצג.

המורה אורנה מייצגת את ההוראה ברבעון השני (Q2) – היא התחילה את השיעור בדרך דומה למורה Q1 אבל אחרי שרוב התלמידים ענו על השאלה הראשונה היא התמקדה בשקילות בין מודל השטח ובין השברים הפשוטים, ואז שאלה עוד שאלות כדי להגיע לשקילות עם האחוזים, וכך עשתה גם עם המספרים העשרוניים. היא סיכמה בהסבר של משמעות השקילות.

המורה דפנה מייצגת את ההוראה ברבעון השלישי (Q3) – השיעור התחיל בדומה למורה Q1 והיא הסתובבה בין התלמידים כדי לנתח את עבודתם. כשתלמידים שגו היא ביקשה מהם "חשבו שוב" אבל לא נתנה הדרכה וסיוע כדי לקדם את חשיבת התלמידים. בסוף השיעור היא הזמינה קבוצה להציג את התשובה הנכונה. לא נעשו קשרים מפורשים בין שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים בסוף השיעור.

המורה שרון מייצגת את ההוראה ברבעון הרביעי (Q4) – היא בחרה משימה אחרת המאפשרת הזדמנות לתרגל ביעילות את הפרוצדורה להמרה של שברים פשוטים לעשרוניים ולאחוזים. היא הדגימה את הפרוצדורה, ולאחר מכן נתנה לתלמידים שלה משימה דומה לעבודה עצמית.

לאחר שהמורות ענו על השאלון נעשה ריאיון אישי. הריאיונות ארכו 40-50 דקות בערך והיו חצי מובנים. הריאיון עוצב כך שיעודד סיפור פתוח של המורה ולא יגביל את השיח שלה, וכמו כן התמקד בשני נושאים עיקריים: הנושא הראשון עסק בזהות שלהן כלומדות, והן נשאלו על עצמן כתלמידות ועל זהותן כבוגרות הבוחרות בהוראת מתמטיקה כמקצוע. החלק השני של הריאיון עסק בזהות שלהן כמורות: המורות התבקשו לספר על ההוראה שלהן, כלומר מה התלמידים ילמדו, איך הם ילמדו, האם היא מזמנת לתלמידים התמודדות עצמית או לא ומי הם התלמידים שילמדו בדרך זו או אחרת.

המורה התבקשה גם להזדהות עם אחד מסגנונות ההוראה (Q1-Q4) ולהסביר מדוע היא מזדהה עם סגנון זה, לספר על הדרך שבה היא מלמדת, מתי במהלך ההוראה היא מזמנת לתלמידים משימות עם דרישות קוגניטיביות גבוהות (struggle), לאילו תלמידים היא מזמנת משימות אלו, ומה האחוז של משימות אלו מסך ההוראה של הנושא. המורה התבקשה גם לכוון להוראה של פרוצדורות ואלגוריתמים. כמו כן המורה נשאלה על המושגים הנלמדים, כיצד הם נלמדים ועל האופי של ההמשגה הקונספטואלית וכיצד הוא מוצג לפני הלומדים.

הכותבת שבאותה עת הייתה מדריכה מחוזית למתמטיקה ביסודי, ביצעה את הריאיונות. המורות חתמו על מידע הנוגע להסכמה שלהן לריאיון מוקלט על פי המקובל במוסד אקדמי ולא הראו סימן של חוסר נוחות במהלך הריאיון. הריאיונות הוקלטו, תוכתבו ונותחו.

הניתוח נעשה באופן אינדוקטיבי וכלל שלושה שלבים: השלב הראשון הוא מיפוי הנרטיבים שלהן באשר לבחירה בהוראת המתמטיקה כמקצוע ומיון הנרטיבים על פי תוכן. כאמור, מאמר זה עוסק בארבע מורות בלבד שנרטיב הלמידה שלהן כלל נקודת מפנה. שלב זה כלל את זיהוי נקודת המפנה בתוך הסיפור, מה קדם לנקודת המפנה ומה התרחש לאחר נקודת המפנה זו. כמו כן נבחנו הדמיון וההבדלים בין הנרטיבים של המורות. נעשה ניתוח שיח שכלל צביעה בצבע שונה של חלקי השיח (לפני נקודת המפנה, מהי נקודת המפנה ולאחר נקודת המפנה).

השלב השני של הניתוח כלל בחינת האמירות של המורות בעניין ההזדהות שלהן עם סגנונות ההוראה שהוצגו לפנין (Q1, Q2, Q3, Q4) וההצדקה לבחירתן. בשלב זה הן התבקשו לדון בדמיון בין ההוראה שלהן, בתפיסתן, בסגנון ההוראה שהן בחרו מתוך הסיפורים שהוצגו לפנין. בשלב זה נצבעו בצבעים מגוונים האמירות של המרואיינות על מושגי מפתח, כמו התמודדות הלומדים, המשגה, הבנה קונספטואלית, הוראה חקירתית והוראה מסורתית.

השלב השלישי התמקד באמירות המעידות על הזיקה של השיח שלהן על ההוראה בפועל לנרטיבים של המורה כתלמידה. קשרים אלו לא תמיד היו מפורשים ולכן לעיתים נדרש לנתח את השיח וגם את החלקים הסמויים שלו (המשתמע ממנו) כדי לקבל את התמונה המלאה ולהבין את הזיקה.

ממצאים

פרק זה יתמקד בארבע מורות ויעסוק בנקודת המפנה שלהן בלימודי המתמטיקה. כמו כן ייעשה ניסיון לדלות מתוך השיח הפדגוגי שלהן את הקשרים בין מאפייני הזהות של המורות כתלמידות וכמורות, וההזדהות שלהן עם סגנון הוראה.

תחילה יוצגו הנרטיבים של המורות מילדותן כתלמידות, הקושי שלהן בלמידה, נקודת המפנה על פי הנרטיב שלהן וההתנהלות שלהן לאחר המפנה. לאחר מכן יוצג השיח הפדגוגי שלהן כמורות ויחון כלפי הוראה חקירתית ומאפייניה.

א. המורה לימור

המורה לימור (Heyd-Metzuyananim & Shabtay, 2019) היא מורה בשנתה השישית להוראה, והתחילה כמורה לחינוך גופני. לאחר כשנתיים שבהן עבדה כמורה לחינוך גופני, החלה בהרחבת הסמכה להוראת מתמטיקה ובזמן הריאיון היא לימדה מתמטיקה בשנה השלישית. לימור מלמדת לרוב בכיתות ג'-ד' מתמטיקה, וגם היא מחנכת כיתה (ד'). בתמלול להלן מוצג ניתוח האמירה של לימור כשהתבקשה לספר על עצמה כלומדת.

שורה	מה נאמר	ניתוח
50	"תסכול מאוד מאוד גדול. בתיכון כמעט שלא למדתי, עוד הפעם עם תחושת חוסר ביטחון עצמי, ואני אפס, לא רק במתמטיקה. ורק בגיל עשרים, עשרים ושלוש, משהו כזה, החלטתי שדי, אני הולכת עכשיו, אני מוציאה בגרות ואני לומדת ואני עושה, ... אני פתאום מגלה, יש גם, זאת אומרת אני גם מקבלת פידבקים מבחון, זאת אומרת מילדה שהיא אפס לאישה כבר שהיא פרפקציוניסטית ומבינה הכול לעומק, ומצליחה בכל דבר שהיא נוגעת בו".	קושי כלומדת מפנה תיקון

אפשר לראות בסיפור של לימור מבנה ברור של שלושה חלקים. ציטוט זה מאפשר להבחין כי לימור מספרת על תחושה קשה מאוד של חוסר ביטחון עצמי בילדותה, ומשבצת מילים קשות ("אני אפס") בנרטיב שלה. האמירה "אני אפס" מייצגת את הרה-אפיקציה שלימור עשתה לזהותה, לא רק שהיא אומרת "היה לי קשה במתמטיקה", היא מכילה את הזהות שלה בגלל הקושי בתחום. התחושה של "אני אפס" מלווה אותה לדבריה, לא רק במתמטיקה. נוסף על כך, אפשר להבחין כי היא מדגישה את המילה תסכול במילים 'מאוד מאוד'. המעבר בין הזמנים, מילדות ועד שלב התיכון נעשה על פי הרצף הכרונולוגי. בנקודה שבה לימור בחרה לעשות תפנית (בגיל 23) הייתה לה בחירה אחרת, לא ללמוד, ואולם היא בחרה להתמודד עם הקושי.

לימור בחרה להזדהות עם סגנון הוראה Q2. בשורה 136 לימור מסבירה מדוע היא מזדהה עם סגנון זה.

אורנה היא בעצם מסתכלת על תשובות של ילדים, ולמעשה, זאת אומרת היא רואה שהם פועלים באיזושהי טכניקה וזה לא מספק אותה... אבל אני חושבת שאורנה היא כן מובילה אותם בלי לרמוז. זאת אומרת היא שואלת את השאלות הנכונות... זאת אומרת אין רמז, אין רמז לתשובה, אלא היא שולחת אותם לחשוב בעצמם (שורה 436).

הזדהות זו עם סגנון הוראה Q2 באה לצד התעלמות מחלוקת המשימה למשימות קטנות ומהשאלות הסגורות הנשאלות בסגנון הוראה זה. כמו כן לימור מתעלמת מהעובדה שהתלמידים לא נדרשים להתמודד לבד עם המשימה ונמצאים כל הזמן בשיח עם המורה. להפך, לימור בוחרת לראות בשיח של התלמידים עם המורה שיח שמתפתח להבנה עמוקה (Heyd-Metzuyananim & Shabtay, 2019).

כשלימור מתבקשת לדון במשימות מסדר חשיבה גבוה, הנושא של תלמידים מתקשים עולה מיוזמתה והיא מציינת בבירור שזה לא תמיד משהו שהיא בוחרת לעסוק בו בכיתה. השורות להלן (117-119) מבהירות עד כמה לימור נרתעת ממצב שבו התלמידים שלה יחוו תסכול ומשתמשת בביטוי "פצועים בדרך". יתרה מזו, כשהיא מתבקשת להסביר מה זה הפצועים, היא קושרת את הפצועים לנרטיב שלה כתלמידה.

117	לימור	... משתמשת בסדר חשיבה גבוה, משתמשת, כן ולא איתם, ... זאת אומרת אני מרגישה שכשאני נותנת משהו קצת יותר מתוחכם, משהו קצת יותר, יש הרבה תסכול... ניתן להם לשבת עם התסכול ולא לוותר, אין ספק שאנחנו נוציא מהם יותר, אבל יש גם הרבה פצועים בדרך
118	מראינת	או קיי, מה זה פצועים?
119	לימור	פצועים זאת לימור של פעם

הקשר הישיר שלימור עושה בין הפצועים לחוויה שלה כלומדת, והמעבר בין הזמנים, הן כמורה הן כלומדת, מדגיש את זהותה כתלמידה מתקשה, בעלת זהות של 'פצועה'. מהשיח עם לימור אנו יכולים להבחין במורה שהנרטיב שלה הוא נרטיב של תלמידה מתקשה, הבוחרת בסגנון הוראה שמוריד את הדרישות הקוגניטיביות מהתלמידים מצד אחד, ובוחר מצד אחר להדגיש את הרעיון המתמטי העומד בבסיס השיעור באמצעות שיח שבו המורה דומיננטית, שיח של המורה לעומת התלמידים.

ב. המורה ירדן

בדומה ללימור, גם ירדן היא מורה חדשה בשנתה השנייה להוראה. היא עובדת עם כיתות גבוהות יותר (ה'-ו') ומשתמשת מורה למתמטיקה ומחנכת כיתה ו'. ירדן מתארת בדרמטיות את היחסים שלה עם המתמטיקה כתלמידה, וגם בשיח שלה נמצאו שלושת השלבים שנמצאו בריאיון הקודם שהוצגו. המילים המודגשות מציננות הרמת קול של ירדן.

9	מראינת	למה דווקא מתמטיקה?
10	ירדן	גם פה השיקול היה אופרטיבי. קושי כלומדת משהו שצריך. שיש לו יותר שימוש. אבל כתלמידה לא היה לי כף מתמטיקה בכלל.
11	מראינת:	למה
12	ירדן	אההההם... מהצל הזה של אימא שלי שאמרה שתמיד צריך מתמטיקה וגם כל מיני ניואנסים קטנים כזה שהמורות שלחו לכיוון ... חלקן בלי כוונה רעה, אבל החלטתי שמתמטיקה זה לא בשבילי. כמו שהילדים בכיתה אומרים, אני לא יודעת כלום...
13	מראינת	אז למה בכל זאת חזרת להיות מורה למתמטיקה?
14	ירדן	אולי דווקא מהמקום הזה. של ה... המקום של אתגר. לנצח את זה. אני מרגישה שאני מגיעה אל הילדים מהמקום שלהם דווקא, ולא מהמקום של אימא שלי. ממקום של הילד המתקשה.
15	מראינת	הרגשת תלמידה מתקשה?
16	ירדן	כן, בטח.
17	מראינת	במה התקשית?

18	ירדן	בעיקר ברצון. זאת אומרת, בשום מוטיבציה. אני עם זה לא. אנחנו ברוגז. לא צריך. (השהיה)	קושי כלומדת
		אני את הבגרות הוצאתי רק בצבא. סיימתי תיכון בלי תעודת בגרות בגלל מתמטיקה. רק בצבא עשיתי בגרות במתמטיקה.	

נקודת מפנה בצבא

השיח של ירדן על הקושי שלה כתלמידה הוא שיח בעל מילים עוצמתיות שנאמר לרוב בהרמת קול קלה. המילים שנבחרו והטונציה שבהן נאמרו מנכיחות את הקושי הרב שירדן חוותה (לדבריה) בילדותה. השימוש במילים "אני לא יודעת כלום", "לנצח את זה", "אנחנו ברוגז" מעיד על הפרשנות של ירדן לחוויה שחוותה כתלמידה, פרשנות שמעידה על חוויה עוצמתית עכורה. יתרה מזו, מושגים אלו שבהם היא מדגישה את זהותה ("אני לא יודעת כלום", "אנחנו ברוגז") ולא את מעשיה, מעצימים את הרה-איפיקציה, כלומר את זהותה כלומדת בבית הספר. נוסף על כך, אפשר להבחין כי היא לא שומרת על רצף הכרונולוגי של הזמנים, והיא קופצת מהקושי כלומדת, לתיקון, שוב מציינת את הקושי כלומדת ורק אחר כך מציינת את נקודת המפנה. ייתכן שמכלול לשוני זה (מילים עוצמתיות, הדגשת זהותה ולא מעשיה, והקפיצות בין הזמנים) נובע מסערת רגשות כשהיא מדברת על הקושי שלה בלימודיה.

יש מקום להבחין בשורה 10 כי ירדן לא נשאלה על ילדותה, היא בחרה לספר על כך כשנשאלה למה בחרה דווקא במתמטיקה כמקצוע להוראה. כשהיא מציינת בשורה 10, שהשיקול שלה בלימודיה היה אופרטיבי, היא בעצם מציינת שהיא בחרה בהוראה המתמטיקה כדי שיהיה לה ביקוש כמורה. כמו כן ירדן מציינת במפורש כי היא מגיעה להוראה מהמקום של הילד המתקשה ומתוך ההקשר של המשפט (שורה 14) אפשר להבין כי ירדן מניחה שכך היא מצליחה ללמד אותם. באמירה שלה שהיא מגיעה מהמקום של הילד המתקשה, שוב ירדן מעצימה את זהותה כתלמידה עם קשיים, ולא את העשייה שלה כתלמידה.

ירדן מציינת את העובדה ש"כתלמידה לא היה לי כיף בכלל במתמטיקה" – אמירה שמכוונת אליה כלומדת המזוהה עם הקושי הכרוך בלמידת המקצוע. אפשר להבחין כי הסיפור שלה על הקושי שלה כלומדת חוזר על עצמו בשורות 9-18, ומבטא במשפטים רבים המציינים תכונות שלה כמתקשה בתחום, כלומר רה-איפיקציה.

בהמשך הריאיון ירדן מתבקשת לספר על שיעורי המתמטיקה בכיתה והיא מתארת את השיעורים שלה:

... ואני מתחילה את השיעור בהסבר של חזרה על מה שעשינו בשיעור קודם. כתבתי להם על הלוח את השיטות. כל פעם אני מציגה להם כמה שיטות. עושים איזה פיין טיונינג, שזה יהיה באמת בשפה המתמטית, מעין סיכום כזה של כולם. אני מלמדת כמה שיטות לכל דבר. ומאפשרת להם לפתור באיזו דרך שהם רוצים, שהם מתחברים אליה. ... עכשיו אני נותנת להם משימות שונות בדף, ויש שם גם בעיות וגם תרגילים. פתור...

אפשר להבחין כי השיח הפדגוגי של ירדן מתאר התמודדות של התלמידים ("פתור") עם משימות מגוונות (בעיות ותרגילים) רק לאחר שהיא מציגה את דרכי הפתרון ולאחר שהיא מלמדת. ושוב, אף שלא ראינו את השיעורים של ירדן בפועל, השיח הפדגוגי שלה מעיד על הוראה שלא תמיד מזמנת לתלמידים השתתפות חקירתית.

כשירדן התבקשה להזדהות עם סגנון הוראה היא בחרה להזדהות עם סגנון הוראה IQ, סגנון שבו שני ההיבטים גבוהים, גם ההתמודדות העצמית של התלמידים וגם תשומת הלב המפורשת למושגים. עם זאת חוסר לכידות בין ההזדהות שלה עם סגנון הוראה Q1 ובין השיח הפדגוגי של ירדן נחשף. היא מסבירה מדוע בחרה להזדהות עם סגנון הוראה ראשון במונולוג הזה:

... אם אני רוצה להעריך את הילדים, אני חייבת להתייחס גם לדרך. הדרך חשובה לי. אם הדרך מובילה לאותו הכיוון הנכון (לתשובה הנכונה) ואיפשהו בדרך ... פרוצדורה טעה ... אולי ההבנה הייתה טובה. יותר התחברתי לניצח שהיא ... גם מהמקום הזה שהיא שאלה הכי הרבה שאלות מכולם, גם אני עושה ... מהמקום של שיפור, פחות לשאול, פחות לתווך והשיח יהיה יותר אצלם. ... ואני רוצה שהם יגיעו לתשובה הנכונה אבל מתוך הבנה, וזה מה שמבחין בין הבנה לבין פרוצדורה ... כדי שתהיה להם תשובה נכונה לכל התרגילים במשפחה הזו (ירדן, שורה 80).

בתכתוב זה אפשר להבחין כי אומנם ירדן בחרה להזדהות עם סגנון ההוראה שלפי כותבי השאלון נועד להדגים הוראה חקירתית (Q1) אך עם זה ירדן לא מעניקה חשיבות לשני ההיבטים שמבוססת עליהם ההוראה של המורה בסגנון הוראה Q1. היא לא עוסקת בהתמודדות של התלמידים ובתשומת הלב המפורשת למושגים. כנגד זה היא מעניקה חשיבות לדרך הפתרון, וזאת כדי שתהיה להם דרך לפתור את כל התרגילים במשפחה הזו, כלומר היא מעניקה חשיבות לפרוצדורה שתסייע לתלמידים להתמודד ולהגיע לתשובה הנכונה. עוד סוגיה העולה מתוך התכתוב נעוצה בהבחנה של ירדן לשאלות של המורה ולהסברים שלה. מכאן אפשר להסיק כי אומנם ירדן בחרה להזדהות עם סגנון הוראה 1, אך המניעים שלה לבחירה מעידים שהיא מעניקה חשיבות להיבטים שמהותיים דווקא בסגנון הוראה 2 (ריבוי שאלות המורה וחלוקת המשימה לחלקים קטנים כדי להקל) או אולי אפילו 4 (היא מסבירה את הפרוצדורה לפתרון ורק אחר כך נותנת להם זמן לפתור/לתרגל).

יתרה מזו, בשורה 100 ירדן נשאלת כיצד היא תסביר להם את הקשרים בין מספרים רציונליים ואומרת במפורש: "...הם צריכים ידע בסיסי שהוא הקנייה פרונטלית. הם לא יכולים להגיע לזה לבד". כלומר היא אומרת במפורש שהיא מלמדת את הנושא הזה לפני התלמידים, אף שהוצגה לפניו אופציה אקספלורטיבית להוראת הנושא (Q1 ו-Q3 בסיפורי ההוראה).

לסיכום, ירדן כנראה מודעת למסרים שהמחזו עובד לפיהם, קידום הוראה חקירתית כהוראה המובילה להבנה קונספטואלית, והיא אכן מדברת על הבנה עמוקה של הנושא ועל הצורך שלה שתלמידה ילמדו לפי הבנה קונספטואלית. עם זה היא מבטאת מסרים סותרים, כיוון שהיא מדגישה את החשיבות של ההסבר לפני התרגול ואת החשיבות של המורה כמסבירה וכשואלת שאלות כדי לוודא הבנה בתהליך הלמידה.

ג. המורה דינה

דינה היא מורה למתמטיקה זה 17 שנים, בעלת תואר ראשון בחינוך עם התמחות במתמטיקה. היא משמשת מחנכת כיתות ה'-ו' ומלמדת מתמטיקה כמורה מקצועית למתמטיקה. דינה מספרת על היותה תלמידה שרוצה להבין מה עומד מאחורי הכללים המתמטיים, והמורים שלימדו אותה לא סיפקו עבורה את התשובה לשאלותיה. בשורות 13-20 אפשר להבחין בנרטיב של דינה על ילדותה כתלמידה.

של התלמידים). מורות אלו מזמנות לתלמידיהן משימה מסדר חשיבה גבוה וההתמודדות בשיעורים שלהם גבוהה. בשורה 70, כשדינה נשאלת כיצד היא מתכננת את השיעורים היא עונה:

בדרך כלל ... שיעורים שהאאאאם... אז אני בדרך כלל עובדת על פי המודל של פתרון בעיות. אני משתדלת. גם למדתי לספר סיפור... אני אוהבת להמציא סיפורים (צחוק)... סיפורי מסגרת ... וזה ככה מאוד מחבר את הילדים. משתדלת לתת להם אהבה... להתמודד מה שנקרא ובסוף לאסוף כמובן את ההה... את הממצאים ולדון. משתדלת גם מאוד לסגור את זה ... לראות מה ככה הילדים הבינו ומה הם למדו. אההההם זה משהו שככה אני עובדת על פיו כבר שנים. (כמה שנים (שורה 74).

ובהמשך בשורה 75 כשנשאלה אם התחברה לסגנון הוראה מסוים, היא מתארת חיבור למורות שמזמנות לתלמידיהן משימות מסדר חשיבה גבוה, ועם זה מותחת ביקורת על סגנון ההוראה של Q4.

אהההם... כן שתי המורות הראשונות. דפנה וניצה... התחברתי אליהן. כי אני כשקראתי אני מצאתי את עצמי ככה, רואה את עצמי... ממש מדי פעם פועלת על פי דפנה, כמו שדפנה פועלת, ומדי פעם פועלת כמו ניצה. משתדלת שזה לא יהיה כמו שרון. משתדלת וממש נמנעת. אני חושבת שזה... כן קישר אותי לעבר שככה היו מלמדים אותי (שורה 75).

דינה אומרת "אני מצאתי את עצמי ככה, רואה את עצמי", כלומר היא מזדהה עם העשייה של המורה דפנה והמורה ניצה, מה שמפנה לשיח על זהותה כמורה (רה-איפיקציה), כלומר על השיח שלה לסגנון הוראה זה, ועל מהות העשייה הפדגוגית שלה (בעצם על זהותה כמורה) ולא רק על הפעולות שהיא עושה כמורה.

אפשר להבחין כי דינה מעריכה התמודדות של התלמידים ודיונים כיתתיים שבהם מתקיים איסוף של הממצאים מהתלמידים. היא גם מדברת על מודל של פתרון בעיות כבסיס לעבודה. מודל זה הוא מודל שנלמד במחוז שבו דינה מלמדת וניכר כי השיח הפדגוגי של דינה משלב בתוכו מילים והיגדים הקלוחים מהמודל.

עוד סוגיה שעולה היא הצורך של דינה במשימה בעלת דרישות קוגניטיביות גבוהות שמספקת אתגר עבור התלמידים ונותנת להם להתמודד. היא גם מדברת על קשר בין הוראה ריטואלית (כמו שרון בסיפורי ההוראה) לנרטיב של ילדותה כתלמידה ומנגידה את סגנון ההוראה הזה לסגנון ההוראה שלה.

לסיכום, מהריאיון עם דינה עולות עדויות לצורך שלה כמורה לתקן את ההוראה שהיא קיבלה בילדותה, הוראה שלטענתה הייתה ריטואלית, והיא אפילו קושרת את ההוראה שהיא חוותה כתלמידה לצורך שלה ללמד למידה אקספלורטיבית.

ד. המורה כרמית

המורה הרביעית, כרמית, היא מורה בשנתה העשירית להוראה, בעלת תואר ראשון בחינוך עם התמחות במתמטיקה ותואר שני בחינוך מתמטי. היא משמשת רכות מתמטיקה בבית ספרה ומורה מקצועית למתמטיקה. כשנשאלה כיצד הייתה כלומדת מתמטיקה ענתה:

אני הייתי בין התלמידים הבינוניים ביסודי כאילו תמיד אהבתי אבל לא הסתדר לי, כי היה המון המון לזכור, לוח הכפל, חילוק ארוך, הכול היה טכניקה, ולא כל כך הסתדר לי, ובחטיבה, פתאום התחלתי להבין את כל מה שנלמד ביסודי. היו לי מורים שהבהירו לי את ההבנה של המתמטיקה, ולא את הטכניקה, ואז הדברים התחילו להתיישב לי ... לפי דעתי זה תלוי מורה גם.

מספר	מראיינת	ניחות
13	מראיינת	או קי. אז למה דווקא מתמטיקה?
14	דינה	כי זה המקצוע שאני הכי אהבתי... הכי התחברתי אליו.
15	מראיינת	למה דווקא התחברת אליו? מה כזה מוצלח במתמטיקה לעומת מקצועות אחרים?
16	דינה	גם בתור ילדה וגם בתור בוגרת... היה לי חשוב אההה. אהה. המשמעות... בעצם... ההבנה של הדברים... אני זוכרת את עצמי מציקה למורות ב'מרכאות' כפולות למה זה ככה... למה זה חשוב, למה אני צריכה לזכור את זה. אני הכי זוכרת את כפל שברים פשוטים. היו אומרים מונה כפול מונה ומכנה כפול מכנה. ואני הייתי שואלת כל הזמן למה. אמרו לי ככה. אבל אני לא הסתפקתי בזה.
17	מראיינת	או קי...
18	דינה	ובתור בוגרת היה לי חשוב ככה לעבוד בזה.
19	מראיינת	את יכולה לספר לי עלייך קצת בתור לומדת מתמטיקה... בעצם התחלת קצת עם ה"למה" אההה... אבל בואי תספרי עוד קצת חוויות.
20	דינה	אהההם... קודם כול, כשלמדתי כשהייתי תלמידה הרגשתי שאני פחות אוהבת לכתוב ולפרט ואני יותר אוהבת בעצם את ה...חידות הלוגיות, את המספרים יותר אוהבת. גם כשהתנסיתי בהוראה... ממש הייתי ככה בכיתה י' ראיתי ככה ילדים שמתקשים ואיך שמורות מלמדות (גרוע) ותמיד חשבתי איך אני הייתי יכולה לעשות את זה אחרת. והייתי מגיעה הביתה ומשחקת משחק תפקידים. אוספת את השכנות (צחוק).

למעשה, דינה מציינת שיש קשר ישיר בין הבחירה שלה במקצוע הוראת המתמטיקה לביקורת שלה על המורות שלימדו אותה (שורה 16) ולצורך שלה להבין את המשמעות שעומדת מאחורי הסוגיה המתמטית שנלמדה. הרצון שלה לתקן את חוויית הלמידה דרבן אותה אפילו למשחק תפקידים שבו התנסתה כמורה עוד כשהייתה נערה. גם הטונציה של השיח משתנה כשהיא מדברת על 'הוראה אחרת' ואז היא מגבירה את קולה מעט.

מבחינת הרף הכרונולוגי של הסיפור אפשר להבחין כי דינה מתחילה עם היסטוריה קשה כלומדת, עוברת מייד לתיקון, שוב חוזרת להיסטוריה הקשה, ורק בסוף הקטע היא מציינת את נקודת המפנה. נוסף על כך, אפשר להבחין כי נקודת המפנה של דינה אינה אירוע אחד מהותי, אלא תחושה מתמשכת לאורך לימודיה.

בהמשך הריאיון טענה דינה שהזדהה עם סגנון ההוראה המיוצג ב-Q1 או Q3 (מורות שסגנון ההוראה שלהן כולל ההתמודדות גבוהה

הנרטיב של כרמית על לימודי המתמטיקה שלה כתלמידה דומה לנרטיב של דינה ומאופיין אף הוא בהיסטוריה קשה כלומדת (כתלמידה בבית ספר יסודי), בנקודת מפנה (שחלה בחטיבת הביניים בזכות מורים טובים) ובתיקון (היום כמורה). גם בנרטיב של כרמית (בדומה לדינה) נקודת המפנה אינה אירוע אחד או זמן מוגדר, אלא לימודיה בחטיבת הביניים (3 שנים) ששינו את היחס שלה כלפי מקצוע. כמו כן אפשר להבחין ברה-איפיקציה שמשולבת בסיפור שלה כשהיא מכריזה על עצמה "אני הייתי בין התלמידים הבינוניים..."

בהמשך הריאיון כשכרמית מתבקשת לציין עם איזו מורה היא מזדהה, היא מזדהה עם ניצה (Q1), כלומר היא מזדהה עם המורה שבשיעורים שלה יש התמודדות גבוהה של התלמידים וגם התמקדות מפורשת במושגים, והיא מבקרת את דפנה (3Q), מורה המזמנת לתלמידה התמודדות, אך בשיעורים שלה ה-EAC מוחמץ:

כי אצל דפנה... היא נתנה להם להתמודד עם זה לבד. וניצה גם נתנה להם להתמודד, אבל תוך כדי תיווך, ... אבל אצל דפנה לא היה להם ברור אם הם בכלל בכיוון נכון או לא בכיוון נכון. וכן צריך לתת להם ... למקד אותם, לעזור להם. אבל אלו שתי המורות שהתחברתי אליהן יותר. אלו גם שתי המורות שחזרתי אליהן בשאלון, והייתי חייבת לבדוק שוב מה עניתי עליהן (שורה 99).

כרמית בחרה בסגנון הוראה אקספלורטיבי, והיא מדגישה את הצורך שלה כפדגוג האחראי לתווך לתלמידים ולתת להם הכוונה. בהמשך הריאיון כרמית קושרת בין החוויה שלה כתלמידה מתקשה בבית הספר לסגנון ההוראה שלה:

260	מראיינת	מה חשוב לך שהתלמידים יאמרו על שיעורי המתמטיקה שלך ולמה?
261	כרמית	שהם מבינים. שזה מאוד פשוט להם.
262	מראיינת	למה?
263	כרמית	כי לי ביסודי זה לא היה פשוט ולא היה לי משהו שייתן לי דרך אחרת או יסייע.

שורה 263 היא שורה חשובה שבה כרמית מציינת שיש קשר ישיר ומפורש בין הקושי שהיא חוותה כתלמידה בבית הספר היסודי לדרך ההוראה שלה כיום. כרמית מציינת שחשוב לה לעזור לתלמידים שלה ולאפשר להם ללמוד אחרת וזה נתמך בנרטיב האישי שלה כלומדת. יתרה מזו, יש פה מאפיין זהות ("כי לי ביסודי לא היה פשוט") שמספק מניע לפעולתה, והוא בעצם חלק מהרה-איפיקציה שלה כלומדת.

לסיכום, כרמית מגיעה להוראה לאחר נקודת מפנה שחלה בלימודיה בחטיבת הביניים. מתלמידה בינונית הייתה לתלמידה שמבינה את המתמטיקה לעומק. כמו כן היא מציינת במפורש כי ההוראה שלה היום היא תוצר של חוויית הלמידה שלה. בחירתה בסגנון הוראה אקספלורטיבי מלווה באמירה ברורה שיש לכוון את התלמידים ולסייע להם בעזרת שאלות מנחות.

סיכום הממצאים

השיח הפדגוגי של ארבע המורות בפרק הממצאים שזור בחוויות למידה שמקרינות על זהותן כיום כמורות. לימור וירדן מציינות את הצורך שלהן להסביר קודם לתלמידים, לתת להם יכולת להבין את הדברים מתוך ההסבר ורק אחר כך לאפשר לתלמידים להתמודד עם המשימות. בדרך זו הן למעשה מורידות את הדרישות הקוגניטיביות של המשימה ומצמצמות את התהליך החקירתי שמתקיים בהבנייה של נושא בדרך אקספלורטיבית. לימור מראש בוחרת בסגנון הוראה שבו היא מסבירה את הנושא קודם לכן, ומפרקת את המשימה

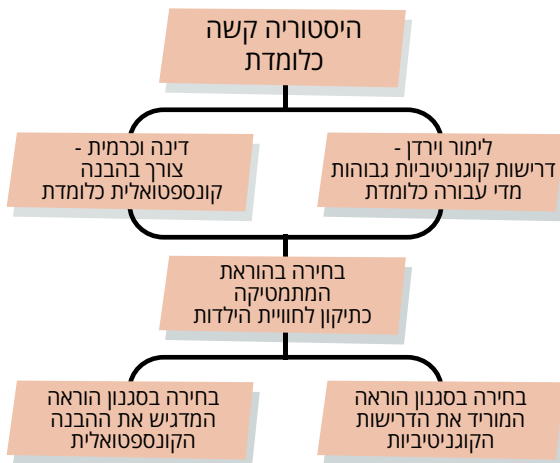
לחלקים קטנים. היא מודעת לזה ומציינת כי רק כך התלמידים מבינים. לעומתה, ירדן בוחרת בסגנון הוראה חקירתי. בכל זאת השיח הפדגוגי שלה ותיאור השיעורים העשיר שהיא חושפת במהלך הראיון מעידים על הוראה המעניקה חשיבות להסברי המורה ולתרגול של התלמידים, אף שהיא מזמנת לתלמידה משימות מסדר חשיבה גבוה. לימור וירדן מציינות את נקודת המפנה שלהן כזמן מוגדר (הייתי בת 23 / כשהייתי חיילת) אך נקודת זמן זו יכולה להיות מתמשכת ואינה נקודת זמן ספציפית.

לעומתן, דינה וכרמית דווקא מדגישות את החוויה שלהן כלומדות שלא הבינו את המשמעות של הפעולה, מצב שגורר הזדהות עם סגנון ההוראה האקספלורטיבית (Q1 או Q3) המאפשר לתלמידים לחקור את המשימה בלי הסברים מקדימים של המורה. עם זה השיח מבטא צורך שלהן להכוונה של התלמידים בשאלות שאלות. הן מציינות את נקודת המפנה שלהן כתהליך מתמשך ברבות השנים.

