

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 7

יולי 2019

שאנן
המכללה האקדמית הדתית לחינוך
קרית שמונה - חיפה

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 7

יולי 2019

עורך:
ד"ר יניב ביטון שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):
ד"ר מארק אפלבאום מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך, באר שבע
פרופ' דוד בן-חיים מינהלת מל"מ – הטכניון, חיפה
שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
ד"ר הגר גל דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך, ירושלים
ד"ר אילנה לבנברג האקדמית גורדון, חיפה
ד"ר טלי נחליאלי לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך, תל-אביב-יפו
פרופ' משה סטופל שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
ד"ר אלכס פרידלנדר מכון ויצמן למדע, רחובות
ד"ר אמאל שריף-רסלאן המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה
פרופ' עטרה שריקי אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון
פרופ' דינה תירוש אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם,
אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

שמות הכותבים:
קארין אלוש סטודנטית במסלול מצוינות, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
אסמעיל אלמחדי מכללת קיי , באר שבע
יניב ביטון שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב
רונית בסן-צינצינטוס מכללת סמינר הקיבוצים, תל-אביב-יפו
נח טיירי דנא-פיקארד המרכז האקדמי לב, ירושלים
שרה הרשקוביץ שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב
שלמה וינר האוניברסיטה העברית בירושלים; אוניברסיטת בן-גוריון, באר-שבע
עידן טל מכללת סמינר הקיבוצים, תל-אביב-יפו
חנה לב-זמיר מכללת אורנים, קריית טבעון
נצה מובשוביץ-הדר הטכניון, חיפה
ניצה מרק-זגדון מכללת לוינסקי, תל-אביב-יפו; אוניברסיטת תל-אביב
מהא מנסור קריית החינוך עתיד, דאלית אל כרמל
ליאורה נוטוב האקדמית גורדון, חיפה
משה סטופל שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
אבי סיגלר שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; מכללת אפרתה, ירושלים
תקוה עובדיה מכללת אורנים, קריית טבעון; מכללה ירושלים
רוית פלדמן תיכון אליאנס, תל-אביב
אסנת פלוס אוניברסיטת אוטווה, קנדה
אליק פלטניק מכללת אורנים, קריית טבעון; שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
ענבל קולושי-מנסקר שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; משרד החינוך
ענת קלמר האקדמית גליל מערבי
מירב צהר-רוזן מכללת לוינסקי, תל-אביב-יפו; אוניברסיטת תל-אביב
רחל שי שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה
קרני שיר שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; הטכניון, חיפה
אמל שריף-רסלאן המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה

עריכה לשונית:
יפעת פישר, מכללת שאנן

עימוד והבאה לדפוס:
תמי יהושע ורבקי עמר, מכללת שאנן

עיצוב וצילום תמונת שער: תמי יהושע

עיצוב וצילום תמונת תוכן העניינים: תמי יהושע

מכללת שאנן – הוצאה לאור
ISSN 2311-5483
כתובת המערכת:
רח' הים התיכון 7, ת"ד 906, קריית שמואל, חיפה 3100801
טלפון: 04-8780000 פקס: 04-8714445
Email: laor@shaanan.org

כתובת אינטרנט של כתב העת http://shaanan.ac.il/?page_id=4244

כתב העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה

קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי"

קול קורא

אנו מזמינים את כל העוסקים בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים ואת כל העוסקים במחקר בחינוך מתמטי, לשלוח מאמרים מחקריים בתחום החינוך המתמטי, או מאמרים העוסקים בדרכי הוראה ובתובנות שעולות מהכשרת מורים למתמטיקה ובהתפתחות מקצועית של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי בכל הרמות האקדמיות.

במערכת של כתב העת מכהנים נציגים מהמוסדות השונים להכשרת מורים למתמטיקה בארץ, והוא נחשב כתב עת שפיט.

כתב העת הוא יוזמה מבורכת של נשיא שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, פרופ' יחיאל פריש, והוא יוצא בחסות המכללה ובמימונה.

הנחיות למחברים

כתבי היד של מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" צריכים להיכתב בשפה העברית ולהכיל לכל היותר 25 עמודים. ב-25 עמודים אלו ייכללו כל התקצירים, הטבלאות, האיורים ורשימת המקורות. אם המאמר כולל טבלאות או איורים, יש לשבץ אותם בטקסט במקום שבו הם אמורים להופיע במאמר.

יש להגיש את המאמר בגופן David גודל 12, רווח כפול, יישור דו-צדדי, ולשלוח את המאמר כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת yanivb@cet.ac.il

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100-200 מילים, ורשימה של 3-5 מילות מפתח.

המאמרים נשלחים אנונימית לשיפוט מקצועי, לכן במאמר יהיה עמוד שער ובו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושיוכו האקדמי, המקצועי או אחר של המחבר.

כדי לשמור על אנונימיות הכותבים בתהליך ההערכה והשיפוט, אין לציין את שמות הכותבים בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותבים.

כתבי היד של מאמרים המוערכים כרלוונטיים לאופיו של כתב העת, מועברים לשיפוטם של קוראים המתמחים בנושא המאמר ועוברים תהליך שיפוט על פי שיטת "העיוורון הכפול": זהות המחברים אינה ידועה לקוראים, וזו של הקוראים אינה ידועה למחברים.

המחברים מתבקשים להקפיד על הדפסת מקורות המידע שבסוף המאמר לפי הכללים שנקבעו בידי ארגון APA.

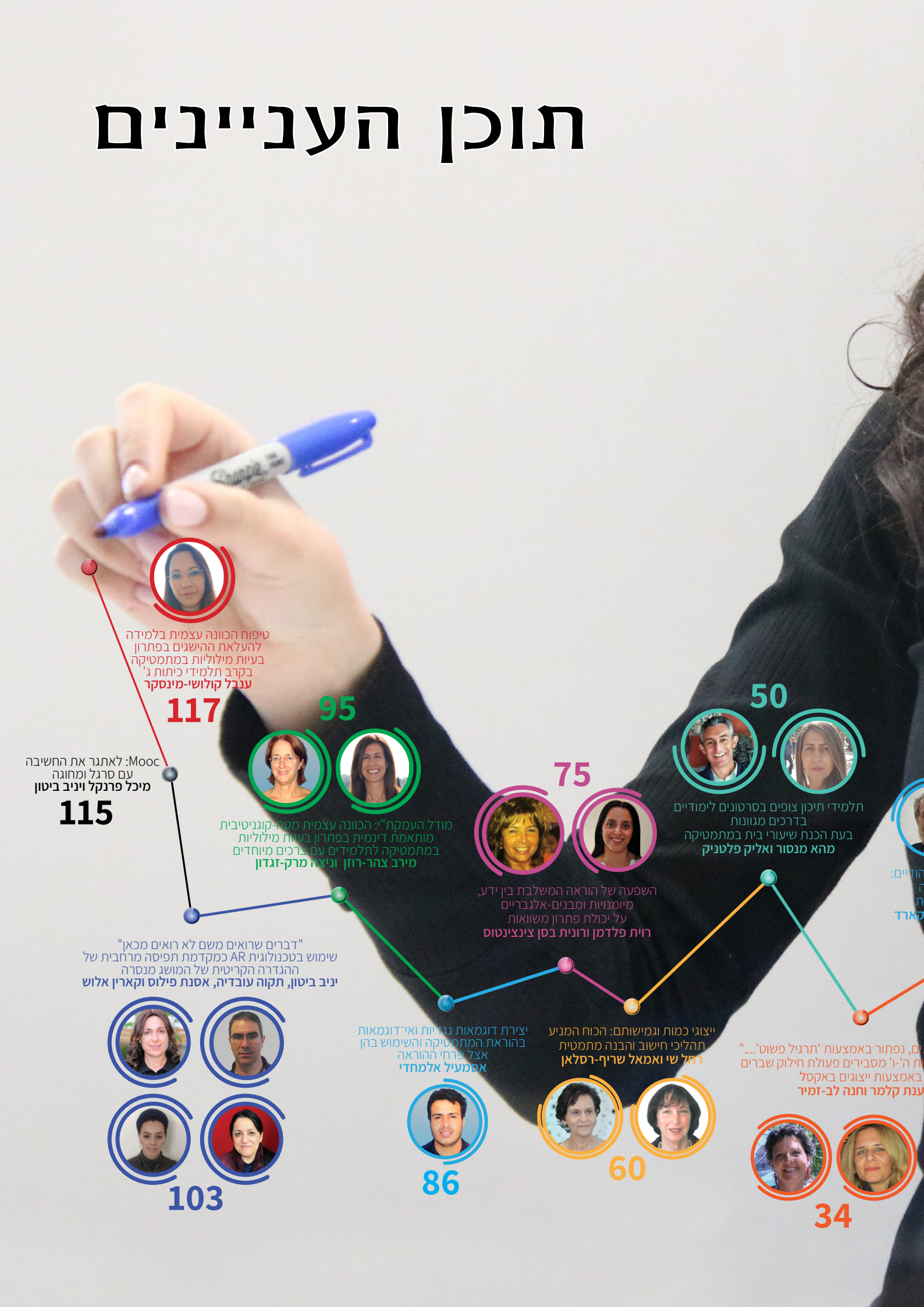
מאמרים שיתקבלו לפרסום יעברו עריכה מדעית ולשונית. לאחר העריכה הגרסה הסופית תישלח למחברים לאישור ותוחזר בהקדם.

אין לשלוח מאמר אם הוא כבר התפרסם או עומד להתפרסם במקום אחר, או שהוא מצוי בתהליך שיפוט בכתב עת אחר.

מצפים לקבל בהקדם הצעות לפרסומים לגיליון הבא של כתב העת!


28
היבטים גאומטריים באתרים
חקירה באמצעות סביב
גאומטרית אינטראקטיב
שרה הרשקוביץ ונח דנא-פ
19
המלצה לספרן של אילנה לבנברג ודורית פטקין
"גיאומטריה פנים רבות לה:
מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה"
שלמה וינר
16
חוויות מכנס:
Bridges – Stockholm 2018:
Mathematics, Art, Music,
Architecture, Education, Culture
ליאורה נוטוב
9
מדור חדשות מתמטיות
ניצה מושוביץ-הדר
7
דבר העורך
יניב ביטון
קול קורא
והנחיות
לכתיבת
מאמרים
"כאשר מבי
תלמידי כית
תכונות גאומטריות מפתיעות -
החקר, ההוכחה והכללה שלהן
משה סטופל, אבי סיגלר ועידן טל
22
פיתוח תחושת המסוגלות
בלימודי החשבון בבית הספר היסודי
התאמת הלימוד ליכולת ולקצב של כל תלמיד
אישית לוחצת עם פרופסור פרלה נשר
קרני שיר ויניב ביטון
12

תוכן העניינים



טיפוח הכוונה עצמית בלמידה
להעלאת ההישגים בפתרון
בעיות מילוליות במתמטיקה
בקרב תלמידי כיתות ג'
ענבל קולושי-מינסקר
117

Mooc: לאתגר את החשיבה
עם סרגל ומחוגה
מיכל פרנקל ויניב ביטון
115

95
מודל העמקת"י: הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית
מותאמת דינמית בפתרון בעיות מילוליות
במתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים
מירב צהר-רוזן וניצה מרק-זגדון

75
השפעה של הוראה המשלבת בין ידע,
מיומנויות ומבנים-אלגבריים
על יכולת פתרון משוואות
רוית פלדמן ורונית בסן צינצינטוס

50
תלמידי תיכון צופים בסרטונים לימודיים
בדרכים מגוונות
בעת הכנת שיעורי בית במתמטיקה
מהא מנסור ואליק פלטניק

"דברים שרואים משם לא רואים מכאן"
שימוש בטכנולוגית AR כמקדמת תפיסה מרחבית של
ההגדרה הקריטית של המושג מנסרה
יניב ביטון, תקוה עובדיה, אסנת פילוס וקארין אלוש
103

יצירת דוגמאות נגדיות ואי־דוגמאות
בהוראת המתמטיקה והשימוש בהן
אצל פרחי ההוראה
אסמעיל אלמחדי
86

ייצוגי כמות וגמישותם: הכוח המניע
תהליכי חישוב והבנה מתמטית
רחל שי ואמאל שריף-רסלאן
60

34

דבר העורך

יניב ביטון



ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב.

בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.

מרצה לחינוך מתמטי בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.

אני שמח ונרגש להגיש לכם את הגיליון השביעי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

בגיליון השביעי יש מבחר עשיר של מדורים ומאמרים מחקריים:

את כתב העת פותח מדור החדשות המתמטיות שבו נצה מובשוביץ-הדר מחדשת לנו על המספר π המוכר לכולנו, שהחתירה למצוא את ערכו בדיוק גדול ככל האפשר גורמת למהפך לאחרונה, ועוד אחת על מתמטיקאית צעירה שכתבה בשלוש השנים האחרונות שלושה ספרים שהראשון בהם הפך לרב-מכר ושמו "המתמטיקה של האהבה".

במדור "ראיונות עם דמויות מפתח בחינוך המתמטי" קרני שיר ויניב ביטון נוסעים לפגוש את פרלה נשר ומביאים לנו ריאיון מרתק עם אחת הדמויות הנערצות בחינוך המתמטי בנושא פיתוח תחושת המסוגלות בלימודי החשבון בבית הספר היסודי והתאמת הלימוד ליכולת ולקצב של כל תלמיד.

ליאורה נוטוב משתפת אותנו בחוויות מהכנס השנתי של קהילת Bridges שהתקיים השנה במוזאון המדע של שטוקהולם. ליאורה משתפת אותנו במחקר שהציגה במסגרת הכנס. מחקר זה ליווה את הלמידה בקורס שהיא מלמדת במכללה האקדמית גורדון.

במדור המלצה על ספר שלמה וינר ממליץ לנו על ספרן החדש של אילנה לבנברג ודורית פטקין "גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה". אחרי שתקראו את ההמלצה, אני משוכנע שגם אתם תרצו לקרוא את הספר.

גם בגיליון זה לא חסכנו פינה חמה ואפילו שתיים: פינה ראשונה של משה סטופל, אבי סיגלר ועידן טל העוסקת בתכונות גאומטריות מפתיעות על החקר, ההוכחה וההכללה שלהן. בפינה השנייה שרה הרשקוביץ ונח דנא-פיקארד מפתיעים אותנו עם היבטים גאומטריים באתרים יהודיים מתוך חקירה באמצעות סביבה גאומטרית אינטראקטיבית. במאמרם ניחשף לאלמנט באתר יהודי – בית הכנסת הגדול דוהאני (Dohany) בבודפשט, הונגריה.

בגיליון זה יש שמונה מאמרים מחקריים:

במאמר הראשון ענת קלמר וחנה לב-זמיר כותבות על השפעותיהם של ידע מורים, ידע תוכן מתמטי, ידע פדגוגי וידע טכנו-פדגוגי בהוראת חילוק שברים פשוטים על התפתחות ההבנה בקרב תלמידים.

במאמר השני מהא מנסור ואליק פלטניק עוסקים במחקר שנעשה בקרב תלמידי תיכון הצופים בסרטונים לימודיים בדרכים מגוונות בעת הכנת שיעורי בית במתמטיקה ומדווחים על ממצאיהם.
במאמר השלישי רחל שי ואמאל שריף רסלאן מדווחות על מחקרן שבחן בהרחבה את ייצוגי הכמות ואת השפעתם על הרהיטות החישובית בקרב תלמידי בית הספר היסודי.
במאמר הרביעי רוית פלדמן ורונית בסן צינצינטוס כותבות על השפעה של הוראה המשלבת בין ידע ,מיומנויות ומבנים-אלגבריים על יכולת פתרון משוואות.
במאמר החמישי שכתב אסמעיל אלמחדי, נקרא על חשיבות הדוגמאות בהוראת המתמטיקה בנושא יצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות והשימוש בהן אצל פרחי ההוראה.
במאמר השישי מירב צהר-רוזן וניצה מרק-זגדון כותבות על מודל הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית מותאמת דינמית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים.
במאמר השביעי יניב ביטון, תקוה עובדיה, אסנת פלוס וקארין אלוש כותבים על שימוש בטכנולוגית AR כמקדמת תפיסה מרחבית. במחקרם החוקרים מאפיינים את תהליך פתרון הבעיות של תלמידי כיתה ו' בנושא מנסרות בעת השימוש באפליקציה AR לעומת אפיון התפיסה והראייה המרחבית של התלמידים בפתרון בעיות בנושא ללא יישום האפליקציה.

במאמר השמיני ענבל קולושי מינסקר כותבת על מחקרה הבוחן באיזו מידה אימון להכוונה עצמית בלמידה, הממוקד בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, משפר את היכולת לפתור בעיות חד-שלביות (רמת רכישה) ולבצע העברה להפקת בעיות חד-שלביות ולפתרון בעיות מורכבות יותר.

ברצוני להודות לכל השותפים לתהליך ההוצאה לאור של הגיליון השביעי, בראש ובראשונה לצוות ההפקה והעריכה של כתב העת – תמי יהושע, רבקי עמר ויפעת פישר – מההוצאה לאור של מכללת שאנן. הן וכל שאר חברי הצוות נרתמו יחדיו לעזרה בהוצאת כתב העת, ועל כך תודה והוקרה.
לכותבי המאמרים והמדורים, שדאגו לשתף ולהעשיר את הידע המתמטי והידע הפדגוגי של קהילת אנשי החינוך המתמטי, לחברי המערכת ולחברי הקהילייה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי, שנרתמו למשימת השיפוט, העירו ותרמו מזמנם והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון ובהשבחת המאמרים המופיעים בגיליון. תודה גדולה לכולכם.
הוצאת כתב עת מצריכה תמיכה מוסדית ומימון. אני רוצה להודות להנהלת מכללת שאנן ולעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש, על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב העת, ולפרופ' דוד בן-חיים, ששמח תמיד לתרום מזמנו ומניסיונו העשיר לקידום כתב העת וייעולו.

אנו מקווים שתיהנו מהקריאה ושתכתבו בגיליונות הבאים של כתב העת.

יניב ביטון

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

מדור החדשות בגיליון זה מכיל שתי חדשות, אחת על המספר π המוכר לכולנו, שהחתירה למצוא את ערכו בדיוק גדול ככל האפשר גורמת למהפך לאחרונה, ועוד אחת על מתמטיקאית צעירה (ויפה...) שכתבה בשלוש השנים האחרונות שלושה ספרים שהראשון בהם הפך לרב-מכר ושמו "המתמטיקה של האהבה", לא פחות ולא יותר.

הספרות של פאי "משגעות" את כולם

כידוע, פאי הוא מספר אי-רציונלי טרנסנדנטי, כלומר הוא לא ניתן להצגה כשבר פשוט, על כן אינו שווה 22/7, הפיתוח העשרוני שלו הוא אינסופי לא מחזורי, ועל כן אינו שווה 3.14. נוסף על כך, בהיותו טרנסנדנטי הוא לא ניתן להצגה כפתרון של משוואה פולינומיאלית בעלת מקדמים שלמים.

בבתי הספר מקובל (מסיבות טובות) להגדיר את פאי כיחס הקבוע הקיים, למרבית הפלא, בין היקפו של מעגל כלשהו לקוטרו של אותו מעגל. אבל מתמטיקאים לא כל כך אוהבים את זה. לא מפני שפאי אינו בעל התכונה הזאת, אלא מפני שזה לא הדבר היחיד ולא הכי חשוב. פאי מופיע לא רק בגאומטרייה של המעגל אלא גם באלגברה, לדוגמה הסכום האינסופי של המספרים הרציונליים: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{n^2}+...$ מתכנס במפתיע לשישית פאי (ראו למשל הערך **בעיית בזל** בוויקיפדיה). דוגמה נוספת, הממוצע של מספר האפשרויות לרשום כל מספר טבעי כסכום ריבועים של שני שלמים הוא... פאי! מפתיע וגם ההוכחה עצמה מדהימה. להלן הקישור: https://aperiodical.com/2019/03/buzz-in-when-you-think-you-know-the-answer/

פאי מופיע גם בסטטיסטיקה. למשל, פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הכי חשובה, התפלגות הנורמלית הסטנדרטית, מבוטאת באמצעות π וגם e (ראו למשל **כאן**), בקיצור כמעט בכל תחום מתמטי הוא "צץ". מכאן חשיבותו הרבה (קראו עוד על כך **כאן** וגם **כאן**) והיא מסבירה את המרוץ אחרי גילוי הספרות של פאי מעבר לסקרנות וליצר החקירה.