ארבע המורות מתארות את הקשיים בלימודי המתמטיקה כהתנסות מהותית שהייתה חלק מהשיקולים העיקריים בבחירת המקצוע ומשמשת מרכיב בעל משמעות בתפיסה שלהן את תפקיד ההוראה שלהם כיום, כשהן כבר מורות למתמטיקה. עם זה הסיפור שלהן כלומדות מתמטיקה מהדהד בשיח הפדגוגי שלהן כמורות.

השיח הפדגוגי שלהן (מה ללמד, איך ללמד ואת מי ללמד) עשיר בתיאורים על ההוראה ועל הפרקטיקות שהן נוקטות במהלך השיעורים. מתוך השיח אפשר לתאר את מהלך השיעור שלהן ואת הדרך שבה הן נוהגות כמורות ומתוך זה כמובן גם את סגנון ההוראה.

בתרשים מספר 2 מודגמת הבחירה בסגנון הוראה בשל שיח פדגוגי על הנרטיבים של המורות כלומדות. נרטיבים אלו התבססו על שני היבטים מהותיים בהוראה: דרישות קוגניטיביות והבנה קונספטואלית. מהשיח הנרטיבי והשיח הפדגוגי של המורות אפשר להבחין כי יש קשר בין הבחירה שלהן בסגנון הוראה ובין הקושי הספציפי שלהן כלומדות.



תרשים 2: הקשרים בין ההיסטוריה של המורות כלומדות לבחירה בסגנון ההוראה

מסקנות והשלכות

הנרטיב האישי של המורות שהוצג בפרק הממצאים, ההתנסויות שלהן בחיים כלומדות מתמטיקה עם הישגים נמוכים שעברו מפנה ביחסן כלפי מתמטיקה, הוא מרכיב מהותי עבורן בבחירת המקצוע להוראה. המורות העלו את הנושא בעצמן, וסיפרו על כך בהרחבה מייד כשנשאלו על ההיסטוריה שלהן כלומדות. כמו כן אפשר להבחין כי ירדן היא מורה בשנתה השנייה, ולימור מלמדת זו השנה השישית, כלומר מורות בתחילת דרכן המקצועית, ואילו דינה וכרמית עוסקות בהוראה זמן רב יותר. אולם במהלך הריאיון לא ניכרו הבדלים

הסיפור שלהן על החוויה של קושי בלמידת המתמטיקה, הבחירה במקצוע ההוראה וההשפעות שיש לקושי זה על השיח הפדגוגי שלהן, מדהדה במהלך הראיונות וייתכן שגם השאיר חותם על הפרקטיקה שלהם בפועל.

יתרה מזו, אפשר לומר שהבחירה שלהן בסגנון הוראה המאפשר התמודדות נמוכה או גבוהה של התלמידים עם משימות הדורשות חשיבה קונספטואלית, נשענת על הנרטיב האישי שלהן. הנרטיב האישי שלהן מצטייר מזהותן כלומדות המתקשות במתמטיקה ומניע אותן לבחור בהוראה כדרך ל'תיקון' העבר. מסקנה זו היא מהותית ביותר, כיוון שהיא מבססת בחלקה את הסיבות להורדה של הדרישות הקוגניטיביות של משימות, ואת הצורך של המורות לתת מענה לקושי שחוו בילדותן.

נרטיב ה'תיקון', כפי שנמצא בקרב המורות במאמר זה מאפשר להבין חלק מהממצאים של מחקרים קודמים בתחום (Resnick & Schantz, 2015; Stein et al., 2017; Sztajn et al., 2017) שמצאו כי מורים בוחרים שלא ללמד בפועל בדרך אקספלורטיבית. ייתכן כי החוויות האישיות של המורות כלומדות, כפי שבאות לידי ביטוי בנרטיב האישי שלהן, מעכבות ואולי אף מונעות מהן לזמן לתלמידיהן הוראה חקירתית. אפשר להסיק מהשיח הפדגוגי שלהן כי אחד השיקולים העיקריים בהורדת הדרישות הקוגניטיביות הוא הצורך שלהן לתקן את ההיסטוריה האישית שלהן כלומדות עם הישגים נמוכים במתמטיקה. בדומה התבוננות נוספת על הקושי שהתגלה בקרב פרחי הוראה אצל מה וסיגלר-גבאלה (Ma & Sigler-Gabella, 2011) בלמידה אקספלורטיבית קשורה לנרטיבים קודמים שלהם כלומדים בדרך מסורתית.

צ'פמן (Chapman, 2008) רואה בנקודת המפנה של מורים בהוראה שלהם ביטוי להרחבת זהות המורים. במאמר זה מוצגים השיקולים של המורות להימנעות מהוראה חקירתית מתוך נקודת המפנה שלהן. קרי, מלומדות שהתקשו במתמטיקה למורות למתמטיקה כפי שעולה מתוך הנרטיבים שלהן. הצורך שלהן לתקן את חוויות הלימוד בעבר ניכר בשני היבטים: אצל כמה מהן (בעיקר אצל לימור וירדן) בהורדת הדרישות הקוגניטיביות, ואילו אצל דינה וכרמית יש רצון לאפשר לתלמידים לקבל הוראה הנשענת על הבנה קונספטואלית שלא חוו בילדותן.

גם קאסילה (Kaasila, 2007) מצא עדויות לנרטיבים של פרחי הוראה המעידים על קושי בלמידת המתמטיקה ובחירה במקצוע מהמקום של הקושי. המחקר הנוכחי הולך צעד אחד קדימה ובוחר את השיח הפדגוגי של המורות בפועל ואת תפיסותיהן כלפי הוראה חקירתית וריטואלית.

המסקנה המרכזית העולה מהמחקר היא שההוראה היא תיקון לחוויות הלמידה של המורות. התיקון עונה על שני צרכים שלהן כלומדות: הורדת הדרישות הקוגניטיביות מקבלת גיבוי ולגיטימציה מהותית מהנרטיב של המורה כתלמידה מתקשה. כמו כן הרצון לפתח שיעורים על פי הבנה קונספטואלית נשען על הנרטיב שלהן כלומדות שהצורך שלהן בלמידה להבנה קונספטואלית לא סופק.

עוד מסקנה שעולה מהמחקר קשורה לזהותן כמורות. ספרד ופרוסק (2005) מדברות על הדינמיות של 'זהות' וטוענות כי הזהות היא "אוסף של שיחים המעצב עולם של אישיות וכיצד קולו של היחיד מתערב בתוך הקול של הקהילה" (עמ' 15). בפרק הממצאים אפשר לראות את קולן של המורות כתלמידות וכיצד קול זה מתערב בתוך השיח הפדגוגי על תהליכי למידה והוראה אקספלורטיביים

ורטואליים. יתרה מזו, אפשר להבחין כי המעברים בזמנים, מהעבר להווה וחזרה לעבר, מעידים על הבניית הזהות שלהן כמורות למתמטיקה מתוך הקושי האישי שלהן בלמידה.

אחת התוצאות שנובעת מהמחקר הנוכחי היא להביא לידי מודעות של מורי המורים ומפתחי תוכניות לימודים את הזהות של המורים כתלמידים. זהות המורים כתלמידים שלובה בזהותם כמורים ומבצבצת בשיח הפדגוגי שלהם והיא משמעותית בתכנון (וייתכן שגם בביצוע) של תהליכי הוראה-למידה.

כמורי מורים חשוב שנהיה מודעים לקיומם של נרטיבים אלו המקשים על מימושן של תוכניות חדשניות ללמידה אקספלורטיבית וקידומן הלכה למעשה; לא אחת מערכת החינוך מנסה לקדם רפורמות ולא תמיד בהצלחה; עדיין יש פעמים שההוראה נשארת מסורתית (Nachlieli & Tabach, 2019; Resnick & Schantz, 2015). ייתכן שחוסר ההצלחה נובע מהנטייה של המורים להקיש מהדרך שלמדו בה על התפיסה הפדגוגית שלהם.

מחקר זה מביא לידי מסקנה חשובה בסוגיית הפיתוח הפדגוגי של המורים. לרוב, תהליכי הפיתוח הפדגוגי במתמטיקה עוסקים באסטרטגיות הוראה או בידע התוכן הנדרש, ופחות בנרטיבים אישיים של מורים למתמטיקה. ייתכן שהפיתוח הפדגוגי של המורים למתמטיקה (ואולי גם של מורים אחרים) צריך לכלול גם שילוב של סיפורים אישיים. סיפורים אישיים שישקפו את החוויה של המורים כלומדים, את תהליך הלמידה שלהם וגם את ההוראה שלהם בפועל. הסיפורים והחוויות האישיות שלהם כלומדים וכמורים יכולים להיות בסיס לשיח על תפיסותיהם הפדגוגיות. החשיפה של הנרטיבים ושל התפיסות הפדגוגיות יכולה לסייע בהבנת ההימנעות של המורים להזדהות עם הוראה חקירתית, ואולי אפילו בקידום הוראה כזו בכיתתם.

לסיכום, נרטיב התיקון שנחשף בקרב המורות במחקר הוא מרכיב חשוב בזהותן של ארבע המורות ומהדהד בשיח הפדגוגי שלהן. ייתכן מאוד שהוא גם משפיע על פרקטיקות ההוראה בפועל. כיוון שאין במחקר זה מידע על ההוראה של המורות בפועל, זהו כר נפלא למחקרי המשך.

רשימת מקורות

שץ-אופנהיימר, א' (2008). נרטיב, זהות וזהות מקצועית. **שבילי מחקר**, 15, 33-27.

Alasuutari, P. (1997). The discursive construction of personality. In A. Lieblich & R. Josselson (Eds.), *The narrative study of lives* (Vol. 5, pp. 1-20). Newbury Park, California: Sage.

Altan, S., & Farber Lane, J. (2018). [Teachers' narratives: A source for exploring the influences of teachers' significant life experiences on their dispositions and teaching practices](#). *Teaching and Teacher Education*, 74, 238-248. doi:10.1016/j.tate.2018.05.012

Brubaker, R., & Cooper, F. (2000). Beyond "identity". *Theory and Society*, 29(1), 1-47.

Bruner, J. (1987). Life as narrative. *Social Research*, 54(1), 11-32.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 15-38). Rotterdam: Sense Publishers.

Darling-Hammond, L. (2006). Constructing 21st-century teacher education. *Journal of Teacher Education*, 57(3), 300-314.

- Matheny, E. B. (2016). *Becoming a mathematics teacher: Identity, narratives, and resources* (Doctoral dissertation). University of Tennessee, Knoxville.
- Resnick, L. B., & Schantz, F. (2015). Talking to learn: The promise and challenge of dialogic teaching. In L. B. Resnick, C. Asterhan, & S. N. Clarke (Eds.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (pp. 441-450). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 299-306.
- Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404-412.
- Shabtay, G., & Heyd-Metzuyanim, E. (2017). *Teachers' discourse on students' conceptual understanding and struggle*. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 177-184). Singapore: PME.
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: *Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York: Cambridge University.
- Sfard A., & Prusak, A. (2005). *Identity that makes a difference: Substantial learning closing the gap between actual and designated identity*. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 37-52). Melbourne: PME.
- Stein, M. K., Correnti, R., Moore, D., Russell, J. L., & Kelly, K. (2017). *Using theory and measurement to sharpen conceptualizations of mathematics teaching in the common core era*. *AERA Open*, 3(1), 1-20.
- Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. (2017). Research on mathematics professional development. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 793-823). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Zeichner, K. (2010). *Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college-and university-based teacher education*. *Journal of teacher education*, 61(1-2), 89-99. doi:10.1177/0022487109347671
- Zeichner, K. M., & Conklin, H. G. (2008). Teacher education programs as sites for teacher preparation. In M. Cochran-Smith, S. Freiman-Nemser, D. J. McIntyre, & K. E. Demers (Eds.), *Handbook of research on teacher education: Enduring questions in changing contexts* (3rd ed., pp. 269-289). New York: Routledge.
- Davis, E. A., Beyer, C., Forbes, C. T., & Stevens, S. (2011). Understanding pedagogical design capacity through teachers' narratives. *Teaching and Teacher Education*, 27(4), 797-810.
- Elbaz-Luwisch, F. (2005). *Teachers' voices: Storytelling and possibility*. Greenwich, Conn.: Information Age.
- Goodson, I., & Gill, S. (2014). *Critical narrative as pedagogy*. New York & London: Bloomsbury.
- Goos, M. (2005). A sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teachers' pedagogical identities as users of technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(1), 35-59.
- Graven, M. (2011). Creating new mathematical stories: Exploring potential opportunities within math's clubs. In H. Venkat & A. Assien (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)* (Vol. 1, pp. 161-170). Johannesburg: University of the Witwatersrand.
- Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics—teacher—student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341-368. doi:10.1007/s10649-012-9457-z
- Heyd-Metzuyanim, E., & Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: Teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM*, 51, 541-554. doi:10.1007/s11858-018-01019-3
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). *The effects of classroom mathematics teaching on student learning*. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 371-402). Charlotte, NC: Information Age.
- Kaasila, R. (2007). Using narratives for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM*, 39(3), 205-213.
- Kunnen, E. S. (2006). Are conflicts the motor in identity change? Identity: An International. *Journal of Theory and Research*, 6(2), 169-186. doi:10.1207/s1532706x0602_3
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2018). *Future directions in research on mathematics-related teacher identity*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 759-776. doi:10.1007/s10763-017-9796-4
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education*, 16(2), 225-236. doi:10.1080/13562517.2010.515025
- Nachlieli, T., & Tabach, M. (2019). *Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms*. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 253-271. doi:10.1007/s10649-018-9848-x
- Ma, J. Y., & Singer-Gabella, M. (2011). Learning to teach in the figured world of reform mathematics: Negotiating new models of identity. *Journal of Teacher Education*,

הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב

יחיאל תנעמי אריאלה עילם



ד"ר יחיאל תנעמי

מרצה בחוג לחינוך מיוחד במכללת חמדת הדרום, מלמד מתמטיקה בחט"ב ומנחה מורים בהוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד. בין השנים 2002-2014 שימש מדריך ארצי למתמטיקה באגף לחינוך מיוחד במשרד החינוך. מחקריו עוסקים בנושאים הבאים: הקשר שבין היבטים קוגניטיביים ופסיכולוגיים למתמטיקה; פיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה; הוראה שיתופית (Co-teaching) וקידום תפקודי לומד.



ד"ר אריאלה עילם

פסיכולוגית שיקומית מומחית במהלך הסמכה להדרכה, מדריכה בגני אל"ט ובמסגרתם מלווה את ההתמחות השיקומית, וכן מרצה בקורסים של אבחון בתוכנית לתואר שני בפסיכולוגיה באוניברסיטת בר-אילן. בעבר לימדה באוניברסיטה הפתוחה, במכללה לחינוך 'חמדת הדרום' ובמכללה ללימודים אקדמיים.

בעלת ניסיון רב באבחון וטיפול בילדים עם לקויות התפתחותיות, בהן הפרעות נזיר-התפתחותיות כגון אוטיזם, תסמונות גנטיות, לקויות למידה וקשב, וכן טיפול בילדים עם קשיים ופגיעות נרכשות, בהן טראומות גופניות ונפשיות. עבדה בעבר במחלקת שיקום ילדים בבית חולים "שיבא", במרפאה לילדים נפגעי תאונות דרכים בבית חולים "לוינשטיין" ובמרכז לאוטיזם בבית חולים "אסף הרופא". כיום מאבחנת ומטפלת בקליניקה פרטית ומובילה יחידת אבחון במכון פרטי לאבחון וטיפול בילדים.

תקציר

תפקודים ניהוליים הם קבוצת יכולות המאפשרות לאדם להגדיר מטרות במכוון, לפתח תוכניות להשגתן ולווסת התנהגויות קוגניטיביות ורגשיות לצורך השגת מטרות אלו. מחקרים בחנו את הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים לימודיים בכלל ובמתמטיקה בפרט, אך לא בזיקה לרמות לימוד במתמטיקה בקרב תלמידים בוגרים.

מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את הקשר שבין תפקודים ניהוליים לרמת הלימוד וההישגים בבחינת הבגרות במתמטיקה. המשתתפים היו תלמידי כיתות י"ב (N=286) הלומדים מתמטיקה בכל מיני רמות וגדלו בסביבה רגילה שאינה מוגדרת טעונת טיפוח או לקוית למידה ואינה סובלת מפגם התפתחותי. הנתונים נאספו באמצעות שאלון BRIEF-SR שממנו הופקו שלושה מדדים: מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ניהולי-כללי.

נמצאו קשרים מובהקים בין התפקודים הניהוליים לשני המאפיינים של היכולת המתמטית: (א) התפקודים הניהוליים של תלמידי 5 יחידות לימוד גבוהים מאלו של הלומדים 3 או 4 יחידות לימוד; (ב) ככל שהתפקודים הניהוליים גבוהים יותר, כך ההישגים בבגרות גבוהים יותר רק בקרב תלמידי 4 יחידות לימוד שאינם מאובחנים.

התוצאות התאורטיות של הממצאים נוגעות לקשר שבין התפקודים הניהוליים למאפיינים של היכולת המתמטית. התוצאות היישומיות מתבטאות ביכולת של מורים לערוך מיפוי מדויק יותר של תפקודי הלומד לצורך גיבוש מענה מקצועי המותאם לתלמיד בתחום המתמטיקה, תחום דעת הזוכה כיום לתשומת לב ניכרת במערכת החינוך.

מילות מפתח: תפקודים ניהוליים; הישגים במתמטיקה; תלמידים מאובחנים.

(memory), תכנון והתארגנות (plan/ogranite), ארגון סביבה וחפצים (organization of materials) וכן יזימה (initiate) או השלמת משימה (task completion). הם חילקו יכולות אלה לשני תחומים עיקריים: **ויסות התנהגות ומטה-קוגניציה** (Guy, Isquith, & Gioia, 2004).

ויסות התנהגות נוגע ליכולות המשמשות סמן מקדים לפתרון הולם של בעיות קוגניטיביות. בדרך כלל היכולת לווסת את ההתנהגות תומכת גם בפיתוח מיומנויות של ויסות עצמי. בתחום זה יש ארבע פונקציות:

א. **גמישות** – היכולת לעבור בקלות בין מצבים, פעילויות או היבטים שונים של בעיה לפי דרישות הסיטואציה. לגמישות שני היבטים:

1. גמישות התנהגותית – נוגעת ליכולת להגיב בהתאם על שינויים בסביבה או בלוח זמנים.

2. גמישות קוגניטיבית – נוגעת לגמישות בבחירת אסטרטגיות חלופיות לשם פתרון בעיות.

ב. **עיצוב תגובה** – היכולת לשלוט בדחפים ובהתנהגות, והיכולת לעצור ולווסת התנהגות עצמית בזמן המתאים ובעניין המתאים.

ג. **שליטה ברגשות** – היכולת לווסת או לשלוט בתגובות רגשיות בהתאם לדרישות המצב או להקשר.

ד. **בקרה** – מודעות האדם לעוצמותיו ולחולשותיו. מודעות להתנהגותו ולהשפעתה על אחרים.

מטה קוגניציה נוגעת ליכולת לשמר מידע בזיכרון עבודה, לפתור בעיות במגוון תחומים, לארגן את השיטות לפתרון בעיות ולסיים משימות במסגרת הזמן המוקצב (כגון פרויקטים או שיעורי בית). בתחום זה יש ארבע פונקציות:

א. **תכנון והתארגנות** – היכולת לחזות אירועים או תוצאות עתידיות; להציב מטרות או רצף הוראות כדי להנחות התנהגות בעניין מסוים; לתכנן מראש צעדים מתאימים כדי להשלים משימה או פעילות.

ב. **ארגון סביבה וחפצים** – היכולת לשמור את חומרי בית הספר או חומרי העבודה מאורגנים; היכולת לארגן את סביבת העבודה (כגון שולחן, לוקר, ילקוט, מיטה).

ג. **זיכרון עבודה** – היכולת להחזיק מידע בזיכרון לצורך השלמת משימה העומדת לפניו או לשם יצירת תגובה הולמת.

ד. **סיום משימות** – היכולת לסיים או להשלים כראוי שיעורי בית או משימות במועד; לסיים מבחנים בזמן המוקצב; לעבוד בקצב משיביע רצון.

בדרך כלל אפשר לומר שיש קשר בין תחום ויסות התנהגות לתחום המטה-קוגניטיבי, כך שהתפקודים בתחום של ויסות התנהגות מאפשרים למיומנויות בתחום המטה-קוגניטיבי לכוון בהצלחה פעילות שיטתית של פתרון בעיות (Guy et al., 2004).

חלוקה זו לשני תחומים – ויסות התנהגות ומטה-קוגניציה – מאפשרת לקבל אינדיקציה ברורה וספציפית יותר להבנת התנהגויות מסוימות של הפרט. הבנה זו מאפשרת מתן התערבות ספציפית ומדויקת יותר לקידום תפקודים ניהוליים לקויים של הפרט בבית הספר ובבית (Grieve, Webne-Behrman, Couillou, & Sieben-Schneider, 2014).

תפקודים ניהוליים ולמידה

השפעתם של תפקודים ניהוליים רחבה מאוד ובאה לידי ביטוי במגוון מישורים: קוגניטיבי, מוטורי, חברתי-רגשי ומוטיבציוני-אישיותי

בעשור האחרון התפתח הידע בתחום התפקודים הניהוליים המעורבים בכל פעילות שהאדם עושה, הן מבחינת החשיבה הן מבחינת ההתנהגות. היכולת לכוון התנהגות לצורך השגת מטרות היא המפתח להצלחה והשלמת רוב המשימות האקדמיות והתעסוקתיות, והקשר שבין תפקודים ניהוליים להישגים לימודיים נחקר רבות (כמו Best, Miller, & Naglieri, 2011 או סקירתם של Jacob & Parkinson, 2015). מקצוע המתמטיקה הוא אחד ממקצועות הליבה בארץ הנלמד בכל שנות החינוך הפורמלי ומדובר באחד המקצועות שמוקצה לו שעות הוראה רבות יותר בבתי הספר לעומת מקצועות לימוד אחרים. המתמטיקה מלמדת לחשוב חשיבה מופשטת, מדויקת, מסודרת ומקנה הרגלי חשיבה יסודיים (אהרונ, 2004). מתוך כך מיפוי הקשרים בין הישגים במתמטיקה לתפקודים הניהוליים, שכוללים בדיוק את אותן מיומנויות הדרושות לחשיבה מורכבת, מאורגנת ומופשטת, יכול לשפוך אור על האופן שאפשר לקדם את לימוד המקצוע, לסייע למורה לשפר את האינטראקציה עם התלמידים וליצוק להוראה מענה מותאם, ממוקד ומקצועי הן בתחום הלימוד הן בתחום ההתנהגותי והרגשי. בחינת הקשרים האלה בין תהליכים קוגניטיביים להישגים אף הולמת את התפיסה החינוכית של משרד החינוך שגובשה בחוזר מנכ"ל – אבני דרך בלמידה משמעותית (משרד החינוך, 2014). בחוזר זה מוצגים התפיסה, העקרונות, ההזדמנויות והאתגרים שביישום למידה משמעותית. לנוכח מיעוט הידע על מרכיבים קוגניטיביים הקשורים ללמידה מתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב, מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את הקשר שבין תפקודים ניהוליים לשני מדדים הקשורים ללימוד מתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב: הישגים בבגרות במתמטיקה ורמות לימוד שונות זו מזו.

רקע תאורטי

תפקודים ניהוליים

תפקודים ניהוליים הם קבוצה של יכולות קוגניטיביות והתנהגויות המונחות באמצעות קליפת המוח הפרה-פרונטלית. התפקודים הניהוליים מאפשרים לאדם להגדיר מטרות במכוון, לפתח תוכנית להשגת המטרות ולווסת התנהגויות קוגניטיביות ורגשיות לצורך השגת מטרות אלו (Anderson, 2001; Gioia, Isquith, Guy, & Kenworthy, 2000; Luria, 1966; for a review of definitions see Baron, 2004; Jurado & Rosselli, 2007). חוקרים אחרים (כמו Burgess & Simons, 2005; Barkley, 1997; Gioia, Isquith, & Guy, 2001) הציגו מגוון הגדרות למונח תפקודים ניהוליים, אך במחקר זה בחרנו בהגדרתם של ג'איויה ואיסקווית' (Gioia & Isquith, 2004) מהסיבות שלהלן: (א) יש שימוש נרחב במודל זה ובשאלונים בשדה המחקר, תוך בחינת תפקודים ניהוליים בכלל וקשרם ללמידה; (ב) למודל זה יש מגוון שאלונים קליניים תקפים ומהימנים; (ג) השאלונים משמשים אנשי מקצוע כמו מרפאים בעיסוק ופסיכולוגים במהלך אבחון תלמידים לצורך קידום במערכת החינוך. לעיתים פסיכולוג מבקש מהמורה להעריך את התפקודים הניהוליים של תלמיד באמצעות אחד משאלונים אלו, וכן לקבל את ממצאי השאלון בדוחות אבחון של תלמיד או בשיבות צוות רב-מקצועי לצורך בניית תוכניות התערבות פרטניות לתלמיד. ג'איויה ואיסקווית' (Gioia & Isquith, 2004) הגדירו את התפקודים הניהוליים כאוסף של יכולות נבחנות אך קשורות זו בזו, התורמות ליישום פעולות של פתרון בעיות והן מכוונות מטרות. יכולות אלו כוללות עיצוב תגובה (inhibit), גמישות (shift), שליטה ברגשות (emotional control), בקרה (monitor), זיכרון עבודה (working

התחומים. המתמטיקה מלמדת לחשוב חשיבה מופשטת, מדויקת, מסודרת ומקנה הרגלי חשיבה יסודיים (אהרונ, 2004). כמו כן, נודעת לה חשיבות בשפה היומיומית של האדם, כמו שזון, תיאור כמויות, השוואה וכדומה. בעידן שאנו חיים בו כיום, הטכנולוגיה מתפתחת בקצב מואץ והשפעתה על חיינו הולכת וגדלה במגוון רחב של תחומים. אהרונ (2004) אומר כי המתמטיקה היא המפתח לכל המקצועות הנוגעים למדעים מדויקים, ולאחרונה אף הובילה חשיבות המתמטיקה לחוסנה וביטחונה של המדינה (משרד החינוך, 2015). כדברי הנשיא לשעבר, שמעון פרס:

‘סטארט אפ נישן’ אינו מהלך חד פעמי – לא ניתן לקנות מציאות מדעית פעם אחת ודי. על מנת שנעמוד בתחרות הגלובלית אל מול השווקים הבינלאומיים, המדינה חייבת להשקיע את המרב כדי לאפשר לתלמידיה מדע מהשורה הראשונה. מקצועות המדעים והטכנולוגיה נשענים על מתמטיקה, ולכן, קידום הלימודים וחתימה נמרצת למציאות מדעית הם הכרח קיומי ואינטרס עליון לעתידה של ישראל (שטיינמץ, 2015).

יש מקום לומר כי מטרת לימוד המתמטיקה היא להכשיר בוגרים להתמודד עם מורכבות החברה שהם חיים בה. לצורך קידום התחום נבנו מסלולי פיתוח מקצועי למורים המלמדים את המקצוע ופותחו חומרי הוראה-למידה מגוונים, כולל לתלמידים מתקשים. כמו כן נבנו תוכניות התערבות לקידום תלמידים במתמטיקה בשכבות הגיל למיניהן ובמיוחד בחינוך העל-יסודי.

בחינוך העל-יסודי מסתמכים כיום על "תוכנית היבחות" המשמשת מתווה להוראה כמפורט באתר מפמ"ר מתמטיקה (משרד החינוך, 2011). תוכנית היבחות מחלקת את אוכלוסיית הלומדים מתמטיקה לשלוש רמות לימוד: רמת 3 יחידות לימוד – הרמה הבסיסית ביותר, רמת 4 יחידות לימוד ורמת 5 יחידות לימוד – הרמה הגבוהה ביותר. בכל אחת משלוש הרמות יש שני שאלוני מבחנים חיצוניים שכותב משרד החינוך. מבחינת נושאי הלימוד יש נושאים המשותפים לכל היחידות ויש נושאים הנלמדים רק במקצתן. הנושאים המשותפים נבדלים ביחידות הלימוד למיניהן ברמת העומק וברמת הקושי. בדרך כלל אפשר לומר כי ההבדלים בין הרמות למיניהן באים לידי ביטוי בהיקף התכנים, ברמת ההעמקה בהם ובדרישות בבחינות.

סיבות רבות תורמות לשוני בהישגים המתמטיים, ואלה כוללות גישה למקצוע, מוטיבציה, יכולות שפה ומנת משכל, נוסף לסיבות חברתיות וחינוכיות. ברור כי מיומנויות חשובות ספציפיות לתחום המתמטי חיוניות לשם הצלחה בתחום (Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010), ואולם לכישורים קוגניטיביים אחרים תפקיד חשוב ביותר. טיבן של מיומנויות מתמטיות הוא שהרכישה והביצוע נשענים במהותם על הפונקציות הניהוליות במוח. כאשר ילדים נדרשים לפתור בעיות מתמטיות, עליהם לארגן את הבעיה לשלביה, לשלוף נתונים מהזיכרון לטווח ארוך, להחזיקם בזיכרון העובד לשם ביצוע מניפולציות על התוצרים החלקיים של הבעיה, לשקול אפשרויות תגובה שונות, לעכב תגובה למידע לא רלוונטי שנכנס ולנטר את תהליך החישוב. במחקרים נבדקו במיוחד בעיקר שלוש מיומנויות ניהוליות שיש להן קשר הדוק יותר ליכולות מתמטיות: המיומנות הכללית של שימור ופעולה על מידע בראש (זיכרון עבודה), היכולת לעכב מידע מסיח (אינהיביציה) והיכולת להעביר את הקשב בגמישות בין משימות למיניהן (גמישות חשיבה) (Bull & Scerif, 2001). מיומנויות אלו יכולות לבוא לידי ביטוי בביצוע המתמטי בעת שאדם נדרש לאחסן ולשלוף תוצרי ביניים בחישוב תרגיל, בבחירה מושכלת של אסטרטגיות יעילות ועיכוב אסטרטגיות לא יעילות (לדוגמה ביצוע פעולת חיבור במקום חיסור או שלילת

(Eslinger, 1996). הם אלה התורמים להכוונת פעולות לצורך השגת מטרות התנהגותיות או אקדמיות (Jacob & Parkinson, 2015). תלמידים שיש להם מיומנויות ניהוליות יעילות, מחזיקים במפתח להצלחה בבית הספר ובחברה (Miller & Marcovitch, 2011). מחקרים שעסקו בקשר שבין תפקודים ניהוליים להישגים אקדמיים (כמו Best, Miller, & Naglieri, 2011 או סקירתם של Jacob & Parkinson, 2015) התמקדו בעיקר בקריאה ובמתמטיקה. ג'קוב ופרקינסון (Jacob & Parkinson, 2015) ניסו לבדוק בשיטתיות את הקשר שבין תפקודים ניהוליים להישגים. הם ביצעו מטה-אנליזה ב-67 מחקרים שבדקו קשר זה באמצעות מבחנים סטנדרטיים באוכלוסיות שאין בהן לקויות למידה. במחקרים אלה התפקודים הניהוליים הוגדרו והוערכו במגוון דרכים, נמדדו בנקודות זמן אחת וכמנבאים הישגים. בשל השונות בהגדרת תפקודים ניהוליים ותכולתם במחקרים המגוונים, עורכי הניתוח בחרו בהגדרה שטבעו חוקרים מתחום התפתחות הילד, ובה הם מניחים כי ישנם 3-4 תפקודים ניהוליים מרכזיים: אינהיביציה (יכולת לעכב תגובה בעלת עוצמה או אוטומטית), קשב (היכולת למקד את תשומת הלב בגירוי ולהתעלם מגירויים מסיחים), גמישות (יכולת לשלוט ולשנות בגמישות את תשומת הלב ובו בזמן גם להתעלם ממסיחים) וזיכרון עבודה (יכולת לשמר מידע בראש ובו בזמן גם לבצע עליו מניפולציות). בבדיקתם נמצא כי יש קשר חלש (0.3) בלתי מותנה בין תפקודים ניהוליים להישגים. אותרו קשרים בעוצמה דומה בקבוצות גיל מגוונות (בטווח שבין 3 ל-18), בתפקודים ניהוליים מסוימים (זיכרון עבודה, אינהיביציה, גמישות, קשב) ובדרכי מדידה מגוונות. נוסף על כך, בספרות המחקרית לא נמצאו עדויות משכנעות לכך שהקשר בין התפקודים הניהוליים להישגים הוא קשר סיבתי. כמו כן, מחקרי התערבות לקידום התפקודים הניהוליים לא הניבו ממצאים עקיבים באשר לשיפור הישגים אקדמיים מתוך כך. ג'ייקוב ופרקינסון (Jacob & Parkinson, 2015) סיכמו את המטה-אנליזה בכך שנדרשים עוד מחקרים כדי לקבוע שהקשר הוא סיבתי, ובצורך לכלול הגדרה ברורה של מונחי התפקודים הניהוליים ומערכת תואמת לבדיקתם. כמו כן בדיקת מגוון התפקודים הניהוליים ושימוש במשתנים מבוקרים תביא לידי הבנה מעמיקה יותר את הפוטנציאל של כל אחד מהתפקודים בשיפור הישגי התלמידים. באותו עניין גם מחקר אחר (Lemberger-Truelove, Selig, Bowers, & Rogers, 2015) שבחן את הקשר בין התפקודים הניהוליים להישגים אקדמיים בקרב בנים ובנות, לא הצליח לעמוד על תפקודים ניהוליים שנמצאו קשורים בעקיבות להישגים בקרב קבוצות מעורבות או בקרב בנים או בנות לחוד. נוסף על כך, דווח במאמר על כך שהקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים הוא תלוי גיל, כלומר בכל מיני גילים פונקציות מסוימות קשורות להישגים. מכיוון שהמחקר הנוכחי מתמקד בקשר שבין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה נתמקד בסקירת הספרות מבחינה זו.

מתמטיקה ותפקודים ניהוליים

בפרק זה נציג תחילה את הרציונל לקשר בין שני משתנים אלו ואחר כך נציג ממצאים של מחקרים עדכניים שבחנו את הקשר ביניהם.

מתמטיקה היא אחד ממקצועות הליבה בארץ הנלמד בכל שנות החינוך הפורמלי – החל בקדם-יסודי וכלה בבית ספר התיכון. זהו אחד המקצועות שמוקצות לו שעות הוראה רבות יותר בבתי הספר לעומת מקצועות הלימוד אחרים. בדרך כלל אפשר לומר כי בקדם-יסודי ובבית הספר היסודי מקנים ידע בסיסי על מספרים, פעולות, גאומטריה ומדידות ובעל-יסודי נדרשים הפשטה, הכללה ויישום של מה שנרכש בתחום המספרי, האלגברי והגאומטרי ואינטגרציה בין

פתרון לא תקין המתאים לפעולה אחרת על אותם מספרים) ובניטור יעיל של תהליך החישוב ושל התוצרים הסופיים. גמישות בחשיבה יכולה לסייע במעבר בין שלבי עבודה מסוימים בתהליך הפתרון, במעבר בין פעולות, בהתאמת אסטרטגיית פתרון, בעבודה עם טווחי מספרים ובדרכי רישום התשובה (מספרים או מילות מספר).

בספרות המחקרית העוסקת בתפקודים ניהוליים והישגים במתמטיקה נמצאו כמה סוגים של מחקרים: מחקרים מתאמיים (Bull & Lee, 2014; Friso-van den Bos, van der Ven, Kroesbergen, & van Luit, 2013; Blair, Ursache, Greenberg, Veron-Feagans, & Family Life Project Investigators, 2015; Fuhs, Nesbitt, מחקרי התערבות (Farran, & Dong, 2014; McClelland et al., 2014 Barnett et al., 2008; Blair & Raver, 2014; Schmitt, 2015 McClelland, Tominey & Acock, 2015 St Clair-Thompson & Gathercole, 2006; Blair & Razza, 2007; Kaufman, 2010).

במיוחד במחקרים הבודקים את הקשר המתאמי בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה נמצא בעקיבות כי תפקודים ניהוליים אכן קשורים להישגים במתמטיקה (Bull & Lee, 2014; Friso-van den Bos et al., 2013) וניבאו הצלחה במתמטיקה (Blair et al., 2013; Fuhs et al., 2014; McClelland et al., 2014). קשר זה נמצא הן במחקרים שבדקו את הקשר שבין תפקודים ניהוליים ספציפיים להישגים במתמטיקה (כמו Friso-van den Bos et al., 2014; McClelland et al., 2013) והן במחקרים שקשרו בין גורם ניהולי כללי יחיד להישגים במתמטיקה (כמו Fuhs et al., 2014; Wiebe, Espy, & Charak, 2008). כמו כן נמצא שהקשר של התפקוד הניהולי הכללי חזק יותר ואפשר להסביר באמצעותו את הקשר של מרכיבי התפקודים הניהוליים השונים. עוד נמצא כי הקשר בין התפקודים הניהוליים להישגים במתמטיקה הוא כללי, אינו תלוי זמן ודומה בכל זמן ההתפתחות (Duncan, Nguyen, 2016; Miao, McClelland, & Bailey, 2016). על אף ממצאים אלו מטה-אנליזה שבוצעה לאחרונה הציבה סימני שאלה בעניין השפעה סיבתית של התפקודים הניהוליים על הישגים במתמטיקה (Jacob & Parkinson, 2015).

לנוכח הממצאים הסותרים בעניין הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בכלל, ובשל החלוקה ל"תוכנית היבחנות" בקרב מתבגרים הדורשת הבחנה בין רמות ידע למיניהן, המחקר הנוכחי יתמקד בבדיקת קשר זה, תוך בחינת רמות לימוד מגוונות. חשיבות נוספת למחקר הבוחן את הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים מתמטיים נמצאת בתחום קידום הידע וההכשרה של המורים עצמם. אחד מעקרונות ההוראה שמקדם משרד החינוך כיום הוא למידה משמעותית (משרד החינוך, 2014) המשמשת בסיס להוראת המקצועות המגוונים ובהם תחום המתמטיקה. למידה משמעותית מזמנת חוויית צמיחה קוגניטיבית, רגשית וחברתית המותאמת לתפקודי הלומד במאה העשרים ואחת. בלמידה המשמעותית מצופה מהצוות החינוכי למפות את תפקודי הלומד לצורך קידומו. התפקודים הנדרשים הם תפקוד קוגניטיבי, מטה-קוגניטיבי, הכוונה עצמית בלמידה וניהולה, תפקוד בין-אישי, תפקוד תוך-אישי ותפקוד בהיבט החושי-תנועתי (משרד החינוך, 2014, פרק 3). תפקודים אלה עומדים בהלימה עם ההגדרות של תפקודים ניהוליים ומכאן החשיבות הגדולה לזיהוי הקשר שבין תפקודים אלה להישגים במתמטיקה כאמצעי לקידום הדרכים ללמידה משמעותית.

ראוי לציין כי יש חשיבות להקנות לפרחי הוראה ולמורים את נושא התפקודים הניהוליים וקשרם לתהליך ההוראה-למידה. שימוש בתפקודים ניהוליים יכול לשמש כלי להסתכלות אחרת של המורה

על התלמיד ועל התוכן-המשימה המתמטית. בהיבט של התלמיד, תפקוד לקוי של תלמיד יכול לנבוע מחוסר מיומנות בהפעלת התפקוד, מעיכוב התפתחותי או מלקות בתפקוד. קושי של תלמיד יכול לשמש מצפן עבור המורה למיקוד הקושי, הבנת משמעותו של הקושי ולהתאמת דרכי התערבות. בהיבט של התוכן-המשימה המתמטית, בהכנת יחידת הוראה או משימות מתמטיות מורה יכול לזהות מהם התפקודים הניהוליים הדומיננטיים הנדרשים לביצוע המשימה, להעריך את מידת השפעתם על יכולת התלמיד להתמודד עם המשימה ולהתאים דרכי הוראה לגישור בין התלמיד לתוכן-משימה. דרכי ההוראה המותאמות יכולות להיות במליאת הכיתה או דיפרנציאליות – בקבוצה או בהוראה יחידנית לפי הצורך. מכאן שהכשרת מורים לשימוש בתפקודים הניהוליים ככלי תומך הוראה-למידה, יכולה להגדיל את יכולת ההכלה וההשתלבות של מגוון התלמידים בכיתה במתן מענים מרובים למגוון צרכים – מבחינה פדגוגית, רגשית-חברתית, ארגונית וסביבתית.

מטרות ושאלות המחקר

מטרות המחקר הנוכחי לבחון את הקשר בין תפקודים ניהוליים ובין יכולות במתמטיקה של תלמידים בכיתה י"ב. ממטרה זו נגזרות השאלות האלה:

- האם יש קשר בין תפקודים ניהוליים לסוג יחידת הלימוד שבה התלמיד נבחן במתמטיקה?
- האם יש קשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה (ציון בגרות) בזיקה ליחידת הלימוד שבה התלמיד נבחן במתמטיקה?

שיטת המחקר

משתתפים

את השאלון מילאו 426 תלמידי כיתות י"ב הלומדים שלוש, ארבע וחמש יחידות לימוד במתמטיקה בשישה בתי ספר רגילים במגזר היהודי במרכז הארץ ובדרום הארץ. אוכלוסייה זו נבחרה מאחר שהתלמידים נמצאים בשנת הלימודים האחרונה של בית הספר התיכון ומקומו של כל אחד מהם בלימודי מתמטיקה יציב מבחינת רמת הלימוד שהוא לומד בה. כמו כן הם כבר נבחנו בחינה אחת לקראת בגרות ברמת הלימוד שלומדים בה. מתוך כל ממלאי השאלון נפסלו 17 תלמידים: 3 בשל מתן מענה שלילי על שאלון התפקודים הניהוליים, 13 בשל חוסר עקיבות במתן מענה על שאלון התפקודים הניהוליים, 1 בשל חריגת הגיל מהנורמה של השאלון, 123 בשל לקות למידה או הפרעת קשב או שניהם. נשארו 286 תלמידים, מתוכם 33% בנים ו-67% בנות בני 16-18. בלוח 1 מוצגת התפלגות התלמידים בשלוש קבוצות הלימוד – 3, 4, 5 יחידות לימוד.

לוח 1: התפלגות מאפייני התלמידים בזיקה ליחידות הלימוד השונות

יחידות לימוד	3	4	5	סה"כ
N	113	62	111	286
%	39.5%	21.7%	38.8%	100%
בנים	43	16	36	95
בנות	70	46	75	191
מוצא הישגים במתמטיקה	88.42	85.21	82.41	
ס"ת הישגים במתמטיקה	15.00	10.52	13.01	

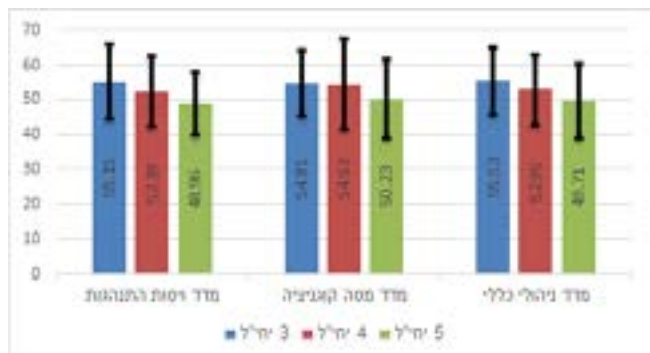
שבאמצעותם נבדקים שמונה מרכיבים קליניים מגוונים של תפקודים ניהוליים. שמונת המרכיבים מחולקים במידה שווה לשני סולמות: **סולם ויסות התנהגות וסולם מטה-קוגניציה**. בטבלה שלהלן יובאו שני הסולמות, התפקודים הניהוליים של כל סולם ודוגמאות מייצגות להיגדים של כל תפקוד ניהולי שיכולים לבוא לידי ביטוי בכיתה.

א. **בדיקת התפקודים הניהוליים** שאלון The Behavior Rating Inventory of Executive Function – Self Report – BRIEF-SR (Guy et al., 2004). שאלון זה הוא שאלון דיווח עצמי להערכת תפקודים ניהוליים של מתבגרים בני 11-18 שתורגם לעברית לצורך מחקר זה. לצורך תיקוף התרגום השאלון תורגם חזרה לאנגלית ושוב לעברית. השאלון כולל 80 היגדים

לוח 2: התפקודים הניהוליים של כל סולם והיגדים מייצגים לכל תפקוד ניהולי

התפקודים הניהוליים של סולם ויסות התנהגות	
התפקוד	היגדים מייצגים של התפקוד הניהולי
אינהיביציה	1. אני מתקשה לחכות לתורי 2. אני אימפולסיבי (אני פועל לפני שאני חושב) 3. אני קם ממקומי בזמנים לא מתאימים 4. אני "פולט" דברים שלא הייתי אמור לומר 5. התנהגותי פרועה מדי או חסרת שליטה 6. אני לא שוקל את תוצאות מעשיי לפני שאני פועל
שליטה ברגשות	1. יש לי התפרצויות זעם 2. אני מתפרץ על דברים קטנים (שוליים) 3. אני מגיב בצורה מוגזמת 4. אני מרגיש מוצף בקלות (מרגיש שאני כבר לא יכול להתמודד עם העומס)
גמישות	1. אני מתקשה לקבל דרכים שונות לפתרון בעיה בשיעורי הבית, עם חברים, מטלות וכד' 2. כל שינוי לא צפוי מפריע לי (לדוגמה אם מתחלפת מורה או משתנה פעילות יומית) 3. אני מתקשה לעבור משימה אחת לאחרת 4. כשאני נתקע, אני מתקשה לחשוב על דרך אחרת לפתרון הבעיה
בקרה	1. אני לא מודע לדרך שבה התנהגותי משפיעה על אחרים או מפריעה להם 2. אני לא שם לב שהתנהגותי גורמת לתגובות שליליות, עד שכבר מאוחר מדי 3. יש לי הבנה דלה לגבי נקודות החוזק והחולשה שלי (אני מנסה לבצע דברים שהם קשים או קלים מדי עבורי)
התפקודים של סולם מטה-קוגניציה	
התפקוד	היגדים מייצגים של התפקוד הניהולי
תכנון וארגון	1. אני מתחיל משימות שונות (כגון שיעורים או הכנת מתכון מסוים) ללא חומרים מתאימים 2. אני מתקשה להתארגן בבוקר (לקראת בית ספר או לעבודה) 3. אני לא מתכנן מראש את העבודה על מטלות לימודיות 4. אני מתקשה להוציא לפועל דברים הנדרשים לשם השגת מטרה (לדוגמה חיסכון של כסף לקניית דברים מיוחדים, לימוד לשם קבלת ציון גבוה וכד')
ארגון סביבה וחפצים	1. התיק שלי לא מאורגן 2. אני מאבד דברים (כגון מפתחות, כסף, ארנק, שיעורי בית וכד') 3. אני שוכח להחזיר מבית הספר הביתה דברים שאני זקוק להם (כמו שיעורים, מטלות, ספרים, כלי כתיבה) 4. אני מתקשה למצוא חפצים שלי כגון בגדים, משקפיים, ספרים, עפרונות
זיכרון עבודה	1. אני שוכח מה עליי לעשות באמצע המשימה 2. יש לי שגיאות הנובעות מחוסר תשומת לב 3. אני מתקשה להישאר באותו נושא כשאני מדבר 4. אני מתקשה לזכור דברים, אפילו למספר דקות (כגון מסלול הליכה / נסיעה, מספרי טלפון) 5. אני שוכח הוראות בקלות
השלמת משימה	1. לוקח לי יותר זמן מאשר לאחרים להשלים את משימותיי 2. אני מקבל ציונים נמוכים במבחנים, גם כשאני יודע את התשובות הנכונות 3. יש לי רעיונות טובים, אך אני לא מצליח להשלים את המשימה (אני חסר התמדה) 4. אני מתקשה לסיים משימות (כגון עבודות, שיעורי בית)

$F(2, 283) = 10.82, p < .001$; מדד מטה-קוגניציה: $(F(2, 283) = 5.88, p < .01)$. בניתוח המשך מסוג Duncan נמצא כי בכל שלושת המדדים רמת התפקודים הניהוליים של תלמידי 5 יחידות לימוד גבוהה במובהק מזו של תלמידי 3 ו-4 יחידות לימוד, כאשר אין הבדלים מובהקים ברמת התפקודים הניהוליים של 3 ו-4 יחידות לימוד. הממוצעים וסטיות התקן בתרשים 1. יש לציין שערך גבוה במדד הניהולי מראה רמה נמוכה של תפועול התפקוד.



תרשים 1: מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ניהולי כללי – ממוצעים וסטיות תקן בזיקה ליחידות הלימוד

ב. בדיקת הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה (ציון בגרות) בזיקה ליחידת הלימוד שבה התלמיד נבחן במתמטיקה

הקשר בין התפקודים הניהוליים לציון הבגרות במתמטיקה בזיקה ליחידות הלימוד השונות נבדק באמצעות מתאם פירסון ומוצג בלוח 4. יש לציין שמתאם שלילי מעיד על קשר חיובי, שכן ערך גבוה במדד הניהולי מראה רמה נמוכה של תפועול התפקוד.

לוח 4: מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ניהולי כללי – מתאם פירסון עם הישגים בבחינת הבגרות במתמטיקה בזיקה ליחידות הלימוד השונות

	3 יח"ל	4 יח"ל	5 יח"ל
N	113	62	111
מדד ויסות התנהגות	.05	-.39**	-.13
מדד מטה-קוגניציה	.14	-.33**	-.06
מדד ניהולי כללי	.10	-.43**	-.11

* $p < .05$ ** $p < .01$

מהלוח עולה כי נמצא קשר מובהק בעוצמה בינונית בכיוון המצופה בין כל אחד משלושת המדדים של התפקודים הניהוליים לציון הבגרות במתמטיקה כך שככל שהתפקודים הניהוליים גבוהים יותר, כך עולה ציון הבגרות במתמטיקה. קשר זה נמצא רק בקרב תלמידי 4 יחידות לימוד.

דין

במחקר הנוכחי בדקנו את הקשר בין תפקודים ניהוליים ליכולות במתמטיקה של תלמידים בכיתה י"ב בבתי ספר אינטגרטיביים. היכולת המתמטית של התלמידים במחקר זה באה לידי ביטוי בשני מדדים אובייקטיביים: מספר יחידות הלימוד לקראת בגרות במתמטיקה והישגים בבחינת הבגרות של התלמיד. הקשר בין

המשיב מתבקש לסמן את התדירות שבה מתקיימות ההתנהגויות המתוארות בכל היגד בסולם ליקרט של 3 דרגות: 1 – אף פעם לא; 2 – מדי פעם; 3 – לעיתים קרובות או תמיד. לכל מרכיב קליני מחושב ציון. למבחן מתקבלים שלושה מדדים: **מדד ויסות התנהגות** ו**מדד מטה-קוגניציה**, שיחד מרכיבים את **המדד הניהולי הכללי**. מידת התקינות בכל אחד מהמרכיבים הקליניים או המדדים נקבע על פי הציון המתקבל כדלהלן: ציון מעל 65 נחשב לקוי; בטווח שבין 60 ל-65 נחשב תפקוד בסיכון; ציון קטן מ-60 נחשב תקין. מחקרים בארה"ב תומכים במהימנות ותוקף שאלוני BRIEF לסוגיהם (Gioia et al., 2000).

כדי לבדוק את מהימנות השאלון, נבדקה המהימנות של כל אחד משלושת המדדים: מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ניהולי כללי. בלוח 3 מוצגות התוצאות שהתקבלו.

לוח 3: מקדמי מהימנות של מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה וציון ניהולי כללי (N=410)

התפקוד	מספר היגדים בשאלון	מהימנות אלפא של קרונברך
מדד ויסות התנהגות	38	.93
מדד מטה-קוגניציה	42	.94
מדד ניהולי כללי	80	.96

מהלוח עולה כי שלושת המדדים הם בעלי מהימנות גבוהה.

כדי לבדוק את התוקף המבחין בין שני המדדים – ויסות התנהגות ומטה-קוגניציה חושב מתאם פירסון ביניהם ונמצא מתאם חיובי מובהק ברמה בינונית-גבוהה ($r = .60, p < .001$). מתאם זה מראה קשר חיובי מובהק ברמה בינונית המעיד על זיקה בין שני המדדים ומצד אחר על משמעות ייחודית של כל אחד מהם.

ב. **שאלון פרטים אישיים:** עורכי המחקר בנו שאלון זה כדי לקבל נתוני רקע בסיסיים על הנבדקים, כגון מין, כיתה, רמת לימודים במתמטיקה. חלק זה כולל 9 שאלות.

ג. **הישגים במתמטיקה:** ההישגים במתמטיקה הם ציונים בבחינת הבגרות הראשונה במתמטיקה שנערכה בסוף כיתה י"א, בכל אחת מיחידות הלימוד. ציון זה הוא תוצר משוקלל של ציון המגן במתמטיקה וציון בבחינת הבגרות במתמטיקה.

הליך המחקר

השאלון הועבר למשתתפים בידי עורכי המחקר במפגש אחד של 30 דקות. לתלמידים הוסבר שהשאלון הוא אנונימי, אינו קשור ללימודים הסדירים שלהם בבית הספר והם יכולים להפסיק למלא אותו כשהם רוצים.

אתיקה

המדען הראשי של משרד החינוך אישר לבצע את המחקר.

ממצאים

א. בדיקת הקשר בין תפקודים ניהוליים לסוג יחידת הלימוד שבה התלמיד נבחן במתמטיקה

נערך ניתוח שונות חד-כיווני (One Way Anova) שבו המשתנה הבלתי תלוי הוא מספר יחידות לימוד. המשתנים התלויים היו שלושת המדדים של הפונקציות הניהוליות – מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ויסות התנהגות.

הניתוח הראה כי נמצאו הבדלים בין יחידות הלימוד השונות בכל אחד משלושת המדדים של התפקודים הניהוליים (מדד ניהול כללי: $F(2, 283) = 8.60, p < .001$; מדד ויסות התנהגות:

היכולת המתמטית של התלמיד לתפקודים ניהוליים נבדק בזיקה ליחידות הלימוד.

תפקודים ניהוליים בקרב תלמידים הלומדים ביחידות לימוד שונות זו מזו

במחקר הנוכחי נמצאו הבדלים מובהקים בתפקודים הניהוליים בין יחידות הלימוד השונות זו מזו, כך שרמת התפקודים הניהוליים של תלמידי 5 יחידות לימוד גבוהה יותר משל שתי האחרות, כאשר אין הבדלים מובהקים ברמת התפקודים הניהוליים של 3 ו-4 יחידות לימוד.

ממצאים אלו תומכים בממצאי מחקרים קודמים שמצאו קשר עקיב בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה (Bull & Lee, 2014; Friso-van den Bos et al., 2013; Blair et al., 2015; Fuhs et al., 2014; McClelland et al., 2014). ממצאי המחקר הנוכחי מרחיבים את הממצאים הקיימים בתחום בכך שהם מראים שהתפקודים הניהוליים קשורים לא רק להישגים במתמטיקה, אלא גם לרמות שונות של ידע מתמטי הנדרש בבחינת הבגרות במתמטיקה מתוך הלימה ליחידות הלימוד השונות – 3, 4, 5: ככל שמספר יחידות הלימוד גדול יותר, כך עולים מספר הנושאים הנלמדים, רמת ההעמקה והמורכבות בהם. אפשר לומר שקפיצת המדרגה המהותית היא בין רמת 5 יח"ל לשתי האחרות. ברמת 5 יח"ל כל השאלות הן ברמת חיפוש פתוח שבהן התלמיד צריך לייצר בעצמו את תהליך הפתרון והוא אינו יכול להסתמך על תרגילים שפתר בעבר. לעומת זאת, שתי רמות הלימוד האחרות (3-4) דומות וקרובות יותר ברמת הדרישות, בהלימה לתכנים ולרמת ההעמקה הנדרשת בכל רמה, כך שחשיפה מוקדמת למשימות המאפיינות את השאלונים יכולה לסייע במידה ניכרת ללומד בקבוצות אלו להצליח בבחינה. יש מקום לשער ולומר שיהיה קל ומהיר יותר לקדם תלמיד טוב הלומד בקבוצת 3 יח"ל כדי לעבור ולהשתלב בלמידה בקבוצת 4 יח"ל, מאשר לקדם תלמיד טוב בקבוצת 4 יח"ל כדי לעבור ולהשתלב בלמידה בקבוצת 5 יח"ל.

כמו כן מאחר שלא נמצאו הבדלים ברמת התפקודים הניהוליים בין 3 ל-4 יחידות הדבר מראה שכנראה אין הבחנה בהירה דיה באוכלוסייה הלומדת בקבוצות 3 ו-4 יחידות לימוד. ייתכן שבקרב אוכלוסיית תלמידי 3 יחידות לימוד יש תלמידים המסוגלים ללמוד ברמת 4 יחידות לימוד וכדאי לבחון סוגיה זו באמצעות מחקר בעתיד.

יש לציין כי הקשר בין רמת התפקודים הניהוליים ורמת יחידות הלימוד במתמטיקה כפי שנמצאו במחקר זה, יכול לבוע מזיקת גומלין בין השניים: כלומר ייתכן שתלמידים הלומדים ברמת 5 יחידות לימוד הם מלכתחילה בעלי רמה גבוהה יותר של תפקודים ניהוליים. כמו כן התמודדות עם מטלות מורכבות ומאתגרות יותר במהלך תהליך ההוראה-למידה במתמטיקה, מקדמת את התפקודים הניהוליים של התלמידים. כלומר לימוד ברמה גבוהה יותר מספק אתגר קוגניטיבי שתורם לפיתוח הפונקציות הניהוליות ולא רק תורם לידע מתמטי טהור. בכל הרמות וברמת 5 יח"ל הדבר הכרחי ומשמש תנאי כדי להצליח לעמוד בדרישות המשימות למיניהן. מכאן שחשיפה ולימוד ברמה גבוהה יש בהן כדי להועיל לתלמידים לא רק בהרחבת הידע המתמטי, אלא גם במיומנויות וכישורים מתחומים שונים שחלקם בא לידי ביטוי בפונקציות הניהוליות כגון גמישות, התמדה, זיכרון עבודה ותכנון.

תפקודים ניהוליים והישגי התלמידים בבגרות במתמטיקה

נמצא קשר מובהק בין התפקודים הניהוליים להישגים במתמטיקה בבחינת הבגרות החיצונית הראשונה רק בקרב תלמידי 4 יחידות, כך שכלל שרמת התפקודים הניהוליים עולה, עולים ההישגים במתמטיקה. קשר זה לא נמצא בקרב תלמידי 3 ו-5 יחידות לימוד.

הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה קבוצת 3 יחידות לימוד

ההסבר המוצע להיעדר הקשר הוא פסיכומטרי: הציון הסופי של תלמידי 3 יחידות לימוד הוא ציון המשוקלל מהערכה חלופית בית ספרית אחת ומשתי הערכות חיצוניות. במחקר זה השתמשנו בציון הבחינה החיצונית הראשונה (שאלון 035381) כמייצג את הישגי הבגרות במתמטיקה של קבוצה זו. השיטה הנהוגה בארץ בקביעת ציון הבגרות הסופי ברמת 3 יחידות לימוד (משרד החינוך, 2013) מצמצמת את הסיכוי לקבל ציון נמוך בבחינה החיצונית הראשונה בשל שיטת הצבירה; היכרות מוקדמת עם שאלות דומות מתוך המאגר; גמישות בהבעת הידע המתמטי ומקום נרחב לידע אינטואיטיבי או הבנה בסיסית של תכנים או שניהם, על פני ידע פרוצדורלי או שימוש בנוסחאות הבחינה. כל אלו תורמים לשונות נמוכה בהישגים בציון הבגרות שבו השתמשו במחקר זה ובכך מגבילים מראש את רמת הקשר שבין התפקודים הניהוליים ובין ההישגים בבגרות במתמטיקה.

יש מקום להניח שאם היינו לוקחים את ציון השאלון האחרון בבגרות של 3 יחידות לימוד (שאלון 035382), שבו יש פחות מקום לאינטואיציה ונדרשות בו מיומנויות להתמודדות עם בעיות ארוכות ומורכבות יותר כמו אינטגרלים, גאומטריה אנליטית, בעיות קיצון ושאלות מילוליות מורכבות, אז היינו מבחינים בקשר ברור יותר בין הכשרים הניהוליים ומידת ההצלחה בפתרון בעיות אלו, מאחר שמיומנויות אלו תלויות יותר בתפקודים הניהוליים לצורך פתרונן.

יהיה ראוי לחזור על מחקר זה כאשר הציון במתמטיקה הוא הציון המשוקלל יכולת חשבונית מורכבת יותר, או ציון של משימות הנשענות בבירור על תפקודים ניהוליים – כמו ציון השאלון השלישי או שקלול הציון הסופי של בחינת הבגרות במתמטיקה.

הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי 4-5 יחידות לימוד

כאמור, במחקר הנוכחי נמצא קשר בין התפקודים הניהוליים להישגים במתמטיקה רק בקרב תלמיד 4 יח"ל שאינם מאובחנים.

ההסבר המוצע לממצא זה מתבסס על המאפיינים השונים של התלמידים ותוכני הלימוד בין 4 ל-5 יח"ל בעניין תפקודים ניהוליים: ממצאי מחקר זה מראים רמה גבוהה יותר של תפקודים ניהוליים בקרב תלמידי 5 יח"ל. ייתכן שיש כאן אפקט של צמצום טווח המתבטא בכך שרוב תלמידי 5 יח"ל לאחר תהליך הלימוד ולקראת ביצוע בחינת הבגרות, הם בעלי רמה גבוהה של תפקודים ניהוליים מעבר לסף הנדרש להתמודדות מוצלחת עם דרישות התכנים ברמת לימוד זו. לצמצום הטווח יש שני מקורות: 1. רמת התפקודים הניהוליים הראשונית של כל מי שלומד בקבוצת 5 יח"ל גבוהה יותר מאשר בקרב תלמידי 4 יח"ל כפי שנמצא במחקר זה; 2. מחקרים מראים ששיפור מיומנויות מתמטיות יכול לשפר תפקודים ניהוליים (Weiland, & Yoshikawa, 2013) ומיומנויות מתמטיות ומיומנויות ניהוליות משתפרות במהלך אימון ותרגול שלהן (Zelazo, Blair, & Willoughby, 2016). תהליך הלמידה בקבוצת 5 יח"ל

- Baron, I. S. (2004). *Neuropsychological evaluation of the child*. New York: Oxford University.
- Best, J. R., Miller, P. H., & Naglieri, J. A. (2011). Relations between executive function and academic achievement from ages 5 to 17 in a large, representative national sample. *Learning and Individual Differences*, 21(4), 327-336. doi:10.1016/j.lindif.2011.01.007
- Blair, C., & Razza, R. P. (2007). Relating effortful control, executive function, and false belief understanding to emerging math and literacy ability in kindergarten. *Child Development*, 78(2), 647-663. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.01019.x
- Blair, C., & Raver, C. C. (2014). [Closing the achievement gap through modification of neurocognitive and neuroendocrine function: Results from a cluster randomized controlled trial of an innovative approach to the education of children in kindergarten](#). *PLoS ONE*, 9(11), e112393. doi:10.1371/journal.pone.0112393
- Blair, C., Ursache, A., Greenberg, M., Veron-Feagans, L., & Family Life Project Investigators. (2015). Multiple aspects of self-regulation uniquely predict mathematics but not letter-word knowledge in the early elementary grades. *Developmental Psychology*, 51(4), 459-472. doi:10.1037/a0038813
- Burgess, P. W., & Simons, J. S. (2005). Theories of frontal lobe executive function: Clinical applications. In P. W. Halligan & D. T. Wade (Eds.), *Effectiveness of rehabilitation for cognitive deficits* (pp. 211-232). England: Oxford University.
- Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching and working memory. *Developmental neuropsychology*, 19(3), 273-293. doi:10.1207/S15326942DN1903_3
- Bull, E., & Lee, K. (2014). Executive functioning and mathematics achievement. *Child Development Perspectives*, 8(1), 36-41. doi:10.1111/cdep.12059
- Duncan, R. J., Nguyen, T., Miao, A., McClelland, M. M., & Bailey, D. H. (2016). Executive function and mathematics achievement: Are effects construct-and time-general or specific? *Society for Research on Educational Effectiveness*. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED567239.pdf>
- Eslinger, P. J. (1996). Conceptualizing, describing, and measuring components of executive function: A summary. In G. R. Lyon & N. A. Krasnegor (Eds.), *Attention, memory and executive function* (pp. 367-395). Baltimore, MD: Paul H Brookes.
- Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10, 29-44. doi:10.1016/j.edurev.2013.05.003
- Fuhs, M. W., Nesbitt, K. T., Farran, D. C., & Dong, N. (2014). Longitudinal associations between executive functioning and academic skills across content areas. *Developmental Psychology*, 50(6), 1698-1709. doi:10.1037/a0036633
- Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-

קידם את תחום הדעת ויש מקום להניח שגם את התפקודים הניהוליים, יותר מתהליך הלמידה בקרב תלמידי 4 יח"ל. יש לציין כי תלמידי קבוצת 5 יח"ל זכו בתהליך הלמידה למעטפת הדוקה באמצעות תיווך קבוצתי או אישי כדי להצליח בבגרות ברמת 5 יח"ל (משרד החינוך, 2015).

מגבלות המחקר והצעות למחקרי המשך

- מגבלה אחת של המחקר הנוכחי באה לידי ביטוי בכך שמדידת ההישגים במתמטיקה התבססה רק על תוצאות בחינת הבגרות. במחקר עתידי ראוי להשתמש במספר כלים להערכת היכולת המתמטית של התלמיד.
- מגבלה שנייה היא שהפונקציות הניהוליות נמדדו רק באמצעות שלושה מדדים כלליים ולצורך פיתוח דרכי התערבות מומלץ לבדוק את התרומה הדיפרנציאלית של כל אחד מהתפקודים הניהוליים להישגי הבגרות במתמטיקה.
- מומלץ לגוון את האוכלוסיות הנבדקות, כמו לדוגמה תלמידים בדרגות גיל שונות, כך שיהיה אפשר לבחון את יכולת ההכללה של הממצאים גם לאוכלוסיות אחרות.
- מחקר זה בדק את הקשרים בין הישגי בגרות במתמטיקה בלי לדון בהבדלים בתוכניות הלימודים וברמות חשיבה למיניהן.

רשימת מקורות

- אהרונ, ר' (2004). *חשבון להורים: ספר למבוגרים על מתמטיקה של ילדים*. ירושלים: שוקן.
- משרד החינוך. (2011). *תכניות ההוראה במתמטיקה לתלמידים בחטיבה העליונה*. ירושלים: המחבר. אוחר מתוך http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona
- משרד החינוך. (2013). *תוכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבות הביניים: מבוא כללי*. ירושלים: המחבר. אוחר מתוך http://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/mavo.pdf
- משרד החינוך. (2014). *מהי למידה משמעותית: חוזר מנכ"ל למידה משמעותית*. ירושלים: המחבר. אוחר מתוך <http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/LemidaMashmautit/mashmautit>
- משרד החינוך. (2015). *לימודים והשכלה גבוהה: תכנית לחיזוק לימודי מתמטיקה*. ירושלים: המחבר. אוחר מתוך <http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Dovrut/pedagogia/Tochniyot/hizuklimudematematika.htm>
- שטיינמן, מ' (2015, 30 באוגוסט). התכנית לחיזוק המתמטיקה: "שוויון הזדמנויות הופך מסיסמא למציאות". *וואלה NEWS*. אוחר מתוך <http://news.walla.co.il/item/2885976>
- Anderson, V. (2001). Assessing executive functions in children: Biological, psychological, and developmental considerations. *Pediatric Rehabilitation*, 4(3), 119-136. doi:10.1080/713755568
- Barkley, R. A. (1997). Behavioral inhibition, sustained attention and executive functions: Constructing a unifying theory of ADHD. *Psychological Bulletin*, 121(1), 65-94. doi:10.1037/0033-2909.121.1.65
- Barnett, W. S., Jung, K., Yarosz, D. J., Thomas, J., Hornbeck, A., Stechuk, R., & Burns, S. (2008). Educational effects of the tools of the mind curriculum: A randomized trial. *Early childhood research quarterly*, 23(3), 299-313.