מאז ימי ארכימדס, ובמיוחד במשך 400 השנים האחרונות,



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר
כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הביאה לישראל את "תוכנית קולומביה", והנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים הדרמתיים "חשבון פשוט" שהטלוויזיה החינוכית זכתה עליהם לפרסים בין-לאומיים.
פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער.
היא הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. בשנים האחרונות היא מתמסרת לפיתוח הבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהקמת אתר "רמזור למורה".

מתמטיקאים מנסים להגדיל את הידע של הספרות של π אחרי הנקודה העשרונית. זאת למרות העובדה שעבור כל מטרה מעשית העולה על הדעת – דיוק של 35 ספרות הוא דיוק מספק ביותר. מעניין במיוחד לציין שכדי להגיע לדיוק רב בחישוביהם מספיקות לסוכנות החלל האמריקאית – NASA 15 עד 40 ספרות של פאי אחרי הנקודה. ראו נימוקים כאן: https://curiosity.com/topics/how-many-digits-of-pi-do-we-actually-need-curiosity/

מעט היסטוריה

בשנת 500 לספירה היה ידוע כי $\pi \approx 3.1416$ ועד שנת 1000 לספירה ידעו קירוב של 10 ספרות. בשנת 1596 הגיע ההולנדי לודולף ון-קולן לשיא החישוב של אותו זמן. הוא הקדיש שנים רבות מחייו לחישוב ערכו של π בשיטת ארכימדס כשהוא מגדיל בכל צעד כפליים את מספר הצלעות של המצולע החסום והמצולע החוסם של המעגל. כך הגיע למצולעים בני 2^{62} צלעות, וקיבל:

$$3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,502,88 < \pi <$$

$$3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,502,89$$

בשנת 1949 – ראשוני המחשבים האלקטרוניים הגיעו לחישוב של 2000 ספרות אחרי הנקודה.

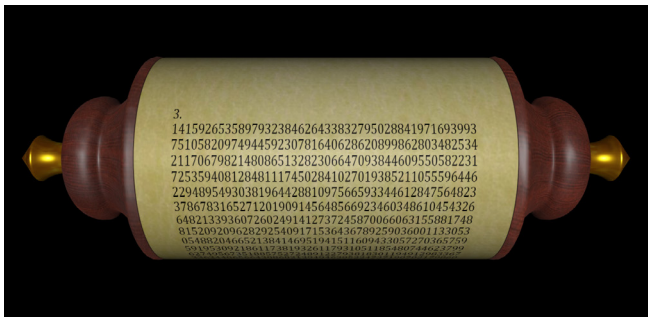
בשנת 1958 – 10,000 ספרות.

בשנת 1961 – 100,000 ספרות.

בשנת 1973 – 1,000,000(מיליון) ספרות.

בשנת 1989 – 1,000,000,000 ביליון (מיליארד).

בשנת 1999 – 000,000,000206, ביליון.



המגילה של פאי. כדי לגלול אותה היכנסו לכאן
ותראו את מיליון הספרות הראשונות

אלכסנדר יי (Alexander J. Yee) הוא מפתח תוכנה יליד קליפורניה, המתגורר בשיקגו. הוא נכנס לספר השיאים של גינס בשנת 2010 בזכות ששבר את שיא החישוב של הספרות של פאי אחרי הנקודה העשרונית והגיע ל-5 טריליון. הוא היה אז סטודנט בן 23 לתואר שני במדעי המחשב באוניברסיטת אילינוי ועשה זאת עם מחשב שולחני אחד **שבנה שותפו היפני**, שיגרו קונדו (Shigeru Kondo), שהיה אז בן 55. החישוב החל ב-4 במאי והסתיים ב-2 באוגוסט – שלושה חודשים ברציפות. לאישרור התוצאה לאחר שנתקבלה, נדרשו 130 שעות מחשב (מעל חמש יממות).

באוקטובר 2011 הם הכפילו את מספר הספרות עד מעל ל-10 טריליון. אשתו של שיגרו קונדו כעסה מאוד כיוון שהם קיבלו חשבון חשמל גבוה בשל הצריכה המוגברת, ומאז הם העמידו את התוכנה לרשות המעוניינים באמצעות אפליקציה לסמארטפון:



https://itunes.apple.com/us/app/calculate-pi/id385916387?mt=8

וגם באמצעות הבלוג של אלכסנדר יי:

y-cruncher - A Multi-Threaded Pi-Program from a high-school project that went a little too far

בנובמבר 2016 השיג את השיא פיטר טרוב (Peter Trueb) – לאחר 105 ימי עבודת חישוב ממוחשבת מ-29 ביולי 2016 עד 11 בנובמבר 2016 במימון חברת Dectris מפילדלפיה, והועמד על 22.4 טריליון ספרות (ליתר דיוק 22, 459, 157, 718, 361). מי שרוצה להוריד את כל הספרות מהאינטרנט, יכול לנסות כאן: https://pi2e.ch/blog/2017/03/10/pi-digits-download/#download

בינואר 2019 נשבר השיא שוב והועמד על 31.4 טריליון ספרות. את השיא הזה השיגה אמה הארוקו איוואו (Emma Haruka Iwao) באמצעות הענן של גוגל ובכך הוכחה עוצמתו הרבה של זה האחרון. (עוד פרטים כאן: https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud)

לרוב מתמטיקאים מונָעים על ידי יצר הסקרנות ויצר החקירה ופחות על ידי ציפיות לטובת הנאה. בשנים האחרונות נמצא מַניע נוסף: שיפור טכניקות חישוב בעלות דיוק גבוה. עבורן החישוב של הספרות של π משמש אמצעי בקרה ומבחן. החישוב של π בדיוק גבוה תובעני הן מבחינת זמן החישוב והן מבחינת גודל הזיכרון הנדרש לכך. לחישובים של למעלה מטריליון ספרות דרושים מחשבי-על, ולכן ביצוע החישובים בשיטות למיניהן משמש אבן-בוחן ליכולות המחשב לאחסן, לשלוף ולעבד כמויות עצומות של נתונים.

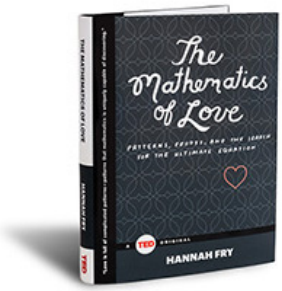
כך התהפכו היוצרות – משימוש במחשב לבדיקת הספרות של π עברנו לשימוש בחישוב של π לבדיקת מחשבי-על!

תחום מתמטי חדש: המתמטיקה של האהבה



המתמטיקאית הבריטית, חנה פריי, ילידת 1984, קיבלה בשנת 2011 את הדוקטורט במתמטיקה בתחום המכניקה של נוזלים. היא מופיעה דרך קבע ברדיו ובטלוויזיה בבריטניה ובהרצאות ברחבי העולם. בחודש אפריל 2014 היא העבירה הרצאת TED בנושא "המתמטיקה של האהבה", שבה הציגה דפוסים לדרכים שבהן אנחנו מחפשים אהבה. לשם כך היא נותנת את שלושת הטיפים הראשונים למציאת מישהו מיוחד (מאומתים על ידי מתמטיקה!). שווה צפייה.

בשנת 2015 יצא ספרה באותו שם (זמין למשלוח לישראל באמצעות אמאזון). אגב, זכיתי לשמוע מפיה הרצאה מרתקת בקיץ 2016 במוזאון הלאומי למתמטיקה בניו-יורק ואף רכשתי באותו מעמד עותק בחתימתה.



בהקדמה לספר מעידה על עצמה ד"ר פריי שהיא עצמה אינה מומחית לאהבה (אף שאת ההרצאה ששמעתי ממנה היא העבירה בהיותה בהיריון...), אין לה שמץ של השכלה בפסיכולוגיה, היא מבינה מעט מאוד בביוכימיה, והניסיון האישי שלה לפני הנישואים הוא כמו של רבים אחרים, תערובת של הצלחות עם שורה של אכזבות. היא מוסיפה כי ניסיונה כמתמטיקאית לימד אותה שמתמטיקה יכולה להציע דרך חדשה לבחינה של כמעט כל דבר, אפילו משהו אפוף מסתורין כמו אהבה.

בספר תשעה פרקים שבהם המחברת חושפת את הדפוסים הנסתרים מאחורי ההתנהגויות של אהבה – מאתרי היכרויות לגרושים, מיחסי קרבה לנישואין ועוד ועוד.

היא לא מנסה לדון ברגשות, בתשוקה ובאכזבות שהאהבה יכולה לגרום. את המעוניינים בהיבטים אלה היא מפנה לציור, לשירה, לספרות ולאומנות הפיסול שיצרה האנושות ב-5000 השנים האחרונות...

את הרומנטיקה קשה לכמת, זה ברור. באמצעות מערכת משוואות אי אפשר להבין איך האוהבים עשויים להרגיש. אבל זה לא אומר שהמתמטיקה אינה כלי להבנת האהבה שהיא, כמו רוב הדברים בחיים, עתירת דפוסי התנהגות. כידוע, מתמטיקה היא המחקר של חוקיות, תבניות ודפוסים. היא משרתת תחומים כגון חיזוי מזג האוויר ותנודות של שוק המניות, וחושפת את חוקי התנועה של כוכבי הלכת ושל חלקיקי האטום. הדפוסים האלה מפותלים ומורכבים, והם מתפתחים בדיוק כמו התנהלויות האוהבים.

בספרה, ד"ר חנה פריי לוקחת את הקורא למסע מרתק באמצעות דפוסים המגדירים את חיי האהבה שלנו, ומיישמת נוסחאות מתמטיות לשאלות הנפוצות ביותר, אך מורכבות, הנוגעות לאהבה: מה הסיכוי למצוא את הפרטנר הנכון? מה ההסתברות שזה יימשך? איך בדיוק עובד אלגוריתם ההיכרויות באינטרנט? האם תורת המשחקים יכולה לעזור לנו להחליט אל מי לגשת ליד הבר? באיזו נקודה בחיים עליך להחליט להתביית?

ד"ר פריי עוסקת בהערכת האסטרטגיות הטובות ביותר עבור היכרויות באינטרנט ובהגדרת המושג: יופי, ועוד ועוד. היא מוכיחה בתובנה רבה ובשנינות כי מתמטיקה היא כלי שימושי להפליא לניהול משא ומתן על תעלומות האהבה, תחום מסובך, לעיתים קרובות מביך, לפעמים מקומם, אבל תמיד מעניין...

לצד כל אלה, היא מתוודה שכוונתה בכתיבת הספר הייתה לא רק להאיר את חיי האהבה, אלא גם להציג את יופייה של המתמטיקה, את הבוננות העמוקה שהיא מאפשרת ואת הרלוונטיות הרבה שלה, דברים שבבית הספר לא נחשפים אליהם ואולי הם אלה שתורמים ליחס הרע כלפי המתמטיקה הרווח בציבור. היא מסיימת בהבעת תקווה שהקריאה בספר תתרום לא רק להבנת המתמטיקה של האהבה, אלא גם לאהבה של המתמטיקה.

בהקשר זה מומלץ מאוד לקרוא גם את הכתבה "מתמטיקה אהובתי" בכתב העת המקוון בעברית "אלכסון".

לאחר שפרסמה את הספר הזה, פרסמה ד"ר פריי עוד שלושה ספרים שכותרותיהם מסקרנות למדי:

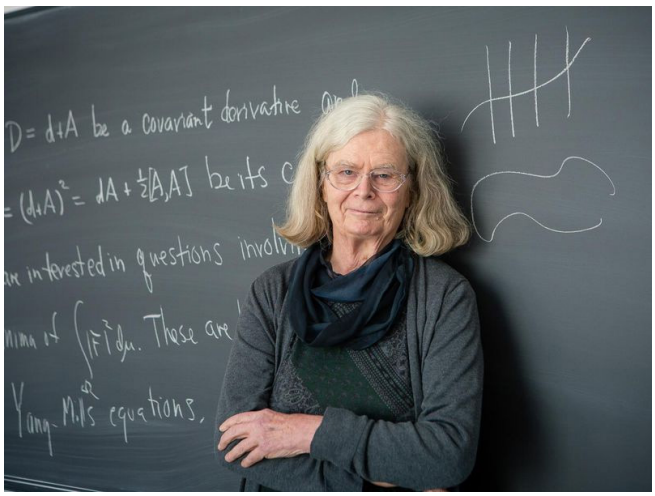
Fry, H. (2015). *The mathematics of love: Patterns, proofs, and the search for the ultimate equation.* London: Simon & Shuster/TED.

Fry, H., & Oléron Evans, T. (2016). *The indisputable existence of Santa Claus.* London: Doubleday.

Fry, H. (2018). *Hello world: How algorithms will define our future and why we should learn to live with it.* New York, NY: WW Norton.

ברגע האחרון

לפני סגירת הגיליון, בסוף חודש מרץ 2019 התבשרנו כי לראשונה זכתה אישה בפרס אבל היוקרתי (ראו פרטים על פרסים מתמטיים במדור החדשות בגיליון 6). כאן תמצאו עוד פרטים על עבודתה פורצת הדרך של הזוכה, פרופ' אמריטה קארן אלנבק (Karen Uhlenbeck), מתמטיקאית בת 76 מאוניברסיטת טקסס באוסטין, שתרומתה לתחום המשטחים המינימליים זיכתה אותה בפרסים רבים.



פיתוח תחושת המסוגלות בלימודי החשבון בבית הספר היסודי התאמת הלימוד ליכולת ולקצב של כל תלמיד
אישית לוחצת עם פרופסור פרלה נשר

קרני שיר

יניב ביטון



ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

חוקרת בפרוייקט "הבזקים" - הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה



ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב.

בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.

מרצה לחינוך מתמטי בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.

את השם "פרופ' פרלה נשר" יצא לנו לשמוע הרבה ובהקשרים שונים במהלך השנים שבהם אנחנו עוסקים בתחום החינוך המתמטי, אך בכל השנים האלה אף פעם לא יצא לנו לפגוש אותה ולשוחח עימה אישית. מסיבה זו, כאשר השם שלה עלה כמרואיינת הבאה במדור הראיונות בכתב העת, שמחנו על ההזדמנות שנקרתה בדרכנו וניגשנו בחרדת קודש לקבוע פגישה עם האישה שהטביעה את חותמה על תחום החינוך במדינת ישראל בכלל, ולימודי החשבון בבית הספר היסודי בפרט.

רקע



פרופ' פרלה נשר נולדה בתל-אביב לשרה ומשה אידלסון (אדן), וסיימה את השכלתה התיכונית בימי המנדט בתל-אביב שלפני קום המדינה. לאחר סיום הלימודים בגימנסיה בתל-אביב עברה לקיבוץ נירים והייתה חברת קיבוץ במשך 22 שנה (משנת 1948 עד שנת 1972).

פרלה למדה לתואר ראשון במתמטיקה, פיזיקה וביולוגיה באוניברסיטה העברית בירושלים. את הדוקטורט שלה בחינוך היא קיבלה מאוניברסיטת הרווארד בשנת 1972.

בסיום הדוקטורט חזרה פרלה לארץ. היא צורפה אל ועדת המקצוע להוראת המתמטיקה, ולימדה בבית הספר לחינוך באוניברסיטה העברית במשך חמש שנים לצד עבודתה באוניברסיטת חיפה. לאחר שעברה עם משפחתה לחיפה היא החלה לעבוד במשרה מלאה באוניברסיטת חיפה ואף שימשה ראש בית הספר לחינוך באוניברסיטה בשנים 1983-1988. את השבתונים שלה נהגה

לעשות בהרווארד שבמסצ'וסטס וב-MIT שבבוסטון.

לצד עבודתה באוניברסיטת חיפה שימשה פרלה נשר יועצת במשרד החינוך ויועצת מדעית לספרי החשבון: "אחת, שתיים, ו... שלוש", ו"ועוד אחת", שיצאו בהוצאת מט"ח (המרכז לטכנולוגיה חינוכית).

תפקידה כמדענית הראשית של משרד החינוך

לאחר היותה נשיאת הארגון הבין-לאומי המרכזי לחקר הלמידה המתמטית בשנים 1987-1989, כיהנה פרלה נשר בשנים 1992-1996 כמדענית הראשית השנייה של משרד החינוך. המינוי כמדענית הראשית היה מינוי של שולמית אלוני, שהייתה אז שרת החינוך. פרלה המשיכה לכהן כמדענית הראשית גם לאחר התפטרותה של שולמית אלוני ממשרד החינוך ומינויו של פרופ' אמנון רובינשטיין לתפקיד, וכיהנה בתפקיד זה עד חילופי השלטון, כאשר הפך זבולון המר לשר החינוך.

להלן דוגמה של שני תחומים מרכזיים שבהם עסקה כמדענית ראשית:

1. תגמול דיפרנציאלי בבתי הספר העל-יסודיים

המדד לתקצוב בית הספר לפני כניסתה של פרלה נשר לתפקיד נקבע על פי ההישגים הלימודיים של בית הספר, דבר שגרם להנשרת תלמידים חלשים ומתן עדיפות מראש לבתי ספר הנמצאים באזורים מבוססים. לאחר כניסתה לתפקיד הוגדר מדד חדש המביא בחשבון את הקריטריונים האלה: אחוז הנשירה מבית הספר, ההתקדמות היחסית של בית הספר בהישגים הלימודיים (ביחס לעצמו), זכאות התלמידים לתעודת בגרות מלאה ועוד.

2. ביטול המבחנים הארציים מדי שנה

קודמה של פרלה נשר בתפקיד, פרופ' יוסף באשי, הנהיג שיטת מבחנים המשווים בין בתי הספר. המבחנים נערכו לכל התלמידים ולכל בתי הספר מדי שנה, ופורסם בעיתונות דירוג בתי הספר, כולל סימון בתי ספר "אדומים" שהישגיהם נמוכים. נוהל זה הכניס את מערכת החינוך היסודי למתח ולהעברת מבחנים רבים בכל בית ספר כהכנה ל"מבחני באשי" (כך הם כונו אז). במקום ללמד, עסקו ב'מבחנולוגיה'. כתב העמדה הראשון שהיא כתבה עם כניסתה לתפקיד, עסק בהערכת הישגים לימודיים. היא הבחינה בין הערכה מעצבת, שבעבורה כל בית ספר צריך לערוך משוב פנימי, והערכת ההישגים של מערכת החינוך שמשרד החינוך מעוניין בה. היא סברה כי כדי לבחון את הישגי מערכת החינוך בנושאי הליבה, אין צורך בבחינת כל תלמיד בישראל, אלא די במדגם מייצג (גדול ככל שיהיה). לשמחתה, ד"ר שושני שהיה מנכ"ל משרד החינוך, ושרת החינוך, גב' שולמית אלוני, תמכו בעמדה זו וכך היה בזמן כהונתה. בתי הספר הודרכו לבניית משוב פנימי ולא כל בתי הספר קיבלו מבחנים ממשרד החינוך. גישתה זו נשחקה במרוצת השנים, המשוב הבית ספרי החל להיות מאורגן בידי משרד החינוך ושוב גברו הלחצים, והמדגם התרחב למחצית בתי הספר בארץ, הרבה מעבר למה שדרוש, לדעתה, לצורך מידע על המערכת.

פרלה מדגישה כי בשנים שבהן עבדה כמדענית ראשית של משרד החינוך היא השתדלה לקדם גישה שוויונית, הפועלת לטובת השכבות החלשות ומקטינה את זכויות היתר של השכבות המבוססות. היא מציינת כי היו אלה שנים של ממשלת רבין, שהעמיד את החינוך בראש סדרי העדיפויות של הממשלה, ולראשונה תקציב החינוך עלה על תקציב הביטחון. שושני ניווט ביד רמה את משרד החינוך, והיא נהנתה מאוד מאמונו ומתמיכתו המלאה. הייתה לה הרגשה שאכן אפשר לשנות ולקדם את מערכת החינוך. היום היא יודעת לומר כי היא טעתה ומרגישה כי עם חילופי הממשלות הכול נגוז. היא חשה כי אין תקווה למערכת חינוך התלויה בחילופי השלטון, ושאין בה גרעין פרופסיונלי שקובע מדיניות לזמן ארוך.

תפקידה כראש ועדת פרס החינוך של קרן רוטשילד

קרן רוטשילד מחלקת מדי שנה פרס למורה יחיד מצטיין בעבודתו החינוכית. במשך 10 שנים פרלה נשר כיהנה בהתנדבות כראש הוועדה שהחליטה למי יוענק הפרס. הפרס היה לכבודו ולזכרו של מר מקס רואו שעמד בראש קרן רוטשילד שנים רבות. מקס היה בעל ראייה מערכתית ובין השאר יזם את הקמת הטלוויזיה החינוכית (לפני הטלוויזיה הציבורית), את הקמת מט"ח (המרכז לטכנולוגיה חינוכית), את הקמת האוניברסיטה הפתוחה ואת הכנסת המחשבים הראשונים לכל תלמיד.

בעת היותה ראש ועדת הפרס זכתה פרלה נשר לפגוש עשרות מחנכים ומחנכות העושים עבודה חינוכית יוצאת דופן. פרלה מציינת כי התהליך כולו והמפגש עם המרואיינים היה מרגש ביותר. היא נפגשה עם מחנכים רבים מלאי מסירות ויצירתיות, המתמסרים לעבודתם הרבה מעבר למה שמצפים מהם. היא מרגישה כי בכך היא זכתה לחוות את פניה היפים של מערכת החינוך.

התאמת לימודי המתמטיקה לתלמידים

לדעתה של פרופ' פרלה נשר, כל תלמיד צריך ללמוד מתמטיקה כמה שהוא יכול – אם זה במסגרת 3, 4 או 5 יח"ל. היא מדגישה כי לימודי המתמטיקה הם מפתח חשוב לחיים, בלי קשר למה שאותו תלמיד יעשה אחר כך. היא מאמינה כי כל ילד יכול ללמוד מתמטיקה לפחות ברמה של 3 יח"ל (אם לא ברמה גבוהה יותר).

הבעיה היא שיש כשל רציני בדרך שבה מונגשת המתמטיקה מתחילת הדרך, ובשל כך היא הופכת להיות אימת הציבור. בכל בית ספר יסודי נתונים תלמידים שאומרים שהם שונאים חשבון. אותם פחדים ממתמטיקה שמתפתחים אצל התלמידים בגיל הצעיר, יכולות להיות להן השלכות עתידיות לא רק על לימודי המתמטיקה, אלא גם במקצועות הדורשים ידע מתמטי, כגון תכנות ועוד.

מכיוון שתחושת המסוגלות של התלמיד וזרעי האהבה (או השנאה) של המתמטיקה נזרעים כבר בבית הספר היסודי, חשוב מאוד מי יהיו אותם מורים שמלמדים מתמטיקה את התלמידים בבית הספר היסודי. לדעתה של פרופ' פרלה נשר חשוב מאוד, נוסף על כך, לאפשר לילדים ללמוד לפי יכולתם ובקצב שלהם, דבר שיאפשר להם לקבל ביטחון מבחינת היכולות המתמטיות שלהם ולהתפתח טוב יותר.

באחד ממסמכיה של פרופ' נשר היא כתבה כי כאשר מניחים שכל ילד ילמד ללכת או לדבר, יש לנו את כל הסבלנות שבעולם לסייע לו. גם אם נדאג לפעמים שהילד שלנו איטי לעומת הנורמה הממוצעת – לא נוליך אותו בכוח מעבר ליכולתו. אבל בלמידה בבית הספר נוצר מצב שבו כולם חייבים לצעוד בקצב שווה. באשר ללמידת החשבון – גישה כזו יכולה להיות קטלנית. המתמטיקה בנויה נדבך על נדבך, ואם נדבך אחד חסר – הבניין כולו עלול להתמוטט. הילד שהרגיש (לפעמים כבר בכיתה א') שהוא לא מבין מה שחבריו כבר הבינו, נתקף חרדה. והחרדה הזו יכולה להיות מחסום שאינו מאפשר לקלוט אפילו דברים פשוטים.

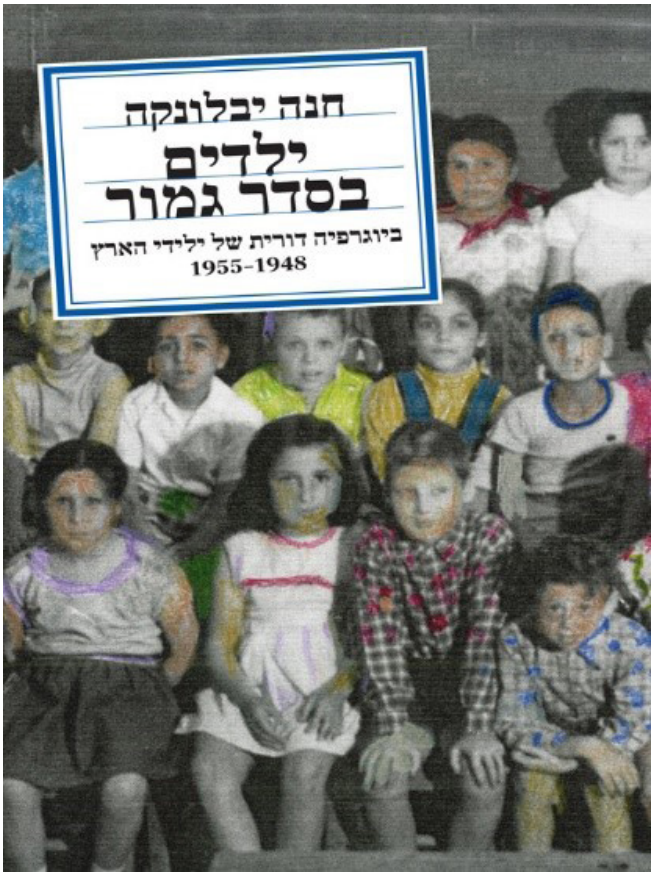
הגישה של פרלה לחינוך המתמטי היא שאף ילד לא צריך להיכשל, וכל ילד זקוק לסבלנות הנדרשת לצרכיו. בשל כך לדעתה חשוב מאוד שהתלמידים יוכלו ללמוד מתמטיקה בכיף. כדי לאפשר את זה, בעת עבודתה כיועצת במט"ח שולבו בספרי החשבון לבית הספר היסודי הרבה משחקים וסיפורים, הודגשו פנים מגוונות שבהן באה

לידי ביטוי יופייה של המתמטיקה, והייתה הקפדה על כך שהספרים יהיו נעימים לעין. נוסף על כך, מכיוון שלא תמיד אפשר להסתמך על המורים בבית הספר היסודי, הם יצאו מנקודת ההנחה כי המורה אינו מקור הידע ודאגו לכך שספרי הלימוד בחשבון יכילו את כל מה שצריך. כמו כן הפעילויות המופיעות בספרי הלימוד שפיתחו הן ברמות מגוונות כך שתתאמנה לכל מיני רמות של התלמידים.

מבט אישי

פרלה היא אחותו הצעירה של האלוף, אברהם אדן, שהיה מפקד גייסות השריון, מפקד פיקוד הדרום וממניפי דגל הדיו באילת.

לפרלה יש שתי בנות, חמש נכדות ואפילו חמישה נינים.



פרלה אוהבת לעשות ספורט. אם זה התעמלות, שחייה או הליכה. כמו כן היא אוהבת לקרוא. אחד הספרים שקראה לאחרונה הוא הספר "ילדים בסדר גמור" שכתבה פרופ' חנה יבלונקה.

הספר "ילדים בסדר גמור" הוא ביוגרפיה דורית והוא מספר את סיפורם של הילדים שנולדו במדינת ישראל מקום המדינה ועד 1955 – השנה שבה נולדו בני השנתון האחרון שנלחם במלחמת יום הכיפורים.

עוד תחביב גדול שיש לה הוא הטיולים, ואליהם מצטרף לו תחביב אחר – הכנת אלבומי טיול מושקעים. פרלה טיילה בכל ארץ שהיא יכלה לטייל בה. היא ביקרה בבורמה, אלסקה, וייטנאם, אינדונזיה, גוואטמלה, יפן, סין, פטגוניה, פרו, מקסיקו ועוד.

קווים לגישתה של פרלה להוראת המתמטיקה

פרלה עסקה רבות במעמד האובייקטים המתמטיים והמספרים במתמטיקה שמלמדים בבתי הספר היסודיים. לטענתה, יש להבדיל בין המספרים בשפה המתמטית ובין המספרים בשפה הטבעית.

המספרים בשפה המתמטית הם אובייקטים מופשטים, ואילו בשפה



הטבעית הם כַּמָּתים – מתארי היקף קבוצות של עצמים (quantifiers), ולפיכך גם מעמדם התחבירי: כשאנחנו אומרים "חמישה תפוחים נפלו מן העץ" או "ארבע בנות באו לכיתה" – נושאי המשפטים הם "תפוחים" ו"בנות" בהתאמה, והפעלים המלווים אותם, "נפלו" או "באו", הם בצורת רבים בהתאם לריבוי האובייקטים, והם מקבלים גם צורת זכר או נקבה בדומה לשמות תואר.

פרלה מסבירה שהדבר שונה באריתמטיקה, כאשר אומרים "חמש הוא מספר אי-זוגי". האוגד 'הוא' בצורת יחיד ולא כמו בדוגמאות לעיל שבהן האוגד הוא בצורת ריבוי (הם, הן), והנשוא הוא 'מספר אי-זוגי'. 'חמש' הוא שם של עצם בעל תכונות ייחודיות לו (למשל, "חמש הוא המספר שבא מייד אחרי המספר ארבע"). היא השתמשה כאן בניתוח הלשוני, אולם בעצם היא הסתמכה בהשקפתה על ניתוחו הפילוסופי של פרגה את המספר כאובייקט: השפה המתמטית היא שפת סמלים ייחודיים לאובייקטים ולפעולות המתמטיות. אין להם תרגום ישיר מן השפה הטבעית. הסמל '+' איננו המילה 'ועוד' או 'הוספה'. יש מקום לתאר בשפה הטבעית מצבים רבים שבהם יש רמזים מילוליים להוספה אך הפעולה הנדרשת היא חיסור, ולהפך: מילים הרומזות לחיסור אך עדיין צריך להשתמש בפעולה המתמטית '+'.

למשל, המילה "נשארו" נחשבת לרמז מילולי לפעולת חיסור. ניסוח סטראוטיפי, כדלקמן, מצוי בספרים רבים.

> בכיתה ב' 24 תלמידים. 16 מהם יצאו להפסקה.
>
> כמה תלמידים נשארו בכיתה?

אבל בדוגמה הבאה דרושה דווקא פעולת חיבור:

> בכיתה ב' נשארו בהפסקה בחדר הכיתה שלושה בנים, ונשארו גם ארבע בנות.
>
> כמה תלמידים נשארו בכיתה?

בראשית למידת החשבון בבית הספר, התלמידים בעצם צריכים לעבור מידיעתם את המספרים ככמתים אל פעולות במספרים (בלי לדעת את המושגים הפילוסופיים שנקטתי כאן בדִבְרֵי אל מורים). על המספרים ככמתים הילדים למדו כבר בגן באמצעות מניית קבוצות עצמים, כמו "שלוש בובות" או "ארבעה כדורים". עכשיו בבית הספר בלימודי החשבון עליהם לעשות את הקפיצה הבאה אל המספרים כעצמים במתמטיקה (אופרציונליות בלשון פיאז'ה).

הפעולות במתמטיקה נעשות על עצמים ולא על כמתים. התלמידים, כמובן, לא צריכים להכיר את המושגים המופשטים האלה אך צריכים לדעת לפעול עם מספר כיחידה אחת. למרבה הצער אבחנה זו אינה מוכרת לרוב המורים. פעמים רבות כשילד פותר שאלת

חיבור באמצעות מנייה, המורה מניחה שהוא הבין את משמעות הסמלים " + " או " = ". אבל לסמל " + " יש משמעות משלו.

בפסוק המתמטי "3 + 4 = 7" מחברים שני מספרים ולא מונים עצמים אחד לאחד. פעולות במספרים הן שלב אחר בלמידה משלב ההיכרות עם מספרים באמצעות מנייה, כשם שאלגברה היא שלב אחר מאריתמטיקה. כמה מהכישלונות כבר בכיתה א' נגרמים מן העובדה שיש ילדים שטרם הבשילו לפעולות עם מספרים בעוד אנו דוהרים עם הכיתה כולה לשלב הבא.

פרלה עסקה גם רבות בניתוח ופתרון בעיות מילוליות. פתרון בעיה מילולית משמעו חיפוש באופן מכוון ושונה אחרי המבנה המתמטי המשתמע מהטקסט של הבעיה המילולית. בניתוח לשוני נראה שבשאלה חד-שלבית תקינה, למשל, יש שלושה מבעים. בשניים מהם נתונים המספרים, והמבע השלישי הוא מבע השאלה. דווקא במבע הזה, שבו חסר המספר, נמצא המפתח להבנת מבנה העומק החיבורי או הכפלי של הבעיה המילולית. כמו כן אין להסתמך על רמזים מילוליים של מילים בודדות שיכולים להיות מכשילים.

פירוט רב יותר נמצא בסוף הריאיון.

סוף דבר

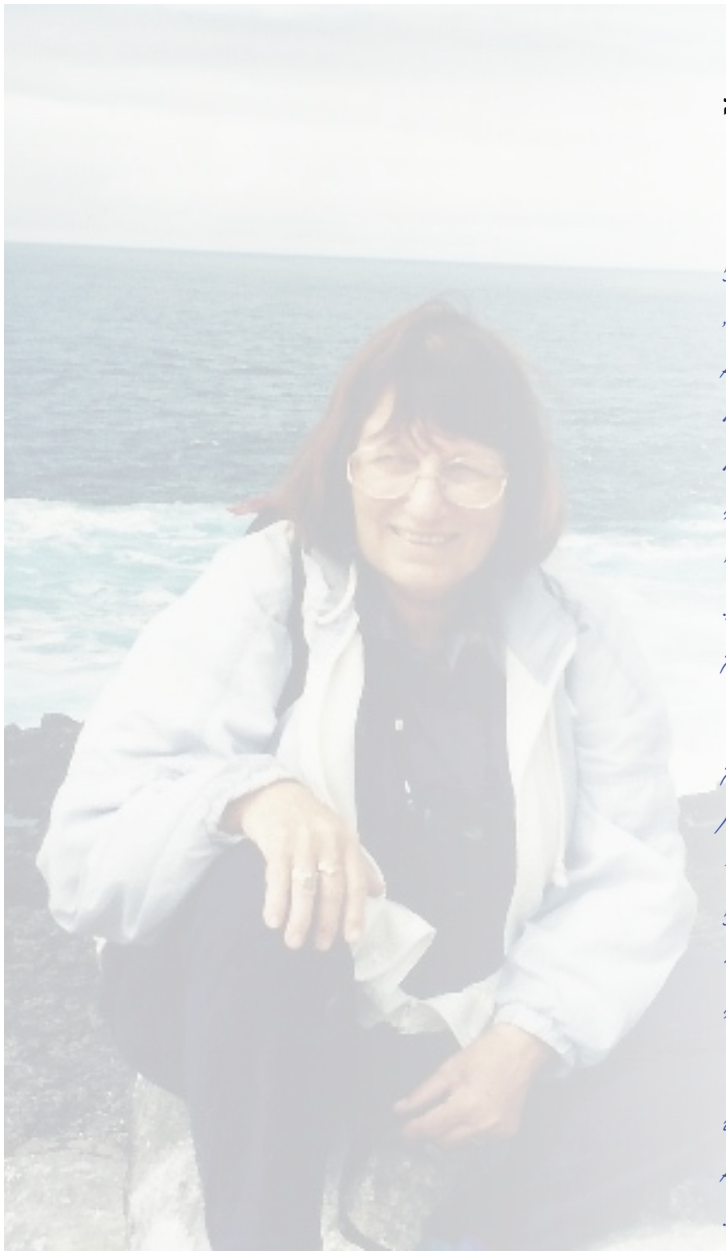
נסיים את הריאיון במילותיה של פרלה נשר עצמה, כפי שכתבה במסמך המסכם את פועלה:

אתה הגיעה את הסיכומים והצירופים:

ניתן לומר, שמיסוקי התקבלו מעליהם. הם בתרו בי יותר מאשר אני בחרתי בהם. אולם, פרט לשש השנים שבהן עבדתי בהקלאות ולעיתים השתתפתי, אהבתי כל רגע מתיי עבודתי. היו לי תפקידים ומיסוקים שהיו לעיתים אתגרים מדשים ודרשו ממני מאמץ או מקוריות, ואהבתי בואת בכלל, אהבתי ללמוד בכל יום דבר מדש, ובה למשך עד יומי אלה. רוח עז אלף השריתי על תלמידי ועל העובדים איתי, כאשר שכנעתי כל אחד מהם להמשיך ללמוד. בתקופה שבה יצאתי, הסברתי עם הנהלת מט"ח שיאשרו (במסגרת המשרה) יום לימודים למי שרוצה לתקשר בפועה, כי סברתי שרק אנשים שמתקדמים יכולים להיות יצירתיים. כמו כן קיימנו אתת לשבוע סמינר שבו הצגות בן במאמר תאורטי בתחום המחקר המתמטי.

מאוד היה לי, לצד עבודתי האקדמית, להיות מעורבת בשיעורים בשבה המחקר הנעשים במחקרי ומהשקפותי. אינני מאמינה בתאוריות חינוך מנותקות מן המציאה, ואין בם להצדיק בחשיבותן של התאוריות הכלליות הרבות מדי, "עלובות" בין חוקרי ה-PME. בין המאמרים האחרונים שפרסמתי היה מאמר שבו ביקרתי את 'התאוריזציה' בחינוך המתמטי, המציעה את עצמה ללא התקבלות, כאשר כל חוקר מגדיל לעצמו מערכת מונחים חדשה משלו ואינו מתחבר למה שנעשה בעבר בתחום.

אני מסתכלת אחורה בסיפוק. הגיתי ויצרתי יצירות שוות שהפכו למוסדות קבע הפועלים עמן רב לאחר שחדלתי לפעול בהם. כנראה שהם עוד על ברכים מאיתנים. אני נכנסת למעבדה בחשבון באוניברסיטת חיפה ואוש לא מכיר אותי. אני מטפלת למט"ח ומעבירת קורס החשבון החדשה מבקשת שאוליית את שמי. באלף אחד מן המקרים הללו לא נפגעתי. שמחתי והתגאיתי בליבי שיצירתי 'חיות ונושמות', ובה מתקיים להשקפתי שיש דברים חשובים יותר מן הי'אני' שלנו.



מקורות לקריאה נוספת

נשר, פ' (1974). מספרים וביטויים לשוניים של מספרים. **עיונים בחינוך, 2**, 117-124.

ספרד, א' ופרל, ח' (1995). שיחה עם פרופ' פרלה נשר, המדענית הראשית של משרד החינוך. **על"ה, 16**, 25-31. אוחזר מתוך http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle16/alle16-5.pdf

Nesher, P. (2018). Whole number thinking, learning and development: A commentary on chapter 7. In M. Bartolini Bussi & X. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (pp. 169-179). Cham: Springer.

Nesher, P., & Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics,* 8(3), 251-269. doi:10.1007/BF00385925

חוויות מכנס:

Bridges - Stockholm 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture

ליאורה נוטוב



ד"ר ליאורה נוטוב
מרצה בכירה בהאקדמית גורדון, חיפה. על בסיס ניסיונה הרב בהוראה ובחינוך כיתות מב"ר במערכת החינוך פרסמה את הספר "מחנכת בע"מ". כיום היא מכשירה מורים למתמטיקה ותחומי המחקר שלה הם מנהל החינוך, הוראת מתמטיקה ופדגוגיה של המחקר האיכותני. על בסיס מחקריה פרסמה מאמרים בכתבי עת מדעים ומקצועיים, ובשנת 2013 הייתה שותפה של פרופ' אורית חזן לעריכת ספר "הוראת מחקר איכותני: אתגרים, עקרונות, יישום".