- and academic achievement in a predominantly Hispanic, low-income middle school district. *Journal of Counseling & Development*, 93(1), 25-37. doi:10.1002/j.1556-6676.2015.00178.x
- Luria, A. R. (1966). *Higher cortical functions in man*. Boston, MA: Springer US.
- McClelland, M. M., Cameron, C. E., Duncan, R., Bowles, R. P., Acock, A. C., Miao, A., & Pratt, M. E. (2014). [Predictors of early growth in academic achievement: The head-toes-knees-shoulders task](#). *Frontiers in psychology*, 5(599). doi:10.3389/fpsyg.2014.00599
- Miller, S. E., & Marcovitch, S. (2011). Executive function in the classroom: Practical strategies for improving performance and enhancing skills for all students (Book review). *Journal of Applied Developmental Psychology*, 32(4), 243-245.
- Schmitt, S. A., McClelland, M. M., Tominey, S. L., & Acock, A. C. (2015). Strengthening school readiness for Head Start children: Evaluation of a self-regulation intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, 30(A), 20-31. doi:10.1016/j.ecresq.2014.08.001
- St Clair-Thompson, H. L., & Gathercole, S. E. (2006). Executive functions and achievements in school: Shifting, updating, inhibition, and working memory. *The quarterly journal of experimental psychology*, 59(4), 745-759. doi:10.1080/17470210500162854
- Weiland, C., & Yoshikawa, H. (2013). Impacts of a prekindergarten program on children's mathematics, language, literacy, executive function, and emotional skills. *Child Development*, 84(6), 2112-2130. doi:10.1111/Cdev.12099
- Wiebe, S. A., Espy, K. A., & Charak, D. (2008). Using confirmatory factor analysis to understand executive control in preschool children: I. Latent structure. *Developmental Psychology*, 44(2), 575-587. doi:10.1037/0012-1649.44.2.575
- Zelazo, P. D., Blair, C. B., & Willoughby, M. T. (2016). *Executive function: Implications for education* (NCER 2017-2000). Washington, DC: National Center for Education Research. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED570880.pdf>
- symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115(3), 394-406. doi:10.1016/j.cognition.2010.02.002
- Gioia, G. A., Isquith, P. K., Guy, S. C., & Kenworthy, L. (2000). *BRIEF behavior rating inventory of executive function*. Lutz, FL: Psychological Assessment Resources, Inc.
- Gioia, G. A., Isquith, P. K., & Guy, S. C. (2001). Assessment of executive functions in children with neurological impairment. In R. J. Simeonsson & S. L. Rosenthal (Eds.), *Psychological and developmental assessment: Children with disabilities and chronic conditions* (pp. 317-356). New York: Guilford.
- Gioia, G. A., & Isquith, P. K. (2004). Ecological assessment of executive function in traumatic brain injury. *Developmental Neuropsychology*, 25(1-2), 135-158. doi:10.1080/87565641.2004.9651925.
- Grieve, A., Webne-Behrman, L., Couillou, R., & Sieben-Schneider, J. (2014). [Self-Report assessment of executive functioning in college students with disabilities](#). *Journal of Postsecondary Education and Disability*, 27(1), 19-32.
- Guy, S. C., Isquith, P. K., & Gioia, G. A. (2004). *BRIEF-SR behavior rating inventory of executive function-self-report version: professional manual (psychological test)*. Lutz, FL: Psychological Assessment Resources.
- Jacob, R. T., & Parkinson, J. (2015). The potential for school-based interventions that target executive function to improve academic achievement: A review. *Review of Educational Research*, 85(4), 512-552. doi:10.3102/0034654314561338
- Jurado, M. B., & Rosselli, M. (2007). The elusive nature of executive functions: A review of our current understanding. *Neuropsychology Review*, 17(3), 213-233. doi:10.1007/s11065-007-9040-z
- Kaufman, C. (2010). *Executive function in the classroom: Practical strategies for improving performance and enhancing skills for all students*. Baltimore: Brookes.
- Lemberger-Truelove, M. E., Selig, J. P., Bowers, H., & Rogers, J. E. (2015). Effects of the student success skills program on executive functioning skills, feelings of connectedness,

"כפל מקטין, אבל חילוק מקטין יותר..." - הבנות חלקיות ותפיסות שגויות של כפל וחילוק בשבר פשוט¹

1. מאמר זה נכתב על רקע עבודת הדוקטור של פירחה חמו (2014) בהנחייתם של פרופ' מאיר בוזגלו וד"ר בת שבע אילני.

פירחה חמו בת שבע אילני מאיר בוזגלו



ד"ר פירחה חמו

ראש המסלול לגיל הרך ומרצה להוראת מתמטיקה במכללת אפרתה. עוסקת בחינוך מתמטי בגן, בבית-הספר היסודי ובחטיבת הביניים.



ד"ר בת שבע אילני

עוסקת בייעוץ מתמטי, פיתוח חומרי למידה ופרסום מאמרים וספרים בנושאים מתמטיים מגוונים. עובדת עם המכללה האקדמית חמדת הדרום והאוניברסיטה העברית בירושלים. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, ייעוץ ועריכה של חומרים וספרים המיועדים לגנים, לבתי ספר, להכשרת מורים למתמטיקה בנושאים מגוונים. בין הספרים: פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך - תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; שימור ושינוי - תובנות אלגבריות בעולם המספרים.



פרופ' מאיר בוזגלו

החוג לפילוסופיה באוניברסיטה העברית. עוסק בפילוסופיה של המתמטיקה ובחינוך מתמטי.

תקציר

מחקר זה מצטרף למחקרים שעסקו בקושי להרחיב את משמעות הפעולות כפל וחילוק ממספרים שלמים למספרים רציונליים, ומתמקד בביטויים שלו במספרים רציונליים המבוטאים כשבר פשוט. במאמר זה אנו מציגים השוואה בין פתרונות של אותו תלמיד, מכיתה ו' או ח', ב-4 זוגות של פריטים משאלון המחקר. בעזרת השוואה בין פריטי כפל עם כופל קטן מ-1, או בין פריטי חילוק עם מחלק קטן מ-1, זיהינו דרכים שבהן התלמידים מפרשים כפל וחילוק בשבר פשוט, והצבענו על רמות ביניים בהבנת כל פעולה. למשל מצאנו כי תלמיד עשוי להבין ש'כפל בשבר מקטין' ולא להבין שהוא עשוי לייצג סיטואציה של 'מציאת חלק מכמות'. שלא כמחקרים שדנו בתפיסות התלמידים בכפל בנפרד מחילוק, במחקר הנוכחי השווינו בין תשובות התלמידים למשימות כפל ובין תשובותיהם במשימות חילוק. מתוך השוואה זו מצאנו את התפיסה השגויה הזו: תלמידים קישרו את מודל "חלק מ-" של כפל ואת תכונת ההקטנה, הן לכפל בשבר (קישור נכון) והן לחילוק בשבר (קישור שגוי). תפיסה זו לא נמצאה במחקרים על מספרים עשרוניים, ונראה כי היא מושפעת מההקשר של מציאת חלק מכמות וממשמעות השבר הפשוט כאופרטור. הממצאים תורמים להבנת מרכיבי השינוי המושגי הנדרש במעבר ממספרים שלמים לשברים פשוטים. להימצאות אותן שגיאות הן בכיתה ו' והן בכיתה ח' יש השפעות על הכשרת מורים.

מילות מפתח: כפל וחילוק שברים פשוטים; גישת שינוי מושגי; רמות ביניים של הבנה.

פתח דבר

כאשר מיכאל מכיתה ו' כתב את הסימן " $>$ " כדי להשלים את הביטוי המתמטי $72 : \frac{3}{4} \square 72 \times \frac{3}{4}$, נראה היה שהוא מחזיק בו בזמן בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין". השערה זו הופרכה על פי ההסבר שלו: "גם לתרגיל הכפל וגם לתרגיל החילוק תוצאה קטנה מ-72, אבל החילוק מקטין יותר...". על אף שהסבר זה, הנכון בחלקו, נראה כמשקף

הקטע על מיכאל ממחיש את המניע לחקור כיצד תלמידים מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים, ואת הצורך לשלב במחקר משימות בשתי פעולות החשבון האלה.

רקע תאורטי

ההרחבות של פעולות מתמטיות נידונו בספרות, הן בהיבט הסמנטי (Buzaglo, 2002) והן בהיבט הפסיכולוגי. מחקרים שעסקו בהרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים (אי-שליליים) למספרים רציונליים בחנו אותה בשני ממדים: אנכי ואופקי (Greer, 1994).

הממד האנכי כולל התקדמות לאורך מערכות מספרים. למשל, תרגיל כפל מתאים לבעיה מילולית עם כופל שהוא מספר שלם כמו לבעיה עם כופל שאיננו שלם. חוקרים מצאו כי בהינתן לתלמידים בעיה מילולית עם כופל קטן מ-1, בעיית חילוק עם מחלק קטן מ-1, או בעיית חילוק עם מחלק גדול מהמחולק – הם מתקשים לתת תרגיל המתאים להן (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Hardiman & Mestre, 1989; Prediger, 2008b).

הממד האופקי של ההרחבה כולל טווח רחב של סיטואציות שהפעולות הן מודל מתמטי שלהן. למשל, סיטואציית כפל בעלת מבנה של חיבור חוזר מתאימה לתרגיל כפל במספרים שלמים, אך לתרגיל כפל עם גורמים קטנים מ-1 נדרשת היכרות עם סוגים אחרים של סיטואציות בעיה – למשל שטח. במחקרים מגוונים נמצא כי תלמידים מתקשים לכתוב סיטואציות בעיה מתאימות לתרגילים נתונים של כפל או חילוק במספרים רציונליים (Barlow & Drake, 2008; De Corte & Verschaffel, 1996; Prediger, 2008a).

לצד מחקרים על שברים פשוטים נציג גם מחקרים על מספרים עשרוניים, הן משום שבמשך שנים רבות עסקו המחקרים בהרחבת משמעות כפל וחילוק למספרים רציונליים המבוטאים כמספר עשרוני, והן כדי להבליט היבטים העשויים להיות ייחודיים לשברים פשוטים.

גישת שינוי מושגי, ורמות ביניים של הבנה

לפי גישת שינוי מושגי (conceptual change approach), סתירות או חוסר התאמה בין המושגים המתמטיים שהתלמיד צריך לרכוש ובין תפיסות אינדוקטיוואליות הם שלבים טיפוסיים בתהליך של בניית ידע מחדש (Stafylidou & Vosniadou, 2004). לפי גישה זו, "כפל מגדיל" היא לא רק תפיסה שגויה ידועה אלא גם מכשול בלתי נמנע במעבר ממספרים טבעיים למספרים רציונליים (Prediger, 2008b).

סטפילידו ווסניאדו (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ערכו רשימה של מושגים על מספרים טבעיים שצריכים להשתנות בנושא שברים פשוטים, בהם הייצוג הסימבולי, סידור, והתפיסות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין". פרדיגר (Prediger, 2008b) הוסיפה לרשימה זו את המודלים המנטליים של כפל – אלה שיש בהם רציפות ממספרים טבעיים לשברים פשוטים ואלה שלא. למשל, לבעיות acting-across quantity² ולבעיות שטח במספרים טבעיים יש בעיות מקבילות בשברים פשוטים. לעומת זאת, לבעיות part-of בשברים פשוטים אין מקבילה ישירה במספרים טבעיים.

2. גורם אחד בתרגיל הכפל המתאים לבעיות מסוג זה הוא קצב (rate), כמו בנוסחה "מהירות x זמן = דרך" או "מחיר ליחידה x כמות = מחיר כולל". ה-rate פועל על פני (acting-across) הכמות האחרת שבבעיה (Usiskin, 2008).

פרדיגר (Prediger, 2008b) בדקה את הבנת כפל שברים פשוטים בקרב תלמידים בכיתות ז' ו-ט' במגוון משימות המצריכות שינוי מושגי: בחירת תרגיל לבעיה מילולית נתונה, כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון והערכת סדר גודל של תוצאת תרגיל. היא בנתה מודל המאפשר לעמוד על המיקום של מכשולים אפיסטמולוגיים בתהליך השינוי המושגי ממספרים טבעיים לשברים פשוטים. המודל כולל רבדים שונים של הידע האינטואיטיבי שיש לתלמידים, ומפריד בין רובד הכללים האינטואיטיביים (כמו "כפל מגדיל") לרובד המשמעותיות הכולל מודלים של הפעולות (למשל "כפל פירושו חיבור חוזר") ומודלים של שברים (למשל "3/4 הוא תמיד 3 מתוך שלם המחולק ל-4").

לפי הגישה המחקרית של שינוי מושגי, הבנה של רעיונות מדעיים או מתמטיים שמתנגשים עם רעיונות קודמים איננה בבחינת "הכול או לא כלום". אדרבה, יש לצפות למצוא רמות ביניים של הבנה, שבהן התלמידים משלבים מרכיבים של הידע הקודם במרכיבים של הידע החדש (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013). נציג להלן מחקרים שחשפו הבנות חלקיות של תלמידים, שבאו לידי ביטוי ב"חוסר שימור של פעולות", כלומר בבחירה של פעולות חשבון שונות לבעיות מילוליות בעלות אותו מבנה מתמטי. לאחר מכן נעסוק בקשיים בכיוון הפוך – בכתיבה של בעיה מילולית לתרגיל נתון.

חוסר שימור של פעולות בבעיות מילוליות עם מאפיינים מספריים שונים זה מזה

במשימות של בחירת פעולה לבעיה מילולית נמצא הבדל באחוזי ההצלחה בין בעיות כפל עם כופל גדול מ-1 (ובפרט שלם) ובין בעיות עם כופל קטן מ-1. לדוגמה, רק 29% מהנבדקים, בני 12-13, במחקר של אקנסטס וגריגר (Ekenstam & Greger 1983), בחרו את תרגיל הכפל במשימה הזו:

משקל חתיכת גבינה 0.923 ק"ג. מחיר 1 ק"ג הוא 27.50 kr. מצא את מחיר הגבינה. באיזו פעולה תשתמש?

27.50×0.923	$\frac{27.50}{0.923}$
$27.50 - 0.923$	$27.50 + 0.923$

רוב השוגים בחרו את תרגיל החילוק $\frac{27.50}{0.923}$, כשהסבר הנפוץ הוא: חתיכת הגבינה חייבת לעלות פחות מ-27.50, אז אנחנו חייבים לחלק כדי לקבל מספר קטן יותר.

שמונים ושלושה אחוזים מתלמידים אלה ענו נכון על בעיה מילולית דומה עם כופל שהוא מספר שלם. בראיונות הם לא מצאו דמיון בין שתי הבעיות, גם כאשר המראיין ניסה להסב את תשומת ליבם לכך.

במחקר של תירוש וגרבר (Tirosh & Graeber, 1989) על פרחי הוראה נמצאה השפעה של גודל המחלק בבעיות חילוק להכלה על בחירת הפעולה. הנבדקים שלהן קיבלו את הבעיה המילולית הזו, בעלת מחלק עשרוני קטן מ-1:

אורזים 0.65 פאונד עוגיות בקופסה. כמה קופסאות אפשר למלא מ-5 פאונד של עוגיות?

כמה מהנבדקים הסבירו בראיונות כי הם בחרו בתרגיל הכפל 5×0.65 (או 0.65×5) משום שהתשובה לבעיה צריכה להיות גדולה מ-5. הם דחו את ההנחה שחילוק מתאים, משום שלדעתם חילוק מקטין.

לתרגיל החילוק השגוי שנבחר לבעיה 1 עסקו ביחסי סדר ("כי חילוק מקטין"), לעומת 6% במשימה 2.

אף על פי שאפשר לראות בשתי הבעיות האלה שמופיעות במחקר של הרדימן ומסטר (Hardiman & Mestre, 1989) בעיות part-of, החוקרות מצאו הבדלים בין הפעולות השגויות שבחרו סטודנטים באוניברסיטה:

- ישנם 36 סוגים של דייסה במדף בחנות המכולת. $\frac{2}{3}$ מהם מכילים סוכר. כמה סוגים של דייסה מכילים סוכר? (התרגיל השגוי הנפוץ שהם כתבו היה תרגיל החילוק $\frac{2}{3} \times 36$, ב-21 מתוך 27 השגיאות)
- $\frac{7}{8}$ מהצננת מלאים במיונו. אנשי הפיקניק השתמשו ב- $\frac{1}{4}$ מהמיונו לסנדוויצ'ים שלהם. כמה מיונו הם אכלו? (התרגיל השגוי הנפוץ שהם כתבו היה תרגיל החיסור $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$, ב-31 מתוך 39 השגיאות).
- לא הוצע במחקר הסבר להבדל זה, מלבד תיאור המספרים שבבעיה 2 כקרובים זה לזה, כלשונן, לעומת המספרים שבבעיה 1.

קשיים בכתובת בעיה מילולית לתרגיל נתון

לתלמידים בגילים למיניהם, ואף לפרחי הוראה, יש קשיים בכתובת בעיה מילולית לתרגיל נתון של כפל או חילוק מספרים רציונליים (Barlow & Drake, 2008; De Corte & Verschaffel, 1996; Koichu, Harel, & Manaster, 2013; Prediger, 2008a). וורצ'פל (De Corte & Verschaffel, 1996) מצאו כי בבעיות המילוליות שהתלמידים כתבו לתרגיל כפל של מספר שלם במספר עשרוני (למשל 0.9×8) הם נמנעו מלהשתמש במספר העשרוני ככופל. לתרגיל חילוק עם מחלק שאינו שלם (למשל $6:4.8$) תלמידים שגו וכתבו בעיה מילולית עם היפוך המחלק והמחולק. שני-שלישים מהבעיות המילוליות הנכונות שהתלמידים כתבו היו מסוג "קבוצות שוות" ו"מידות שוות", שלא משקפות את ההרחבה של משמעות כפל וחילוק לטווח רחב יותר של סיטואציות בעיה.

במחקר של ברלו ודרייק (Barlow & Drake, 2008), על שברים פשוטים, נמצאו שגיאות למיניהן. למשל, לתרגיל $6:\frac{1}{2}$ תלמידים בכיתה ו' כתבו בעיות מילוליות המייצגות את $6:2$, ובעיות המייצגות את $6 \times \frac{1}{2}$ – שמוציאים בהן $\frac{1}{2}$ של 6 . לדברי החוקרות, השוגים בשיאה הראשונה מבלבלים "מחולק ל- $\frac{1}{2}$ " (divided by one-half) עם "לחצות" (divide in half) – שמשמעו לחלק ל-2 קבוצות שוות. השוגים בשיאה השנייה מבלבלים "מחולק ל- $\frac{1}{2}$ " (divided by one-half) עם "חצי של המספר" (half of a number). גרבר וטננהאוס (Graeber & Tanenhaus, 1993) עמדו על בלבול הנגרם בגלל השפה הטבעית (באנגלית), למשל בבעיה הזו: "10 ואני חילקנו את שלוש העוגיות הגדולות in half". כמה (עוגיות) כל אחת מאתנו קיבלה?". גם בעברית אפשר למצוא אנשים שאומרים "אני מחלק את החבל ל- $\frac{1}{2}$ ", כשהם מתכוונים לחצייה שלו, לחלוקה לשניים.

נוסף על כך, ניתוח בעיות מילוליות שהנבדקים כתבו לתרגיל נתון נעשה במחקרים בדרכים למיניהן (De Corte & Verschaffel, 1996; Koichu, Harel, & Manaster, 2013; Luo, 2009; Ma, 1999; Osana & Royea, 2011; Prediger, 2008b). למשל, חוקרים בדקו האם קיים בבעיה משפט שאלה, והאם מופיע המידע הנחוץ כדי לענות עליה? האם הבעיה תיפתר באמצעות התרגיל הנתון, או בעזרת תרגיל אחר – ומהו? האם לצורך הפתרון ייעשה שימוש מיידי בתרגיל הנתון, או צריך תרגיל נוסף? נעשה גם מיון של הבעיות שנכתבו לפי מודלים שונים של הפעולה. למשל, בכפל נעשתה הבחנה בין בעיות סימטריות (שבהן לשני הגורמים תפקיד זהה, כמו בבעיות שטח) ובין בעיות א-סימטריות, ובחילוק –

אם כן, יחסי הסדר בין הכמויות הנתונות בבעיה מילולית ובין התוצאה הצפויה, יחד עם התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין", עלולים לגרום לבחירת פעולה חשבונית שגויה. המודלים האינטואיטיביים של הפעולות במספרים שלמים (בכפל – מודל החיבור החוזר, ובחילוק – מודל החילוק לחלקים ומודל החילוק להכלה) ממשיכים להשפיע על התלמידים גם אחרי שהם נחשפים לפן הפורמלי שלהן במספרים רציונליים (Fischbein et al., 1985).

את הבחירה בפעולות שונות במחקרים האלה – פעולה נכונה במספרים שלמים ושגויה במספרים רציונליים – כינה גריר (Greer, 1987) "חוסר שימור של פעולות" (nonconservation of operations).

חוסר שימור של פעולות בבעיות מילוליות עם מאפיינים מספריים דומים

חוסר שימור של הפעולות נמצא גם בקרב בעיות מילוליות בעלות מאפיינים מספריים דומים. ממצא זה עודד את החוקרים לעסוק לא רק בהשפעת המספר על בחירת הפעולה, אלא גם בהשפעה של המבנה הסמנטי והקשר הבעיה. לדוגמה, בשתי בעיות החילוק המופיעות במחקר של בל, פישביין וגריר (Bell, Fischbein, & Greer, 1984) המחלק קטן מ-1, ובכל זאת נמצא הבדל באחוזי ההצלחה של התלמידים:

1. אני מכין כיסויי כרית. בכל כיסוי משתמשים ב-0.48 מטר בד. יש לי 2.4 מטר בד. כמה כיסויי כרית אני יכול להכין?
2. מכל של טנק מכיל 5.5 גלון. כמה זה בליטרים? (ליטר אחד הוא 0.22 גלון)

לבעיה 2 נמצאו במחקר 12 שגיאות של תרגיל כפל, לעומת אחת בבעיה 1. החוקרים הסבירו שבעיה 1 היא בעיית חילוק להכלה קלסית, ואילו 2 היא בעיית המרת מידות. אומנם גם עליה אפשר לשאול "כמה חלקים של 0.22 גלון יש ב-5.5 גלון?", אך לדברי החוקרים המספר 5.5 והפתרון הם גדלים של המכל במידות שונות – ולכן המידע שהפתרון גדול מ-5.5 הוא בולט. בשל כך התלמידים עלולים לבחור כפל כדי להגדיל.

בדומה, פרדיגר (Prediger, 2011) מצאה שלא כל בעיות הכפל עם כופל שבר קטן מ-1 קשות באותה מידה. במחקר שלה על תלמידים בכיתות ז' ו-ט', יותר תלמידים בחרו תרגיל כפל נכון לבעיית acting-across quantity שיש לה מקבילה במספרים טבעיים, מאשר לשאלת part-of:

1. בעיית acting-across quantity (35% הצלחה בבחירת הפעולה):
א. קילוגרם אחד של מנדרינה עולה €1.50. קייט רוצה לקנות $\frac{3}{4}$ ק"ג. איך היא יכולה לחשב את המחיר שעליה לשלם? (סמן תשובה אחת או יותר)

אף אחד מאלה, אלא זה _____	$1.5 - \frac{3}{4}$	$1.5 : \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot 1.5$
---------------------------	---------------------	---------------------	-------------------------

ב. הצדק את תשובתך בסעיף א.

2. משימת part-of (14% הצלחה בבחירת הפעולה):

א. איך אפשר לחשב $\frac{2}{3}$ של 36? (סמן תשובה אחת או יותר)

אף אחד מאלה, אלא זה _____	$36 - \frac{2}{3}$	$36 : \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot 36$
---------------------------	--------------------	--------------------	------------------------

ב. הצדק את תשובתך בסעיף א.

פרדיגר (Prediger, 2011) מצאה הבדלים גם בין סוגי הנימוקים שהתלמידים כתבו בסעיף ב' של כל משימה. למשל, 43% מהנימוקים

מטרת המחקר הנוכחי על פי הרקע התאורטי

מטרת המחקר הנוכחי היא לברר כיצד תלמידים בכיתה ו' מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים. לעומת מחקרים על מספרים עשרוניים, ביקשנו לבחון האם וכיצד השבר הפשוט משפיע על אי ההבנה של כפל וחילוק, ולפתח פדגוגיה להוראת כפל וחילוק של שברים פשוטים לתלמידים בכיתה ו'. במאמר זה נעסוק באבחון ולא בפיתוח הפדגוגי.

על פי הגישה המחקרית של שינוי מושגי הגורסת כי יש לצפות למצוא רמות ביניים של הבנה במקרה של התנגשות רעיונות מתמטיים או מדעיים עם רעיונות קודמים (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013), אנו מבקשים במאמר זה לעמוד על רמות ביניים בהבנת כפל או חילוק בשבר, ועל מרכיבים מהידע הקודם שהתלמידים משלבים במרכיבים של הידע החדש.

הקושי לקבוע תרגיל לבעיה מילולית של כפל או חילוק בשברים פשוטים לעומת אלו עם מספרים שלמים הוא ידוע ממחקרים קודמים. לפיכך לא נשווה למשל בין היכולת לכתוב תרגיל לבעיית כפל עם כופל שלם לעומת בעיה עם כופל קטן מ-1. כל הבעיות המילוליות בשאלון המחקר כללו שבר בתרגיל המתאים לבעיה, או בתוצאה שלו. כדי להדגיש מאפיינים הייחודיים לתחום השבר הפשוט, נדון בהבדלים בביצועי התלמידים בין בעיות כפל עם כופל קטן מ-1 או בין בעיות חילוק עם מחלק קטן מ-1. השוואה בין ביצועי התלמיד בשתי משימות מהשאלון – בפרט כאשר הוא עונה נכון רק על אחת מהן – עשויה לסייע לזיהוי רמות ביניים של הבנה ולייצר מדרג קושי של בעיות בשברים פשוטים. חקירת ההסברים שהנבדקים נותנים לביצועים הנכונים, ולא רק לשגיאות כפי שנפוץ במחקרים, עשויה לסייע לאפיון הרמות השונות של הבנה ואף להבנה טובה יותר של השגיאות.

בדומה לפרדיגר (Prediger, 2008a, 2008b, 2011), גם בשאלון המחקר שלנו שולבו משימות למיניהן, אך הוא כולל גם משימות על חילוק שברים, ולא רק כפל. במחקר חלוץ זיהינו קשר בין התפיסות של שתי הפעולות, וביקשנו לבדוק את ממדי התופעה.

באוכלוסיית המחקר נמצאים תלמידים בכיתה ו' – הכיתה שבה על פי תוכנית הלימודים לומדים כפל וחילוק שברים פשוטים, ותלמידים בכיתה ח' – שנתיים לאחר שלמדו נושאים אלה בכיתה ו'. אף על פי שמצופה מתלמידים בחטיבת הביניים להבין כפל וחילוק מספרים רציונליים או-שליליים, שיערנו שהתלמידים בכיתה ח' לא יציגו ביצועים טובים מאלה של כיתה ו'. זאת משום שבכיתה ח' חסרות הזדמנויות לחזק את ההבנות הראשוניות שנלמדו בכיתה ו'. מטרת ההשוואה היא להסיק מסקנות על היכולת של תלמידים לעשות את השינוי המושגי הנדרש בטווח הזמן הזה, ולהציע הצעות לקידום ההוראה של נושאים אלה.

השיטה

הממצאים המוצגים במאמר זה הם חלק מממצאי מחקר גדול יותר, שכלל את המרכיבים האלה: העברת שאלון מחקר, ביצוע ראיונות, סקירת ספרי לימוד על סמך הממצאים, עיצוב דינמי של יחידות לימוד לכפל וחילוק שברים בכיתה ו' ובחינת התרומה של יחידות הלימוד בניסוי הוראה בכיתות ו'. במחקר חלוץ, שהתקיים במשך שנתיים ב-5 כיתות ו', פותחו שאלון המחקר ויחידות הלימוד בו בזמן – כשממצאי השימוש בפריטי ההערכה ובפריטי ההוראה מזינים זה את זה שוב ושוב. שאלון המחקר בעיצוב הסופי הועבר ברמה ארצית בכיתות ו' ו-ח', ובהמשך גם בכיתות הניסוי והביקורת

לאחר ניסוי ההוראה בכיתות ו'. המתודולוגיה המוצגת להלן רלוונטית להעברת השאלון בכיתות ו' ו-ח' ברמה הארצית, בסיוע ראיונות עומק שהתקיימו עם תלמידים בכיתה ו' על רקע הכניסה שלנו לבתי ספר במחקר החלוץ ובניסוי ההוראה.

אוכלוסיית המחקר והמדגם

אוכלוסיית המחקר שבה הועבר השאלון ברמה הארצית כוללת תלמידים בכיתות ו' ו-ח' בישראל, כשתלמידי כיתה ו' למדו כבר כפל וחילוק שברים פשוטים. המדגם כלל 5 בתי ספר יסודיים ו-5 חטיבות ביניים מחמישה יישובים מגוונים – קיבוץ מבוסס אחד, עיירת פיתוח אחת, ו-3 ערים ברמות סוציאקונומיות מגוונות. כל אחד מבתי הספר היסודיים האלה נמנה על בתי הספר המזינים את אחת מחטיבות הביניים האלה. מכאן שאוכלוסיית תלמידי כיתות ו' ואוכלוסיית תלמידי כיתות ח' שבמדגם הן בנות השוואה, אף שהנבדקים מכיתה ח' הם תלמידים אחרים. בסך הכול השתתפו 20 כיתות אם, עם תלמידים מכל הרמות במתמטיקה, 10 כיתות ו' ו-10 כיתות ח' – ובסך הכול 213 תלמידים בכיתה ו' ו-267 תלמידים בכיתה ח'.

כלי המחקר

שאלון המחקר

השאלון המלא כלל 31 פריטים הבודקים הבנה מושגית של כפל וחילוק שברים פשוטים, העשויים לחשוף תפיסות הקשורות לממד האינטואיטיבי של הידע. נוסף על משימות של התאמת תרגיל לבעיה מילולית (מבעיה לתרגיל ומתרגיל לבעיה) ניתנו משימות של הערכת סדר גודל של תוצאת תרגיל ומשימות השוואה בין תרגילים. הבעיות המילוליות שהופיעו בשאלון דומות לאלה שהתלמידים פוגשים בכיתה ו' בשלבים הראשונים של הרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים.

תיקוף תוכן השאלון נעשה בשלוש דרכים:

1. תהליך עיצוב: כאמור, עיצוב פריטי ההוראה ועיצוב פריטי ההערכה הושפעו זה מזה במהלך מחקר החלוץ. פריטי הערכה שלא אבחנו את תפיסות התלמידים במחקר החלוץ לא נכללו בשאלון המחקר.
 2. פיתוח השאלון: נבנה אוסף מייצג של משימות בטווח רחב של מיומנויות. ניסוח המשימות וההוראות לתלמיד הושפע מההתנסויות במחקר החלוץ.
 3. שיפוט חיצוני: שלושה מומחים בחינוך מתמטי העריכו את שאלון המחקר בגרסה הסופית. הם התבקשו לקבוע האם המשימות מתאימות לבדיקת הבנה של כפל וחילוק שברים, והאם הן מתאימות לתלמידים בכיתה ו' על פי תוכנית הלימודים של כיתה ו'. הם מצאו את השאלון מתאים משתי הבחינות.
- עורכת המחקר העבירה את השאלון, ובכיתה נכחה גם המחנכת. התלמידים לא התכוננו מראש, ולא הורשו להשתמש במחשבון. משך הזמן שהוקדש לפתרון השאלון היה שני שיעורים רצופים.
- במאמר זה נתמקד ב-8 מתוך 31 הפריטים, ונסדר אותם לצורך הניתוח ב-4 זוגות. כאמור, בניתוח נעסוק בעיקר בתלמידים שענו נכון על אחד משני הפריטים בכל זוג, כדי להבחין ברמות ביניים של הבנה ובמאפייני הקושי. בכל אחד מ-8 הפריטים משתתפים מספר שלם ושבר פשוט קטן מ-1.



בשתי בעיות החילוק האלה משתתפים אותם מספרים. גם כאן המטרה אינה לבדוק אם התלמידים יודעים לענות עליהן, אלא אם הם מבינים שתרגיל חילוק בשבר הוא ייצוג מתמטי שלהן.

ראיונות

מטרת הראיונות הייתה להציע הסברים לביצועי התלמידים בשאלון מנקודת המבט שלהם. בחרנו בראיונות ולא בכתיבה של נימוקים כדי לא להאריך את שאלון המחקר וכדי להשיג גישה ישירה לחשיבת התלמידים.

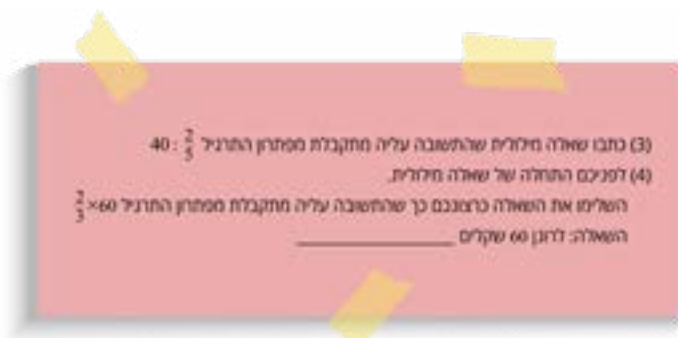
התקיימו ראיונות, הן עם תלמידים בכיתה ו' והן עם תלמידים בכיתה ח', מייד אחרי העברת השאלון. ראיונות אלה היו קצרים, ובמהלכם קיבלנו הסברים נקודתיים על התשובות שלהם לשניים עד ארבעה פריטים. לעומת זאת, בשעות הארוכה שלנו בבתי הספר היסודיים בעת מחקר החלוץ ובעת ניסוי ההוראה בכיתות ו', קיימנו ראיונות עומק עם 46 תלמידים שענו על השאלון.

רוב ראיונות העומק התקיימו לאחר שבוע בערך ממילוי השאלון, במשך 30-45 דקות כל אחד. המראיינים, בטווח רחב של יכולות (על פי עדות מורותיהם), נבחרו על סמך ביצועים מסוימים שלהם בשאלון – נכונים או שגויים. דוגמאות למטלות ריאיון נפוצות: הצדקת הבחירה בתרגיל מסוים לבעיה מילולית נתונה ונימוק לאי הבחירה בתרגילים אחרים; השוואה בין ביצועים במשימות שונות בשאלון; ובחינה של תשובה אחרת שהמראיינת הציעה – למשל כזו שנצפתה אצל תלמיד אחר.

לפי אסיאלה ועמיתיו (Asiala et al., 1996), ראיונות מסייעים להתמקד בספקטרום של מבנים מנטליים אצל כלל התלמידים – החל בתלמידים שבנו מעט מהמושג הנחקר, עבור אלה שבנו חלקים ממנו וכלה באלה שבנו את כל המבנים הנדרשים. לפיכך ב-4 זוגות הפריטים לעיל, ראינו תלמידים שענו נכון על שני הפריטים בכל זוג, תלמידים שענו על שניהם תשובה שגויה ותלמידים שענו נכון רק על אחד מהם.