בחודש יולי התקיים הכנס השנתי של קהילת Bridges. כנס זה מפגיש בין מדענים מכל מיני תחומים, אנשי מחשבים, מהנדסים, אומנים מתחומים מגוונים ואנשי חינוך מכל העולם. קהילה בין-לאומית זו מקדמת חינוך אינטגרטיבי ברוח STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) ו-STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics), כלומר קשר בין התחומים מתמטיקה, מדע, טכנולוגיה, הנדסה ואומנות. מטרת המפגש השנתי היא לקיים דיאלוג בין-תחומי כדי להעשיר כל אחד מהתחומים כאשר רעיונות מתחום מדע וטכנולוגיה משמשים השראה ליצירות אומנות, וכנגד זה חשיבה אומנותית ויצירות אומנות יכולות להחיות את תהליך למידה-הוראה בכיתה. ללמידה ברוח STEAM יתרונות רבים כמו פיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתית המלווה תהליך של חיפוש פתרונות רבים לשאלה-תופעה הנחקרת; ביטוי עצמי בדרכים מורכבות יותר ממילים ומספרים והתאמה לסגנונות למידה מגוונים (Burton, Horowitz, & Abeles, 2000; Eisner, 2002; Fenyvesi & Lähdesmäki, 2017). למידה מסוג זה מתאימה לא רק למערכת החינוך הקדם-אקדמית, אלא גם למערכת החינוך הגבוה. ולראיה, ישנן אוניברסיטאות בעולם שמציעות תארים גבוהים ב-STEM וב-STEAM (למשל Fresno Pacific University; Linz School of Education).

המפגש השנתי של קהילת Bridges הוא גולת הכותרת של פעילות הקהילה והוא מתקיים מדי שנה בסוף חודש יולי או בתחילת חודש אוגוסט, מדי שנה במדינה אחרת. במפגש זה משתתפים למעלה מ-300 איש מכל מיני מדינות באירופה, אמריקה ואסיה. השם שבחרו אנשי הקהילה לעצמם, "גשרים", מבטא היטב את מהות הכנס. במהלך הכנס מתקיימים חוץ ממושבים סטנדרטיים של דיווח על מחקרים והרצאות מליאה מוזמנות, גם סדנאות של למידה אקטיבית, תערוכת אומנות חזותית, אירועים מוזיקליים, פסטיבל סרטים, ערבי שירה והצגות תיאטרון. כמו כן במהלך הכנס נבנה גשר בין אנשי הקהילה המדעית המשתתפים בכנס ובין הקהילה של

המדינה המארחת – "יום משפחה". ביום זה מתקיימות סדנאות פתוחות לקהל הרחב. הכנס הראשון של Bridges התקיים בשנת 1998 ב-Southwestern College Winfield שבקנזס, וארגן אותו רזה סרהנגי – Reza Sarhangi (שנפטר השנה ובכנס שהשתתפתי בו הוקדשה סקירה לפעילותו, מה שהוסיף להרגשת המשפחתיות שארחיב עליה בהמשך). סביב הכנס התפתחה קהילה, והכנס מתרחב מדי שנה והיום יש לו ועדה מארגנת ותהליך מסודר של רישום, שיפוט והפצת תוצרים ב**אתר** שמכיל את כל המאמרים שהתפרסמו בכנסים, עבודות אומנות שהוצגו בתערוכה השנתית (כדאי מאוד לראות) ועדכונים על הנעשה בעולם בנושא של STEM ו-STEAM.

השנה זו הייתה הפעם הראשונה שנחשפתי לקהילת Bridges כאשר אישרו לי להציג את המחקר שלי בכנס. נכבשתי. האווירה בכנס היא של משפחה גדולה ומאושרת שמגיעה בשמחה לחגיגה השנתית שמצפים לה בקוצר רוח. אתחיל מתיאור המקום שבו התקיים הכנס, לאחר מכן אספר על אחת הסדנאות, על המחקר שלי ולבסוף על האירועים החברתיים שמבדילים כנס זה מכנסים אחרים שהשתתפתי בהם.

> "לכנס Bridges הגעתי כדי להציג מחקר שליווה את הקורס "כשמתמטיקה פוגשת אומנות". זהו קורס א-סינכרוני מקוון שפיתחתי ולימדתי בשנת הלימודים תשע"ח באקדמית גורדון.

השנה התקיים הכנס במוזאון המדע של שטוקהולם (Tekniska Museet – The National Museum of Science and Technology). המוזאון נמצא באזור של כמה מוזאונים על שפת אגם ציורי. המושבים לסוגיהם התקיימו ברחבי המוזאון שפרוש על שטח גדול ועם גינה טכנולוגית שנראים בצילום, בזמן שמתקיימת בו פעילות רגילה והיה אפשר להתערבב בקהל ולצפות באורח החיים השוודי. סדנאות אחרות התקיימו במוזאונים הסמוכים: Maritime Museum ו-Ethnographic Museum. בזמן הכנס המשתתפים יכלו ליהנות מביקור במוזאונים אלה בחינם.



הצילומים נלקחו מתוכנית הכנס:
http://bridgesmathart.org/uploads/2018_bridges_program_final_2.pdf



סדנאות: בכל סדנה שהשתתפתי בה, נהניתי, למדתי ועם זה הרגשתי שאני מפסידה את התכנים של הסדנאות האחרות. כמובן, אי אפשר להיות בו בזמן בכל הסדנאות (וחוץ מזה, כמה כבר אפשר להספיק ביום אחד?), אך תחושת הפספוס היא אולי האינדיקציה הטובה ביותר לאיכות התכנים. משלל הסדנאות שהשתתפתי בהן, אספר בקצרה על סדנה אחת שבה בניתי תחנת רוח באמצעות 4D Frames שפיתח חוגול פארק (HoGul Park) מדרום קוריאה. **4D Frames** הן קשיות שאפשר לחברן באמצעות מחברים מיוחדים. אפשר לבנות באמצעותם גופים, רובוטים, פסלים וכל מה שתצליחו לייצר בדמיונכם.

מה שלדעתי מיוחד בעזרים אלה הם הפשטות והגיוון ביישום. תחנת הרוח שבנינו בפרק זמן קצר, אפשרה להבין את החוקים הפיזיקליים שמפעילים אותה וגם ליהנות מהאסתטיקה של התוצר – והינה לכם חיבור בין פיזיקה, מתמטיקה, הנדסה ואומנות.

לכנס Bridges הגעתי כדי להציג מחקר שליווה את הקורס "כשמתמטיקה פוגשת אומנות". זהו קורס א-סינכרוני מקוון שפיתחתי ולימדתי בשנת הלימודים תשע"ח באקדמית גורדון. הקורס עסק בשישה מושגים מתמטיים: ריצופים, קשר בין אפס לאינסוף בחישוב שטח והיקף, ראייה מרחבית (בהקשר של צורות בלתי אפשריות), חתך הזהב, ממד ודמיון עצמי. בכל אחת משש יחידות הקורס, הסטודנטיות נדרשו: 1. לבדוק את הידע הקודם שלהן בנושא באמצעות דיון בפורום או באמצעות משימה מקדימה; 2. ללמוד את הנושא המתמטי באחת מהשיטות: סרטון שהכנתי, מאמר או מצגת בנושא; 3. לתרום יצירה מקורית או לא מקורית לגלריה שיתופית ולהסביר במשפט אחד איך המושג המתמטי בא לידי ביטוי ביצירה; 4. לפתור תרגילים או לעשות פעילות חקר בנושא הנלמד (לא להגשה. לכל פעילות ניתן גם פתרון מפורט); 5. לבחון את הידע שצברו על המושג הנלמד ביחידה באמצעות מבדק מקוון. בסוף הסמסטר היה מבחן שהכיל שאלות על כל אחד מהנושאים שנלמדו בקורס. מגוון הנתונים שנאספו בקורס ומספר הסטודנטים (127) אפשרו לנתח את הנתונים (Nutov, 2018a, 2018b) וללמוד על תרומת שילוב האומנות בלימודי מתמטיקה. מטרת המחקר הייתה לבחון האם קיים קשר בין יצירות אומנות שסטודנטים יצרו או בחרו כמייצגים את המושגים המתמטיים הנלמדים, ובין הישגים מתמטיים. המחקר היה בין הדיווחים המעטים על המחקרים בתחום STEAM שהוצגו בכנס וזכה להתעניינות רבה. כמו כן זכתה להתעניינות הקהל תערוכה שהוקמה במכללה והוצגו בה עבודות אומנות שסטודנטיות הגישו כחלק ממטלות הקורס (אתם מוזמנים לבקר באתר שליווה את **התערוכה**).

האירועים הפחות אקדמיים שהיו בכנס, שעושים אותו לכה שונה מכנסים אחרים שהשתתפתי בהם היו יום המשפחה, הצגה, ערב דיון בנושא STEAM וערב "כישרונות הכנס". יום המשפחה הוא אירוע ותיק של הכנס ומשמש אחת הפעילויות המרכזיות בו. ביום זה משתתפי הכנס עורכים סדנאות לקהל הרחב ומזמנים להם התנסויות במדע בשילוב אומנות. הפעילויות חווייתיות ומיועדות לילדים בכל מיני גילים ולהורים ומתקיימות בשפה האנגלית. היה מעניין מאוד לצפות בילדים בני 5 עד 12 מתמודדים עם הנחיות באנגלית בנושא של מתמטיקה ומוזיקה (הסדנה שבחרתי ללכת אליה).

קידום STEAM יקר לליבם של כל האנשים שמגיעים לכנס זה. השנה הוחלט לקיים דיון חופשי בערב הראשון של הכנס. את הדיון

הנחה כריסטופר בראונל (Cristopher Brownell). בדיון זה אנשים העלו מחשבות על קידום STEAM וגם שיתפו את הנוכחים על היוזמות בנושא המתקיימות במדינות האחרות. לאחר הדיון הוקמה קבוצה וירטואלית של אנשים שמעוניינים לשתף בחוויות שלהם וגם לבקש עצה ותמיכה. בערב זה זכיתי להכיר שני אנשים שקשורים לנושא "פרקטלים" שמלווה אותי מהתואר הראשון: מתמטיקאי ספרדי, ג'וס לואיס רודריגז (Jose Luis Rodriguez Blancas), שהנחה את בנייתו של שטיח שרפינסקי הגדול ביותר בעולם ומתכנת (שלצערי אני לא זוכרת את שמו), שהיה שותף ליצירת האיורים בספרו החשוב של בנויה מנדלברוט "The fractal geometry of nature".

השנה בכנס הועלתה הצגה "Witches of Agnesi", שכתבה סוזאן גרופסקי (Susan Gerofsky) וביים סטיב אבוט (Steve Abbot), שניהם אנשים ותיקים בקהילת Bridges. ההצגה דנה בחייהן ובמאבקן על הזכות לעסוק במתמטיקה מבחינה מקצועית ולקבל הכרה על פועלן האקדמית של שלוש מתמטיקאיות: מריה אגנסי, סופיה קובלבסקי ואמי נויטר. הייחוד של ההצגה היה לא רק התוכן המרתק, אלא גם הביצוע – השחקנים היו משתתפי הכנס וקרוביהם שעשו חזרות במהלך הכנס בזמן קצר מאוד – דבר שלא פגע באיכות ההצגה.



ערב כישרונות של משתתפי הכנס היה הפתעה מוחלטת בעבורי. מתחילת הכנס, מתמטיקאי-אומן נורווגי, מייק נאילור (Mike Naylor) (שאת עבודותיו *Naked Geometry* אני נוהגת להציג בקורסים שלי – תארו לעצמכם איך הגבתי כשפגשתי אותו פנים אל פנים), גייס אנשים להופיע (לצערי אין לי כל כישרון מיוחד ולא השתתפתי). בערב זה אנשים – מדענים שבדרך כלל נחשבים למעונבים ו"יבשים" במידה מסוימת – הפגינו כישרון לא מבוטל בנגינה, שירה, ריקוד, סטנד אפ ועוד. הערב נפתח בתצוגת אופנה מרהיבה על טהרת עיצובים מתמטיים – אם זה בגזרות מיוחדות, בתכשיטים או בהדפסים. מובן שהדוגמנים היו משתתפי הכנס עצמם. הערב נמשך לתוך הלילה כאשר אנשי הכנס התקשו לסיים אותו ואנשי המוזאון, למרות היותם שוודים מנומסים, רמזו בכל דרך אפשרית שהגיע הזמן לסיים. חוויה מרגשת. לצערי, הייתי כה מרותקת ועסוקה בהנאתי עד שלא צילמתי ולא תיעדתי, וחבל כי היו בערב זה פנינים של ממש, כמו למשל עיבוד ייחודי של שירי להקת ABBA לתכנים של STEAM.

לסיכום, הכנס הבא של Bridges מתקיים באוסטריה בעיר Linz מ-16 ביולי עד 20 ביולי. באתר הכנס אפשר להתעדכן בדרישות ולוח הזמנים להגשת הצעות. ממה הספקתי ללמוד על הנושא עד כה, אף שתחום STEAM תופס תאוצה בכל העולם גם במערכת החינוך וגם בחינוך הגבוה, אין מחקרים רבים בתחום בכלל ומחקרים שמשתתפי המחקר הם סטודנטים בפרט. מי שמחפש שדה מחקר מעניין ומתפתח – STEAM הוא אחד מהם.

רשימת מקורות

Burton, J. M., Horowitz, R., & Abeles, H. (2000). Learning in and through the arts: The question of transfer. *Studies in Art Education, 41*(3), 228-257. doi:10.1080/00393541.2000.11651679 DOI: 10.2307/1320379

Eisner, E. W. (2002). *The arts and the creation of mind*. New Haven & London: Yeal Universiry Press.

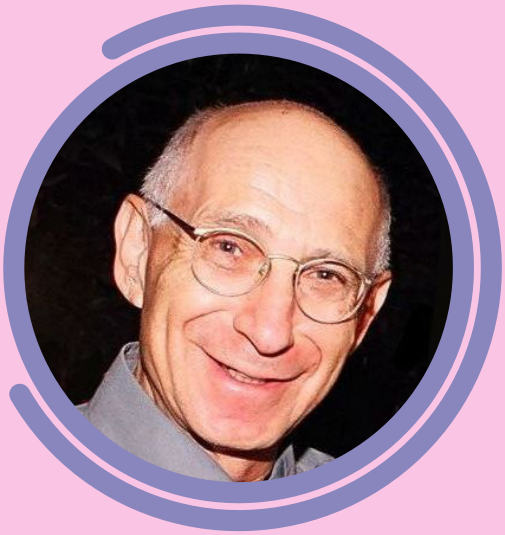
Fenyvesi, K., & Lähdesmäki, T. (2017). *Aesthetics of interdisciplinarity: Art and mathematics*. Cham: Springer.

Nutov, L. (2018a). Is dimension a size, a surface or a space? Pre-service teachers' perceptions of the concept. In B. Maj-Tatsis, K. Tasis, & E. Swoboda (Eds.), *Mathematics in the real world* (pp. 231-240). Rzeszow: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Nutov, L. (2018b). When mathematics meets art: Does art contribute to the understanding of mathematical concepts? In E. A. Torrence, B. F. Torrence, K. Fenyvesi, & C. H. Séquin (Eds.), *Bridges Stockholm 2018: Conference proceedings* (pp. 341-346). Phoenix, AZ: Tessellations.

המלצה על ספרן של אילנה לבנברג ודורית פטקין "גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה"

שלמה וינר



פרופ' שלמה וינר
פרופסור אמריטוס להוראת מדעים של האוניברסיטה העברית ואוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר-שבע

כשאני מתבקש לחוות דעה על ספר נתון אני קודם כול שואל את עצמי מיהו קהל הקוראים הפוטנציאלי של הספר. באשר לספרן של פרופ' אילנה לבנברג ופרופ' דורית פטקין: "גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה" – התשובה ברורה. הספר מיועד לכל מורי המתמטיקה, וכן לכל מי שמכשיר מורים למתמטיקה בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה.

בספר זה שערכו לבנברג ופטקין מופיעים מאמרים אלה:

1. מאמרה של צביה מרקוביץ "צוהר לגיאומטריה בגיל הרך" (עמ' 19-50).

   מאמר זה מיועד לגננות. לא מעט מפעילותן הוא הכרת צורות גיאומטריות, בעיקר משולשים וריבועים. המאמר מספק תגובות של ילדים לפעילויות עם הגננות. אחד הדברים החשובים לכל מורה וכאן לגננת הוא להבין איך עובד הראש של הילדים. התגובות שמובאות במאמר הן חומר מאלף.

2. מאמרן של צביה מרקוביץ ודורית פטקין "יחס ואמונות כלפי גיאומטריה וידע תוכן לגבי צורות וגופים בקרב גננות" (עמ' 51-78).

   מאמר זה מיועד בעיקר למכשירי גננות במכללות לחינוך ובפרט לאלה האחראים לצד המתמטי של הכשרתן. עיקרון חשוב בהוראה הוא לדעת את נקודת ההתחלה של התלמיד. אחד הפסיכולוגים העיקריים של ההוראה והלמידה, אוזובל, אמר שאם היה צריך לתמצת את כל תורתו למשפט אחד ("כל התורה על רגל אחת", כמאמר חז"ל) היה אומר: "ברר את מצב הידע של תלמידך והחל ללמד אותו משם."

   מאמרן של מרקוביץ ופטקין מספק למכשירי הגננות מידע מאלף על מצב הידע המוקדם של הגננות בנקודת ההתחלה של הכשרתן. מתברר כי כמעט בכל נושא שאנו נחשפים אליו יש לנו דעות מוקדמות (להבדיל מדעות קדומות). אין אחד שהוא בבחינת "לוח חלק" (Tabula rasa).

3. מאמרה של ניצה כהן "לראות במחשבה": שילוב אנליטי-ויזואלי בביצוע פעילויות בגופים (עמ' 81-113).

   זהו מאמר מחקרי המבוסס על עבודת הדוקטור של כהן (2007). בעבודה זו חקרה כהן יכולות של תלמידים המתמחים בהוראת

גיאומטריה לדמיין צורות מרחביות (פירמידה, מנסרה, גליל וחרוט). כהן מבקשת מהנחקרים לבצע מטלות מסוימות שאחדות מהן כבר נזכרות בספרם של פיאז'ה ואינהלדר (Piaget & Inhelder, 1967).

כהן דנה בשאלה (עמ' 132) האם ההתנסות של תלמידה במטלות שהיא הציבה להם תרמה להתפתחות היכולת שלהם לבצע סיבוב מנטלי. תשובתה של כהן לשאלה זו אינה חד-משמעית. המחקר שלה לא כלל מעקב. בכל זאת היא מציינת שבמבחן שהתקיים בסוף הסמסטר הראשון, הישגי התלמידים היו נמוכים עד נמוכים מאוד. לעומת זאת, במבחן שניתן בסוף הסמסטר השני אחוזי ההצלחה היו מרשימים.

4. מאמרן של דורית פטקין, עטרה שריקי ורותי ברקאי "פיתוח כישורים מרחביים באמצעות אימון ביצירת דימוי מנטלי של גופי סיבוב" (עמ' 114-135).

יש דמיון רב בין מאמר זה למאמרה של ניצה כהן לעיל ולכן לא אלאה את הקורא בתיאור.

5. מאמרה של דורית פטקין "שאלון ואן הילה מורחב ככלי למיפוי ידע והבנה בגיאומטריה של המישור והמרחב" (עמ' 139-165).

במאמר זה פטקין סוקרת את תאוריית ואן הילה, תאוריה של בני זוג הולנדים, פייר ודינה. דינה נפטרה ופייר המשיך בפיתוח התאוריה שלה לאחר מותה. הטענה הבסיסית הייתה שמורי הגיאומטריה מדברים בשפה שתלמידיהם אינם מבינים. בגרסה הראשונה של התאוריה שלהם דיבר הזוג על חמש רמות של חשיבה. לאחר פטירתה של דינה צמצם פייר את מספר הרמות לשלוש, הן משום הקושי לקבוע את רמת החשיבה של התלמידים באמצעות שאלונים והן משום שהרמה החמישית מתאימה למעשה לתלמידי מתמטיקה הלומדים אותה כמקצוע ראשי באוניברסיטאות. זלמן אוסישקין, איש חינוך מתמטי באוניברסיטת שיקגו, פיתח שאלון (1982) שבאמצעותו אפשר לקבוע את רמתו של נבדק במדרג הרמות של ואן הילה. פטקין ולבנברג הסתמכו על שאלון הזה ובנו בעבורו גרסה בעברית. יש מקום לומר שפטקין היא "הגברת הראשונה" של תאוריית ואן הילה במחוזותינו. בעמ' 147 ישנה דוגמה לשאלה אחת מתוך השאלון של פטקין ולבנברג. השאלון במלואו מוצג בספר בעמ' 154-165 (אני נהגתי לעבור עליו עם תלמידותיי במכללת "אחווה" בעת לימודיהן לתואר שני בחינוך מתמטי בבית הספר היסודי).

6. מאמרה של אילנה לבנברג "שני מורים – שאלה אחת בגיאומטריה" (עמ' 166-195).

במאמר זה מציגה לבנברג מחקר שבו עקבה אחרי שני מורים (ליתר דיוק מוֹרָה ומוּרָה) בשיעור גיאומטריה שבו הם מציגים לתלמידיהם שאלה אחת המופיעה בעמ' 197. לבנברג מנתחת את האינטראקציה בכיתה מתוך התמקדות בשלושה סוגי שיח שמתקיימים בדרך כלל בכיתות: א. מונולוג של המורה; ב. דיאלוג מורה – תלמיד; ג. רב-שיח. כמובן, רצוי שבכל כיתה יבואו לידי ביטוי שלושת סוגי השיח. למרבית הצער, ישנם מורים שמסתפקים במונולוג שלהם כמורים.

7. מאמרה של נעמי פרוסק "השפעת עיצוב המטלות וסביבת הלמידה על המעבר מהצדקות אינטואיטיביות ויזואליות לשימוש בטיעונים לוגיים דדוקטיביים" (עמ' 196-226).

במאמר זה פרוסק מציגה מחקר שאוכלוסייתו הייתה צמדים של פרחי הוראה שהשתתפו בקורס "גיאומטריה בסביבה ממוחשבת". פרוסק מנתחת את השיח של צמדי הנבדקים ודנה בשאלה באיזו מידה הוא מסתמך על ידע לוגי-דדוקטיבי לעומת הסתמכות על אינטואיציות. ממצאיה של פרוסק מעניינים ומאלפים.

8. מאמרה של שולה וייסמן "שאלות נכון/לא נכון בגיאומטריה ככלי לחשיפת ההבנה של הלומדים" (עמ' 227-238).

בדרך כלל רצוי לברר את רמת ההבנה של תלמידים באמצעות ריאיון או לפחות באמצעות שאלון שבו הם מתבקשים לנמק את תשובותיהם. אבל ההכרח לא יגונה ולפעמים על החוקר להסתפק בשאלון מהסוג "נכון/לא נכון". מתברר שגם שאלון כזה יכול לספק מידע על תפיסות שגויות של תלמידים. לדוגמה, השאלה הבאה (עמ' 132): "מרובע שיש לו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן." תשובה: "לא נכון, יכול להיות גם ריבוע." מתברר שהתלמיד אינו יודע שריבוע הוא גם מלבן. במילים אחרות, קבוצת כל הריבועים היא קבוצה חלקית של קבוצת כל המלבנים. בעמ' 232-233 מופיעות שמונה שאלות נכון/לא נכון שבאמצעותן אפשר לחשוף תפיסות שגויות של תלמידים ובהמשך (בעמ' 234-236) מופיעות הצעות לטיפול בתפיסות שגויות אלה בעזרת התוכנה "גיאוגברה".

9. מאמרן של שירן חוף ואילנה לבנברג "בין חרדה להערכה: עמדות של מתכשרים להוראה כלפי מקצוע הגיאומטריה" (עמ' 239-264).

מאמר זה דן בבעיית "חרדת המתמטיקה". חוף ולבנברג הציגו לפרחי ההוראה שאלון שאמור לבדוק את עמדות הנבדקים כלפי מקצוע הגיאומטריה. את התשובות הן ניתחו מבחינה כמותית. לדוגמה, על השאלה "אין שום חשיבות לציון שלי בגיאומטריה" כ-30% השיבו שהם מסכימים לטענה זו. יש להביא בחשבון שפעלה כאן גם הרצייה החברתית, אף שהשאלונים היו בעילום שם.

10. מאמרם של רות סגל ומשה סטופל "טכנולוגיה ממוחשבת ככלי לגילוי תכונות גיאומטריות מפתיעות של שימור והכללה" (עמ' 267-281).

המאמר מתאר את השימוש בטכנולוגיות ממוחשבות לגילוי משפטים גיאומטריים שונים. הדור הנוכחי של פרחי ההוראה נולד כשבידו כבר השלט של המחשב. אני, ששייך לדור הדינוזאורים, למדתי גיאומטריה אצל המורה המיתולוגי תוחמן כשספרם של תוחמן וקלעי שימש לנו ספר של בעיות הוכחה ובעיות בנייה. אגב, פטקין ולבנברג השתמשו בספר זה כמודל ספרן "הנדסת המישור" שיצא בשני כרכים. ספר זה עומד לצד ספריו של מורי ורבי תוחמן זכרונו לברכה. הספר הזה כבר בלה מזוקן אבל אני שומר עליו כזיכרון נעורים יקר. למותר לציין כי בספרן של פטקין ולבנברג ישנם שרטוטים שלא היה אפשר להפיק בדורם של תוחמן וקלעי משום שהטכנולוגיות שקיימות היום להפקת ספרים לא היו כלל בזמנם של תוחמן וקלעי. המאמר של סגל וסטופל מתאר את השימוש בטכנולוגיה ממוחשבת להכשרת פרחי הוראה. הספר מציג מספר מטלות חקר בגיאומטריה שהשימוש בטכנולוגיה הממוחשבת מסייע בפתרונן.

11. מאמרם של סיניצקי וסטופל "רעיון השימור בגיאומטריה: היסטוריה ארוכת טווח והשלכות עדכניות ללמידה" (עמ' 282-304).

זהו מאמר תאורטי בעיקרו שטוען כי על מספר לא מבוטל של משפטים גיאומטריים אפשר להסתכל מהזווית של שימור, בהם משפט פיתגורס, משפט תאלס, המשפט הטוען כי זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ולמעשה כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותו מיתר שוות זו לזו. מובאות דוגמאות אחרות שאפשר להסתכל עליהן מזווית השימור.

12. מאמרן של ליאורה נוטוב ועטרה שריקי "מעבר לאוקלידס:

פרקטלים כמקור לפעילויות חקר בגיאומטריה" (עמ' 305-351).

מאמר זה עוסק בפרקטלים. את המונח הזה הציע המתמטיקאי מנדלברוט ב-1983. זהו מונח חדש יחסית. מנדלברוט התבונן בצורות למיניהן בטבע, כמו עלים של צמחים מסוימים, חופי בריטניה ועוד. רצוי שמי שמכשיר את עצמו להוראת גיאומטריה יכיר את המושג הזה אבל שליטה בו דורשת רמה גבוהה של ידע מתמטי שהיא בדרך כלל אינה בהישג ידם של תלמידי גיאומטריה וגם לא תמיד בהישג ידם של מורי הגיאומטריה. יעידו על כך החישובים המסובכים המוצגים במאמר הזה. אבל אם נתעלם מחישובים אלה נוכל ליהנות ממספר לא מבוטל של שרטוטים של פרקטלים (עמ' 306, 318, 331, 334, 337, 338).

13. מאמרם של ח'ירייה מסארוה, איגור ורנר ודאוד בשותי "אתנו-מתמטיקה וחינוך לרב-תרבותיות: ניתוח אורנמנטים גיאומטריים ובנייתם" (עמ' 355-366).

במאמר זה המחברים מציגים קורס שהם פיתחו בטכניון המיועד לפרחי הוראה, וכן למורי מתמטיקה בעת תוכניות השתלמות והעשרה. בעמ' 360 מוצג קישוט שנבנה במהלך הקורס.

14. מאמרו של אלי אפלבוים "מקילוף קלמנטינה לעיבוד תמונה: איך להמיר את הפחד מגיאומטריה בהכרה בחשיבותה וביופייה" (עמ' 367-388).

השאלה שמעסיקה את המחבר היא האם הגיאומטריה יכולה לתרום לתחום החדשני של עיבוד תמונה. תשובתו של אפלבוים חיובית. הוא מספר על התפתחות הגיאומטריות הלא-אוקלידיות של גאוס ורימן. המחבר מזכיר שימושים של עיבוד תמונה ברפואה (תמונות MRI). כמו כן הוא מציג פעילות שמתאימה אפילו לתלמידי בית ספר יסודי. הפעילות עוסקת בטיסה מתל-אביב לניו-יורק. אפלבוים מציג לתלמידים איור שבו משורטט נתיב הטיסה מתל-אביב לניו-יורק והוא שואל אותם מדוע לדעתם זהו הנתיב הקצר ביותר בין שתי הערים. הוא נעזר בתפוז כאמצעי המחשה. התלמידים מבינים שהתפוז מייצג את כדור הארץ, זה כמו זה כדורים. זה עוזר להם להבין מדוע באיור שבעמ' 384 הקשת היא המסלול הקצר ביותר בין שתי הערים ולא הקו הישר המחבר ביניהם (באיור מוצגת פריסה של הגלובוס).

רשימת מקורות

לבנברג, א' ופטקין, ד' (2018). **גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה**. תל-אביב: מכון מופ"ת.

Piaget, J., &, Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). London: Routledge and K. Paul.



JERUSALEM COLLEGE OF TECHNOLOGY
LEV ACADEMIC CENTER

cet
The Center for Educational Technology

June 21-25, 2020

We are honored to invite you to attend the
8th International Conference
on Computer Algebra and
Dynamical Geometry in
Mathematics Education

CADGME 2020

at the
Jerusalem College of Technology, Israel

The conference is an opportunity
for interested academics from around
the globe to present research
and developments, exchange ideas
and nurture collaboration on
Computer Algebra Systems,
Dynamical Geometry Systems,
and other digital tools.
STEAM Education will be a central topic
of the conference.

Co-chairs:
Thierry (Noah) Dana-Picard, JCT, IL,
Sara Hershkovitz, CET, IL

Program Committee:
Miriam Amit, Ben Gurion University, IL
Yaniv Bitton, Center for Educational Technology, IL
Kristof Fenyvesi, University of Jyväskylä, SU
Zsolt Lavicza, Johannes Kepler University, AT
Ilias Kotsireas, Wilfrid Laurier University, CA
Csaba Sárvári, Pécs University, HU
Yaacov Koletker, JCT, IL

Invited speakers (partial list)
Miriam Amit and Shlomi Dolev, Ben Gurion University, IL
Gershon Elber, Technion, Haifa, IL
Zoltán Kovács, The Private University College of education of the Diocese of Linz, Linz, AT
Attila Szabo, Stockholm University, SE

Info: www.cadgme2020.jct.ac.il
email: cadgme2020@jct.ac.il

תכונות גאומטריות מפתיעות - החקר, ההוכחה והכללה שלהן

משה סטופל
אבי סיגלר
עידן טל



פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.

מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים, בהן שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בכתבי עת שונים בארץ ובחו"ל.

עוסק בחקר יופייה של הגאומטרייה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.



ד"ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד"ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.

מרצה במכללת אפרתה, ירושלים ובשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.



עידן טל

בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על-יסודי) בסמינר הקיבוצים. סטודנט לתואר שני בטכנולוגיות בחינוך בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

נערך חקר דינמי של שתי תכונות גאומטריות מפתיעות שבכל אחת מהן ישנן תכונות שימור אחרות. התכונה הראשונה שייכת לשני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר צלעות ובעלי קודקוד משותף אחד. נמצא שכל הישרים המחברים קודקודים מתאימים של שני המצולעים, נחתכים בנקודה אחת. נקודה זו היא נקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המצולעים. התכונה השנייה שייכת למצב שבו בין שני מעגלים זרים המשיקים לשוקי זווית, ובהם משולש שווה שוקיים המשיק לשני המעגלים כך שבסיסו על שוק זווית אחת וקודקוד הראש שלו על השוק השנייה – סכום הרדיוסים של המעגלים – שווה לגובה המשולש.

הקדמה - הטמעת שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת להוראת גאומטרייה איקלידית

מאז ימי המתמטיקאים הקדמוניים ועד ימינו חלה התפתחות עצומה בכמות הידע בתחום גאומטרייה איקלידית. תחום זה בנוי מאקסיומות יסוד והמשכן במשפטים הבנויים זה על גבי זה כשכל משפט מציין תכונת שימור מאפיינת. הוכחות ופתרון בעיות בגאומטרייה נשענים על שימוש במשפטים שיש בהם הנמקות לנכונות של כל שלב בדרך אל ההוכחה או פתרון הבעיה. בכל מאות השנים שבהן נחקרה הגאומטרייה נוסחו משפטים רבים מאוד ואף בימינו מתגלים מפעם לפעם משפטים ותכונות חדשות, וכן הוכחות אחרות ומפתיעות למשפטים ידועים. פעילות ענפה של חקר תכונות גאומטריות מתרחשת בנקודות רבות של העולם הגלובלי.

לימוד הגאומטרייה מחייב הכנה ושימוש באיורים של צורות גאומטריות למיניהן, אך בשלושים-ארבעים השנים האחרונות בשל כל מיני סיבות דעכה יכולת התלמידים להשתמש בכלי השרטוט המסורתיים: עיפרון, מחק, סרגל, מחוגה, משולשים לסוגיהם ומד-מעלות. היום תלמידים מתקשים להעתיק צורות גאומטריות מלוח הכיתה או מספרי הלימוד וגם לצייר משולש על פי אורכי צלעותיו. דבר זה מקשה עליהם להתמודד עם פתרון משימות גאומטריות.

לדוגמה כאשר נטען לפני התלמידים שתכונה בלתי מוכרת קיימת במרובע מסוים, מספיק לעבוד על ציור אחד ולהשתדל להוכיח את הטענה. אולם כאשר מדובר על מרובע כלשהו הרי שההוכחה מסובכת יותר, כיוון שיש בה דוגמאות רבות של מרובעים: קמור, קעור, טרפז, מקבילית, מעוין, דלתון, מרובע חסום במעגל, מרובע חוסם מעגל. כאשר קיים קושי להוכחת התכונה במרובע הכללי ביותר, יש צורך להכין ציורים עבור כל הפעמים המסוימות המתאימות – דבר המקשה על התמודדות עם הבעיה.

כדי להתמודד עם הבעיה הנזכרת לעיל ועם קשיי הבנה של תכונות גאומטריות, מחקרים בחינוך מחפשים דרכים לשפר את איכות ההוראה והלמידה, ומתוך כך הם מתמקדים גם בשילוב הטכנולוגיה בהוראה, ובעיקר בטכנולוגיה הממוחשבת המאפיינת תחומים רבים בחיי היום-יום. הכלי הטכנולוגי הממוחשב עשוי למשוך את תשומת ליבו של הלומד באמצעות היכולת שלו להציג אובייקטים מתמטיים הצגה דינמית ולתת משוב למשתמש במהלך פתרון בעיות ודיון בנושאים למיניהם. למידה המשלבת שימוש בתוכנה דינמית מאפשרת ללומדים לגלות מודלים מתמטיים, ייצוגים מגוונים וקשרים בין תיאורים גרפיים וצורות גאומטריות למושגים המתמטיים. בלמידה באמצעות הכלי הטכנולוגי התלמידים יכולים לתאר טוב יותר מושגים מתמטיים לעומת הוראה שאינה משלבת כלי טכנולוגי.

בעידן שלנו עומד לרשות החוקרים כלי ממוחשב שמאפשר להעלות השערות ובדיקתן מייד, בלי צורך להשתמש בכלי השרטוט המסורתיים, ובו כל שינוי, אף הקטן ביותר, מחייב הכנת איור חדש ולעיתים נדרשים גם חישובים מתמטיים.

השימוש בטכנולוגיה ממוחשבת מאפשר לבדוק מבחינה חזותית את נכונות ההשערה, אך אין להסתפק בכך ויש להוכיח אותה כמקובל במתמטיקה, בליווי ההנמקות הנדרשות (Leung, 2008; Martinovic & Manizade, 2014; Oxman & Stupel, 2018; Stupel, Sigler, & Tal, 2018; Wassie & Zergaw, 2018).

נתאר וננתח חקירת בשילוב תוכנה גאומטרית דינמית (DGS), של שתי בעיות גאומטריות שבהן מופיעות תכונות שימור מפתיעות ומעניינות (Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2016), עם יכולת להגיע להכללה. החקירה נבדקה בדיקה מאתגרת לעומק, אך לא מתסכלת.

התכונה הראשונה שייכת לקווים הנחתכים בנקודה מסוימת

תלמידי תיכון וכמובן פרחי הוראה ומורים למתמטיקה מכירים צורות גאומטריות שבהן קווים מסוימים נחתכים בנקודה אחת. לתזכורת נציין כמה מהן:

א. שלושת הגבהים של משולש נחתכים בנקודה אחת.

ב. שלושת התיכונים של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז הכובד של המשולש).

ג. שלושת חוצי-הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז במעגל החסום בו).

ד. שלושת האנכים האמצעיים של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז המעגל החוסם אותו).

ה. חוצי-הזווית של מרובע חוסם מעגל נפגשים בנקודה אחת (מרכז המעגל החסום).

ו. כל האנכים האמצעיים לצלעות של מצולע כלשהו החסום במעגל נפגשים בנקודה אחת (מרכז המעגל החסום).

ז. הישרים של המשכי שוקי טרפז והישר המחבר את נקודות האמצע של בסיסי הטרפז, נחתכים בנקודה אחת – משפט שטיינר (Stupel & Ben-Chaim, 2013).

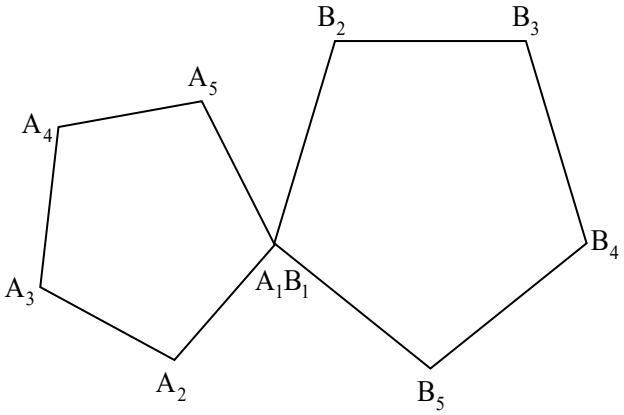
התכונה השנייה קשורה למעגלים המשיקים לשוקי זווית ומשיקים למשולש שווה שוקיים שכלוא ביניהם

גילוי תכונות גאומטריות לא מוכרות, לפחות לנו, מאפשר פעילות חקר רב-כיוונית לפרחי הוראה במתמטיקה בקורס מתקדם שעוסק בשילוב הטכנולוגיה ממוחשבת להוראת מתמטיקה. בכל שלב המחקר אפשר לשנות או להוסיף נתונים ולבדוק האם אכן התכונות המיוחדות נשמרות.

תכונה ראשונה

תכונת שימור גאומטרית מעניינת וההוכחה שלה – מצולעים משוכללים מחוברים בקודקוד אחד

בפעילות נמצאה תכונה מעניינת הקשורה לשני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות מחוברים זה לזה בקודקוד משותף. נמצא שקווים מתאימים נחתכים בנקודה אחת.

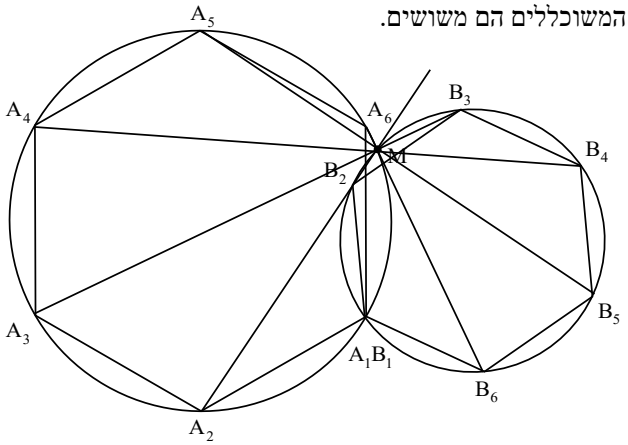


איור 1

נתונים שני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות, אך שונים באורך הצלעות שלהם. הם אינם חותכים זה את זה פרט לקודקוד משותף אחד, כנראה באיור 1, שבו המצולעים הם מחומשים משוכללים.