בעיה 1 היא בעיית acting-across quantity, ואילו בעיה 2 היא בעיית part-of. בשתי בעיות הכפל האלה משתתפים אותם מספרים, שלא כפרדיגר (Prediger, 2011) שהשוותה בין תשובות התלמידים בבעיות עם מספרים שונים זה מזה. התלמידים התבקשו לכתוב תרגיל מתאים עם המספרים שבשאלה: 30 ו- $\frac{3}{5}$. למעשה מצופה מהם לכתוב בין המספרים האלה את אחת מארבע פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל או חילוק. משימה זו עשויה להיות שקולה לבחירת תרגיל מבין תרגילים נתונים (פורמט נפוץ במחקרים קודמים), אך היא נוסחה כך כדי לבחון את המחשבה הראשונה שעולה בראש הילד. הצענו לתלמיד את היכולת לטעון כי לדעתו "אי אפשר לכתוב תרגיל עם המספרים שבבעיה" – תשובה שהתקבלה מתלמידים שידעו לכתוב תרגיל עם המונה והמכנה של השבר $(30:5 \times 3)$ אך לא עם השבר כולו. בהעדר אופציה כזו לתשובה, התלמידים עלולים לבחור בפעולה חשבונית שגויה כברירת מחדל של הפעולות האחרות, ולא משום שלדעתם היא מתאימה.

נדגיש כי המטרה אינה לבדוק אם התלמידים יודעים לענות על הבעיות המילוליות, אלא אם הם מבינים שתרגיל כפל בשבר הוא ייצוג מתמטי שלהן. לפיכך כאמור, ייתכן שתלמיד ידע לענות על השאלה בעזרת החישוב $30:5 \times 3$, אך לא בהכרח ידע שמתאים לה תרגיל כפל של המספרים 30 ו- $\frac{3}{5}$.



במשימה הראשונה התבקשו התלמידים לכתוב בעיה מילולית לתרגיל חילוק, ובשנייה לכפל. במתן התחלה של בעיה לתרגיל הכפל ביקשנו לבדוק אם הם מצליחים להמשיך אותה באופן שלא תהיה מסוג חיבור חוזר. מכיוון שהמשימות מנוסחות אחרת, היכולת להשוות בין הביצועים בשני הפריטים היא מוגבלת.

נציין כי מבין ארבעת זוגות הפריטים, פריטים 3 ו-4 הופיעו בזה אחר זה גם בשאלון המחקר.

קטן מ-4

1. המחיר של מטר בד אחד הוא 30 שקלים. מה המחיר של $\frac{3}{5}$ מטר בד?

2. לרינה יש 30 שקלים. היא קנתה קלמר ב- $\frac{3}{5}$ מהכסף שיש לה. כמה עלה הקלמר?

פעולות החשבון שבחרו התלמידים לבעיות אלה הן כפל, חילוק (של הנכפל בכופל) או חיסור. לפני שנשווה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, נסביר את שגיאת החילוק בכופל ($\frac{3}{5}$:30) שהייתה השגיאה השכיחה בשתי הבעיות, ואת שגיאת החיסור ($\frac{3}{5}$:30) שהופיעה בבעיה 2 יותר מבעיה 1.

שגיאת החילוק (בכופל)

כ-24% מתלמידי כיתות ו' וכ-32% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק לבעיה 1. בבעיה 2 עשו כן כ-35% מתלמידי כיתות ו' וכ-29% מתלמידי כיתות ח'. ההסבר השכיח מודגם בשני הראיונות להלן, ריאיון לכל בעיה (התיאורים שלנו משולבים בסוגריים):

תלמיד א (כתב את תרגיל החילוק $\frac{3}{5}$:30 לבעיה 1):

ת: מטר בד אחד זה 30 שקלים, אז זה $\frac{3}{5}$ ממטר בד, זה לא

מטר בד מלא. אז צריך 30 לחלק ב-5 ולהכפיל פי 3.

30 לחלק ל-5 זה 6. 6 כפול 3 זה 18. אז זה $\frac{3}{5}$ מטר בד.

ח: אתה אומר שצריך לעשות 30 לחלק ל-5 כפול 3...

ת: כדי להגיע לתוצאה של התרגיל הזה

(מצביע על $\frac{3}{5}$:30, התרגיל שהוא כתב)

ח: איזה? של $\frac{3}{5}$:30?

ת: כן

ח: כלומר, אתה טוען ש-30 לחלק ל-5 כפול 3, זה כמו

$\frac{3}{5}$:30...

ת: כן

תלמידה ב כתבה לבעיה 2 את שני התרגילים האלה: $\frac{1}{5}$:6 = 30 ו- $6 \times 3 = 18$. כאשר החוקרת ביקשה ממנה לכתוב רק תרגיל אחד, היא כתבה $\frac{3}{5}$:30. הנה ההסבר שלה:

אנחנו עושים $\frac{1}{5}$:30, וזה כמו 30:5 שזה 6. לכן 6 הוא חמישית

מ-30. כפול 3, זה 18. זו (מצביעה על $\frac{1}{5}$:6 = 30)

($6 \times 3 = 18$) הדרך שאני חושבת וקלה בשבילי, אבל באמת זה

(מצביעה על $\frac{3}{5}$:30) איך שמלמדים. אבל זה (מצביעה שוב על

$\frac{1}{5}$:6 = 30, $6 \times 3 = 18$) יותר קל. לוקחים תרגיל קשה (מצביעה

על $\frac{3}{5}$:30), ומפרקים אותו.

אם כן, לדעת תלמידים אלה תרגיל החילוק $\frac{3}{5}$:30 נועד כדי למצוא ' $\frac{3}{5}$ של 30'. הם חישובו את התרגיל $\frac{3}{5}$:30 בסדרת הפעולות בשלמים $30:5 \times 3$ (חילוק ב-5 ואחר כך כפל ב-3) המוכרת מכיתה ד' לצורך מציאת חלק מכמות. נשים לב שהנימוק "כדי למצוא חלק מ-" שונה מהנימוק "כדי למצוא תוצאה קטנה יותר". הוא מעניק לתרגיל החילוק כולו משמעות (שגויה), ולא נוגע רק לפעולת החילוק שבו.

שגיאת החיסור

תרגיל החיסור $\frac{3}{5}$:30 נכתב לבעיה 2 יותר מבעיה 1. בקרב תלמידי כיתה ו', כ-14% מהתלמידים בחרו חיסור לבעיה 2 לעומת כ-1% לבעיה 1. בקרב תלמידי כיתה ח', כ-23% מהתלמידים בחרו חיסור לבעיה 2 לעומת כ-5% לבעיה 1. בראיונות עם תלמידים שכתבו

תשובות התלמידים לכל אחד מפריטי השאלון נותחו בנפרד. לכל תלמיד ניתן ציון על כל פריט וציון על השאלון כולו. חושב ממוצע הציונים של כלל תלמידי כיתות ו' והוא הושווה סטטיסטית לממוצע הציונים של כלל תלמידי כיתות ח'.

במאמר זה נתמקד בשיטת הניתוח העיקרית הרלוונטית ל-8 הפריטים: השוואה בין הביצועים של אותו תלמיד בכל שני פריטים מזוגים. בזוגות הפריטים 1-2 ו-7-8 נשווה בין הפעולות החשבוניות שהתלמידים בחרו לבעיות המילוליות הנתונות בכל זוג. יעניינו אותנו במיוחד התלמידים שלא בחרו את אותה פעולה לשתי הבעיות המילוליות, וניעזר בראיונות עם תלמידים שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בעזרת השוואה בין ביצועי התלמידים לשני הפריטים בכל זוג מהזוגות 3-4 ו-5-6 נברר האם התלמידים מבחינים בין פעולת הכפל לפעולת החילוק בשבר.

בזוג הפריטים 3-4 התבקשו התלמידים לכתוב בעיות מילוליות לתרגילים הנתונים. סיווגנו את הבעיות האלה בהליך שנועד לאפיין את סוג/מודל הבעיה ולקבוע אם היא מייצגת את התרגיל הנתון. נעזרנו בשש מדריכות למתמטיקה המלמדות בכיתה ו' – שלוש מדריכות לכל פריט. הצגנו לפני כל אחת מהן 20 בעיות מילוליות המייצגות טווח רחב של בעיות שהתלמידים כתבו. בשלב הראשון לא סיפרנו להן שהבעיות האלה נכתבו לתרגיל מסוים אלא רק שתלמידים כתבו אותן, וביקשנו מהן לכתוב את התרגיל המתאים לכל בעיה. פעלנו כך ולא הפוך כדי שסיווג הבעיה יהיה אובייקטיבי ככל האפשר. במקרה של ספק, למשל בגלל חוסר דיוק בניסוח הבעיה, הן התבקשו להציע תרגילים מתאימים. בשלב השני סיפרנו כי את הבעיות המילוליות שהן קיבלו, כתבו תלמידים לתרגיל מסוים, והצגנו אותו. ביקשנו מהן לקרוא שוב את הבעיות ולתת לכל אחת מהן ציון בין 0 ל-100, על פי הרמה המתאימה לדעתן לתרגיל הנתון. בשלב השלישי קיימנו ריאיון עם כל מדריכה, שבו היא הסבירה את השיקולים למתן הציונים, ונידונו מקרי הספק. כל קטגוריה של בעיות מילוליות נקבעה לפי התרגיל המתאים להן (בין שהוא התרגיל הנתון ובין לאו), לאחר הסכמה של לפחות שתי מדריכות מתוך השלוש. לדוגמה: אם לפריט 3 (תרגיל החילוק $\frac{2}{5}$:40) התלמיד כתב את הבעיה "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?", הבעיה נכנסה לקטגוריית "בעיות מציאת ערך החלק המשלים". מתאים לה התרגיל $\frac{2}{5}$:40, שאינו התרגיל הנתון במשימה. תהליך שיפוט זה היה נחוץ בעיקר לבעיות המילוליות שלא היה ברור חד-משמעית לאיזו קטגוריה הן שייכות.

ממצאים

נדון תחילה בתוצאות ההשוואה הסטטיסטית בין הציון שניתן על השאלון כולו (31 הפריטים) לכלל תלמידי כיתות ו' ובין הציון של תלמידי כיתות ח'. כפי ששיעורנו, תלמידי כיתות ח' לא השיגו ציונים גבוהים יותר משל תלמידי כיתות ו'. יתרה מכך, הציון הממוצע של כלל תלמידי כיתות ו' היה גבוה במובהק מהציון הממוצע של כלל תלמידי כיתות ח' (48.70, ס"ת 20.32 לעומת 39.42, ס"ת 20.42). אותן שגיאות שנמצאו בכיתות ו' הופיעו במינון זה או אחר גם בכיתות ח'. אף על פי שהציון של כיתה ו' גבוה משל כיתה ח', בכל זאת הוא נמוך – מה שמעיד על הקושי בהבנת כפל וחילוק שברים פשוטים בשתי שכבות הגיל.

קעת נציג את הממצאים של שמונת הפריטים שאנו דנים בהם במאמר זה:

תרגיל חיסור לבעיה 2 מצאנו את שני ההסברים האלה, כשהראשון היה השכיח:

1. החיסור נועד למצוא את ערך החלק המשלים. התלמידים נימקו: "כי צריך למצוא כמה כסף נשאר לרינה". בכותבם את התרגיל $30 - \frac{3}{5}$ הם התכוונו ל-30 פחות $\frac{3}{5}$ של 30. הצורך לחשב "כמה נשאר?" היה אינסטינקטיבי, ונכשלו בו גם תלמידים שנחשבים חזקים במתמטיקה. אלה תיקנו את עצמם בריאיון מייד ואמרו: "לא, לא צריך למצוא כמה נשאר לרינה, אלא כמה עלה הקלמר".

2. החיסור נועד להוציא את החלק מתוך השלם. הסיבה לתרגיל החיסור הייתה להוריד מהכסף כדי לקנות את הקלמר.

בשני ההסברים האלה אפשר לראות השפעה של מאפיינים של בעיות חיסור דינמיות במספרים שלמים הנקראות גם "בעיות שינוי מסוג הוצאה", כמו "למיכל 12 שקלים. היא קנתה מחברת ב-5 שקלים. כמה כסף נשאר למיכל?". בבעיה 2 מתוארת התרחשות – קנייה של הקלמר, ויש צורך לגרוע את ערך החלק, להוציאו מהשלם. השאלה "כמה נשאר?" עשויה להיות המשך טבעי לחלק הראשון

טבלה 1: שכיחויות יחסיות (באחוזים), ביצועים דומים או שונים אצל אותו תלמיד בפרטים 1 ו-2

קטגוריה	א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח
	כפל בשתי הבעיות (נכון)	חילוק בשתי הבעיות	חיסור בשתי הבעיות	חילוק בבעיה (1) וחיסור בבעיה (2)	כפל בבעיה (1) וחיסור בבעיה (2)	חילוק בבעיה (1) וכפל בבעיה (2)	כפל בבעיה (1) וחילוק בבעיה (2)	אחר
כיתות ו' (N=213)	31.9	11.7	.5	4.7	6.6	6.6	20.7	17.3
כיתות ח' (N=267)	20.2	18.0	3.0	8.6	7.5	2.2	6.0	34.5

הבנה חלקית: בחירת כפל לבעיה 1 וחילוק לבעיה 2

כ-21% מתלמידי כיתות ו' ו-6% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל (נכון) לבעיה 1 ותרגיל חילוק לבעיה 2 (טבלה 1, קטגוריה ז). בריאיון להלן מובא נימוק של אחת התלמידות:

תלמידה ג:

כי $\frac{3}{5}$ (בעיה 4) זה האורך, ואז כפול הכסף של מחיר הבד השלם, וזה כופל את זה, וזה נהיה יותר קטן כי זה שבר קטן יותר, וזה פשוט מראה לך כמה זה עולה. כאן (בעיה 4), 30 זה כמה מטר בד עולה, זה לא כמה כסף יש לה וכמה היא קנתה... אני חושבת שההבדל היחיד (בין בעיה 4 לבעיה 2) הוא שכאן (בעיה 2) זה $\frac{3}{5}$ מהכסף שלה, מתוך הכסף שלה, וכאן (בעיה 4) אנחנו רוצים לדעת כמה הבד עולה.

בבעיה 1 נתון הערך ליחידה ומבקשים למצוא את הערך של x יחידות, בדומה לבעיות acting-across במספרים שלמים. לבעיה 2, בעיית part-of, אין מקבילה במספרים שלמים. ההסבר של תלמידה ג מסייע לאפיין את ההבדל בין המודלים האלה של כפל, ואת הסיבות לקושי. היא נותנת למספר 30 תפקידים מגוונים בבעיות למיניהן: בבעיה 1, 30 הוא הערך המתאים ל-1 מטר בד, ואילו בבעיה 2 הוא כמות שצריך לחלק. בטבלה הממדית של ורניו (Vergnaud, 1983) נוכל להציב את הערכים שבבעיה 1 כך:

מחיר	אורך הבד במטרים
30	1
?	$\frac{3}{5}$

השלם (1 מטר בד) והחלק ($\frac{3}{5}$ מטר בד) הם בעלי אותו כינוי. תלמידה ג בחרה בכפל כי הוא מתאים ליחס הסדר בין המחיר של $\frac{3}{5}$ מטר בד למחיר של 1 מטר – הוא נותן את המחיר הקטן יותר. עוד נשים לב כי מטר בד אחד ו- $\frac{3}{5}$ מטר בד עשויים להיות אורכים של חתיכות בד שונות, ולכן נימוקים שעניינם יחסי סדר מתאימים במיוחד. לעומת זאת, בבעיה 2 היא חישובה את $\frac{3}{5}$ מתוך ה-30 ("זה מהכסף שלה, מתוך הכסף שלה"). יש גודל אחד (30 שקלים), ואופרטור (מספר ללא כינוי) הפועל עליו במובן של

של בעיה 2, בדומה לבעיה בשלמים לעיל. לעומת בעיה 2, לבעיה 1 יש מבנה סמנטי סטטי.³

ניגש כעת להשוואה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, ונתמקד במיוחד בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בטבלה 1 מוצגת התפלגות התלמידים באחוזים לפי צירופים מגוונים של תרגילים שאותו תלמיד כתב לשתי הבעיות מבין הפעולות כפל, חילוק וחיסור.

קטגוריות א-ג בטבלה נוגעות לכתיבת אותה פעולה לשתי הבעיות המילוליות, כשקטגוריה א מייצגת את הפתרון הנכון – כפל לשתי הבעיות. קטגוריות ד-ז נוגעות לבחירה של פעולות למיניהן (עם 5% מהתלמידים בכיתה ו' או ח' בכל קטגוריה לפחות). שאר התלמידים נכנסים לקטגוריה ח ("אחר"), ובכללם תלמידים שענו רק על אחת משתי הבעיות.

מהנתונים בטבלה 1 עולים הממצאים האלה:

- כ-32% מתלמידי כיתות ו' וכ-20% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל נכון לשתי הבעיות (קטגוריה א). נראה כי תלמידים אלה מבינים כי בעיית acting across ובעיית part-of הן מודלים של כפל.
- כ-39% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגילים שונים לשתי הבעיות (קטגוריות ד-ז). מתוכם, כ-27% מתלמידי כיתות ו' וכ-14% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל (נכון) לבעיה 1 ולא לבעיה 2 (קטגוריות ה+ז). מכאן שתלמידים אלה מתקשים לראות בבעיית part-of מודל של כפל. אחוז קטן הרבה יותר של תלמידים כתבו תרגיל כפל דווקא לבעיה 2 ולא לבעיה 1 (קטגוריה ו).
- רוב התלמידים בכיתה ו' שכתבו תרגיל כפל לבעיה 1 ולא לבעיה 2, כתבו לה תרגיל חילוק (קטגוריה ז). השאר כתבו לה תרגיל חיסור (קטגוריה ה). בכיתה ח' ההתפלגות לשגיאות אלה הייתה דומה.

3. בניתוח זה אפשר להסביר את הבחירה בחיסור לבעיה 2 במחקר של הרדימן ומסטר (Hardiman & Meštre, 1989) שהוצג ברקע התאורטי, שאף היא בעלת מאפיינים של בעיה דינמית שמתוארת בה גריעה.

מציאת חלק ממנו. לפי ההסבר שהצגנו קודם לשגיאת החילוק, תרגיל החילוק מייצג פעילות זו של "מציאת חלק מ-" (ייצוג שגוי). בדומה להסברים שהצגנו לשגיאת החיסור, גם בהסבר של תלמידה ג מודגש המבנה הסמנטי הסטטי של בעיה 1 ("כמה זה עולה") והמבנה הסמנטי הדינמי של בעיה 2 ("כמה כסף?") ו"כמה היא קנתה?". מציאת חלק מכמות המודגשת בבעיה 2 היא אקטיבית, יש כאן פעולה על הכמות ההתחלתית.

לסיכום, בעיה 1 עשויה לעודד חשיבה פרופורציונית עם שני ממדים בסיסיים (מטרים ושקלים) ועם ארבעה מספרים, בעוד בעיה 2 מעודדת חשיבה על פעולה ישירה בין שני המספרים הנתונים בבעיה.⁴

פריטים 3-4: כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון

3. כתבו שאלה מילולית שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $40: \frac{2}{5}$.
4. לפניכם התחלה של שאלה מילולית. השלימו את השאלה כרצונכם כך שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $\frac{2}{3} \times 60$. השאלה: לרונן 60 שקלים

הממצאים להלן נוגעים לבעיות המילוליות שנוסחו בביור, כך שהיה אפשר לקבוע להן תרגיל כלשהו. בהמשך נדון בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שענו נכון רק על אחד הפריטים:

1. אחוז התלמידים שכתבו בעיה מנוסחת היטב שנקבע לה תרגיל: בפריט 3 – כ-39% מתלמידי כיתות ו' וכ-45% מתלמידי כיתות ח', ובפריט 4 – כ-48% מתלמידי כיתות ו' וכ-40% מתלמידי כיתות ח'.

2. מתוכם אחוז התלמידים שכתבו בעיה מילולית המתאימה לתרגיל הנתון (ובלי צורך בתרגילים נוספים): פריט 3 ($40: \frac{2}{5}$) – כ-13% מתלמידי כיתות ו' וכ-8% מתלמידי כיתות ח'. כמעט כל הבעיות המילוליות היו מסוג חילוק להכלה, שבדקים בהן "כמה פעמים $\frac{2}{5}$ נכנסות ב-40?". פריט 4 ($\frac{2}{3} \times 60$) – כ-28% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח'. בעיות אלה היו מסוג part-of שבהן $\frac{2}{3}$ משמש אופרטור על 60. לדוגמה: "לרונן 60 שקלים. הוא קנה חולצה ב- $\frac{2}{3}$ מהכסף שלו. כמה הוא שילם?".

3. השגיאה הנפוצה בפריט 3 ($40: \frac{2}{5}$) היא כתיבת בעיה מילולית חד-שלבית או דו-שלבית, הכוללת מציאת $\frac{2}{5}$ של 40. כ-26% מתלמידי כיתה ו' וכ-37% מתלמידי כיתה ח' עשו כן. דוגמאות: "בכיתה 40 תלמידים. $\frac{2}{5}$ מהם יצאו לטיול. כמה תלמידים יצאו לטיול?"; "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?".

הבנה חלקית: בעיה נכונה לתרגיל הכפל (במלואה או בחלקה) ובעיה שגויה לתרגיל החילוק

כ-15% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו הן לתרגיל הכפל ($\frac{2}{3} \times 60$) והן לתרגיל החילוק ($40: \frac{2}{5}$) בעיית כפל חד-שלבית או דו-שלבית, שבה השבר ($\frac{2}{3}$ או $\frac{2}{5}$) משמש אופרטור כפלי הפועל על המספר השלם (60 או 40 בהתאמה), ולרוב במשמעות "חלק מ-". כלומר הם העניקו לשתי הפעולות את מודל part-of של כפל. דוגמאות לבעיות חד-שלביות: "בכיתה 40 תלמידים. $\frac{2}{5}$ מהם יצאו לטיול. כמה תלמידים יצאו לטיול?"; "לרונן 60 שקלים. הוא קנה חולצה ב- $\frac{2}{3}$ מהכסף שלו. כמה עלתה החולצה?". בפעמים אלה של בעיות חד-שלביות התלמידים ענו נכון על פריט 4 אך שגו בפריט

4. פרידיגר (Prediger, 2011) מצאה כי בעוד 43% מההסברים לתרגיל החילוק שהתלמידים במחקר שלה בחרו לבעיית acting-across עסקו ביחסי סדר, רק 6% מההסברים לשגיאה זו בבעיית part-of היו כאלה. אפשר להסתייע בראיונות במחקר שלנו כדי להבין את הפער הזה.

3. דוגמאות לבעיות דו-שלביות: "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?"; "לרונן 60 שקלים. הוא בזבז $\frac{2}{3}$ מה-60 שקלים שלו. כמה כסף נשאר לו?"; "לרונן 60 שקלים. הוא שם בבנק את הכסף. כל יום הריבית היא $\frac{2}{3}$ מה-60. כמה שקלים יהיה לו לאחר יום?". בבעיות הדו-שלביות נצרך יותר מהתרגיל הנתון במשימה, הן לשיטת המעניקים משמעות נכונה לתרגיל הנתון והן לשיטת השוגים.

ייתכן שההתחלה הנתונה לבעיית הכפל בפריט 4 עודדה לכתוב בטבעיות בעיית part-of נכונה. מכל מקום, כתיבת בעיה כזו גם לתרגיל החילוק עשויה להעיד על חוסר הבנה שלמה של שתי הפעולות.

פריטים 5-6: הערכת תוצאת תרגיל

5. הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $63: \frac{3}{7}$.
א. גדולה מ-63 ב. קטנה מ-63 ג. שווה ל-63
6. הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $96 \times \frac{5}{8}$.
א. גדולה מ-96 ב. קטנה מ-96 ג. שווה ל-96

ממצאים:

1. אחוז התלמידים שענו נכון על פריט 6 גדול מאחוז התלמידים שענו נכון על פריט 5, הן בכיתה ו' והן בכיתה ח' (כ-66% לעומת כ-55% בכיתה ו' וכ-59% לעומת כ-34% בכיתה ח'). מכאן שההבנה כי תרגיל הכפל נותן תוצאה "קטנה מ-" קלה מההבנה שתרגיל החילוק נותן תוצאה "גדולה מ-".

2. הבנה חלקית: כ-22% מתלמידי כיתות ו' וכ-31% מתלמידי כיתות ח' בחרו את סעיף ב ("התוצאה קטנה מ-") הן בפריט 5 (בחירה שגויה) והן בפריט 6 (בחירה נכונה). בדומה למיכאל שהוצג בפתח למאמר, תלמידים אלה לא שוגים בו בזמן בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין".

לטענת התלמיד מיכאל "גם לתרגיל הכפל וגם לתרגיל החילוק תוצאה קטנה מ-72, אבל החילוק מקטין יותר...". לא נערך עימו ראיון המשך כדי לברר באיזה מובן ההקטנה של חילוק נבדלת בעיניו מההקטנה של כפל. על סמך הממצאים בפריטים 3-1 החושפים את הפרשנות השגויה של תרגיל חילוק בשבר כ"מוצא חלק מ-", אפשר לשער שזוהי גם התפיסה של מיכאל, וכי היא נבדלת מהתפיסה של תרגיל כפל בשבר כנותן תוצאה "קטנה מ-". לפי שתי התפיסות האלה (האחת שגויה והאחרת נכונה) "התוצאה קטנה יותר", אך לא באותו מובן.

פריטים 7-8: כתיבת תרגיל לבעיה מילולית של חילוק (המחלק קטן מ-4)

7. משך האפייה של עוגה אחת הוא $\frac{3}{4}$ שעה. כמה עוגות אפשר לאפות במשך 24 שעות, אם אופים אותן בזו אחר זו?
8. למסיבה הביאו 24 פיצות שלמות. כל ילד אכל $\frac{3}{4}$ פיצה. לכמה ילדים הספיקו הפיצות, אם כל הפיצות נגמרו?

פעולות החשבון הנפוצות שהתלמידים בחרו הן כפל (של המחלק והמחולק) וחילוק. לפני שנשווה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, נסביר את שגיאת הכפל.

שגיאת הכפל

הבחירה של כפל לבעיות חילוק עם מחלק רציונלי קטן מ-1 (הקטן מהמחולק) הוסברה בספרות (למשל אצל Tirosh & Graeber, 1989) כך: תרגיל הכפל נבחר מכיוון שהתשובה לבעיה צפויה להיות גדולה מהמחולק, ומכיוון ש"כפל מגדיל". אף על פי שבשתי הבעיות 7 ו-8 במחקר שלנו התוצאה גדולה מ-24, כשליש

מהתלמידים בכיתה ו' וכרבע מהתלמידים בכיתה ח' כתבו תרגיל כפל שגוי רק לאחת מהן (טבלה 2 להלן, קטגוריות ג-ד). מכאן ששיקול סדר הגודל של התוצאה הצפויה אינו בלעדי בבחירת הפעולה. יתרה מכך, לא שמענו בראיונות את ההסבר "כפל, משום שהתוצאה צריכה להיות גדולה מ-24".

מצאנו את שני הסוגים האלה של הסברים לכתיבת תרגיל כפל לבעיה 7 (היכן ששיגאה זו הייתה נפוצה), כשההסבר השני הוא השכיח. בשני ההסברים הכפל משמש קיצור של חיבור חוזר של $\frac{3}{4}$:

1. הסבר שביסודו הבנה שגויה של הסיטואציה. התלמידים חשבו שמדובר ב-24 עוגות ולא ב-24 שעות. לפי הבנה זו, כדי לחשב כמה זמן לוקח לאפות 24 עוגות, אכן נכון לכפול את $\frac{3}{4}$ ב-24.

תלמיד ד:

קחי $\frac{3}{4}$, תכפילי אותו ב-24. $\frac{3}{4}$ שעה לוקח לעוגה אחת. יש 24 עוגות. עברה $\frac{3}{4}$ שעה - גמרתי עוגה אחת, ואני רוצה להכניס עוד אחת ל- $\frac{3}{4}$ שעה. ככה $\frac{3}{4}$ שעה ועוד $\frac{3}{4}$ שעה עד שאני גומר הכול.

2. הסבר שביסודו הבנה נכונה של הסיטואציה. התלמידים הבינו שצריך למצוא "כמה $\frac{3}{4}$ יש ב-24?", אך תרגמו שאלה זו לכפל.

תלמידה ה:

צריך למצוא כמה $\frac{3}{4}$ יש ב-24. צריך כפל כי צריך $\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$... וזה אומר שצריך לכפול.

תלמיד ו:

ת: מה ששואלים אותנו פה זה 'פעמים', ו'פעמים' זה כפל. כי אומרים לנו שמשך אפיייה של עוגה אחת זה $\frac{3}{4}$ שעה, ואז שואלים 'כמה עוגות אפשר לאפות ב-24 שעות?'. וזה אומר שזה 'פעמים', כי זה עוגה אחרי עוגה אחרי עוגה.

ח: מה פעמים מה?

ת: פעמים של עוגות ב-24 שעות.

תלמידים ה ו-ו השתמשו באסטרטגיית "בנייה" (building up), מהמחלק עד שמגיעים למחולק. אסטרטגיה זו נמצאה במחקרים על בעיות כפל וחילוק מספרים שלמים (Mulligan, 1992). הקושי של תלמידים אלה היה לקשר בין אסטרטגיה זו לתרגיל חילוק עם המספרים שבבעיה.

ניגש כעת להשוות בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, ונתמקד במיוחד בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בטבלה 2 מוצגת התפלגות התלמידים באחוזים לפי צירופים שונים של תרגילים שאותו תלמיד כתב לשתי הבעיות מבין הפעולות כפל וחילוק.

טבלה 2: שכיחויות יחסיות (באחוזים), ביצועים דומים או שונים אצל אותו תלמיד בפרטים 7 ו-8

קטגוריה	א	ב	ג	ד	ה
	חילוק בשתי הבעיות (נכון)	כפל בשתי הבעיות	חילוק בבעיה (7) וכפל בבעיה (8)	כפל בבעיה (7) וחילוק בבעיה (8)	אחר
כיתות ו' (N=213)	22.5	18.3	6.6	26.3	26.3
כיתות ח' (N=267)	23.6	9.7	5.2	21.7	39.8

קטגוריות א-ב בטבלה נוגעות לכתיבת אותה פעולה לשתי הבעיות

המילוליות, כשקטגוריה א מייצגת את הפתרון הנכון – חילוק בשתי הבעיות. קטגוריות ג-ד מייצגות בחירה של פעולות שונות (עם לפחות 5% מהתלמידים בכיתה ו' או ח' בכל קטגוריה). שאר התלמידים נכנסים לקטגוריה ה ("אחר"), ובכללם תלמידים שענו רק על אחת משתי הבעיות.

מהנתונים בטבלה 2 עולים הממצאים האלה:

1. כ-23% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק נכון לשתי הבעיות (קטגוריה א).
2. כ-33% מתלמידי כיתות ו' וכ-27% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגילים שונים לשתי הבעיות (קטגוריות ג-ד). מתוכם כ-26% מתלמידי כיתות ו' וכ-22% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק נכון לבעיה 8 ותרגיל כפל שגוי לבעיה 7 (קטגוריה ד). אחוז קטן הרבה יותר של תלמידים כתבו תרגיל חילוק נכון דווקא לבעיה 7 ולא לבעיה 8 (קטגוריה ג).

הבנה חלקית: חילוק לבעיה 8 וכפל לבעיה 7

כ-26% מתלמידי כיתות ו' וכ-22% מתלמידי כיתות ח' כתבו לבעיה 8 תרגיל חילוק (נכון), ולבעיה 7 תרגיל כפל (טבלה 2, קטגוריה ד). להלן ההסברים של שתי תלמידות:

תלמידה ז:

(כפל בבעיה 7) כי זה 'כמה פעמים נכנס' אז זה ועוד ועוד ועוד. זה כמו כפל, במקום. (חילוק בבעיה 8) הבנתי שמתוך ה-24 כל ילד אכל $\frac{3}{4}$ של פיצה. אז לכמה ילדים? כמה ילדים אכלו? אז צריך לחלק את זה ל- $\frac{3}{4}$ כדי לדעת כמה ילדים אכלו. כי מתוך ה-24 כל ילד... אז אם מחלקים אז מקבלים את התשובה של 'כמה ילדים'.

התלמידה זיהתה בבעיה 8 את המבנה המוכר של חלוקה לקבוצות שוות: ידועה הכמות הכוללת (סך הכול), ידוע כמה כל ילד קיבל (הגודל של כל קבוצה) ושואלים לכמה ילדים זה יספיק (מספר הקבוצות).

תלמידה ח:

(בבעיה 8) חילקו את הפיצות בין הילדים וכל ילד אכל $\frac{3}{4}$ פיצה, אז זה אומר שזה חילוק. (הסיבה לכפל בבעיה 7 וחילוק בבעיה 8) כי פה (בעיה 7) אופים ושם (בעיה 8) אוכלים, וזה יוצא ששם (בעיה 8) חותכים ופה (בעיה 7) עושים.

האקט של החלוקה בבעיה 8 ברור ("חותכים"). נקודת המוצא היא המחולק – אותו מחלקים. לעומת זאת בבעיה 7 "אופים", "עושים", מתחילים מהמחלק – הוא נאסף עד למחולק. כל המרואיינים שהשתמשו באסטרטגיית "בנייה" (building-up) בבעיה 7 ($\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$ ועוד...) לא השתמשו בה בבעיה 8, שנראתה להם בעיה שבה "פשוט מחלקים". מהסברים אלה נראה שלמחלק השברי לא הייתה השפעה על בחירת הפעולה, ואף לא לעצם היותו מספר קטן מ-1. בפרט, נימוקי התלמידים לא עסקו כלל בתוצאה הצפויה.

עוד מצאנו כי ההצלחה בבחירת חילוק לבעיה 8 לא מעידה בהכרח על הבנת המשמעות או התכונות של תרגיל חילוק בשבר. לראיה, כ- $\frac{1}{4}$ מהתלמידים בכל אחת משכבות הגיל כתבו תרגיל נכון ($\frac{3}{4}$:24) לבעיה 8 אך שגו בקובעם שתוצאת התרגיל $\frac{3}{7}$:63 קטנה מ-63 (פריט 5). נוסף על כך, כ-43% מהתלמידים בכל אחת משכבות הגיל כתבו תרגיל נכון ($\frac{3}{4}$:24) לבעיה 8, אך לא כתבו בעיה מילולית נכונה לתרגיל $\frac{2}{5}$:40 (פריט 3). נתונים אלה מעוררים אותנו לתהות שמא המודל של חילוק העומד לנגד עיני תלמידים אלה הוא חילוק לחלקים – גם כשהם עונים על בעיית חילוק להכלה.