את הקודקודים של המצולעים מסמנים באותיות ובמספרים עם כיוון השעון, כאשר הקודקוד המשותף מסומן ב-A1 או ב-B1, ושאר הקודקודים של כל אחד מהמצולעים מסומנים ב- A2, A3, ... ,An או ב-B2, B3, ... ,Bn, כאשר n הוא מספר הצלעות של המצולע.

מאחר שמדובר במצולעים משוכללים, הרי שאפשר לחסום את כל אחד מהם במעגל. מעגל החסימה עובר בנקודה המשותפת לשני המצולעים $\langle A_1B_1 \rangle$ ונחתך בנקודה אחרת שמסומנת ב-M (ראו איור 2). מתברר שכאשר מחברים בישרים כל זוג קודקודים בעלי אותו מספר (A_k, B_k), הרי שכולם עוברים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים – הנקודה C, כנראה באיור 2 שבו המצולעים המשוכללים הם משושים.



איור 2

תיאור המשימה והמתודולוגיה שלה

בשלב הראשון התבקשו הסטודנטים להכין שרטוט של שני משושים משוכללים בעלי קודקוד משותף בעזרת הכלים המסורתיים: עיפרון, סרגל ומחוגה, על פי הידע שרכשו בקורס "בניות גאומטריות".

עם העברת הישרים בין הקודקודים המתאימים של שני המשושים, גילו הסטודנטים שאכן קיימת התכונה שכל הישרים עוברים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המשושים. אכן תכונה מפתיעה.

בשלב השני ניתן לסטודנטים יישומון ג'אוג'ברה שיוצר שני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות ויש להם קודקוד משותף.

היישומון מאפשר את הפעילויות האלה:

א. יש לו סרגל המאפשר לשנות את מספר הצלעות n בתחום $3 \le n \le 8$.

ב. בכל מצולע קיים קודקוד שאפשר לגרור וכך לשנות את אורך צלעותיו.

ג. ביישומון מופיעים הקווים המחברים את הקודקודים המתאימים של שני המצולעים.

ד. מצולע אחד קבוע ואת המצולע השני אפשר לסובב סביב הקודקוד המשותף. אפשר לסובב אותו כך שיתלכד פנימית או חיצונית עם צלע של המצולע הראשון, שיתלכד פנימית עם שתי צלעות של המצולע הראשון, שחלקו יהיה תוך המצולע הראשון וחלקי האחר יהיה מחוץ למצולע. כמובן, המצב הראשון הוא שמצולעים חיצוניים אחד לשני פרט לקודקוד המשותף.

ה. קיים לחצן המאפשר לבטל את הצגת המעגלים החוסמים את המצולע. כאן רואים שעבור כל המצולעים והמצב ההדדי שלהם, הישרים שמחברים קודקודים מתאימים, נחתכים בנקודה אחת.

אל היישומון מגיעים בקישור הזה:

Link 1: https://www.geogebra.org/m/zmcsucxx

בפעילות קצרה עם יישומון נמצא שהתכונה הגאומטרית המפתיעה של חיתוך הישרים בנקודה אחת, שהיא נקודות החיתוך השנייה של המעגלים. כמו כן, התכונה קיימת כאשר שתי צלעות של המצולעים מתלכדות וגם כאשר נוצר שטח חפיפה בין שני המצולעים.

מובן שאין להסתפק בכלי הטכנולוגי הממוחשב כאישור מושלם לנכונות התכונה, ויש להוכיח אותה הוכחה מנומקת כמקובל במתמטיקה.

שלבי ההוכחה

התוכנה הדינמית הראתה שהתכונה קיימת עבור כל זוג מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות ובעלי קודקוד משותף. כמו כן, התכונה קיימת כאשר שתי צלעות של המצולעים מתלכדות וגם כאשר נוצר שטח חפיפה בין שני המצולעים.

מובן שאין להסתפק בראייה זו ויש להוכיח את התכונה בליווי הנמקות, כפי שמקובל במתמטיקה.

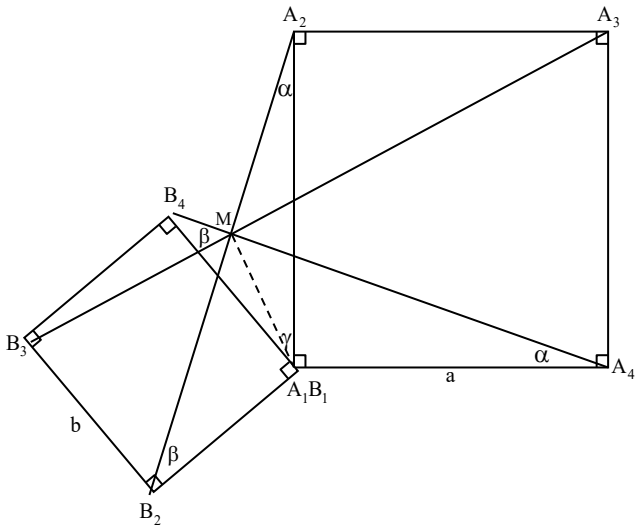
בשלב הראשון תוצג הוכחה עבור שני ריבועים בעלי קודקוד משותף, כנראה באיור 3.

מסמנים ב- γ את הזווית שבין שני הריבועים- $\angle A_2A_1B_4$. מעבירים את הישרים A_2B_2 ו- A_4B_4 הנחתכים בנקודה M.

יש להוכיח שהישר A_3B_3 עובר בנקודה M.

המשולשים $\Delta A_2A_1B_2$ ו- $\Delta A_4A_1B_4$ חופפים לפי צ.ז.צ.

מהחפיפה נובע: $\angle A_2B_2A_1 = \angle A_2B_4A_1 = \beta$.



איור 3

מאחר שמהנקודות B_2 ו- B_4 רואים את הקטע MA_1 באותה זווית β, הרי שעל פי משפט ידוע, בנקודות M, A_1, B_4, B_4, עובר מעגל. המעגל שעובר בשלוש מהנקודות של הריבוע $B_1B_2B_3B_4$ חייב לעבור גם בקודקוד B_3. מכאן נובע: $\angle B_2MB_3 = 45°$ (זווית היקפית הנשענת על $\frac{1}{4}$ מקשת המעגל). לפי אותם הנימוקים: $\angle B_2A_2A_1 = \angle B_4A_4A_1 = \alpha$.

גם מהנקודות A_2 ו- A_4 רואים את הקטע MA_1 באותה זווית α, ולכן גם בנקודות A_4, A_1, M, A_2 עובר מעגל, וגם הנקודה A_3 נמצאת עליו. מכאן: $\angle A_3MA_4 = 45°$.

כאמור, ערכי הזוויות: $\angle B_2MB_3 = \angle A_3MA_4 = 45°$, ולכן אלו שתי זוויות קודקודיות, ומכאן הישר A_3B_3 נחתך גם הוא עם שני הישרים האחרים בנקודה M שבה עוברים שני המעגלים המקיפים את כל אחד מהריבועים.

תכונה שימור מעניינת שקיימת היא:

$$(A_2B_4)^2 + (A_4B_2)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

כאשר a ו-b הם אורכי הצלעות של הריבועים. את תכונת השימור אפשר להוכיח בכל מיני דרכים. דרך פשוטה להוכחת התכונה היא שימוש במשפט הקוסינוסים במשולשים $\Delta A_2A_1B_4$ ו- $\Delta B_2A_1A_4$. תכונה זו נכונה לכל מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה.

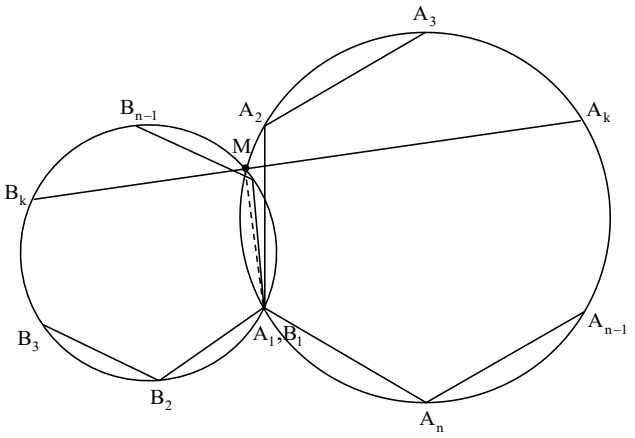
כאן המקום לציין שהמקרה של שני ריבועים בעלי קודקוד משותף שייך למה שידוע בשם: Vecten Configuration (Alsina & Nelsen, 2011). בקונפיגורציה זו מדובר על משולש כלשהו שעל צלעותיו בנו כלפי חוץ ריבועים. לקונפיגורציה זו יש כמה תכונות מעניינות שאחת מהן היא ששלושת המשולשים הנוצרים מחיבור שני קודקודים של ריבועים סמוכים עם קודקוד המשולש המשותף לשניהם, הם בעלי שטחים שווים וגם שווים לשטח המשולש המקורי. כשגוררים את כל אחד מקודקודי המשולש משתנים אורכי צלעותיו אך נשמר השוויון בין שטחי המשולשים.

אל היישומון המתאר את Vecten Configuration אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 2: https://www.geogebra.org/m/xn2e5ejz

הוכחה כללית שהמיתרים המתאימים נחתכים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המצולעים

נתונים שני מצולעים בעלי n צלעות, שקודקודיהם: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ו-$B_1, B_2, \ldots, B_n$, כאשר לשני המצולעים ישנו קודקוד משותף $A_1=B_1$, כנראה באיור 4.



איור 4

כיוון שמדובר במצולעים משוכללים, הרי שכל אחד מהם חסום במעגל מתאים. שני המעגלים נחתכים בקודקוד המשותף $A_1=B_1$ ובנקודה אחרת M. A_1M הוא המיתר המשותף לשני מעגלי החסימה.

יש להוכיח שכל אחד מהישרים A_KB_K (המחברים קודקודים מתאימים) עוברים בנקודה M.

הוכחה

$\angle A_kMA_1 = \frac{180°}{n}(k-1)$ זווית היקפית הנשענת על הקשת $A_1A_2A_3\ldots A_k$.

$\angle B_kMB_1 = 180° - \frac{180°}{n}(k-1)$ זווית היקפית הנשענת על הקשת $B_1B_nB_{n-1}\ldots B_k$.

מכאן סכום הזוויות: $\angle A_kMA_1 + \angle B_kMB_1 = 180°$, כלומר שלוש הנקודות A_k , M , B_k נמצאות על קו ישר.

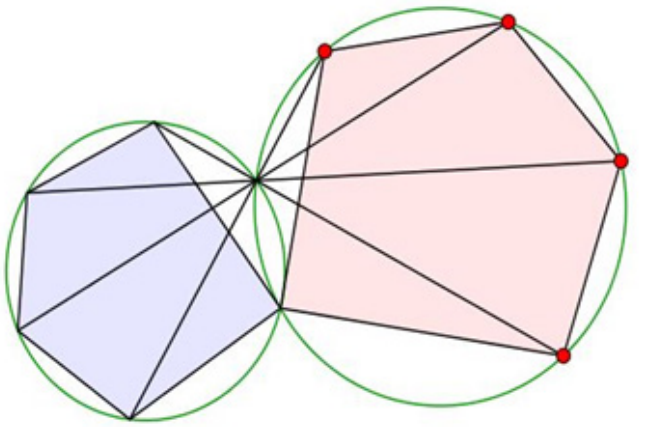
מסקנה: כל הישרים A_kB_k (עבור $k \neq 1$) עוברים בנקודה M.

שאלה

האם התכונה של חיתוך הישרים המתאימים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים נכונה גם עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים?

מדובר על מצולעים שאינם משוכללים אך חסומים במעגלים. במצולעים אלו יחס הצלעות המתאימות כיחס שבין הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המצולעים ומובן שהזוויות המתאימות שוות.

בעזרת יישומון מתאים רואים שהתכונה נשמרת עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים. בתמונה 1 הלקוחה מצג המחשב רואים שהתכונה נשמרת עבור מחומשים דומים שאינם משוכללים. בעזרת יישומון מתאים רואים שהתכונה נשמרת עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים. בתמונה 1 הלקוחה מצג המחשב, רואים שהתכונה נשמרת עבור מחומשים דומים שאינם משוכללים.



תמונה 1

אל היישומון הנזכר לעיל אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 3: https://www.geogebra.org/m/tezyqxmp

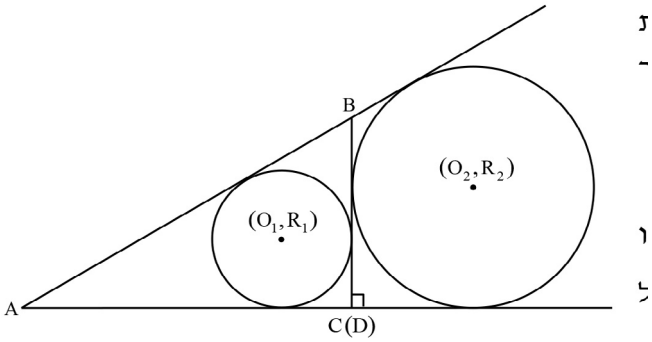
תכונה שנייה - תהליך דינמי המוביל לתכונת שימור מעניינת

שני מעגלים זרים המשיקים לשוקי זווית ומשיקים למשולש שווה שוקיים שיש ביניהם תהליך דינמי המוביל לתכונת שימור מעניינת

ככל ש"חופרים" ומחפשים בעזרת הכלי הטכנולוגי הממוחשב, מתגלות תכונות גאומטריות חדשות. במהלך עיסוק בחקר בעיית סנגקו, אחת מאוסף של כמה מאות בעיות (Fukagawa & Pedoe, 1989), התגלתה לנו צורה גאומטרית שייתכן שאינה שייכת לאוסף הנזכר לעיל, אך היא בעלת תכונת שימור מעניינת.

תיאור המצב הראשוני

נתון משולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90°$) ובו חסום המעגל (O_1, R_1) וחסום לו חיצונית המעגל (O_2, R_2) המשיק להמשכי הצלעות AB ו-AC ולניצב BC, כנראה באיור 5.



איור 5

טענה: $R_1 + R_2 = BC$

הוכחה: במשולש ABC קיים: $R_1 = \frac{AC + BC - AB}{2}$ (קשר ידוע בין רדיוס המעגל החסום במשולש ישר זווית לאורכי צלעותיו),

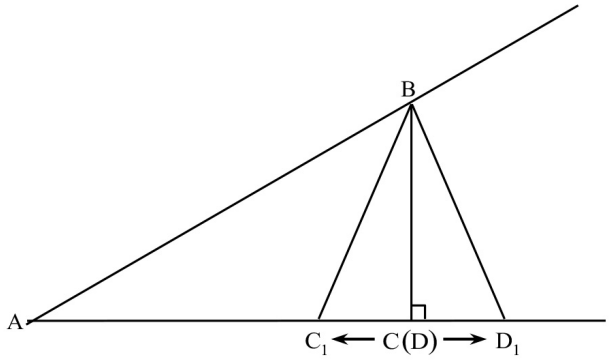
וגם: $R_2 = \frac{AB + BC - AC}{2}$, ולכן: $R_1 + R_2 = BC$.

תהליך דינמי

מסמנים את הנקודה C גם באות D ובתהליך דינמי הנקודה C נעה שמאלה עד לנקודה C_1 והנקודה D נעה ימינה עד לנקודה D_1, כך ש-$CC_1=DD_1$.

נוצרו המשולשים ABC_1 ו-ABD_1, כאשר נמצא ביניהם המשולש שווה השוקיים BC_1D_1, כנראה באיור 6.

כעת מתבררת תכונה מפתיעה מאוד.

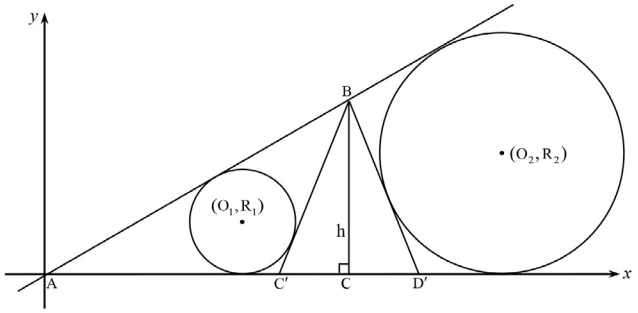


איור 6

תיאור התכונה

בראשית הצירים עובר קו ישר בזווית כלשהי עם ציר ה- x.

בונים שני מעגלים (O_1,R_1) ו-(O_2,R_2) שמשיקים לשוקי הזווית כאשר הם זרים זה לזה. באזור שבין שני המעגלים בונים משולש שווה שוקיים ΔBCD, שבסיסו על ציר ה- x, והוא משיק לשני המעגלים, וקודקוד זווית הראש שלו נמצא על הקו הנטוי, כנראה באיור 7.



איור 7

מתברר שעבור כל שני מעגלים כאלו, יהיה הגובה h של המשולש השווה שוקיים שווה לסכום הרדיוסים R_1+R_2, שזוהי תכונת שימור מעניינת.

להדגמת התכונה הוכן יישומון ג'אוג'ברה שבו אפשר לשנות את הרדיוסים של המעגלים ואת הזווית שבין הקו הנטוי לציר ה- x.

בכל שלב מופיעים על צג המחשב הגדלים האלה:

$R_1=$, $R_2=$, $h=$, $R_1+R_2=$

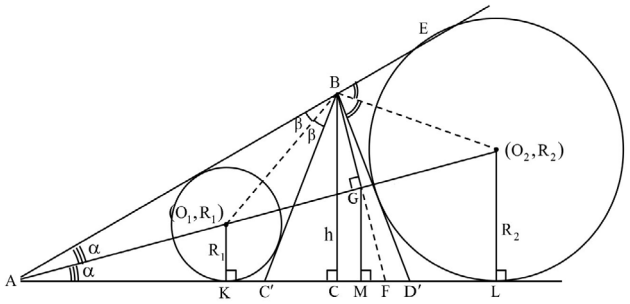
עבור כל מצב (רדיוסים וזווית נטייה), מקבלים: $h=R_1+R_2$

מתוך גרירת מרכזי המעגלים אפשר לשנות את הרדיוסים ומתוך גרירת הנקודה הכחולה שעל הקו הנטוי אפשר לשנות את הזווית שלו עם ציר ה- x.

אל היישומון אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 4: **https://www.geogebra.org/m/ezkz2q7r**

הוכחה גאומטרית של התכונה



איור 8

סימון זוויות (ראו איור 8):

$$\angle BAC' = 2\alpha$$

$$\angle ABC' = 2\beta$$

מכאן: $\angle BC'D' = \angle BD'C' = 2\alpha + 2\beta$

זווית $\angle D'BE$ היא זווית חיצונית למשולש $\Delta ABC'$, לכן: $\angle D'BC' = 4\alpha + 2\beta \implies \angle D'BO_2 = 2\alpha + \beta$

זווית $\angle BO_1O_2$ היא זווית חיצונית למשולש ΔBAO_1, ועל כן ערכה:

$$\angle C'D'B = 180° - 4(\alpha+\beta) \quad \angle BO_1O_2 = \alpha + \beta,$$

ולכן חישוב זוויות במשולש ΔO_1BO_2 נותן:

$$\angle BO_2O_1 = \alpha + \beta$$

ולכן: $BO_1 = BO_2$

מהנקודה B מעבירים אנך לישר המרכזים O_1O_2 שחותך אותו בנקודה G ובהמשכו את השוק של הזווית בנקודה F. מהנקודה G מורידים אנך ל-AD החותך אותו בנקודה M.

מנקודות מרכזי המעגלים מורידים אנכים O_1K ו- O_2L לשוק הזווית.

המרובע O_1O_2LK הוא טרפז ישר זווית שבו GM קטע אמצעים (BG הוא גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים).

מכאן נובע: $GM = \frac{R_1+R_2}{2}$.

הישר AG הוא גובה וגם חוצה זווית במשולש ΔABF, ועל כן הוא גם תיכון במשולש.

מכאן נובע: $BG = GF$.

מכאן GM הוא קטע אמצעים במשולש ΔBNF:

$$GM = \frac{1}{2}h \implies h = 2GM = R_1 + R_2$$

לתכונה זו נמצאו גם עוד הוכחות שנמצאה להן הוכחה בעזרת טריגונומטריה מתוך חישוב זוויות ובזהויות.

הערות:

(א) התהליך הדינמי מסתיים כאשר הנקודה C' מתלכדת עם הנקודה A.

במקרה זה $R_1=0$. בקלות אפשר להוכיח ש-$R_2=BC$.

(ב) בכל מצב של התהליך הדינמי, מיקום מרכז הקטע O_1O_2

נשאר קבוע וזאת משום ש-$BC=R_1+R_2$, לכן מרכז הקטע יימצא במרחק $\frac{BC}{2}=\frac{R_1+R_2}{2}$ מ-AC ויימצא על חוצה הזווית A.

במשימה זו ישנן שלוש תכונות שימור ואלו הן:

א. $R_1+R_2=h$

ב. $BO_1=BO_2$

ג. הנקודה M, נקודת אמצע הקטע O_1O_2, נשארה קבועה כאשר אורכו של הקטע $C'D'$ משתנה.

את תכונות ב ו-ג אפשר לראות כאשר גוררים את הנקודה 'C בעזרת היישומון שאפשר להגיע אליו בקישור להלן:

Link 5: https://www.geogebra.org/m/nt68hq72

סיכום

במסגרת הפעילות נחקרו בעזרת תוכנה דימית שתי תכונות גאומטריות מפתיעות המכילות מספר תכונות שימור מעניינות. התכונה הראשונה עסקה בשני מצולעים משוכללים בעלי קודקוד משותף ונמצא שהיא נכונה עבור כל $n\geq 3$ ועבור כל זווית שבין המצולעים, בין שיש שטח חפיפה בין המצולעים בין לאו. כאשר המצולעים הם ריבועים התגלתה תכונת שימור אחרת על סכום ריבועי שני קטעים. כמו כן נמצא שהתכונה נכונה גם עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים (אך חסומים במעגל).

התכונה השנייה עסקה בשני מעגלים זרים החסומים בשוקי זווית ומפריד ביניהם משולש שווה שוקיים המשיק לשניהם. גם כאן התגלו מספר תכונות שימור.

הפעילות נערכה עם מורים בפועל, וכן עם פרחי הוראה למתמטיקה בחינוך העל-יסודי. הרוב המכריע של המורים והסטודנטים ממליצים בחום למסד קורסים העוסקים בביצוע חקר של תכונות בתהליך הכשרה של פרחי הוראת מתמטיקה, וכן לשלב בתוכנית הלימודים בתיכון שיעורי חקירה, כדי להעלות את מוטיבציית התלמידים ללמוד מתמטיקה, להרחיב ולהעמיק את מאגר הידע.

רשימת מקורות

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). *Icons of mathematics: An exploration of twenty key images*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2016). Variance and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *The Far East Journal of Mathematical Education, 16*(4), 371-418. doi:10.17654/ME016040371

Fukagawa, H., & Pedoe, D. (1989). *Japanese temple geometry problems*. Winnipeg: The Charles Babbage Research Center.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *Journal of Mathematics Learning, 13*, 135-157. doi:10.1007/s10758-008-9130-x

Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2014). Technology as a partner in geometry classrooms. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology,* 8(2), 69-87.

Oxman, V., & Stupel, M. (2018). Various solution methods, accompanied by dynamic investigation, for the same problem as a means for enriching the mathematical toolbox. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(3), 442-455. doi:10.1080/0020739X.2017.1392050

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezoids: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal (ASMJ), 27*(2), 6-24.

Stupel, M., Sigler, A., & Tal, I. (2018). Dynamic investigation of ellipses inscribed in a rectangle. *Journal of Progressive Research in Mathematics (JPRM), 13*(2), 2212- 2229.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2018). Capabilities and contributions of the dynamic math software, GeoGebra: A review. *North American GeoGebra*

Journal, 7(1), 68-86.1

היבטים גאומטריים באתרים יהודיים: חקירה באמצעות סביבה גאומטרית אינטראקטיבית*

שרה הרשקוביץ
נח דנא-פיקארד



פרופ' שרה הרשקוביץ
מרצה בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך והמרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח)
עוסקת בפיתוח מחקר והכשרת מורים למתמטיקה, וחוקרת בנושאים הקשורים לפתרון בעיות ולקשר שבין מתמטיקה, תרבות ואומנות.



פרופ' נח דנא-פיקארד
פרופ' חבר למתמטיקה במרכז אקדמי לב וראש הקתדרה לחינוך, מתמטיקה ויהדות. בעבר הוא היה נשיא המרכז. יש לו שני דוקטורטים, אחד מצרפת והשני מאוניברסיטת בר-אילן. במשך שנים הוא חוקר במתמטיקה ובחינוך מתמטי, במיוחד בסביבה עתירת טכנולוגיה. לפני מספר שנים הוא נכנס לפרויקט של STEAM Education עם קבוצה בין-לאומית. במסגרת זו הוא נתן הרצאות מרובות במקומות שונים בעולם ובכנסים בינלאומיים. הדבר קשור גם לעבודתו בתורה ומדע במסגרת הקתדרה.

תקציר

בעבודה זו נציג חקירה גאומטרית של אלמנט באתר יהודי – בית הכנסת הגדול דוהאני (Dohany) בבודפשט, הונגריה. סטודנטים לתואר ראשון מהמגזר היהודי החרדי לומדים קורס בגאומטרייה אנליטית כחלק מלימודיהם האקדמיים. בקורס שהם לומדים בשילוב סביבה טכנולוגית עם גאומטרייה דינמית, הם התבקשו לשרטט אלמנט גאומטרי מתוך האתר היהודי הנזכר לעיל, המוכר להם מתוך תרבותם הכללית. מטרת הפעילות הייתה לקשר בין לימודי המתמטיקה למציאות שהם מכירים ובכך לעורר בהם עניין בלימודי המתמטיקה.

מילות מפתח: סימטרייה; גאומטרייה אנליטית; טרנספורמציות במישור; שיקוף; סביבה גאומטרית דינמית.

מבוא

למושג "אומנות יהודית" יכולות להיות משמעויות רבות. המשמעות יכולה להיות מעשה ידי אומן יהודי, או אומנות הנשענת על אלמנטים מהתרבות היהודית. בדוגמה הראשונה כל סוג של אומנות ייתכן, והוא יכול להיות מושפע מהתרבות המקומית שבה האומן נמצא. יש דוגמאות רבות של אומנים יהודים שיצרו אלמנטים מכל מיני תרבויות. למשל, שאגאל הוא אחד מהם. אנשים יכולים להשתמש במילים "אומנות עממית יהודית" לכל חפץ אומנותי שיוצר אומן ממוצא יהודי. אלפרד ורנר (Werner, 1962) מציין שעד זמן מסוים במאה העשרים, שום חוקר לא היה קורא למשהו אחר אומנות יהודית.

בדוגמה השנייה רוב החפצים ממלאים צורך דתי, כגון קופסה למגילת אסתר שנכתבה בכתב יד מיוחד (איור1א), קישוטים לספר תורה, למשל רימון או תפוח לספר תורה (איור 1ב), חנוכייה (איור 1ג) וחפצים רבים אחרים. אחת התכונות של חפצים אלה היא הסימטרייה.

* המאמר תורגם לעברית מתוך: Dana-Picard, Th., & Hershkovitz, S. (2019). Geometrical features of a Jewish monument: Study with a DGS. *Journal of Mathematics and the Arts, 13*(1-2), 60-71. doi:10.1080/17513472.2018.1552067



(א) (ב) (ג)

איור 1: חפצים יהודיים מסורתיים

נבחן את התכונות הגאומטריות של החפצים המוצגים:

בתמונה א מוצגת קופסה של מגילה בצורת גליל (המכסה שמעוצב ככתר, מציג סימטרייה סיבובית) בתמונה ב מוצג קישוט לספר תורה שבו שבעה עלים קבועים סביב גליל מרכזי, זו סימטרייה סיבובית. בתמונה ג מוצגת חנוכייה שבה נוכל לראות סימטרייה שיקופית. הספל הקטן הנשלף באמצע החנוכייה "שובר" את הנוף הסימטרי.

כותבי מאמר זה מלמדים במוסדות להשכלה גבוהה, ולמוסדות אלה בחמש השנים האחרונות מגיעים סטודנטים מהאוכלוסייה החרדית. רוב הבנים באוכלוסייה זו לא למדו מתמטיקה מלבד חישובים בארבע פעולות חשבון. בשנים הראשונות ללימודיהם הם עסקו בעיקר בלימודי יהדות מסורתיים; אצל הבנות הצעירות המצב אחר. במאמר זה אנו מתמקדים בלימודי המתמטיקה של הבנים.

בנים צעירים (או לא כל כך צעירים) רוצים ללמוד באקדמיה לקראת תארים אקדמיים. בשל מעט לימודי המתמטיקה שלמדו במסגרות החינוכיות, הם צריכים להשלים את הפערים שצברו. לפיכך לימודיהם מתחילים משנת השלמות (מכינה) במתמטיקה ובדיסציפלינות בסיסיות אחרות, ורק לאחר שנה זו והצלחתם במבחן המסכם, הם יכולים להתקבל ללימודים אקדמיים סדירים. כמובן, בתנאי שהם ממלאים את תנאי הקבלה הנדרשים. במהלך שנת מכינה זו קצב הלמידה צריך להיות אינטנסיבי למדי, ולכן נפתחו בארץ מסגרות לימוד מיוחדות בעבורם, בדרך כלל במוסדות קלסיים להשכלה גבוהה, מתוך התחשבות בצרכים הספציפיים של אוכלוסיית הסטודנטים החדשים.

אחד האתגרים החשובים ביותר של מורי אוכלוסיית סטודנטים אלה, הוא למצוא את הדרך "לחבר" את התלמידים לחומר שיש ללמוד, כדי שלא יפסיקו את לימודיהם בשל חוסר מוטיבציה. אחד הרעיונות המרכזיים בהוראתם של תלמידים חרדים אלה הוא כמתואר בתוך מאמרם של דנא-פיקארד והרשקוביץ (Dana-Picard & Hershkovitz, 2018), להשתמש בחפצים ובבניינים יהודיים מסורתיים, שהם חלק מחיי היום-יום של התלמידים, כבסיס לעבודה מתמטית. נושא זה, המערב את התרבות הכללית של האוכלוסייה הלומדת, נחקר בידי החוקר הברזילאי ד'אמברוזיו (D'Ambrosio, 1985). הוא טבע שם לתחום המחקר הזה וקרא לו אתנומתמטיקה (D'Ambrosio, 1985). לא מדובר בנושא אתני במובן האנתרופולוגי אלא נושא בתרבות.

הקשר בין מתמטיקה לאסתטיקה מופיע בעבודות רבות כמו למשל בעבודתו של בורווין (Borwein, 2007). הוא עסק ביופי המשפטים והתאוריות ובאלגנטיות של המשפטים וההוכחות, ועסק לעומק בדבר שהוא מכנה "האסתטיקה של המתמטיקה" כמעצבת את החוויה המתמטית. ברצוננו להדגיש כי היבט זה אינו מרכז עבודתנו זו. אין צורך למשוך את תשומת ליבם של התלמידים לאסתטיקה של יצירות האומנות שהם רואים, ולא לדון במוצאן היהודי של יצירות האומנות. היבטים אלו היו נחוצים לו עבדנו לפי הקווים המנחים של סקין (Sequin, 2017). בעבודתנו זו, באוכלוסיית הסטודנטים שלנו, אלו הם דברים ברורים. המטרה העיקרית בעבודה זו היא הבנייה המתמטית של חפצים אלה כדי להתמקד בניתוח וביצירה המתמטית.

העבודה שעשינו עם התלמידים מבוססת על מחקרו של שיראלי (Schiralli, 2007) על ההקבלה בין תפקיד הדפוסים במתמטיקה ובאומנות (שם, עמ' 111). הוא מציין שגם המתמטיקאי וגם האומן עוסקים בדפוסים כחוויה, הם מנתחים דפוסים, מייצגים דפוסים ויוצרים דגמים חדשים. הם מדמיינים אותם במגוון היכולות שלהם, מחברים את היכולות האלה ויוצרים צורות גדולות ומורכבות יותר. בפרק II אנו מראים כיצד סטודנטים לתואר ראשון יכולים ליצור דגמים אומנותיים בעזרת כלים מתמטיים. הפעילות שאנו מתארים במאמר זה התקיימה בקורס בגאומטרייה אנליטית בסביבה עשירה בטכנולוגיה. השתמשנו במערכת של גאומטרייה דינמית – Dynamical Geometry System – DGS בתוכנה שנקראת GeoGebra. התוכנה הייתה זמינה בכיתה והתלמידים התקינו אותה במחשבים האישיים שלהם.

שילוב הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה ובלמידה מביא בחשבון את המטרות העיקריות של עבודה מתמטית, כמו הבנה מושגית, תכנון פרודוקטיבי, שימוש בייצוגים, בפתרון בעיות ומציאת קשרים בין תחומים למיניהם (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Washburn & Crowe, 1988). נוסף על כך, למידה בשימוש בטכנולוגיה מזמנת יכולות אינטראקטיביות חדשות והזדמנויות פדגוגיות (Pierce & Stacey, 2010). התלמיד יכול לחקור רעיונות מתמטיים באופן דינמי ועל פי הביצועים שלו לקבל משוב ענייני לעבודה שלו, הוא יכול להעלות השערות, לבנות פתרונות ולבדוק אם קיבל את התוצאות הרצויות, כפי ששוורץ (Schwartz, 1989) מכנה זאת: השימוש בטכנולוגיה מזמן מעין "מראה אינטלקטואלית".

הרוזטה בבית הכנסת הגדול ברחוב דוהאני בבודפשט

הפעילות המתמטית

בית הכנסת דוהאני בבודפשט הוא בית הכנסת הגדול ביותר באירופה. במבנה שלו אפשר לזהות הרבה רעיונות מתמטיים, מקצתם בעלי אופי גאומטרי, האחרים קשורים לרעיונות בתורת המספרים, כגון מספרי פיבונאצ'י ויחס הזהב (ראו Dana-Picard & Hershkovitz, 2018; Koshy, 2001).

במאמר זה ננתח תכונות גאומטריות של אחד האלמנטים בבית הכנסת. אנו מתכוונים לרוזטה, כלומר החלון האומנותי העגול והמעוצב עם ויטרז'ים מעל הכניסה הראשית של הבניין. מבחינה אסתטית, היופי של הויטרז'ים נראה מבפנים כאשר אור יום מאיר מבחוץ. בעבודת הסטודנטים עסקנו רק בגאומטרייה של המרכיבים המגוונים של הרוזטה. החלון האומנותי מוצג באיור 2 להלן.

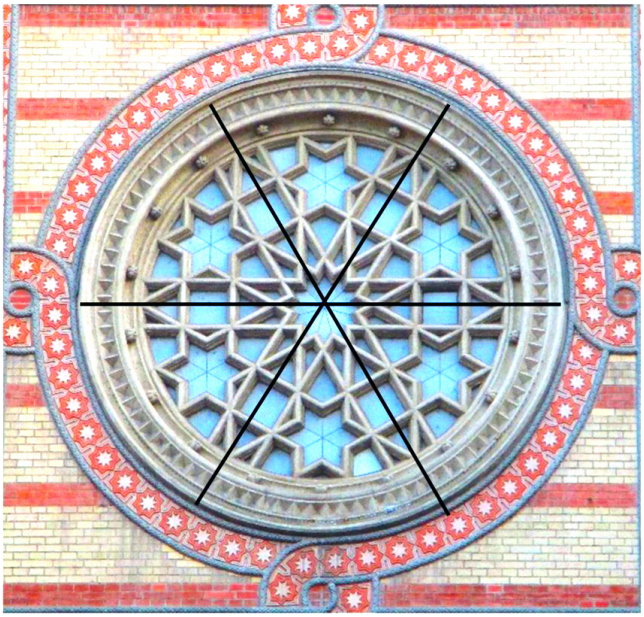
ביצירה זו אפשר למצוא היבטים מתמטיים גם במסגרת שסביב לחלון. היא מופיעה בחזית הראשית של המבנה ובמקומות אחרים בבניין. נרחיב על התכונות הגאומטריות שלהם בפרק להלן.



איור 2: הרוזטה - החלון האומנותי

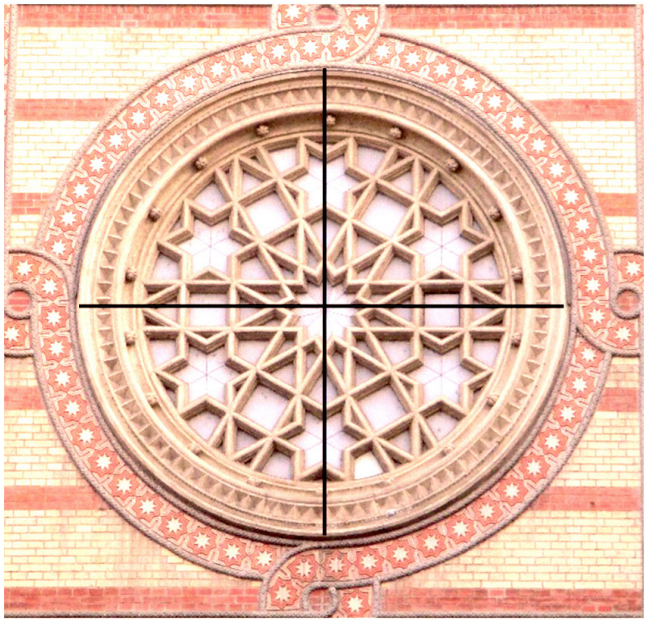
התבוננות ראשונה ברוזטה מגלה את המאפיינים האלה:

- הרוזטה מתקבלת מ-1/6 שלה וטרנספורמציית סיבוב על המרכז בזווית של 60 מעלות.
- הקוטר המאוזן של הרוזטה הוא ציר סימטרייה של החלון, כנזכר לעיל בקוטר מאונך וגם באחד מהקטרים המודגשים באיור 3.
- במרכז החלון יש משושה משוכלל שמרכזו הוא מרכז החלון.
- יש שישה זוגות של קווים מקבילים.
- אפשר לזהות צורות גאומטריות, כמו ריבועים, מעוינים, מגיני דוד וכדומה. כולם מוגדרים באמצעות זוגות של קווים מקבילים.
- בעזרת שילוב של צורות והיבטים שנצפו לעיל, אפשר לזהות אלמנטים המופיעים בקבוצות של 12.
- למעשה הציור מציג סימטרייה סיבובית: אפשר לבנות (לצייר) שישית מהתמונה בלבד, ולאחר מכן להשתמש בדרך איטרטיבית בטרנספורמציית סיבוב בזווית של 60 מעלות סביב המרכז. נדגים את זה באיור 3 באמצעות שלושת הקווים המודגשים.



איור 3: שישה חלקים סימטריים

אפשר גם לחלק את השרטוט לארבעה רבעים בקווים המודגשים באיור 4. הם קובעים שתי סימטריות שיקופיות, ומראים גם שלצורה יש סימטרייה סיבובית נוספת. אפשר לצייר רבע מהציור, ואז להשתמש בסיבוב סביב המרכז בזווית ישרה.



איור 4: ארבעה רבעים סימטריים

מההיבטים האחרונים אפשר לראות שאפשר להשתמש בטרנספורמציה סיבובית פעם או פעמיים, ולהשלים את העבודה באמצעות סימטרייה שיקופית.