בשל הקושי לבחור פעולה לבעיות כפל עם כופל קטן מ-1 לעומת ההצלחה בבעיות עם כופל גדול מ-1, השתמשו במחקרים קודמים במונח "אפקט הכופל" (Bell et al., 1984). אנו מציעים כי במקרה של כופל שהוא שבר פשוט הקטן מ-1, אפשר להשתמש במונח "אפקט האופרטור".

המשימות שהצגנו במאמר זה נותחו בזוגות, כשמענה נכון רק על אחת מהן סייע לשפוך אור על ההבנות החלקיות שיש לתלמידים ולחשוף הבדלים דקים בין תפיסות של הפעולות. ניתוח הביצועים וההסברים של התלמידים שהצליחו רק באחת משתי משימות כפל, או רק באחת משתי משימות חילוק, סייע לזהות רבדים שונים בהבנת כל פעולה. כמו כן, במקרים שבהם התלמידים הצליחו רק באחת משתי משימות עם פעולות חשבון שונות זו מזו נחשף בלבול ביניהן, שבא לידי ביטוי בהאחדה של תכונות ומשמעויות.

שתי ההבנות החלקיות הבאות נמצאו אצל תלמידים שכתבו תרגיל נכון רק לאחת משתי בעיות מילוליות בעלות אותם מבנים מתמטיים ואותם מספרים. התלמידים דלו מהבעיות המילוליות משמעויות או תכונות של הפעולה החשבונתית הנכונה, אך לא בהכרח בחרו בה.

1. **כפל כ'מקטין' אך לא כמוצא 'חלק מ-':** באחת מבעיות הכפל עם כופל קטן מ-1 (בעיית acting across) התלמידים הסבירו נכון שכפל מתאים "כי הוא נותן תוצאה קטנה יותר". הסבר זה מעיד על שינוי בתפיסת הכפל כמגדיל תמיד. לעומת זאת לבעיה האחרת (בעיית part-of), שבה לטענתם (הנכונה) "צריך למצוא חלק מ-", הם כתבו תרגיל חילוק. מכאן אפשר ללמוד כי ההבנה שכפל מקטין לא גוררת בהכרח הבנה שכפל יכול לייצג סיטואציה של מציאת חלק מכמות, וכן שההבנה הראשונה קלה מהשנייה.

2. **חילוק כמייצג חלוקת כמות קלסית, ולא כמייצג את השאלה "כמה פעמים נכנס x בתוך y?":** באחת מבעיות החילוק להכלה התלמידים הסבירו שמתאים חילוק כי מחלקים בה כמות ("מחלקים פיצה לילדים"/"חותכים"). לעומת זאת, לבעיה האחרת שבה לטענתם (הנכונה) "צריך למצוא כמה פעמים $\frac{3}{4}$ נכנס ב-24?", הם כתבו תרגיל כפל. התלמידים שהצליחו רק באחת משתי בעיות החילוק לא הבינו לגמרי את משמעות החילוק להכלה כמשמעות של חילוק.

ברמות ביניים אלה של הבנה, שבהן נמצא חוסר שימור של הפעולה אף בבעיות מילוליות עם אותם מספרים בדיוק, התלמידים הושפעו ממאפיינים סמנטיים שונים של הבעיות, ולא הצליחו לזקק את המבנה המתמטי המשותף להן. למשל, בכפל הם לא הבחינו במבנה המתמטי המשותף לבעיות acting across quantity ולבעיות part-of. בבעיות part-of השבר משמש אופרטור במפורש ("מ-"), ולעיתים הקשר שלהן דינמי ("קנו/שתו" חלק מ-). מאפיינים אלה השפיעו על הבחירה השגויה בחילוק, אך גם בחיסור – שגיאה שלא נמצאה במחקרים על מספרים עשרוניים שעל פי רוב משתתפים בבעיות מילוליות בעלות מבנה סמנטי סטטי. בבעיות חילוק להכלה – התלמידים הבחינו בין בעיות בעלות הקשר שהוצג בהן בפירוש מצב של חלוקת כמות ובין בעיות המנוסחות באופן שמעודד לבדוק "כמה פעמים נכנס המחלק במחולק?", ולא זיהו ששתיהן בעיות חילוק.

אסטרטגיות חישוב מהידע הקודם של התלמידים נמצאו אף הן מתערבות בתהליך הבחירה של פעולה לבעיה מילולית: התלמידים שכתבו תרגיל חילוק בשבר כדי למצוא חלק מכמות היו מושפעים מהאסטרטגיה המוכרת מכיתה ד' למציאת חלק מכמות: חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו. כאמור, תרגיל חילוק כמו $30 : \frac{3}{5}$ שקול בעיניהם לחישוב $30 : 5 \times 3$. לפי גישת שינוי מושגי, ברמות ביניים

מטרת המחקר העיקרית הייתה לברר כיצד תלמידים בכיתה ו' מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים מתוך התמקדות באי הבנות הייחודיות למספרים רציונליים המבוטאים כשבר פשוט.

בדיון זה נעסוק בממצאים המראים את ההשפעה של השבר הפשוט על אי ההבנה של כפל או חילוק בשבר, נתאר רמות ביניים של הבנה שעלו מהשוואת ביצועי התלמידים בכל שני פריטים מזווגים, ונשווה בין ממצאי המחקר הנוכחי לממצאי מחקרים על מספרים עשרוניים.

סיטואציות "מציאת חלק מכמות" ייחודיות לשברים פשוטים. עד כיתה ו' התלמידים עונים עליהן בסדרת פעולות עם המכנה והמונה של החלק. למשמעות השבר כאופרטור – בעיקר זו שמיושמת בחילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו – יש חלק בביצועים ובהסברים שונים של התלמידים במחקר הנוכחי. בבעיות שבהן צריך למצוא $\frac{3}{5}$ של 30, התלמידים קישרו בין התרגיל השגוי שהם כתבו ($30 : \frac{3}{5}$) לסדרת הפעולות בשלמים שאכן מתאימה למציאת $\frac{3}{5}$ של 30 ($30 : 5 \times 3$). מתן משמעות שגויה זו לתרגיל החילוק בשבר מעידה על חוסר הבנה שהסיטואציה היא מודל של כפל ולא של חילוק, ובעצם על חוסר הבנה שלמה של שתי הפעולות.

ההשפעה של משמעות השבר הפשוט כאופרטור נמצאה במחקר במשימות של כתיבת תרגיל לבעיות כפל עם כופל קטן מ-1 (פריטים 1-2) ובמשימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל חילוק בשבר קטן מ-1 (פריט 3), אך לא במשימות של כתיבת תרגיל לבעיות חילוק עם מחלק קטן מ-1 (פריטים 7-8). במיומנות זו, האחרונה, לא נמצאה למחלק השברי שבבעיה השפעה שלילית על הבחירה של פעולה – ואף לא לעובדה שהוא מספר קטן מ-1. עם זה ההצלחה בבחירת חילוק לבעיות אלה לא שיקפה בהכרח הבנה של משמעות תרגיל חילוק בשבר או הערכה של סדר הגודל שלו.

בבעיות כפל במספרים עשרוניים הכופל מוצג על פי רוב כגודל (למשל 0.65 ק"ג) ולא כמספר ללא כינוי ("0.65 מ-"), כמו בבעיה הזו: "המחיר של ק"ג אורז הוא 40 שקלים. מה המחיר של 0.65 ק"ג אורז?". לבעיה 1 מזוג הפריטים הראשון במחקר שלנו יש מבנה סמנטי דומה לבעיה זו במספרים עשרוניים – גם בה הכופל מייצג גודל ($\frac{3}{5}$ מטר בד). ואכן, מצאנו בקרב התלמידים שבחרו לה כפל נימוק העוסק ביחסי סדר ("כי צריך תשובה הקטנה מ-30") – כמו הנימוק שהיה נפוץ במחקרים על מספרים עשרוניים. כפי שלמדנו מהראיונות, התלמידים ביקשו להסדיר את יחס הסדר בין הערך של הגודל המיוצג בשלם/כפל ובין הערך של הגודל המיוצג בחלק/כופל, ובחרו פעולה חשבונתית שתיתן את סדר הגודל הרצוי. בבעיות part-of הייחודיות לשברים פשוטים, ההסבר הנפוץ לתרגיל החילוק השגוי שנכתב היה "כי צריך למצוא חלק מ-".

גריר (Greer, 1994) עסק בקשר שבין שבר יחידה לחילוק. השברים הראשונים המוצגים לתלמידים הם מהצורה $\frac{1}{n}$ (n שלם חיובי), והדגש הוא בחילוק ב-n. לדבריו, הקישור הזה בין $\frac{1}{n}$ ובין חילוק משתקף בטעות המצויה כדוגמת $6 : \frac{1}{2} = 3$. ייתכן שהפרשנות השגויה של תרגיל חילוק בשבר שאיננו שבר יחידה כ"חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו" היא הרחבה של השגיאה שהציג גריר במקרה של שבר יחידה. ייתכן גם שיש כאן הרחבה של השימוש השגוי בשפה הטבעית במקרה של שבר יחידה: כאמור, אפשר למצוא אנשים שאומרים (גם בעברית) "אני מחלק את החבל ל- $\frac{1}{2}$ ", כשהם מתכוונים לחצייה שלו, לחלוקה שלו ל-2, למציאת $\frac{1}{2}$ ממנו. תפיסות שגויות אלה מתקשרות להצגה של השבר הפשוט כמנה של שני מספרים שלמים, להבדיל מהמספר העשרוני שנראה כמספר אחד.

הסתירה בביצועים שלהם.

הממצאים שהצגנו נוגעים לתשובות התלמידים לבעיות מילוליות ותרגילים פשוטים יחסית, שכללו מספר שלם ושבר קטן מ-1. קשיים שמתעוררים כבר ברמות הנמוכות של לימוד כפל וחילוק שברים פשוטים מעידים על מורכבות השינוי המושגי. העדר היתרון לתלמידים בכיתה ח' על פני התלמידים בכיתה ו' אפילו במשימות אלה ממחיש את עוצמת הקושי. הימצאות רמות הביניים בהבנת כפל וחילוק בשבר גם בקרב התלמידים מכיתה ח' מעידה על כך שהם לא הגיעו לתפיסה המדעית גם בחלוף שנתיים מלימוד נושאים אלה. מכאן שהשינוי המושגי הנדרש הוא רדיקלי, ובשל כך יש להמשיך ולעסוק בו גם בחטיבת הביניים.

השלכות להוראה

מהממצאים והדיון מתברר כי לתפיסה של תלמידים את כפל וחילוק יש מאפיינים, שגיאות והסברים ייחודיים לשברים פשוטים. לפיכך על הפדגוגיה לכלול התמקדות בייחודיות זו, לצד עקרונות כלליים המשותפים לכלל המספרים הרציונליים.

לפי גישת שינוי מושגי יש לעסוק בחוסר התאמה בין המושגים המתמטיים שהתלמיד צריך לרכוש ובין תפיסות אינדיווידואליות כשלבים טיפוסיים בתהליך של בניית ידע מחדש. היא מאפשרת למורה לראות בשגיאות שמצאנו שגיאות צפויות ולהתכונן לקראתן. המורה יכול להיעזר ברמות הביניים של הבנה שנמצאו כדי לדון ברבדים שונים של הבנת הפעולות ולזהות את רמת התלמיד. ההבחנה בין סוגים מגוונים של בעיות מילוליות ומדרג הקושי שלהן חשובים כדי לתכנן את סדר ההוראה וכדי להביא בחשבון שהתלמיד עשוי להגיב בדרכים מגוונות על בעיות שזהות מבחינה מתמטית.

כאשר תלמיד כותב תרגילים שונים זה מזה לבעיות מילוליות דומות, הוא בעצם לא מצליח לזקק את המבנה המתמטי שלהן, קרי – הוא לא השיג חשיבה כפולת שלמה. הראל (Harel, 1995) טען שלהיות פרשן נאיבי של בעיה מילולית הוא שלב קונספטואלי מחויב המציאות שילד חייב לעבור בו במעבר מחשיבה חיבורית לחשיבה כפולת. אחרי שהוא משיג את החשיבה הכפולת, הוא מסוגל לזהות בשתי בעיות מילוליות דומות את המבנה המתמטי הזהה לשתייהן. דיונים מפורשים על משמעויות של הפעולות עשויים לסייע לתלמיד בשלב הפרשנות הנאיבית. אפשר לעשות זאת בעזרת משימות של בחירת פעולה לבעיה מילולית נתונה, ולהפך באמצעות משימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון. ספרי הלימוד בישראל לא כוללים מספיק משימות כאלה (חמו, בוזגלו ואילני, 2017). אם המורה מזהה הבדלים בין הפעולות שהתלמיד בוחר לבעיות מילוליות בעלות אותו מבנה מתמטי, עליו לדון איתו על כך.

לנוכח הבלבול בין כפל לחילוק בשבר, יש צורך לקיים תרגול מעורב של משמעויות שתי הפעולות – גם זה חסר בספרי הלימוד בישראל. כמו כן, לנוכח ההטמעה הלא נכונה של אסטרטגיות חישוב קודמות בתוך הידע החדש על כפל וחילוק, אנו ממליצים לשלב את האסטרטגיות הלא פורמליות עם הכתיבה של תרגיל עם שברים. כך למשל אפשר לבקש מהתלמידים לענות על בעיה מילולית של כפל שבה מוצאים חלק מכמות, הן בעזרת הידע שלהם מכיתה ד' (חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו) והן בעזרת תרגיל כפל בשבר, ולבדוק אם התקבלה אותה תוצאה. בדומה – לעודד את התלמידים לענות על בעיית חילוק להכלה, הן בעזרת השאלה "כמה פעמים נכנס המחלק בתוך המחולק?" והן בעזרת תרגיל חילוק בשבר, ולבדוק אם התקבלה אותה תוצאה.

יש להמשיך ולעסוק בכפל וחילוק שברים פשוטים גם בחטיבת

של הבנה התלמידים משלבים מרכיבים של הידע הקודם במרכיבים של הידע החדש (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013). אם כן, אפשר לומר שתלמידים במחקר הנוכחי שילבו בתהליך ההרחבה שלהם את הידע החישובי הקודם על מציאת חלק מכמות, ולא רק את הידע על חילוק כמקטין כפי שהוצע במחקרים קודמים. הראל (Harel, 1995) הזכיר שלב ביניים זה, שבו תלמידים לא מצליחים להשתמש בשבר כולו ככופל. הוא טען כי התלמיד עובר שלושה שלבים בהבנה שלו של כפל ממספרים שלמים לשברים פשוטים. בשלב הראשון הוא לומד לחשוב על מספרים שלמים ככופלים (מתוך דמיון של מספר מסוים של קבוצות שוות בעלות גודל מסוים). בשלב השני הוא רואה בשברים "פסאודו כופלים", כלומר הוא משתמש בשברים כהרכבה של כופל שלם ומחלק שלם (למשל, הוא מחלק את הנכפל במכנה של השבר הכופל ואז כופל במונה שלו). השלב האחרון הוא רכישת המושג של שברים ככופלים, כלומר השבר כולו משמש כופל. גם התלמידים ששגו וכתבו תרגיל כפל לבעיית חילוק להכלה "כי צריך למצוא כמה פעמים $\frac{3}{4}$ נכנסים ב-24?" שילבו בנימוק שלהם אסטרטגיית חישוב מהידע הקודם: building-up. הקושי בשתי הפעמים, בעיות הכפל ובעיות החילוק, היה לתרגם את האסטרטגיות הנכונות האלה לתרגיל אחד עם המספרים שבבעיה, ובמילים אחרות: לראות בבעיות האלה מודלים של כפל או של חילוק.

שתי התפיסות השגויות להלן נמצאו אצל תלמידים שענו נכון רק על פריט הכפל ולא על פריט החילוק (שהיו בעלי אותה מטלת ביצוע), באופן שהם שייכו לשתי הפעולות את אותה תכונה או משמעות:

1. **יישום של מודל 'חלק מ' – לכפל וגם לחילוק בשבר:** במשימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון נמצאו תלמידים שכתבו הן לתרגיל הכפל בשבר והן לתרגיל החילוק בשבר בעיה מילולית שצריך למצוא בה חלק מכמות.
2. **'כפל מקטין' וגם 'חילוק מקטין':** במשימות של הערכת תוצאת תרגיל נמצאו תלמידים שטענו כי התוצאה של תרגיל כפל בשבר "קטנה מ-" אך גם של תרגיל החילוק בשבר. תלמידים אלה לא שבויים בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין", אלא רק באחת מהן.

בלבול זה בין הפעולות לא הופיע במחקרים על מספרים עשרוניים, ונראה קשור לפירוש השגוי של תרגיל חילוק בשבר כ"מוצא חלק מ-" ולהקשרים של חלק מכמות הייחודיים לשברים פשוטים.

אפשר לומר שאצל תלמידים אלה ההבחנה הברורה בין כפל לחילוק שהייתה קיימת במספרים שלמים היטשטשה במהלך ההרחבה לשברים פשוטים. חוסר ההבחנה בין המשמעויות או התכונות של הפעולות עשוי ללמד על העדר הבנה מלאה של שתייהן, ולא רק אחת מהן (Hamo, Ilany, & Buzaglo, 2018).

בהבנות החלקיות ובתפיסות השגויות שמנינו לעיל אפשר לראות כי עיקר הקושי של התלמידים בהבנת כפל וחילוק בשבר נמצא ברובד של משמעויות של הפעולות ולא ברובד של יחסי סדר, בהתאם למדרג העומק במודל של פרדיגר על מכשולים אפיסטמולוגיים (Prediger, 2008b). הן משמעות הכפל כמוצא 'חלק מ-' והן משמעות החילוק להכלה אינן נגישות מספיק לתלמידים כמשמעויות של הפעולות.

התלמידים בעלי הבנה חלקית מעניינים במיוחד משום שהם כבר עשו כמה צעדים בתוך תהליך ההרחבה של כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים, ואפשר ללמוד מהם על צעדים אחרים הקשים יותר לביצוע.

אצל תלמידים אלה מצאנו חוסר עקיבות, וגם שהם לא מזהים את

חמו, פ' (2014). הרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים: אבחון תפיסות תלמידים ויישום לפדגוגיה (עבודת דוקטור). האוניברסיטה העברית בירושלים.

חמו, פ', בוגל, מ' ואילני, ב"ש (2017). סקירת ספרי לימוד מונחת ממצאי מחקר על תפיסות של תלמידים: המקרה של כפל וחילוק שברים פשוטים בכיתה ו'. בתוך מ' אילון ונ' עדין (עורכות). **כנס ירושלים החמישי למחקר בחינוך מתמטי: ספר הכנס** (עמ' 72-74). ירושלים: JCRME5.

Asiala, M. E., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32. doi:10.1090/cbm/006/01

Barlow, A. T., & Drake, J. M. (2008). Division by a fraction: Assessing through problem writing. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(6), 326-332.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-147. doi:10.1007/BF00305893

Buzaglo, M. (2002). *The logic of concept expansion*. Cambridge: Cambridge University Press.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. An empirical test. *Learning and Instruction*, 6(3), 219-242. doi:10.1016/0959-4752(96)00004-7

Ekenstam, A., & Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 369-384. doi:10.1007/BF00368235

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.

Graeber, A. O., & Tanenhaus, E. (1993). Multiplication and division: From whole numbers to rational numbers. In D. T. Grouws (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grade mathematics* (pp. 99-117). New York: Macmillan.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 37-45. doi:10.2307/749535

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.

Hamo, P., Ilany, B., & Buzaglo, M. (2018). Which is smaller...? Partial understandings and misconceptions about multiplication and division by fractions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the International Groups for the*

הביניים, הן בהקשר של בעיות מילוליות במספרים, והן בהקשר של ביטויים אלגבריים ובעיות מילוליות באלגברה.

תרומת המחקר

תרומת המחקר באה לידי ביטוי בתחומים האלה:

1. תהליך המחקר: הצגת כלי מחקר ודרכי ניתוח המאפשרים חשיפה של האופי הספציפי של תפיסות שגויות בשברים פשוטים וזיהוי רמות ביניים של הבנה. הוצגו גם דרכים לניתוח תוכן ומבנים סמנטיים של בעיות מילוליות. כלים אלה יכולים לשרת מחקרים אחרים שעניינם תפיסת משמעות של פעולה חשבונית.
2. קידום הוראת המתמטיקה: הבנת תפיסות של תלמידים בשברים פשוטים, והבחנה שלהן ממספרים עשרוניים. זיהוי שגיאות חדשות ומתן הסברים חדשים לשגיאות ידועות. המכשולים שזוהו, כמו רמות הביניים בהבנת משמעות כפל וחילוק בשבר, מספקים מידע על שלבים בתהליך של בניית ידע מחדש ועל מדרג קושי של בעיות מילוליות. בהבחנה בין בעיות מילוליות המחקר תרם לאפיון השדה המושגי הכללי בשברים פשוטים.
3. היבט יישומי: כלי המחקר, דרכי הניתוח, הממצאים וההשלכות להוראה יכולים לשמש בהכשרת מורים, בפיתוח מקצועי ולכותבי ספרי לימוד. מאגר השאלות מהשאלון יכול לשמש גם לדיון בכיתה.

מגבלות המחקר והמלצות למחקר עתידי

מניתוח הממצאים למדנו כי אי אפשר להבין את תפיסות התלמידים על כפל שברים מבלי להבין את תפיסתם על חילוק שברים, וכי הכרחי לקיים מחקרים על שתי הפעולות יחד. במחקרים קודמים על כפל וחילוק מספרים רציונליים לא נמצא דיון על הקשר בין תפיסות שגויות של שתי הפעולות, למעט התפיסה בו בזמן של הכפל כמגדיל והחילוק כמקטין. אנו ממליצים להמשיך ולבצע מחקרים על שתי הפעולות יחד.

למחקר ישנן לפחות שתי מגבלות האלה, ועל פיהן נמליץ על מחקר עתידי:

1. בכל פריטי השאלון שהוצגו במאמר השתתפו מספר שלם ושבר קטן מ-1, כשהמספר השלם מתחלק במכנה של השבר. תיתכן לכך השפעה על התוצאות שקיבלנו. אומנם בזכות מגבלה זו נחשפנו לעוצמתה של תפיסה מסוימת, אך מומליץ לבדוק במחקר עתידי בעיות מילוליות ותרגילים עם מספרים נוספים, בשיטות חקירה וניתוח דומות.
2. הבעיות המילוליות משאלון המחקר הן בעיות פשוטות יחסית, וכאמור כבר בהן זיהינו את מאפייני הקושי להרחיב את משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים. עם זאת, השדה המושגי הכללי כולל טווח רחב יותר של בעיות מילוליות, עם מבנים סמנטיים נוספים, ומן הראוי לחקור את ההשפעה של השבר הפשוט על אי ההבנה של כפל וחילוק גם בבעיות אלה. גם שם מומליץ לערוך השוואה בין הממצאים שיתקבלו לבין ממצאי מחקרים דומים על בעיות במספרים עשרוניים.

לסיכום נציג לפני הקוראים את השאלה להלן למחשבה, ואף למחקר, על נושאים אחרים במתמטיקה שיש בהם הרחבה של עולם המספרים: האם לאחר הרחבת הפעולות מתחום מספרי אחד למשנהו עלולה להיטשטש האבחנה ביניהן, כפי שמצאנו במחקר הנוכחי? למשל, במספרים מכוונים פותרים תרגילי חיסור בעזרת חיבור המספר הנגדי. האם התלמידים מבחינים בין חיבור לבין חיסור של מספרים מכוונים, ובאיזה מובן?

- Prediger, S. (2008b). [Discontinuities for mental models: A source for difficulties with the multiplication of fractions](#). In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. G. Alfonso, B. Gómez, & C. C. C. Litwin (Eds.), *Proceeding of ICME-11-Topic Study Group* (Vol. 10, pp. 29-45). Monterrey, Mexico: ICME-11.
- Prediger, S. (2011). Why Johnny can't apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. *International electronic Journal of Mathematics Education*, 6(2), 65-88.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). [The development of students' understanding of the numerical value of fractions](#). *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015
- Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 79-96. doi:10.1007/BF00356042.
- Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. G. Alfonso, B. Gómez, & C. C. C. Litwin (Eds.), *Proceeding of ICME-11-Topic Study Group* (Vol. 10, pp. 125-130). Monterrey, Mexico: ICME-11.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
- Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., & van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (2nd ed., pp. 305-321). New York, USA: Routledge.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.
- Psychology of Mathematics Education (PME 42) (Vol. 3, pp. 11-18). Umea, Sweden: PME.
- Hardiman, P. T., & Mestre, J. P. (1989). Understanding multiplicative contexts involving fractions. *Journal of Educational Psychology*, 81(4), 547-557. doi:10.1037/0022-0663.81.4.547
- Harel, G. (1995). From naive-interpretist to operation-conserver. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 143-164). New York: State University of New York Press.
- Koichu, B., Harel, G., & Manaster, A. (2013). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problems posing in the context of division of fractions. *Instructional Science*, 41(4), 681-698. doi:10.1007/s11251-012-9254-1
- Luo, F. (2009). [Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication](#). *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83-98.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 4(1), 24-42. doi:10.1007/BF03217230
- Osana, H. P., & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 30(4), 333-352. doi:10.1016/j.jmathb.2011.07.001
- Prediger, S. (2008a). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3-17. doi:10.1016/j.



מה הקשר בין עיסוק באומנות להבנה של אפס ואינסוף? המקרה של מתכשרים להוראת מתמטיקה



ליאורה נוטוב

תקציר

שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה צובר תאוצה בארץ ובעולם. כדי ליישם גישה זו ללימודי מתמטיקה בבתי הספר, רצוי שהמורים לעתיד יכירו את עקרונותיה ויתנסו בה. 127 סטודנטיות באחת המכללות בצפון הארץ למדו קורס אסינכרוני מקוון, "כשמתמטיקה פוגשת אומנות", המיישם גישה זו. המאמר הנוכחי מציג תוצאות של מחקר שליווה את הקורס. המחקר המוצג בוחן את ייתכנות הקשר בין עיסוק באומנות להישגים בנושא הבנת המושגים אפס ואינסוף בעת חישוב שטח והיקף. ממצאי המחקר תומכים בהשערה זו ואף יותר מכך נמצא שהישגיהן של סטודנטיות שעסקו באומנות בצורה פעילה ועשו עבודות אומנות מקוריות היו גבוהים יותר מהישגי הסטודנטיות שעסקו באומנות בצורה פעילה פחות והסתפקו בבחירה וניתוח של עבודות אומנות קיימות. נוסף על כך, שילוב אומנות יכול להיות דרך נוספת לאיתור תפיסות שגויות.

מילות מפתח: שילוב אומנות במתמטיקה; אפס; אינסוף; דימוי מושג; תפיסות שגויות.

מבוא

למושגים אפס ואינסוף יש זכויות רבות בהתפתחות מתמטיקה היות ששנים רבות הם מציבים אתגרים בפני האנושות. למשל, שתי פעולות בסיסיות כמו כפל וחילוק שמוגדרות היטב עבור כל המספרים הרציונליים מניבות תוצאות לא שגרתיות: כפל באפס מצמצם את כל ציר המספרים לנקודה אחת והחילוק באפס כלל לא מוגדר. כמו האפס גם האינסוף מעורר ויכוחים ומחלוקות בין אנשי המדע והפילוסופים. דוגמה לכך היא סירובו של אחד המתמטיקאים הגדולים בן המאה התשע עשרה, לאופולד קרוניקר, לפרסם מאמרים של מתמטיקאי גדול אחר, גאורג קנטור, על אינסוף כיוון שלא זיהה תחילה את חשיבותם (Falk, 2010; Tall, 1981). אומנם אפס ואינסוף נלמדים בכל שנות הלימודים החל מבית הספר היסודי וכלה בתיכון, אך כדי להעמיק ולבסס את הידע המתמטי של מתכשרים להוראה, הם נלמדים בקורסים כמו תורת הקבוצות, תורת המספרים,

ד"ר ליאורה נוטוב

מרצה בכירה באקדמית גורדון, חיפה. על בסיס ניסיונה הרב בהוראה ובחינוך כיתות מב"ר במערכת החינוך פרסמה את הספר "מחנכת בע"מ". כיום היא מכשירה מורים למתמטיקה ותחומי המחקר שלה הם מנהל החינוך, הוראת מתמטיקה ופדגוגיה של המחקר האיכותני. על בסיס מחקריה פרסמה מאמרים בכתבי עת מדעים ומקצועיים, ובשנת 2013 הייתה שותפה של פרופ' אורית חזן לעריכת ספר "הוראת מחקר איכותני: אתגרים, עקרונות, יישום".

אלא גם באומנות, מה שדורש מהמורים הכנה רחבה יותר (Zimmerman, 2016). אורק (Oreck, 2006) מציין אתגר נוסף והוא לחץ כבד המופעל על המורים מצידם של קובעי המדיניות לעלייה מיידית של הישגי התלמידים ובו בזמן דיכוי היצירתיות והאוטונומיה שלהם באמצעות הדרישה להיצמד לתוכניות הלימודים המוכתבות.

חשוב להבחין בין שילוב אומנות בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובין שילוב ייצוגים ויזואליים שמקובלים בלימוד מתמטיקה, כמו טבלה, דיאגרמה, גרף או ציור סכמתי (למשל Podgoršek, 2016). בדרך כלל משתמשים בייצוגים ויזואליים לשם הצגת נתונים, ביצוע פעולות, הצגת דרכי פתרון. לפי אפלנד (Efland, 2003) עבודות אומנות הן ייצוגים ויזואליים-מוחשיים המגלמים משמעות עבור היוצר. כלומר אדם שיוצר עבודת אומנות הממחישה מושג מתמטי, יוצר ייצוג ויזואלי של התפיסה שלו את המושג. לייצוג ויזואלי של מושג יש משמעות רבה כיוון שהיא חלק ממה שטל ווינר (Tall & Vinner, 1981) קוראים לו **דימוי מושג**. לפי הגדרתם, דימוי מושג הוא מבנה קוגניטיבי שיש בו תכונות ותמונות המתקשרות למושג שבונה הפרט במהלך שנות הלימודים וההתנסויות איתו. לעומת זאת, הגדרה של מושג היא אוסף מילים המסבירות אותו. ההגדרה יכולה להינתן ללומד או שהוא יכול לבנות אותה לבד לאחר התנסויות מתאימות. דימוי המושג עשוי להיות תואם את הגדרת המושג לגמרי או במידה חלקית, או אף נוגד אותה. שליטה במושג נרכשת כאשר למושג נבנה דימוי מושג התואם את הגדרת המושג.

למרות כל האתגרים, שילוב אומנות בהוראת מדעים בכלל ומתמטיקה בפרט, תופס תאוצה. עדויות לכך הן הקמה של בתי ספר שבהם מיושמת פדגוגיה זו. ישנה ספרות עשירה המתארת תוכניות לימודים המשלבות אומנויות בלימודי מתמטיקה או דוגמאות לשיעורים שהמורים יצרו על פי גישה זו (למשל Murphy, 2009; Smithrim & Uptis, 2005). כמו כן ישנה ספרות מחקרית המתמקדת בשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה בכל שכבות הגיל בלימודים טרום אקדמיים (למשל Okbay, 2013; Gelineau, 2011). ממצאי המחקרים מצביעים על הישגים גבוהים יותר של תלמידים שלמדו על פי תוכנית לימודים שבה לימודי אומנות הם מקצוע שעומד בפני עצמו וגם מקצוע שמשולב בלימודי מתמטיקה, לעומת תלמידים שתוכנית הלימודים שלהם לא כללה אומנות (Burton et al., 2000). ממצא מעניין אחר מלמד על שימור אפקט זה לאורך זמן. כלומר גם לאחר שלימודי אומנות הסתיימו, הישגיהם של התלמידים שנחשפו לאומנות נשארים גבוהים יותר מהישגי תלמידים שלא נחשפו לתוכנית לימודים באומנות (Sisman & Aksu, 2016).

לעומת שפע זה של עשייה בנושא ברמה של לימודים טרום אקדמיים, אפשר למצוא דוגמאות מעטות לשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה (למשל Okbay, 2013; Thuneberg, 2017; Salmi, & Fenyes & Lähdesmäki, 2017). להלן כמה דוגמאות לתוכניות אלה: הבניית תוכנית לימודים במתמטיקה כסיפורים שמטרתם להגביר את סקרנות הלומדים; יישום ידע מתמטי לשם ניתוח עבודות אומנות באמצעות תוכנת מחשב ייעודית; עבודה מסכמת בקורס כפרויקט המשלב בין תכנים מתמטיים ברמה של בית ספר על-יסודי ובין עבודות אומנות (Dietiker, 2015; Sendova & Cheklarova, 2013; Ward, 2006). גם נמצא שיש מעט מחקרים על שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה. אחד המחקרים הוא של הו ועמיתותיה (Wu, Jia, & Ye, 2015). הן פתחו קורס בחשבון אינפיניטסימלי שלימדו בו מושגים מתמטיים בשילוב חקר ויצירה של עבודות אומנות. במחקר זה נמצא שהשילוב בין לימוד מתמטיקה לעיסוק באומנות תרם להבנה של תכנים מתמטיים,

כמכשירה של מורים למתמטיקה, אני נמצאת בחיפוש מתמיד אחר דרכים חדשות לפיתוח אינטואיציה של הסטודנטים על מושגים אלה וביצוע פעולות חשבון בהם. חיפוש זה הוביל לרעיון ללמד את הסטודנטים פרקטלים, שבהם אפס ואינסוף נפגשים בטבעיות בעת חישוב שטח והיקף. פרקטלים משלבים יופי ויזואלי עם עושר מתמטי ועל כן נושא זה שולב בקורס "כשמתמטיקה פוגשת אומנות" שהוצע למתכשרות להוראה במתמטיקה בבית הספר היסודי באחת המכללות בצפון הארץ. במאמר זה מוצגים ממצאים של חקר מקרה עבור יחידה אחת של הקורס. חקר מקרה זה מאפשר לבדוק את ייתכנות הקשר בין עיסוק באומנות להבנת מושגים מתמטיים – אפס ואינסוף; לבחון אם עיסוק פעיל באומנות, כמו יצירת עבודות מקוריות, מביא לידי תוצאות שונות מאלה של עיסוק פעיל פחות, בחירה וניתוח של עבודות אומנות קיימות; ולבסוף, הוא אפשר לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף כפי שבאים לידי ביטוי בעבודות שיצרו וגם בחרו לומדות בקורס זה.

סקירת ספרות

בסעיף זה אציג שני נושאים: מושגים מרכזיים בהוראת מתמטיקה בשילוב אומנות וממצאי מחקרים בנושא; ממצאים של מחקרים בנושא הבנה של מתכשרים להוראה ומורים בפועל את המושגים אפס ואינסוף.

שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה

על פי אחת ההערכות, שוק העבודה העתידי ייצר כ-20 מיליון מקומות עבודה חדשים עבור אנשים שטובים בפתרון שאלות מתמטיות. אותה התחזית צופה שכ-60% של כלל העבודות החדשות ידרשו מיומנויות שבהן שולטים רק 20% מכלל האוכלוסייה (Boaler, 2015). כלומר התפקיד של מורים למתמטיקה להנגיש את התכנים המתמטיים ולשפר את המיומנויות המתמטיות לכלל התלמידים הופך למהותי אף יותר מבעבר. כדי לתת מענה לכלל התלמידים מומלץ לשלב שיטות ומיומנויות הוראה מגוונות (OECD, 2016) שיתאימו לתלמידים עם יכולות וחוזקות שונות (Gardner, 1983). אחת הדרכים היא שילוב אומנות בלימודי מדעים בכלל ומתמטיקה בפרט.

המצדדים בשילוב בין מדע לאומנות מגייסים את שמם של לאונרדו דה וינצ'י, אלברכט דירר וזוכים בפרס נובל למדעים כדי להמחיש את יתרונות גישה זו (Biller, 1995; Root-Bernstein et al., 2008). שילוב אומנות מזמן למידה באמצעות חקר שמעודדת את הלומדים ליישם חשיבה ביקורתית ויצירתית במהלך חיפוש פתרונות מרובים עבור אותה הבעיה/התופעה/השאלה; חיפוש פתרונות מרובים במקום פתרון אחד נכון שנשען בדרך כלל על אלגוריתם או כללים ידועים מראש; פיתוח יכולת לגשר בין תחומי דעת מגוונים ואף להעביר ידע מתחום אחד לאחר; תפקוד וקיום במצב של חוסר ודאות ואי הגדרה מדויקת של התופעה הנחקרת; שימת דגש בפרטים הקטנים ביותר שבסופו של דבר יכולים לעשות הבדל גדול בתוצר; ביטוי בדרכים מורכבות יותר ממילים וממספרים; חשיבה עם חומר נתון ובאמצעותו; חוויה באמצעות חושים שאי אפשר לקבלם בשום דרך אחרת פרט לאומנות; התאמה לסגנונות למידה למיניהם ולסוגים רבים יותר של אינטליגנציה (Burton, Horowitz, & Abeles, 2017; Fenyes & Lähdesmäki, 2002; Eisner, 2000). לצד היתרונות הרבים יש לא מעט אתגרים שמחייבים חשיבה והיערכות מתאימים. למשל, מורים שרוצים לאמץ גישה זו צריכים להיות בעלי ידע תוכן וביטחון מקצועי לא רק בהוראת מדעים ומתמטיקה,

לירידה מסוימת של רמת החרדה ממתמטיקה ולהעלאת מוטיבציה של הסטודנטים.

תפיסות של מתכשרים להוראת מתמטיקה את החושגים אפס ואינסוף

המשותף לשני המושגים המורכבים, אפס ואינסוף, הוא קושי קוגניטיבי וגם פילוסופי. למשל אם נרצה להמחיש את המספר חמש מספיק שנביט בכף היד ונספור את האצבעות. איך ממחישים אפס? אפס הוא מספר שממוקם על ציר המספרים ואפשר לבצע איתו פעולות חשבון כמו עם מספרים אחרים (Barton, 2019). אך כשנבצע פעולות חשבון עם אפס, התוצאות המתקבלות שונות מאלה שמתקבלות כאשר מבצעים פעולות חשבון עם כל מספר אחר – אם בחיבור אפס לא משפיע כלל על התוצאה, בכפל הוא הדומיננטי. איך ממחישים אינסוף? יש סתירה בין החוויה הקיומית שלנו שבה המציאות נחוות כסופית, ובין התפיסה שלנו את האינסוף הנבנית מתוך התנסויות שיש לנו איתו (Tall, 1981). כלומר החוויה של האינסוף בחיי היום-יום לא קיימת. הבסיס להבנת אפס ואינסוף ולשימוש בהם נבנה כבר במהלך הלימודים בבתי הספר היסודי ומתפתח בשנות הלימודים. עם זאת כפי שנראה בהמשך, ידע של חלק ממתכשרים להוראת מתמטיקה (להלן: סטודנטיות), ואף של מורים בפועל, אינו מדויק או מספק. לפיכך לא מפתיע שבמוסדות להכשרת מורים לא מסתפקים בידע שהסטודנטים צברו בשנות לימודיהם בבית הספר, אלא מעמיקים ומבססים אותו בקורסים המלמדים נושאים מתורת הקבוצות, תורת מספרים, אלגברה מודרנית, גאומטריה אוקלידית ועוד.

ידע של סטודנטים ומורים למתמטיקה על תכונות של אפס ופעולות חשבון נחקר בהרחבה במדינות רבות בעולם. ממחקרים אלה עולה שחלק מהלומדים רואים באפס 'שום דבר' או 'שומר מקום'. לומדים אלה בדרך כלל יודעים לצטט כללים של פעולות שאפשר לבצע עם אפס אך אינם יכולים להסביר אותם (למשל, Crespo & Nicol, 2011; Russell & Chernoff, 2006). מחקרים אחרים התמקדו בתפיסות המורים ומתכשרים להוראה של פעולת חילוק באפס. במחקרים אלה נמצא שהמשתתפים מכירים את החוק אך רובם מתקשים לתת הסבר המעיד על הבנה (למשל, Karakus, 1990; Ball, 2008; Quinn, Lamberg, & Perrin, 2018). נוסף על ידע ויכולת המורים להבהיר את איסור החלוקה באפס, קנקוי (Cankoy, 2010) בחר לבדוק גם את הידע ואת היכולת שלהם להסביר את התוצאות המתקבלות עבור a^0 , $a!$. גם כאן רוב משתתפי המחקר ידעו את התשובה הנכונה אך לא ידעו להסביר במידה מספקת את התוצאות המתקבלות.

אינסוף הוא אחד המושגים החשובים במתמטיקה והדיון בו ובמשמעויותיו תלוי הקשר – אם מדובר בגאומטריה או בתחום המספרי או בחשבון אינפיניטסימלי (Ibarra, Romo-Vázquez, & Aguilar, 2019). במספרים שלמים מקובל להבחין בין אינסוף פוטנציאלי לאינסוף בפועל: (1) אינסוף כתהליך שנמשך לעד כמו למשל מניית מספרים טבעיים (אינסוף פוטנציאלי); (2) העוצמה של קבוצת מספרים אינסופית (האינסוף בפועל) (Tall, 1981; Tirosh, 1991). פולק (Falk, 2010) מוסיפה ששתי הגדרות אלה שונות בהיבט פסיכולוגי – הראשונה מייצגת תהליך שנמשך ואילו השנייה רואה באינסוף אובייקט. לפי פולק (Falk, 2010) להגדרות אלה של אינסוף יש עוד הגדרה: (3) הקפיצה מקבוצה סופית אל קבוצה אינסופית היא בעצמה אינסופית (פער בלתי מדיד). כמו כן היא מציינת שאדם יכול לאחוז בדעה שיש קבוצה אינסופית (אינסוף בפועל) ועדיין להאמין שקבוצה זו היא גדולה במעט מקבוצה סופית.

הבנה טובה של אינסוף מתבססת מלכתחילה על ההנחה שיש פער שאי אפשר למדוד, או מרחק אינסופי בין אינסוף לכל קבוצה סופית.

במחקרים שהתמקדו בהבנת אינסוף של תלמידי בית הספר נמצא שרוב התלמידים רואים באינסוף תהליך ומעטים רואים באינסוף אובייקט (Monaghan, 2001). פולק מוסיפה שגם אם תלמידים תופסים את אינסוף כאובייקט, חלקם מתקשים להבין שאי אפשר למדוד את הפער בין קבוצה סופית לקבוצה אינסופית (Falk, 2010). אימברה ועמיתיו (Ibarra et al., 2019) מוסיפים שרוב התלמידים מזהים מספרים גדולים כאינסוף. מחקרים מעטים בחנו את הבנתם את המושג של מתכשרים להוראה ושל המורים בפועל. מתוך תוצאות המחקרים שנעשו בארץ ובעולם מצטיירת תמונה של ידע חלקי בלבד המסתכם בציטוט כללים, אי בהירות של ההסברים לכללים אלה (למשל Kuntze et al., 2011) ותפיסת האינסוף כמושג מתמטי בעל יישום מועט בחיי היום-יום (Kattou, Michael, Kontoyianni, Christou, & Philippou, 2009).

מתוך סקירת הספרות עולה כי לשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה יש יתרונות רבים ושימוש בשיטת למידה-הוראה מסוג זה הולך ומתרחב בבתי ספר. עם זה מוסדות מעטים מכשירים מורים שהתנסו בשיטה זו, ומשום שמורים נוטים ללמד בדרכים שלמדו בהן בעצמם (OECD, 2009), יש פער בין הכשרת מורים ובין הנעשה בשטח. כמו כן עולה מסקירת הספרות שידע של חלק מהמתכשרים להוראה על אפס ואינסוף אינו מספק ועל כן ראוי לחפש דרכים מגוונות ללמד מושגים מורכבים אלה כדי לבסס את הבנתם. על סמך מסקנות אלה במאמר הנוכחי אציג מסגרת למידה שבה סטודנטיות למדו את המושגים אפס ואינסוף לצד עיסוק באומנות ואציג תוצאות של מחקר שליווה מסגרת לימודית זו.

הרקע למחקר

המחקר הנוכחי נולד מתוך אמונה שלי בצורך של חשיפה והתנסות של מתכשרים להוראת מתמטיקה בשיטות הוראה-למידה אינטגרטיביות כדי שבעתיד יוכלו ליישם אותן בבתי הספר ובכך להנגיש את התכנים המתמטיים לאוכלוסיית תלמידים רחבה יותר, בד בבד עם שיפור הידע המתמטי הקיים וחשיפתם למתמטיקה מודרנית כדוגמת פרקטלים. כדי להשיג מטרה זו פיתחתי ולימדתי קורס אסינכרוני מקוון על פלטפורמה של Moodle, "כשמתמטיקה פוגשת אומנות". בקורס זה נלמדו שישה נושאים: ריצופים, אפס ואינסוף וביטויים בחישוב שטח והיקף של פרקטלים, ראייה מרחבית (בהקשר לצורות בלתי אפשריות), חתך, זהב, ממד ודמיון עצמי. הנושאים של הקורס נבחרו על פי שלושה קריטריונים: העמקת ידע מתמטי של סטודנטיות בנושאים הנלמדים בתוכנית הלימודים של בית הספר היסודי (אפס ואינסוף, שטח והיקף, ראייה מרחבית); מושגים שמזכירים בתוכנית הלימודים אך לא נלמדים לעומק (ריצוף – טרנספורמציות, ממד) ומושגים שלא נלמדים בתוכנית הלימודים אך יש להם קשר הדוק למתמטיקה וגם לאומנות (חתך, זהב ודמיון עצמי).

הסטודנטיות נדרשו לבצע משימות אלה בכל אחת משש יחידות הקורס:

1. להפגין ידע קודם בנושא או באמצעות דיון בפורום או באמצעות משימה מקדימה (15% מהציון הסופי עבור כל היחידות; הציון ניתן על הגשה ולא על התוכן כדי לעודד אותן לעשות רפלקציה אמיתית של הידע הקיים).
2. ללמוד את הנושא המתמטי באמצעות סרטון, מאמר, מצגת בנושא או פעילות חקר.

השתתפו 132 סטודנטיות, 5 מסטודנטיות שלא ניגשו למבחן המסכם לא נכללו במדגם.

כלי המחקר

במחקר זה המשימות הלימודיות בקורס שניתן עליהן ציון: מבדק, מבחן ועבודת אומנות, היו גם כלי לאיסוף הנתונים הכמותיים. הנתונים האיכותניים התקבלו מניתוח הייצוג הוויזואלי של אפס ואינסוף בעבודות האומנות, בכותרת או בהסבר שהסטודנטיות צירפו.

מבדק מקוון הורכב משאלות רב-ברירה וכלל שש שאלות על תכונות של אפס, שתי שאלות על תכונות של אינסוף וחמש שאלות על קשר בין שטח להיקף של צורות (שאלה לדוגמה בנספח א). ציון המבדק נקבע אוטומטית על פי הקריטריונים שנקבעו מראש כפי שמאפשרת הפלטפורמה של Moodle.

מבחן מסכם כלל שאלה אחת שעסקה בחישוב שטח והיקף במשולש שייפרינסקי (להלן: המבחן). שאלה זו (ראו נספח ב) מקשרת בין כל המושגים שנלמדו ביחידה הרלוונטית: שטח, היקף, אפס ואינסוף (במהלך הלימוד בקורס הסטודנטיות עשו פעילות חקר, חישוב שטח והיקף של פרקטל אחר – האי המרובע של קוך, שהכינה אותן לשאלה זו).

עבודות אומנות (דוגמאות באיור 2): הגלריה השיתופית נבנתה על הפלטפורמה של Padlet וכללה עבודות אומנות מקוריות של הסטודנטיות ויצירות אומנות מקוריות שלדעת הסטודנטיות ממחישות את המושגים הנלמדים. מרצת הקורס (כותבת המאמר) ועוזרת הוראה בקורס העריכו את היצירות שבגלריה באופן בלתי תלוי על פי מחוונים שפותחו במיוחד עבור קורס זה ופורסמו מראש (נספח ג). כאשר לא הייתה הסכמה על הציון, שתי המעריכות ניהלו דיון עד שהגיעו להסכמה ביניהן. מחוון עבור עבודה מקורית בנוי מתבחינים אלה: תוכן מתמטי, השקעה, יצירתיות והתאמת השם ליצירה. מחוון עבור עבודה לא מקורית בנוי מתבחינים אלה: תוכן מתמטי, ציטוט המקור, התאמת שם ליצירה (ראו נספח ג). כפי שאפשר לראות התבחינים בשני המחוונים לא זהים, היות שהיה לכותבת המאמר חשוב לעודד את הסטודנטיות ליצור עבודות מקוריות.

ניתוח נתונים כמותיים

בשלב ראשון הנתונים הכמותיים נותחו בתוכנה IBM SPSS Statistics 23. הניתוח כלל חישוב מקדם המתאם של פירסון לשם בחינת קיום קשר וכיוונו בין המשתנים האלה: ציונים על עבודות אומנות וציונים על מבדק מקוון, ציונים על עבודת אומנות וציון על השאלה הרלוונטית במבחן מסכם. בשלב שני כל הנתונים חולקו לשתי קבוצות: קבוצה 1 (סך הכול 47) כללה הישגים של הסטודנטיות שיצרו עבודות אומנות מקוריות וקבוצה 2 כל שאר הסטודנטיות (סך הכול 80). לאחר שהנתונים חולקו לשתי קבוצות אלה, חושבו ציונים ממוצעים ונמצא שיש הבדל בין הממוצעים ביניהם. כדי לבדוק אם הבדל זה מובהק, חושב ניתוח שונות חד-כיווני (Oneway ANOVA). לבסוף חושבה קורלציה בין הציונים של עבודות אומנות למבדק מקוון ובין עבודות אומנות למבחן.

ניתוח נתונים איכותניים

לצורך ניתוח התוכן המתמטי של עבודות האומנות התאמתי את שיטתו של אימל (Christmann, 2008) שנהוגה בניתוח תוכן של נתונים ויזואליים. כדי להבין מהו דימוי המושגים המתמטיים של

3. לתרום עבודת אומנות מקורית או לא מקורית לגלריה שיתופית בצירוף כותרת או הסבר קצר המעיד על דרך יישום של המושג המתמטי ביצירה (9% מהציון הסופי עבור כל היחידות).
4. לפתור תרגילים או לעשות פעילות חקר בנושא הנלמד.
5. בתום לימוד היחידה לבדוק את הידע באמצעות מבדק מקוון (20% מהציון הסופי עבור כל היחידות).

בסוף הסמסטר התקיים מבחן שהכיל את כלל הנושאים שנלמדו בקורס (56% מהציון הסופי).

כאמור, בסקירת הספרות נמצאו מחקרים מעטים שבדקו קשר כלשהו בין עיסוק באומנות להישגים במתמטיקה של מתכשרים להוראת מתמטיקה, ועל כן החלטתי ללוות את הקורס שתואר לעיל במחקר (חלק מתוצאות אפשר למצוא בתוך Nutov, 2018a, 2018b; Nutov & Levenberg, 2020). במאמר הנוכחי אני מציגה חקר מקרה של אחת מיחידות הקורס, אפס ואינסוף. יחידה זו נבחרה לניתוח הנתונים כחקר מקרה, היות שבגלריה השיתופית שיצרו הסטודנטיות, מספר העבודות המקוריות היה כ-40% מתוך כלל העבודות שהוגשו (47 מתוך 115). יחס זה בין מספר העבודות המקוריות ללא מקוריות היה ייחודי ליחידה זו. נתונים אלה מאפשרים לבדוק אם ללמידה פעילה המתרחשת בעת יצירת עבודות אומנות מקוריות יש תרומה ייחודית להישגים לעומת למידה פעילה פחות בעת בחירה וניתוח של עבודות אומנות לא מקוריות. אלה הן **מטרותיו של המחקר הנוכחי**:

1. לבחון את קיום הקשר בין עיסוק באומנות המפשטת עיקרון מתמטי (כאן זה אפס ואינסוף) להישגים של הסטודנטיות במשימות מתמטיות.
2. לבחון אם סוג העיסוק באומנות, יצירה מקורית לעומת בחירה וניתוח של יצירות אומנות קיימות, משפיע על הישגים.
3. לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף של הסטודנטיות ביצירות אומנות שיצרו בעצמן או בחרו מתוך יצירות קיימות.

שיטת המחקר

מתוך מתודת מחקר משלב הנשענת על שתי מתודות, כמותית ואיכותנית, נבחר מערך אקספלורטורי שלבי – The explanatory sequential design (Creswell & Plano Clark, 2007). בדרך כלל בסוג מחקר זה יש שתי פעימות: בפעימה הראשונה נאספים נתונים כמותיים ובפעימה השנייה הנתונים הכמותיים מפורשים באמצעות נתונים איכותניים. שיטה זו מאפשרת לחוקר לנצל את היתרונות של שתי הפרדיגמות המחקריות: באמצעות שיטה כמותית אפשר לבחון קשר בין מספר משתנים (כפי שיעשה במחקר הנוכחי) ובאמצעות שיטה איכותנית אפשר לקבל את פרשנותם של משתתפי המחקר לממצאים הכמותיים.

במחקר זה היו שלושה שלבים: **בשלב הראשון** נותחו כל הנתונים הכמותיים כדי לקבל את 'התמונה הגדולה' – לקבוע אם יש קשר בין עיסוק באומנות להישגי התלמידים במשימות מתמטיות: המבדקים המקוונים והבחנה סופית. **בשלב השני** נעשה ניתוח סטטיסטי נוסף שבחן את הישגים של שתי קבוצות: קבוצת הסטודנטיות שיצרו עבודות אומנות מקוריות וסטודנטיות שבחרו וניתחו יצירות אומנות קיימות; **בשלב השלישי** נעשה מיון של כלל עבודות האומנות בגלריה כדי לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף של הסטודנטיות.

המדגם כלל 127 מתכשרות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי שלמדו בסמסטר שלישי להכשרתן, מתוכן 104 סדירות ו-28 מתוכנית להסבת אקדמאים; 124 נשים ו-3 גברים (אזכור המשתתפים במחקר יהיה בלשון נקבה מטעמי נוחות). הערה: בקורס

ההבדל בין ממוצעי הציונים של הקבוצות נבדק על ידי ניתוח שונות (Anova) ונמצא כי הוא מובהק (לוח 3).

לוח 3: ניתוח שונות בין קבוצה 1 לקבוצה 2

Sig.	Mean Square	Df	Sum of Squares	
020.	9.36	1	9.36	מבדק: בין הקבוצות
040.	66.34	1	66.34	מבחן: בין הקבוצות

על פי ממצאים אלה אפשר להעלות השערה שלמידה פעילה המתרחשת בעת יצירת עבודת אומנות מביאה לידי הישגים גבוהים יותר מלמידה פעילה פחות שכוללת בחירה וניתוח של יצירת אומנות קיימת. לשם בדיקת השערה זו, בדקתי את מתאמי פירסון כאשר r_1 – בודק את קיום הקשר בין עיסוק באומנות למבדק המקוון; r_2 – בודק את קיום הקשר בין עיסוק באומנות לשאלה המתאימה במבחן המסכם (לוח 4).

לוח 4: מתאמי פירסון בין ציונים על עבודות אומנות ובין מבדק מקוון ומבחן סופי

קבוצה 2	קבוצה 1	
.222*	.255*	r_1
.024	.042	Sig. (1-tailed)
80	47	מספר המשתתפות
-.0530	.169	r_2
.320	.128	Sig. (1-tailed)
80	47	מספר המשתתפות
* $p < 0.05$ (1-tailed)		

ההישגים במבדק המקוון של קבוצה 1 – הסטודנטיות שהיו מעורבות בלמידה פעילה המתרחשת בעת יצירה של עבודת אומנות היו גבוהים יותר במידה מובהקת מהממוצע הכיתתי. קשר זה לא נמצא בין צורת הלמידה (פעילה לעומת פעילה פחות) ובין הישגים במבחן המסכם.

שלב שלישי: ניתוח תוכן של עבודות בגלריה השיתופית

ניתוח העבודות בגלריה השיתופית הניב את הממצאים האלה: סך הכול הוגשו 115 עבודות כאשר 47 עבודות היו עבודות מקוריות של הסטודנטיות (ניתוח מקיף של עבודות מקוריות בתוך Nutov & Levenberg, 2020) ו-68 עבודות לא מקוריות. הגלריה שיצרו הסטודנטיות מציגה פסיפס של דימויים של המושגים אפס ואינסוף שמכיל תכונות מתמטיות של המושגים וגם דימויים שחורגים אל מעבר למתמטיקה ומקשרים אותם עם תופעות טבע, מושגים מופשטים, משחקי מילים ומטפורות. כמו כן עבודות אלה מאפשרות לזהות תפיסות שגויות (איור 1).

הסטודנטיות השוויות בין הפרטים הצורניים לכותרת או הסבר שהן צירפו. לאחר מכן השוויות בין דימויי המושגים של הסטודנטיות לתכונות המתמטיות הידועות של המושגים.

תוצאות המחקר

שלב ראשון: האם קיים קשר בין עיסוק באומנות להישגים במתמטיקה?

ניתוח סטטיסטי כפי שתואר לעיל עבור כלל הנתונים הכמותיים: תוצאות המבדקים, המבחן וציונים עבור עבודות האומנות (לוח 1). סטודנטיות שלא הגישו שום יצירה קיבלו ציון 0.

לוח 1: סטטיסטיקה תיאורית עבור קבוצת המדגם של 127 סטודנטיות

מבדק	ממוצע	ציון	סטיית תקן	מינימום	מקסימום
מבדק	8.08	1.32	3.06	9.9	
מבחן	6.19	1.57	1.81	9.52	
עבודות אומנות	7.30	1.90	0	10	

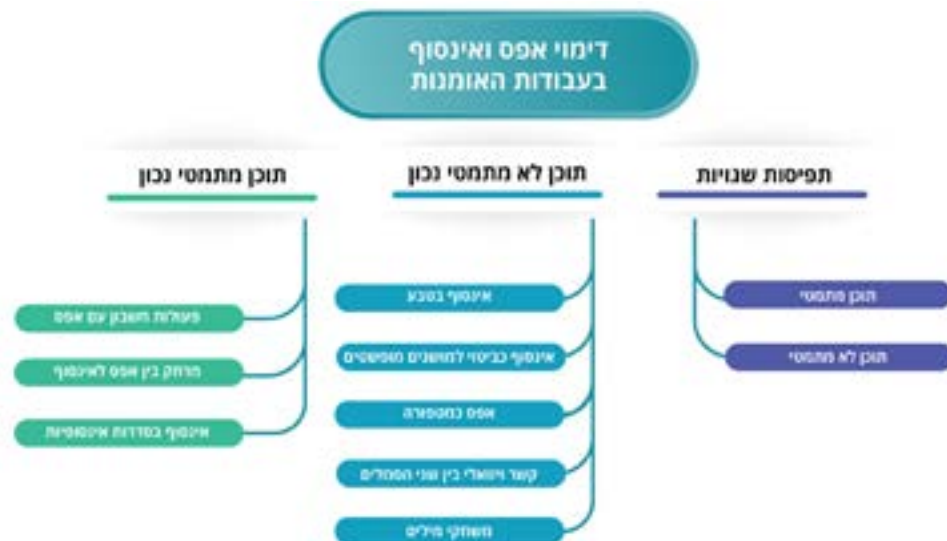
ניתוח הנתונים מצביע על קיום קשר חיובי בין עיסוק באומנות ובין הישגים של הסטודנטיות במבדק המקוון – $r_1 = 0.255$ (מובהק ברמה של 0.05). קשר מסוג זה לא מתקיים בין עיסוק באומנות ובין הישגים של הסטודנטיות במבחן – $r_2 = 0.045$.

שלב שני: למידה פעילה לעומת למידה פעילה פחות

היות שעבודת אומנות מקורית דרשה מהסטודנטיות השקעה רבה יותר מניתוח עבודת אומנות לא מקורית, החלטתי לבדוק אם היה שוני בהישגי הסטודנטיות בין שתי הקבוצות: קבוצה 1 – סטודנטיות שהגישו עבודה מקורית; קבוצה 2 – סטודנטיות שהגישו עבודה לא מקורית. חישוב הממוצעים של המבחן ושל המבחן מראה כי הממוצע של קבוצה 1 (9.55) גבוה יותר מהממוצע הכיתתי (9.21). גם ממוצע הציונים של המבחן של קבוצה זו (9.57) גבוה יותר מהממוצע הציונים הכיתתי (8.66). לעומת זאת, בקבוצה 2 המצב הפוך הן במבדק הן במבחן: הציון הממוצע של הקבוצה במבדק (8.97) נמוך מהממוצע הכיתתי (9.21), וגם הממוצע במבחן (8.03) נמוך יותר מהממוצע הכיתתי (8.66) (לוח 2).

לוח 2: סטטיסטיקה תיאורית של קבוצה 1 וקבוצה 2

מבדק	קבוצה 1	מספר סטודנטיות בקבוצה	ממוצע	סטיית תקן
מבדק	קבוצה 1	47	9.55	0.92
	קבוצה 2	80	8.97	1.42
		127	9.21	1.27
מבחן	קבוצה 1	47	9.57	3.94
	קבוצה 2	80	8.03	3.99
		127	8.66	4.03



איור 1: מיון דימויים של אפס ואינסוף

במקביל אלינו!!!!". דוגמה נוספת לאותה התפיסה אפשר לראות בדבריה של סטודנטית אחרת:

אינסוף זה משהו ללא גבולות או משהו שאינו מוגדר כסופי. ולכן כשאנחנו צריכים לתייג את האינסוף אז מבחינתי, לאינסוף יש בעצם אינסוף אפשרויות, ביטויים או עבודות אומנות. כל אחד רואה את האינסוף אחרת.



א. הכפלת כל מספר ב-0 תיתן תוצאה 0	ב. האפס בדרכו אל האינסוף	ג. יש אינסוף שרשראות DNA בעולם ואין אחד שדומה לאחר
-----------------------------------	--------------------------	--

איור 2: דוגמאות לעבודות שהוצגו בגלריה השיתופית

כמו כן, עבודות אחרות ביטאו משחקי מילים המקשרים בין אפס לאינסוף למשל: "לכל אפס יש את האפס שלו לצעוד יחד לאינסוף". במשפט זה יש רמז לפרשנות של אינסוף כתהליך: "לצעוד". בדוגמה זו אפס אינו מבטא כל משמעות מתמטית, היות שהחלפת 'אפס' ב'חמש' לא תשנה את המהות המתמטית של המשפט. כנראה יש לאפס משמעות ספרותית יותר כיוון שמשמעות מילה זו בשפה היום-יומית היא לא מוצלח או עלוב. יחס דומה לאפס אפשר לזהות גם בביטוי הזה: "לכל אפס יש אינסוף אפשרויות". שוב, אין משפט זה מבטא כל תכונה מתמטית לא של אפס ולא של אינסוף. שני המשפטים הופיעו בציורים שלא היה בהם כל רמז לתכונות המתמטיות של המושגים.

עוד ביטוי אומנותי לקשר בין אפס לאינסוף שיקף את הקשר בין הסמלים היוזואליים של המושגים, למשל, יחס לסמל של אינסוף כהרכב של שני עיגולים, כאשר עיגול הוא סמל של אפס. שוב, גם כאן לא היה כל ביטוי לתכונות המתמטיות של המושגים.

תפיסות שגויות של אפס ואינסוף

עבודות אומנות אחרות בגלריה הציגו תפיסות שגויות הן של תוכן מתמטי של המושגים הן של תוכן לא מתמטי של המושגים. בחלק

תוכן מתמטי נכון

ארבע פעולות חשבון עם אפס נלמדות כבר בבית הספר היסודי ועל כן לא מפתיע ששתיים מהעבודות המקוריות של הסטודנטיות עסקו בכך (ראו 2א). לעומת זאת, פעולות חשבון עם אינסוף דורשות ידע מתמטי ברמה גבוהה יותר ואכן אין אף עבודה שמציגה פעולות מתמטיות עם אינסוף.

עבודות אומנות מקוריות של סטודנטים ביטאו דימוי מושג של אינסוף פוטנציאלי כמו סדרה אינסופית; קבוצת מספרים שלמים לא שליליים; השתקפות אינסופית בין שני מראות; דרך אינסופית מנקודת התחלה (אפס) לאינסוף (מעניין לציין שבכל העבודות של הסטודנטים האפס הוא זה ששואף לאינסוף) (איור 2ב). תוצאה זו תואמת את ספרות המחקר שנמצא בה שאצל רוב הסטודנטים דימוי המושג אינסוף הוא של אינסוף פוטנציאלי (למשל, Kolar & Čadež, 2012). רק עבודה מקורית אחת יכולה להיחשב לאינסוף בפועל: היא מתארת את קבוצת המספרים השלמים בתוך סמל האינסוף. כלומר ביצירה זו קבוצת המספרים מתוארת כאובייקט ולא כתהליך. שלוש עבודות נוספות ביטאו דימוי מושג של המרחק האינסופי בין אינסוף לאפס ולא בין אינסוף לקבוצה סופית כפי שמצאה פולק (Falk, 2010).

תוכן לא מתמטי נכון

כאמור, אפס ואינסוף אינם מושגים נפוצים בחיי היום-יום אך לשני המושגים מטפורות עשירות הנמצאות בשימוש בחיי יום-יום והמשפעות על חיי היום-יום. מרבית העבודות שבגלריה שייכות לקטגוריה זו. מכלל העבודות רק עבודה אחת בלבד הייתה קשורה לאפס – המחשת הביטוי "מלא עד אפס מקום". בשאר העבודות האינסוף הוצג כמו קו האופק, ים, יקום, חוכמה, מחשבות, מוזיקה, רגש, אפשרויות ועוד. ייתכן שכדי להתגבר על מורכבות המושג, הסטודנטיות פנו למטפורות. על פי לייקוף וג'ונסון (Lakoff & Johnson, 2003) המטפורות עוזרות לנו להבין מושגים מופשטים באמצעות אסוציאציות מילוליות של תופעות ידועות מחיי היום-יום. למשל כדי להגיע אל קו האופק נאלץ לצעוד מרחק אינסופי כי ככל שנתקרב אליו, כך הוא יתרחק. פרשנויות אומנותיות אלה של אינסוף מייצגות אינסוף פוטנציאלי. ממצא זה עולה בקנה אחד עם מחקרים קודמים (למשל Falk, 2010). כך פרשנות זו של האינסוף מוסברת בעבודת האומנות של אחת הסטודנטיות: "אינסוף לא קיים בעולמנו החומרי/הכמותי ומכאן הקושי להגדירו. בכל זאת הוא קיים

פרשנות לטקסונומיה של בלום עבור משימות במתמטיקה, שאלות מהרמה הראשונה, רמת הידע, יכלול הנחיות כמו "קבע את ההגדרה", "קבע משפט" או "השתמש בשיטה שצוינה". על סמך פרשנות זו רק טבעי שסטודנטיות שאין להן השכלה באומנות והן לא קיבלו שום הדרכה כיצד ליצור אומנות, יביעו בעבודותיהן ידע מתמטי ברמה הבסיסית ביותר. כלומר במקרה הנוכחי יש התאמה בין תוכן מתמטי של עבודות אומנות שנמצאו בגלריה לרמה המתמטית של שאלות במבדק המקוון. תוצאה זו של המחקר תואמת תוצאות של מחקרים קודמים שבחנו את שילוב האומנות בבתי ספר היסודי (למשל Brezovnik, 2015; Gullatt, 2007). בסקירת הספרות לא נמצאו מאמרים שבדקו נושא זה עבור לומדים במוסדות להשכלה גבוהה.

לעומת זאת, בפתרון משימות המצריכות רמות חשיבה גבוהות יותר, למשל רמת ניתוח, לומד יתבקש לזהות את המשפט המתאים ולהשתמש בו כדי להגיע למסקנה או למיין נתונים. כדי להביע תוכן מתמטי עמוק שדורשות שאלות מסוג זה, צריך גם יכולות אומנותיות גבוהות (Schattschneider, 2010) שכאמור, היו חסרות לרוב הסטודנטיות. מלבד השוני בין רמות חשיבה נדרשות, בחינה לעומק של תוצאות המחקר יכולה להצביע על עוד לפחות שני מקורות להבדל בתוצאות בשני הסוגים של המשימות המתמטיות: הזמן שחלף בין יצירת הגלריה למבחן המתמטיקה וההתאמה בין מושגים מתמטיים שנכללו במבחנים ובין עבודות האומנות.

גלריית האומנות נוצרה סמוך למועד המבדק המקוון. לפיכך העיסוק של הסטודנטיות באומנות בנושא הנלמד היה יכול לשמש בעבורן הזדמנות לבדוק את הידע הקיים ואף להעמיק אותו. בהשוואה למבדק המקוון, הבחינה התקיימה כתשעה שבועות לאחר הגשת עבודת אומנות לגלריה ולא הייתה כל דרישה לעסוק באומנות לפני הבחינה הסופית. כלומר הזמן שעבר בין עיסוק באומנות לבחינה הסופית היה ארוך יותר מהזמן שעבר בין העיסוק באומנות למבדק המקוון. בספרות יש עדויות שלעיסוק באומנות יש השפעה ארוכת טווח (Burton et al., 2000; Sisman & Aksu, 2016), ואולם אוכלוסיית המחקר במחקרים המצוטטים הייתה תלמידי בתי ספר יסודיים ולא מתכשרות להוראה. היות שמדובר במחקר חלוץ, נדרש מחקר נוסף שיתמקד בבדיקת הקשר בין גורם הזמן של העיסוק באומנות ובין מבחני הישגים עבור אוכלוסייה של מתכשרות להוראה.

עבודות האומנות והשאלות במבדק המקוון התמקדו במושגים של אפס ואינסוף, ואילו השאלה הרלוונטית במבחן המסכם התמקדה בחישוב השטח וההיקף של פרקטל המכונה משולש שירפינסקי, ובמפגש בין אפס לאינסוף בחישובים אלה. במילים אחרות, עבודות אומנות התמקדו בתוכן המתמטי של המבדק המקוון אך לא בתוכן המתמטי של השאלה במבחן (ביחידה הייתה משימת חובה שעסקה בחישוב שטח והיקף של פרקטל – אי המרובע של קוך – משימה שדורשת את אותן רמות חשיבה כמו השאלה בבחינה. משימה זו ניתנה ללימוד עצמי ולא נערכה בדיקה על ביצועה). לכאורה תוצאה זו של המחקר צפויה ואינה מפתיעה. אך היא מנוגדת לתוצאות מחקרים אחרים שנמצאו בהם כי לעיסוק באומנות יש תרומה הוליסטית להישגיהם של תלמידי בית ספר, ללא התאמה בין תוכן מתמטי לתוכן של עבודות האומנות (Brezovnik, 2015; Burton et al., 2000). ההבדל בין תוצאות מחקר זה לבין הספרות עשוי לנבוע מההבדל באוכלוסיית המחקר, ואולם גם תוצאה זו מחייבת בדיקה במחקר עתידי.

כמו כן תוצאות המחקר הצביעו על כך שסטודנטיות שעסקו בלמידה פעילה במהלך יצירת עבודת אומנות מקורית המשקפת את הפרשנות

מעבודות אלה מוצגות תופעות שאפשר לקבוע את גודלן, גודל ככל שיהיה, כתופעות המציגות את האינסוף. למשל מספר גרגירי חול או מספר צירופי שרשראות של DNA (איור 2) או צילום מדרגות לולייניות מזווית מסוימת שיוצרת אשליה של ספירלה אינסופית או מספר אנשים בעולם. ממצא זה תואם את תוצאות המחקרים הקודמים שזוהה בהם הקושי של הסטודנטים להבין קבוצות סופיות גדולות (למשל Kolar & Čadež, 2012). בשתי עבודות אחרות מתוארות תופעות שלא הוגדרו היטב כאינסופיות: ציור בשלג ומידע. בשתייהן האלמנטים של הסדרה אינם מוגדרים מכיוון שחסרה מסגרת זמן: אם התהליך מתאר תמונת מצב ברגע נתון, שתי הקבוצות יהיו סופיות; לעומת זאת, אם מסגרת הזמן היא אינסופית אז בשתי הקבוצות יש מספר אינסופי של איברים.

בין העבודות שהציגו תוכן מתמטי לא נכון היו ארבע עבודות המתארות תפיסות שגויות לגבי הקשר בין אפס לאינסוף: שלוש עבודות ראו באפס חלק מאינסוף. לדוגמה, אחת הסטודנטיות צירפה לעבודה את השאלה שציינה קיום תלות הדדית בין אפס לאינסוף: "כמה אינסוף נוכל לייצר מאפסים?". בעבודה אחרת סטודנטית בחרה להציג נקודה שנעה במעגל סגור. אומנם נקודה יכולה לנוע במסלול מעגלי אינסוף זמן ולעבור מרחק אינסופי, אך מעגל אינו ייצוג לאפס ומעבודתה של הסטודנטית לא היה אפשר להבין את כוונתה.

דיון מסכם

מטרת המחקר הייתה לבחון את הקשר בין עיסוק באומנות ללימוד מושגים מתמטיים כמו אפס ואינסוף והקשר ביניהם בעת חישוב שטח והיקף בפרקטלים. המחקר התבסס על שיטת מחקר משולבת כמותנית-איכותנית (Creswell & Plano Clark, 2011). ממצאי המחקר תומכים בממצאים של מחקרים קודמים ואף מרחיבים אותם בארבעה היבטים עיקריים: 1. אוכלוסייה נחקרת – ברוב המחקרים בנושא זה אוכלוסיית המחקר הייתה תלמידי בתי ספר, ואילו במחקר הנוכחי היא מתכשרים להוראת מתמטיקה; 2. ייצוג ויזואלי המשמש בהוראה/למידה של מתמטיקה – רוב המחקרים התמקדו בייצוגים גרפיים (טבלאות, גרפים, פונקציות) ולא בעבודות אומנות; 3. ממצאי המחקר מצביעים על קיום קשר בין עיסוק באומנות להבנה טובה יותר של מושגים בעת ביצוע משימות מתמטיות הדורשות רמות חשיבה נמוכות (Bloom, Engelhart, Furst, Hill, 2002; Krathwohl, 1956; Krathwohl, 2002). במשימות מתמטיות הדורשות רמות חשיבה גבוהות התוצאות לא היו מובהקות; 4. תוצאות המחקר מצביעות על הקשר בין הישגים מתמטיים גבוהים ובין סוג העיסוק באומנות – במקרה של עיסוק פעיל ביצירת עבודות אומנות מקוריות הישגים גבוהים יותר.

הוראת מתמטיקה מאתגרת את המורים והתלמידים כאחד. במקרה של שילוב מתמטיקה עם אומנות האתגר עבור המורים גדול אף יותר. הבנת חוויות הלמידה ותוצאותיה האפשריים של מתכשרים להוראה חשובה היות שכמורים תהיה להם השפעה על המוטיבציה וההישגים של תלמידיהם (Hill, Kapitula, & Umland, 2011; Ruzek, Domina, Conley, Duncan, & Karabenick, 2015). הניסיון האישי שלהם עם משימות שמשלבות אומנות עם מתמטיקה מגדיל את הסיכוי שהם יאמצו גישת למידה-הוראה זו בעתיד (Lee & Cawthon, 2015). תוצאות המחקר הצביעו על כך שיש קשר בין עיסוק באומנות (יצירה מקורית או בחירה וניתוח של עבודות קיימות) ובין הישגי הסטודנטיות כאשר במשימה מתמטית היו שאלות שדרשו חשיבה ברמה נמוכה (Bloom et al., 1956; Krathwohl, 2002). על פי שורסר (Shorser, 1999) שהציעה

באומנות להישגים בנושא של הבנת המושגים אפס ואינסוף. ממציא המחקר מצביעים על קשר חיובי מובהק בין עיסוק באומנות ובין הישגי הסטודנטיות בשאלות שדרשו חשיבה ברמה נמוכה. קשר זה חזק יותר כאשר הסטודנטיות מעורבות במידה פעילה ביצירת עבודות אומנות.

רשימת מקורות

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. doi:10.1023/A:1024312321077
- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144. doi:10.2307/749140
- Barton, N. (2019). [Absence perception and the philosophy of zero](#). *Synthese* (2018), 1-28. doi:10.1007/s11229-019-02220-x
- Biller, J. (1995, October). *Math in art or art in math*. Paper presented at the 9th Annual National Conference on Liberal Arts and Education of Artists, New York, NY. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED405907.pdf>
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals* (Handbook I: Cognitive domain). New York: David McKay Co Inc.
- Boaler, J. (2015). *The elephant in the classroom: Helping children learn and love maths*. London: Souvenir Press.
- Brezovnik, A. (2015). [The benefits of fine art integration into mathematics in primary school](#). *Center for Educational Policy Studies Journal*, 5(3), 11-32.
- Burton, J. M., Horowitz, R., & Abeles, H. (2000). Learning in and through the arts: The question of transfer. *Studies in Art Education*, 41(3), 228-257. doi:10.2307/1320379
- Cankoy, O. (2010). [Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching \$a0\$, \$0!\$ and \$a \div 0\$](#) . *Educational Sciences: Theory and Practice*, 10(2), 749-769.
- Crespo, S., & Nicol, C. (2006). [Challenging preservice teachers' mathematical understanding: The case of division by zero](#). *School Science and Mathematics*, 106(2), 84-97. doi:10.1111/j.1949-8594.2006.tb18138.x
- Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, Calif.: SAGE.
- Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2nd ed.). Thousand Oaks, Calif.: SAGE.
- Christmann, G. B. (2008). The power of photographs of buildings in the Dresden urban discourse. Towards a visual discourse analysis. Forum: *Qualitative Social Research*, 9(3). Retrieved from <http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1163/2570>
- Dietiker, L. (2015). What mathematics education can learn from art: The assumptions, values, and vision of mathematics education. *Journal of Education*, 195(1), 1-10. doi:10.1177/002205741519500102

שלהן למושגים שנלמדו, קיבלו ציונים גבוהים יותר מסטודנטיות שעסקו בלמידה פעילה פחות – בחרו וניתחו עבודות אומנות קיימות. סטודנטיות שעסקו בתהליך יצירתי, לא רק קבעו את התוצר הוויזואלי הסופי שלהן, אלא חשוב יותר, הן קבעו אילו תכונות מתמטיות יוצגו בתוצר. כלומר עבודות האומנות המקוריות של הסטודנטיות משקפות את המאפיינים של המושג הנלמד, כמו גם את דימוי המושג האישי שלהן (Tall & Vinner, 1981). תהליך זה יכול לתרום ל"ראייה טובה יותר של מושגים ורעיונות מתמטיים" (Arcavi, 2003) כפי שעולה מתוצאות המחקר. כלומר הסטודנטיות יכלו לבחון אם דימוי המושג שלהן תואם את הגדרת המושג ובכך להעמיק את הידע שלהן. לעומת זאת, במקרה של סטודנטיות שהיו פעילות פחות ובחרו בעבודות אומנות קיימות, אין כל ערובה לכך שהיצירה תואמת את תפיסתן של המושגים המתמטיים הנלמדים. כלומר העבודות שהן העלו לגלריה לא בהכרח שיקפו את דימוי המושג האישי שלהן. אפשר לומר שסטודנטיות אלה ויתרו על הזדמנות לבחון אם דימוי המושג שלהן תואם את הגדרת המושג כפי שניתנה בחומרי הלימוד שבידיהן.

מגבלות המחקר

המחקר הנוכחי הוא מחקר חלוץ שתרומו העיקרית היא להעלות מודעות לפוטנציאל הטמון בשילוב אומנות בהוראת מתמטיקה, אך כמו בכל מחקר יש לו מגבלות. המגבלה הראשונה היא מדגם המחקר שהיה מדגם נוחות (Johnson & Christensen, 2012) ולא מדגם אקראי. מדגם נוחות יכול להביא לידי הטיה מסוימת של התוצאות, ייתכן שהסטודנטיות שבחרו להיות מעורבות יותר ביצירת אומנות היו סטודנטיות עם הישגים גבוהים. כדי להימנע מהטיה זו, אחד מהכיוונים של המחקר העתידי יכול להיות תכנון של מחקר אמפירי שבו סטודנטים עם פרופיל לימודי זהה ילמדו את אותו הנושא המתמטי בשלוש דרכים: קבוצה אחת תלמד נושא מתמטי בשילוב של יצירת אומנות במידה פעילה – יצירת עבודות אומנות מקוריות, קבוצה שנייה תלמד את הנושא למידה פעילה פחות – בשילוב ניתוח של עבודות אומנות קיימות וקבוצה שלישית תלמד את הנושא בלי שילוב אומנות. בתום לימוד הנושא המתמטי כל שלוש הקבוצות יבצעו את אותן המשימות המתמטיות. מבנה כזה יאפשר לקבוע אם מעורבות פעילה באומנות אכן תורמת להישגים מתמטיים גבוהים יותר, כפי שהראו תוצאות המחקר הנוכחי.

המגבלה השנייה של המחקר היא העדפת תכנים מתמטיים בתכנון הקורס על פני תכנים אומנותיים. יצירת גלריה שיתופית תרמה רק 9% לציון המסכם בקורס, כלומר 1.5% עבור כל יחידה. משמעות הדבר היא שהסטודנטיות ידעו מראש כי המאמצים שלהן צריכים להיות מכוונים ללימוד תכנים מתמטיים ושילוב אומנות דומה יותר ל"קישוט". במחקר עתידי, האומנות והמתמטיקה צריכים להיות חשובים באותה מידה בעיצוב סביבת הלמידה. בדרך זו הסטודנטים ישקיעו חשיבה ומאמץ רבים במשימה הקשורה לאומנות, דבר שיאפשר ללמוד על תרומה של אומנות ללימודי מתמטיקה.

המגבלה השלישית היא שימוש בשני מחוונים שונים להערכת עבודות האומנות. מכיוון שהמטרה שלי הייתה לעודד את סטודנטיות ליצור עבודות אומנות מקוריות, נכללו קריטריונים כמו יצירתיות, מאמץ ואומנות במחווה; עם זאת, אי אפשר להשתמש בקריטריונים אלה כדי להעריך עבודות אומנות שאינן מקוריות. כדי להתמודד עם אתגר זה פיתחתי שני מחוונים עם קריטריונים שונים. פתרון זה אינו אידיאלי, ולכן בעתיד כדאי לפתח כלי הערכה גנרי. כלי כזה יתרום לקידום מחקר בנושא שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה.

לסיכום, המחקר הנוכחי הוא מחקר חלוץ שבחן את הקשר בין עיסוק

- Education (CERME 7) (pp. 2717-2726). Rzeszów: Poland: University of Rzeszów.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lee, B., & Cawthon, S. (2015). What predicts pre-service teacher use of arts-based pedagogies in the classroom? An analysis of the beliefs, values, and attitudes of pre-service teachers. *Journal for Learning Through the Arts*, 11(1), 1-15. doi:10.21977/D911119691
- Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-257. doi:10.1023/A:1016090925967
- Murphy, S. J. (2009). The power of visual learning in secondary mathematics education: How does visual learning help high school students perform better in mathematics? *Research into Practice Mathematics*, 1-8. Retrieved from https://assets.pearsonglobalschools.com/asset_mgr/legacy/200932/PHMath2011_StuartMurphy_24384_1.pdf
- Nutov, L. (2018a). Is dimension a size, a surface or a space? Pre-service teachers' perceptions of the concept. In B. Maj-Tatis, K. Tasis, & E. Swoboda (Eds.), *Mathematics in the real world* (pp. 231-240). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. Retrieved from https://5b06a6f9-c9ac-4c0b-ac0a-6f404878a5bc.filesusr.com/ugd/10e654_59984ea2dfcc4271b29e790c54a1c806.pdf
- Nutov, L. (2018b). When mathematics meets art: Does art contribute to the understanding of mathematical concepts? In *Bridges conference: Mathematics, art, music, architecture, education, culture* (pp. 341-346). Stockholm, Sweden: The National Museum of Science and Technology.
- OECD. (2009). *Creating effective teaching and learning environments: First results from TALIS* (Chapter 4: Teaching practices, teachers' beliefs and attitudes). Retrieved from <http://www.oecd.org/berlin/43541655.pdf>
- OECD. (2016). *Ten questions for mathematics teachers ... and how PISA can help answer them*. Retrieved from <https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264265387-en.pdf?expires=1588846142&id=id&accname=guest&checksum=26660A23288FD126B0F504BE6E-A2927A>
- Okbay, U. E. (2013). *Art in the middle school mathematics classroom: A case study exploring its effect on motivation* (Master's thesis). Bilkent University, Ankara. Retrieved from <http://repository.bilkent.edu.tr/bitstream/handle/11693/15714/0006427.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Oreck, B. (2006). Artistic choices: A study of teachers who use the arts in the classroom. *International Journal of Education & the Arts*, 7(8), 1-27.
- Podgoršek, M. (2016). High school students' and pre-service teachers' drawings of some mathematical concepts. *Some Issues in Pedagogy and Methodology*, 44-52. doi:10.18427/iri-2016-0063
- Quinn, J. R., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher perceptions of division by zero. *The Clearing House*, 81(3), 101-104. doi:10.3200/TCHS.81.3.101-104
- Efland, A. (2003). Imagination in cognition: The purpose of the arts. *The International Journal of Arts Education*, 1(1), 26-50. Retrieved from https://ed.arte.gov.tw/uploadfile/Periodical/428_26_66.pdf
- Eisner, E. W. (2002). *The arts and the creation of mind*. New Haven & London: Yale University Press.
- Falk, R. (2010). The infinite challenge: Levels of conceiving the endlessness of numbers. *Cognition and Instruction*, 28(1), 1-38. doi:10.1080/07370000903430541
- Fenyvesi, K., & Lähdesmäki, T. (Eds.). (2017). *Aesthetics of interdisciplinarity: Art and mathematics*. Cham: Springer International Publishing.
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books Inc.
- Gelineau, P. R. (2011). *Integrating the arts across the elementary school curriculum* (2nd ed.). Wadsworth: Cengage Learning.
- Gullatt, D. E. (2007). Research links the arts with student academic gains. *The Educational Forum*, 71(3), 211-220. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ763212.pdf>
- Hill, H. C., Kapitula, L., & Umland, K. (2011). A validity argument approach to evaluating teacher value-added scores. *American Educational Research Journal*, 48(3), 794-831. doi:10.3102/0002831210387916
- Ibarra, L. M., Romo-Vázquez, A., & Aguilar, M. S. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(1-2), 48-59. doi:10.1080/17513472.2018.1504270
- Johnson, B., & Christensen, L. (2012). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (4th ed.). Thousand Oaks: SAGE.
- Karakus, F. (2018). Investigation of pre-service teachers' pedagogical content knowledge related to division by zero. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*, 19(1), 90-111.
- Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: A process or an object? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 1771-1780). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique. Retrieved from <https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf>
- Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, 41(4), 212-218. doi:10.1207/s15430421tip4104_2
- Kolar, V. M., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 389-412. doi:10.1007/s10649-011-9357-7
- Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – an empirical study with preservice teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics*

- Wu, L., Jia, L., & Ye, L. (2015). Exploration of calculus teaching and assessment through artwork. *International Journal of Applied Research*, 1(8), 731-735.
- Zimmerman, A. S. (2016). [Developing confidence in STEAM: Exploring the challenges that novice elementary teachers face](#). *The STEAM Journal*, 2(2), 1-9. doi:10.5642/steam.20160202.15

נספחים

נספח א: שאלה לדוגמה מתוך מבדק מקוון

יש לבחור תשובה אחת או יותר.

0 הוא גורם חשוב במערכת הספירה העשרות מכיוון שהוא:

- מאפשר לחשב מרחקים.
- מאפשר להבדיל בין המספרים 102, 120, 12.
- מאפשר לבצע פעולות חשבון עם מספרים גדולים.
- מאפשר להגדיר כל מספר.
- מייצג כמות.

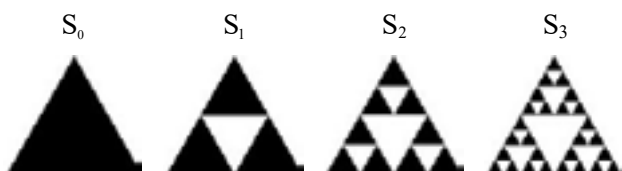
נספח ב: שאלה מתוך המבחן המסכם

כדי לבנות את הצורה המכונה משולש שירפינסקי צריך לבצע אינסוף שלבי בנייה. באיור המצורף נתונים 3 שלבי בנייה ראשונים של משולש שירפינסקי. תיאור שלבי הבנייה:

שלב 0: נתון משולש שווה צלעות – S_0 .

שלב 1: חלקו את המשולש הנתון (S_0) לארבעה משולשים ש"צ על ידי חיבור אמצעי הצלעות וגרעו את המשולש האמצעי. התקבלה צורה (S_1) המורכבת מ-3 משולשים שווים צלעות המחוברים בקודקודים כמתואר בציור.

שלב 2: כדי לקבל את הצורה S_2 עבור כל אחד מהמשולשים המרכיבים את S_1 חוזרים על שלבים 0 ו-1. באופן דומה יוצרים את השלב הבא S_3 . כדי לקבל את משולש שירפינסקי חוזרים על שלבי בנייה 0 ו-1 אינסוף פעמים.



א. חשבו את השטח ואת היקף של המשולש S_0 אם נתון כי אורך הצלע הוא 1 ס"מ.

ב. חשבו את השטח (המסומן בשחור) ואת ההיקף של הצורה S_1 .

ג. חשבו את השטח (המסומן בשחור) ואת ההיקף של הצורה S_2 .

ד. ממשיכים לבנות את הצורה באופן שמגדירים זאת השלבים 0, 1, 2, 3. למה יהיה שווה השטח וההיקף של הצורה (כל השטח השחור) לאחר אינסוף שלבי בנייה? (הקיפו את התשובה הנכונה – אחת עבור שטח ואחת עבור היקף). נמקו את תשובתכם (היעזרו בסעיפים א, ב, ג).

1. השטח יגדל וישאף לאינסוף.

2. השטח יקטן וישאף ל-0.

3. השטח ישאף למספר כלשהו שונה מ-0.

4. ההיקף יגדל וישאף לאינסוף.

5. ההיקף יקטן וישאף ל-0.

6. ההיקף ישאף למספר סופי כלשהו.

7. השטח יהיה שווה להיקף.

- Root-Bernstein, R., Allen, L., Beach, L., Bhadula, R., Fast, J., Hosey, C., . . . Weinlander, S. (2008). [Arts foster scientific success: Avocations of nobel, national academy, royal society, and sigma xi members](#). *Journal of Psychology of Science and Technology*, 1(2), 51-63. doi:10.1891/1939-7054.1.2.51

- Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). [Seeking more than nothing: Two elementary teachers conceptions of zero](#). *The Mathematics Enthusiast*, 8(1-2), 77-112.

- Ruzek, E. A., Domina, T., Conley, A. M., Duncan, G. J., & Karabenick, S. A. (2015). Using value-added models to measure teacher effects on students' motivation and achievement. *The Journal of Early Adolescence*, 35(5-6), 852-882. doi:10.1177/0272431614525260

- Schattschneider, D. (2010). The mathematical side of MC Escher. *Notices of the AMS*, 57(6), 706-718.

- Sendova, E., & Chehlarova, T. (2013). Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry. In *DynaMath 12 Conference* (pp. 495-502). Nitra, Slovakia: Constantine the Philosopher University. Retrieved from http://www.math.bas.bg/omi/toni/rezume-statii/126_STUDYING_FINE_ART_COMPOSITIONS_BY_MEANS_OF_DYNAMIC_GEOMETRY_CONSTRUCTIONS_2013.pdf

- Shorser, L. (1999). *Bloom's Taxonomy interpreted for mathematics*. Retrieved from <http://www.math.toronto.edu/writing/BloomsTaxonomy.pdf>

- Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293-1319. doi:10.1007/s10763-015-9642-5

- Smithrim, K., & Uptis, R. (2005). Learning through the arts: Lessons of engagement. *Canadian Journal of Education*, 28(1-2), 109-127. doi:10.2307/1602156

- Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School*, 10(3), 30-33. Retrieved from <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981c-intuitions-infinity.pdf>

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). [Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity](#). *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. doi:10.1007/BF00305619

- Thuneberg, H., Salmi, H., & Fenyvesi, K. (2017). Hands-on math and art exhibition promoting science attitudes and educational plans. *Education Research International*, 1-13. doi:10.1155/2017/9132791

- Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 199-214). Dordrecht: Kluwer Academic.

- Ward, R. (2006). Modeling effective pedagogical strategies for teaching mathematics. *The Charter Schools Resource Journal*, 1-9. Retrieved from <https://rusmp.rice.edu/sites/g/files/bxs1546/f/modeling%20effective.pdf>

- Weissstein, E. (n.d.) Zero. *Wolfram MathWorld*. Retrieved February 2, 2020, Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/Zero.html>

נספח ג: שני מחוונים להערת עבודות אומנות בנושא 'מושגים מתמטיים'

א. מחוון לעבודות אומנות מקוריות בנושא 'מושגים מתמטיים'

קריטריון	איכות מצוינת	איכות טובה (אפשרות א או ב)	איכות בינונית	איכות ירודה	לא איכותי
מושגים מתמטיים	העבודה מבטאת את אחד מהקשרים המתמטיים האפשריים בין אפס לאינסוף.	א. הקשר בין אפס לבין אינסוף אינו מדויק מתמטית.	אפשר לזהות תכונות מתמטיות של 0 או של אינסוף.	ביטוי מתמטי הכולל תפיסות שגויות של 0 או של אינסוף.	העבודה אינה כוללת כל התייחסות ל-0 או לאינסוף.
		ב. יש ביטוי מתמטי מדויק של 0 או של אינסוף.			
	50 נק'	45 נק'	30 נק'	20 נק'	0 נק'
יצירתיות	עבודה מקורית, מפורטת ומעניינת שמדגישה מושגים ועקרונות מתמטיים.	עבודה כוללת אלמנטים מקוריים או מעניינים או מפורטים שמדגישים את המושגים והעקרונות המתמטיים.	עבודה כוללת אלמנטים מקוריים מעטים או מעניינים או מפורטים שמדגישים את המושגים והעקרונות המתמטיים.	אפשר לזהות אלמנטים כלשהם מקוריים או מעניינים או מפורטים שמדגימים את המושגים והעקרונות המתמטיים.	אי אפשר לזהות אף אלמנט מקורי או מעניין או מפורט.
	20 נק'	15 נק'	10 נק'	5 נק'	0 נק'
השקעה וביצוע	עבודה נעשתה בהשקעה יוצאת דופן ותשומת לב לפרטים.	עבודה מושקעת עם תשומת לב לפרטים.	עבודה נעשתה בהשקעה מסוימת ותשומת לב לפרטים.	עבודה נעשתה בהשקעה מעטה או פחות תשומת לב לפרטים.	לא ניכרת כל השקעה בעבודה.
	20 נק'	15 נק'	10 נק'	5 נק'	0 נק'
כותרת או הסבר מצורף	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים את התוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים חלקית לתוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, בקושי רב תואמים לתוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, לא תואמים לתוכן המתמטי.	חסר.
	10 נק'	8 נק'	6 נק'	3 נק'	0 נק'

ב. מחוון לעבודות אומנות לא מקוריות בנושא 'מושגים מתמטיים'

קריטריון	איכות מצוינת	איכות טובה (לבחור אפשרות א או ב)	איכות בינונית	איכות ירודה	לא איכותי
מושגים מתמטיים	העבודה מבטאת את אחד מהקשרים המתמטיים האפשריים בין אפס לאינסוף.	א. הקשר בין אפס לבין אינסוף אינו מדויק מתמטית.	ביטוי מתמטי לא מדויק של 0 או של אינסוף.	ביטוי מתמטי הכולל תפיסות שגויות של 0 או של אינסוף.	העבודה אינה כוללת כל התייחסות ל-0 או לאינסוף.
		ב. יש ביטוי מתמטי מדויק של 0 או של אינסוף.			
	70 נק'	55 נק'	40 נק'	30 נק'	0 נק'
כותרת או הסבר מצורף	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים את התוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים חלקית לתוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, בקושי רב תואמים לתוכן המתמטי.	הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, לא תואמים לתוכן המתמטי.	חסר
	20 נק'	16 נק'	12 נק'	6 נק'	0 נק'
הפנייה אל המקור	ההפניה אל המקור צוטטה על פי כללי APA וצורף שמו של היוצר	המקור לא צוטט על פי כללי APA או לא צורף שמו של היוצר	5 נק'	0 נק'	0 נק'

לזכרה של רומה פלק

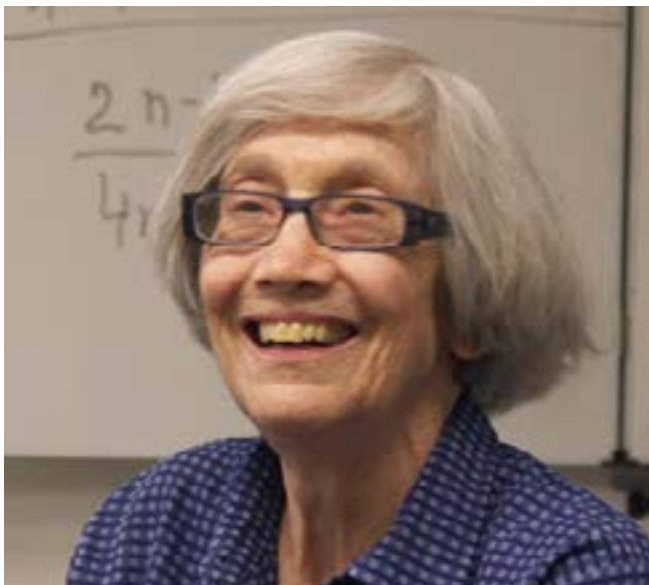
עידית ירושלמי



פרופ' עידית ירושלמי

ראש קבוצת הוראת הפיזיקה במחלקה להוראת המדעים,
מכון ויצמן למדע.

רומה פלק (27 במאי 1932 – 15 באוגוסט 2020), בתם הבכורה של רבקה ובנימין אורן (אהרונוביץ), הלכה לעולמה בגיל 88.



בגימנסיה העברית בירושלים טיפחו את אהבתה למתמטיקה המורים האגדיים, קלעי וטוכמן (כיום הם מוכרים יותר בתור ספרי לימוד, אבל במקור היו אנשים בשר ודם). בתחילת שנות החמישים הייתה רומה, שאך זה השתתפה בלחימה על קום המדינה, נוסעת מדי יום ביומו ללמד עברית במעברת הר טוב (בית שמש). היא ורבים מתלמידיה זכרו תקופה זו בהתפעמות. באותן שנים גם למדה מתמטיקה באוניברסיטה העברית.

בשנת 1953 נסעה עם בחיר ליבה, רפאל, לשטוקהולם, ושם למדה (בשוודית!) הסתברות וסטטיסטיקה. עם שובה לישראל השלימה את לימודיה באוניברסיטה העברית. היא קיבלה תואר ראשון בפסיכולוגיה וסטטיסטיקה ב-1964 ותואר שני בפסיכולוגיה ב-1969. בשנת 1975 כתבה עבודת דוקטור, כדרכה – מוקפדת,

חדשנית ומלאה חן – על "תפיסת מקריות", בהנחיית עמוס טברסקי. בהמשך התקבלה למשרה במחלקה לפסיכולוגיה. רומה פרשה ב-1999 בדרגת פרופסור.

רומה נמשכה לתחומים שבהם האינטואיציה משטה בנו: תפיסת הסתברות ומקריות, חשיבה סטטיסטית והבנת מושג האינסוף. היא כתבה על נושאים אלו עשרות מאמרים וספרים. בין ספריה: "אתגרים לתאים האפורים" (2004); "יש בעיה!" (2013); *Probability, Statistics and Randomness: Psychological and Educational Perspectives* (2018).

כבר בלימודיה לתואר דוקטור הגתה שיטות חדשניות לאומדן תפיסת הסתברות אצל ילדים בגיל הגן ובית הספר היסודי. את מחקריה ביססה על משחקי הגרלות שפיתחה. שיטות אלו שימשו גם להוראת חשיבה הסתברותית ודרבנו אותה לפתח את משחק הקופסה "ברירה וסיכוי" (הוצאת אורדע). אף שמעולם לא למדה לעבוד במחשב, היא תרמה לפיתוח חומרי למידה ממוחשבים לחטיבת הביניים.

לדברי עמיתתה, רנה הרשקוביץ ממכון ויצמן:

הייתה זו פעילות משמעותית מאוד לזמנה, גם מבחינת הפיתוח בסביבה ממוחשבת וגם מבחינת מחקר למידה במחשב במסגרת כיתת חקר.

עמיתה מאוניברסיטת מסצ'וסטס, קליף קונולד, תיאר איך הייתה כותבת, מוחקת ומתקנת כל מילה בעפרונות ששחקה עד דק, כמו סיגריה שעושה עד הפילטר. בעלה רפי (גם הוא חוקר בעל שם) תמיד תיאר את עצמו כמזכירה של רומה והיה מדפיס את דבריה. שיתוף הפעולה המופלא בין השניים התבטא גם בכמה מאמרים שפרסמו יחד.

תלמידיה מתארים מורה אכפתית ומקורית. כך מספרת רוני קרסנטי (כיום חוקרת במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן):

זכיתי ללמוד אצל רומה בסמינריון נפלא בפתרון בעיות. בכל שיעור היינו מקבלים בעיה לא פשוטה לפתרון, מתנסים בה ודנים בה מנקודות מבט שונות. רומה תמיד אתגרה אותנו לחשוב 'מחוץ לקופסה'.

רומה ניחנה בכישרון נדיר להבהיר ולהנגיש עקרונות חשיבה סטטיסטיים בנועם, ולא רק לימדה נוסחאות לצורך יישום מכני.

רפאל נפטר 11 חודשים לפני רומה; הם היו נשואים 66 שנה. רומה הניחה אחריה תלמידים רבים, שני ילדים, ארבעה נכדים ושלושה נינים.

7.....	דברי תודה על מימון הוצאת כתב העת "עיון ומחקר בחינוך מתמטי" בידי נשיא מכללת שאנן - דוד בן-חיים
9.....	דבר העורך - יניב ביטון
11.....	מדור חדשות מתמטיות - נצה מובשוויץ-הדר
16.....	על תהליכי למידה: מתלמידים בודדים דרך קבוצות קטנות וכלה בכיתה שלמה ריאיון עם פרופ' טומי דרייפוס - קרני שיר
20.....	חוויית מסמינר מתוקשב (וובינר) JRMF - מפגשי חשיבה בצוותא לבני 9-99 - אבי פולה
.....	הספר "מחלבן הזהב לסדרת פיבונאצ'י", מאת עופר ליבה - בת שבע אילני ואנטולי שטרקמן
24.....	מסע בעקבות בעיית סנגקו - משה סטופל, אבי סיגלר ועידן טל
30.....	הכוונה לשיפוט עצמי מטה-קוגניטיבי במהלך פתרון בעיות תובנה מספרית בקרבת תלמידים צעירים בכיתה ד' - סטלה גידלביץ'
42.....	כפל וחילוק מספרים טבעיים ואפס בכיתות של תלמידים לקויי למידה: ידע מורים וחוללות עצמית שלהם - רחל פילו ואיריס שרייבר
52.....	שינויים בידע של סטודנטיות להוראת המתמטיקה במהלך יצירת קורס מוק בנושא יחס ופרופורציה - ענת קלמר ועיב קיסר
63.....	על ארבע מורות וחקר בהוראת המתמטיקה - גלית שבתאי
73.....	הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה ו"ב - יחיאל תבעמי ואריאלה עילם
82.....	"כפל מקטין, אבל חילוק מקטין יותר..." - הבנות חלקיות ותפיסות שגויות של כפל וחילוק בשבר פשוט - פירחה חמו, בת שבע אילני ומאיר בוצגלו
95.....	מה הקשר בין עיסוק באומנות להבנה של אפס ואינסוף? המקרה של מתכשרים להוראת מתמטיקה - ליאורה נוטוב
106.....	לזכרה של רומה פלק - עידית ירושלמי