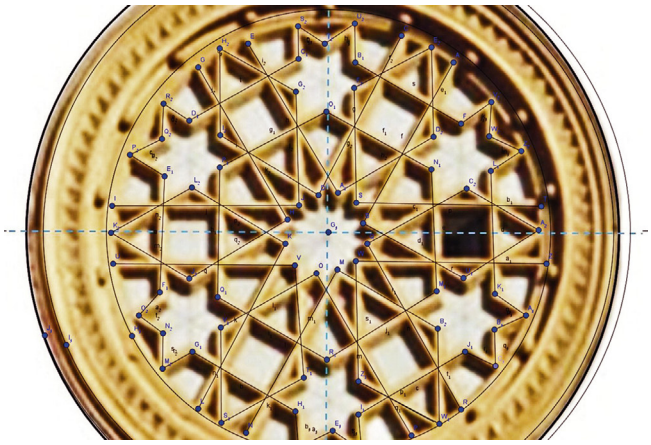
חשוב לשים לב שהתמונה צולמה מהרחוב ולא במאונך לחלון, ולכן יש בתמונה עיוות הנובע מבעיה של פרספקטיבה. מעבודת הסטודנטים עלה שלא הייתה בעיה לעסוק בצורה בדרך נכונה, למרות בעיית הפרספקטיבה. עם זה כדי לבצע עבודה מתמטית מדויקת, סיפקנו לתלמידים תמונה מתוקנת ומדויקת כרקע לעבודה עם הסביבה הטכנולוגית שבה עבדנו – GeoGebra. הסטודנטים היו חופשיים להחליט אם להשתמש בתמונה המתוקנת או לא. כמה מהם השתמשו בתוכנה ספציפית כדי לקבל "תמונה נכונה" כבסיס לעבודה שלהם.

תיאור עבודת הסטודנטים

המשימה: להשתמש בתוכנת GeoGebra ובכלים המתמטיים שנלמדו בקורס בגאומטרייה אנליטית, כדי לבנות (לצייר) מחדש את החלון. התוצר המבוקש של עבודת הסטודנטים היה להגיש שני רכיבים: א) קובץ GeoGebra עם התמונה של החלון שיצרו בפועל; ב). מסמך מילולי שבו תיאור של החישובים המתמטיים. ביקשנו מהתלמידים לכתוב את כל השיקולים שהנחו אותם בעבודתם (לפרט גם שיקולים שגרמו להם לשנות את דרך העבודה).

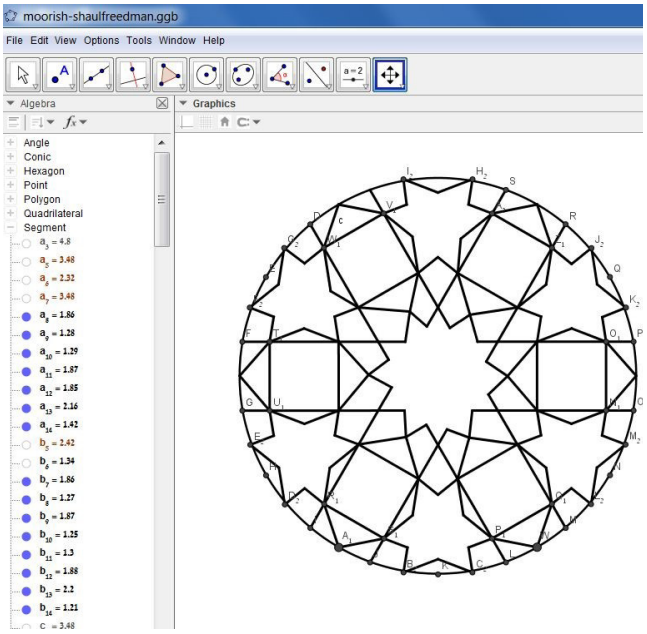
בשלב זה אנו מתארים את העבודה שביצעו שלושה זוגות סטודנטים בדרכים מגוונות. בקורס השתתפו 20 סטודנטים מהמגזר החרדי בני 25 עד 45, רובם עם רקע אלמנטרי ביותר בלימודי מתמטיקה, טרם הגיעם ללימודים במוסד להשכלה גבוהה. נסמן את הזוגות באותיות A, B, C.

זוג A – בנייה נקודתית: זוג סטודנטים אלה השתמשו בתמונה שניתנה כרקע, הם סימנו נקודות שחשבו שהן החשובות ביותר לקבלת תמונה כמו באיור 5.



איור 5: בניית תמונה בעזרת סימון נקודות עם GeoGebra

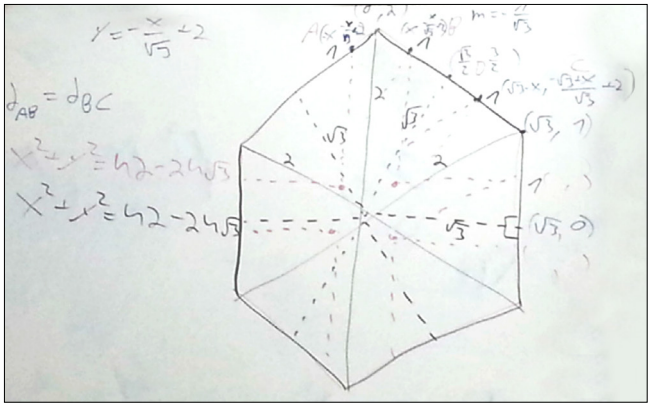
זוג B ביצעו עבודה מעורבת: הם התחילו בזיהוי נקודות ספציפיות, ולאחר מכן הוסיפו קווים באמצעות הכלי לבניית קווים בתוכנה. כמה מהם שקלו להוסיף קווים מעוקלים. הציור שהם יצרו נראה דומה מאוד לתמונה המקורית. עבודתם מוצגת באיור 6. כמו כן כדאי לשים לב (בפינה השמאלית העליונה של האיור) שסטודנטים אלו השתמשו גם בפקודות כלליות יותר המשמשות לבניית מצולעים למיניהם (ריבועים, משושים, וכדומה).



איור 6: בניית תמונה בעזרת נקודות, קווים ומצולעים

חשוב לציין כי זוג B ביצעו את החישובים למציאת הפונקציות המתאימות לקווים בדרך ידנית – מצאנו לכך עדות בקובצי הוורד שסיפקו.

זוג C – שימוש רב בתכונות גאומטריות: זוג זה של סטודנטים בנה את הרוזטה עם GeoGebra לאחר ניתוח מעמיק של הגאומטרייה המופיעה בתמונת החלון. הם הצביעו תחילה על המשושה שנמצא באמצע החלון והראו כיצד אפשר לקבל את החלק החיצוני של התמונה מהחלק הפנימי באמצעות טרנספורמציות גאומטריות אלמנטריות. לאחר מכן הם בנו את האלמנטים הפנימיים של התמונה והסתייעו בכלים של גאומטרייה אנליטית מתאימה, כמו משוואות של קווים, משוואות של מעגלים, נקודות חיתוך בין קווים ומעגלים שזיהו וכן הלאה. איכות עבודתם גרמה למורה לבקש מהסטודנטים לתאר את עבודתם לפני שאר הסטודנטים; אחד מהם אזר אומץ והסביר עליה. איור 7 מראה כמה משרטוטיו התומכים בהסברים.

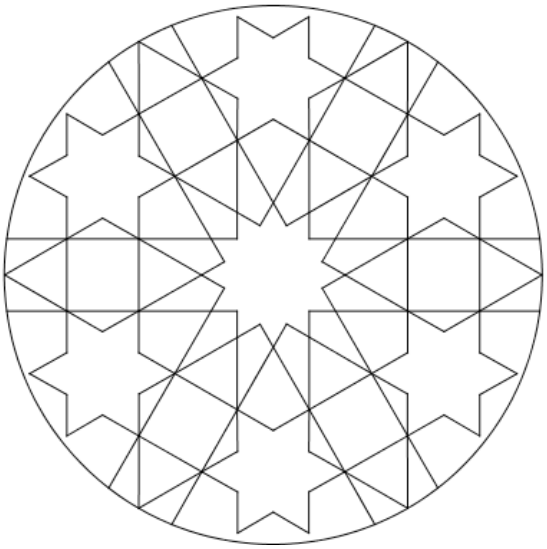


איור 7: רישום על הלוח במהלך הסברים בכיתה

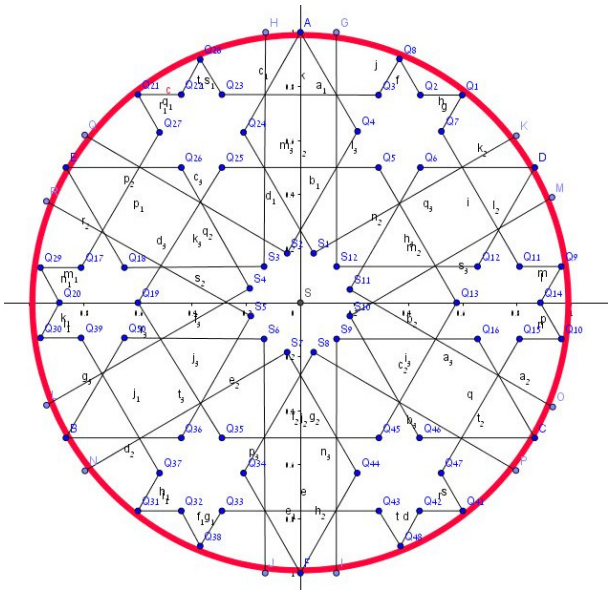
נציין כי עבודתם של זוג זה הוצגה בכיתה לפני שהסטודנטים האחרים הצליחו לבנות את התמונה.

התוצר הסופי של העבודה של זוג C שבוצע ב-GeoGebra מוצג באיור 8a.

איור 8b מציג את עבודתו של סטודנט אחר שעבד במסלול שונה במקצת.



(א)



(ב)

איור 8: ביצועים מדויקים

אנו מבקשים לציין שהתוצאה החשובה ביותר של פעילות זו הייתה ההתלהבות שהביעו הסטודנטים במהלך עבודתם. ניכר היה המאמץ שהשקיעו הן בעבודה בנייר ועיפרון והן בעבודתם בטכנולוגיה. כל זוג בחר בפרופורציות אחרות של זמן לכל אחד משני חלקי העבודה. ההתלהבות הכללית לא הביאה את כל הסטודנטים לידי ביצוע הפעילות בזמן, אבל גם הסטודנטים שהחמיצו את המועד האחרון להגשת העבודה, ביקשו רשות להגיש את עבודתם במועד מאוחר.

> **עבודה מתמטית מסוג זה שבה הסטודנטים נדרשים לבנות בעזרת יישומון מתמטי אלמנט מוכר, מאפשרת ליישם ידע מתמטי פורמלי בקשרים חדשים, מאפשרת "לחבר" את המתמטיקה לתחומים אחרים ומאפשרת דיון עם הסטודנטים על דרכי פתרון מגוונות.**

לאחר הפעילות התקיימו גם דיונים עם המורים, שהתפרשו מעבר להיבט המדויק של בניית צורה בכלים מתמטיים. בשל פעילויות מסוג זה היה אפשר לזהות התעניינות רבה יותר של הסטודנטים במתמטיקה. התחזק אצלם העניין לניתוח אלמנטים אדריכליים אחרים הקיימים בבתי כנסת.

לסיכום, ברצוננו להזכיר כי כמורים הייתה לנו הפתעה כפולה. מצד אחד, זוגות A ו-B לא זיהו אלמנטים מתמטיים בתמונה, הם עסקו בסימון נקודות ובמתיחת קווים. לעומתם, זוג C עבדו בדרך מתמטית שמתאימה לדרכו של שיראלי (ראו Schiralli, 2007 בקטע הקודם): הם ניתחו את הצורות לסוגיהן ואת הקשר ביניהן והשתמשו בהן. הם היו מסוגלים לדמיין אפשרויות ולהתחבר לתמונות המגוונות. אפשר לראות זאת במיוחד בשימוש שלהם במשושה המרכזי, ולאחר מכן בסימטרייה סיבובית בזווית של 60 מעלות. הממצא שסטודנטים רבים לא זיהו דפוסים (כלומר סימטריות וסיבובים) נבע מכך שמושגים אלה לא נלמדים בקורסים שלהם, אינם מופיעים בסילבוס הקורס הנוכחי, ומההפרדה הקלסית בין קורסים למיניהם. הסטודנטים לא חשבו על שימוש בידע רלוונטי מקורס אחר. ממצא זה מוכיח את הצורך לעודד מורים לבנות גשרים יעילים בין הקורסים למיניהם, ולהשתמש בידע המתמטי בכללותו ולא להפריד אותו לשדות נפרדים (ראו Dana-Picard, 2004).

עבודה מתמטית מסוג זה שבה הסטודנטים נדרשים לבנות בעזרת יישומון מתמטי אלמנט מוכר, מאפשרת ליישם ידע מתמטי פורמלי בקשרים חדשים, מאפשרת "לחבר" את המתמטיקה לתחומים אחרים ומאפשרת דיון עם הסטודנטים על דרכי פתרון מגוונות, חידוד הנושאים המתמטיים שהם מתבססים עליהם, להשוות בין דרכי הפתרון המגוונות הן בהיבט המתמטי והן בהיבטים של יעילות תהליך הפתרון. עוד הזדמנות שבה אפשר להשתמש בדרך עבודה זו היא לעודד את הסטודנטים להציג בעיות משלהם לחבריהם ובכך לעודד הן הצגת בעיות והן פיתוח יצירתיות (Singer & Voica, 2015).

מסגרות וטרנספורמציות אפיניות

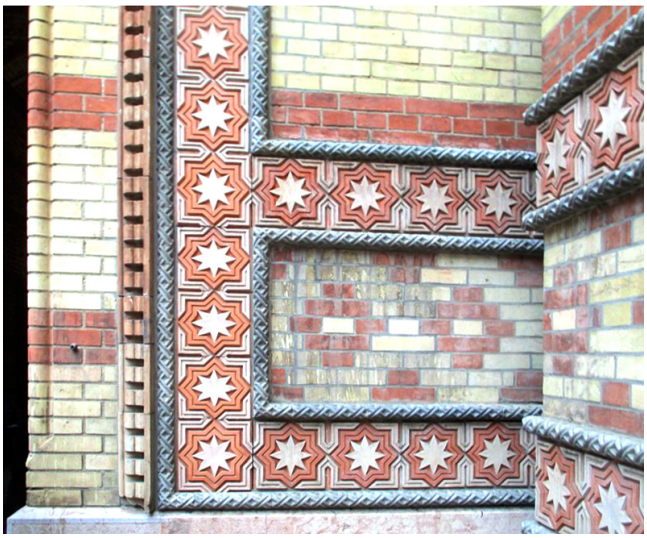
לבסוף ברצוננו להציג עוד תכונה גאומטרית המופיעה על קירות בית הכנסת דוהאני (ראו איור 9). הטרנספורמציות האלה לא נמצאות בדרך כלל בסילבוס של קורס קלסי בגאומטרייה אנליטית, אבל אפשר לכלול אותן בהרחבת הסילבוס עבור סטודנטים מתקדמים או מתעניינים.

הגדרה: יהי L קו נתון במישור ו-k מספר ממשי. דרך כל נקודה M במישור עובר קו יחיד, 'L אורתוגונלי ל-L; הקו 'L חותך את L בנקודה m. עכשיו נגדיר נקודה 'M על 'L כך שהטרנספורמציה הממפה כל נקודה M לנקודה 'M במשוואה זו תיקרא כאן אפינית. הקו L הוא הציר, והמספר הממשי k הוא היחס האפיני.

אפשר לראות בקלות כי האפיניות עם אותו ציר יוצרים חבורה אבלית של טרנספורמציות במישור. נזכיר כי טרנספורמציות אחרות שהיו בשימוש לעיל (סיבובים וסימטריות שיקופיות) הם אלמנטים של קבוצות קלסיות של טרנספורמציות במישור.

נתבונן באיור 9. נוכל לראות מסגרות שמקשטות את הקירות החיצוניים של בית הכנסת דוהאני. כל מסגרת בנויה מאריחים, וכל אחד מהם הוא תמונה של אחר בהזזה. כל אריח יכול להיות מתואר כעשוי משלושה חלקים:

- ריבוע חיצוני.
- שני כוכבים חומים, זה בתוך זה, בעלי שמונה קודקודים, כל כוכב מתקבל באמצעות סיבוב ב-90 מעלות של שני ריבועים.
- כוכב לבן בעל שמונה קודקודים בתוך שני הכוכבים הנזכרים לעיל.



איור 9: המסגרת על החזית: ריבועים ו"ריבועים דחוסים"

בחלק השמאלי התחתון מופיעים שלושה אריחים שונים במקצת בין האחרים. הם לא ריבועיים אלא מלבניים, ומראים צורה כללית דומה בכל זאת לאריחים הריבועיים. הם התקבלו מהריבועיים באמצעות טרנספורמציה אפינית. בעצם קיימות כמה דרכים לתאר את זה בנוסחאות מתמטיות.

אחת הדרכים היא בהתייחסות לישר התחתון של האריח כציר האפיניות והכיוון המאונך לו.

הסטודנטים לא למדו את הנושא הזה בקורס בגאומטרייה אנליטית. כמה מהם ילמדו טרנספורמציות המישור בקורס אחר.

לבסוף, ברצוננו להזכיר שוב את המסגרת שבאיור 2. מסביב לרוזטה עצמה היא בנויה כמעגל. בשביל זה האומן השתמש באותם הריבועים שתיארנו לעיל, כך הוא מעניק דוגמה יישומית של קירוב מעגל בעזרת מצולע משוכלל. אבל המסגרת העגולה הזאת מכילה גם

ארבעה אלמנטים מעוקלים חדשים: מעגלים בקוטר קטן יותר שיכולים להיות הבסיס לפעילויות מתמטיות אחרות. כאן הריבועים עברו טרנספורמציה כך שאפשר לחשוב על האריחים החדשים כחסומים בתוך גזרה. בזכות המבנה של חבורה הטרנספורמציות השונות זו מזו במישור, הדוגמה המוצגת כאן עשויה לשמש דוגמה פרקטית בשני קורסים אחרים לפחות, תחילה בגאומטרייה אנליטית מתקדמת, ולאחר מכן באלגברה המופשטת.

הערות לסיכום

נאור ופרל (Naor & Perl, 2015) ציינו כי היחסים בין מתמטיקה לאומנויות אינם סימטריים, שכן "לאורך ההיסטוריה אומנים תלויים במתמטיקה, ואילו למיטב ידיעתנו, אף מתמטיקאי מעולם לא השתמש באומנות כדי ליצור מתמטיקה".

קרווי (Crowe, 2001) ציין את השינויים במישור בקשרים תרבותיים מסוימים, כמו בתרבות אפריקה, בתרבות דרום אמריקה, בתרבות איי הפידג' וכדומה. בהקשר זה נזכיר גם את ספרו המשותף עם ושבורן (Washburn & Crowe, 1988).

המצב שהצגנו במאמר זה אינו שייך לשני הקשרים: כאן גם היצירה וגם המושגים המתמטיים היו קיימים מראש, ובחירת חלון בית הכנסת דוהאני באה מתוך כוונת המורים למשוך את תשומת ליבם של הסטודנטים לפתח את העניין שלהם במתמטיקה באמצעות פריט אומנותי של חיי היום-יום שלהם. זהו יישום של פסוק מקראי (משלי כב 6): "חֲנֹךְ לַנַּעַר עַל פִּי דַרְכּוֹ גַּם כִּי יַזְקִין לֹא יָסוּר מִמֶּנָּה". הסטודנטים שראינו גילו עניין במתמטיקה, ולפחות כמה מהם כמו הזוג C פיתחו מיומנויות מתמטיות חדשות. כמובן, תלמידים אחרים בכיתה זכו בלמידה מעניינת מעבודתם של הזוג C.

כאמור, הסטודנטים שהיו מעורבים בכיתה היו צעירים חרדים. המחברים מנהלים כעת ניסוי דומה עם תלמידים צעירים יותר.

רשימת מקורות

Borwein, J. (2007). Aesthetics for the working Mathematician. In N. Sinclair, D. J. Pimm, W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity* (pp. 21-40). New York, NY: Springer.

Crowe, D. W. (2001). Symmetries of culture. In R. Sarhangi (Ed.), *Bridges: Mathematical connections in art, music, and science: Conference proceedings 1998* (pp. 1-20). Arkansas City, Ks: Gilliland.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Dana-Picard, T., & Hershkovitz, S. (2018). A glimpse at mathematics in Jewish traditional artefacts. *Symmetry: Culture and Science, 29*(2), 307-317. doi:10.26830/symmetry_2018_2_307

Dana-Picard, Th. (2004). Three-fold activities for discovering conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic. In J. Böhm (Eds.), *Proceedings TIME-2004* [CD]. Linz: bk teachware Schriftenreihe.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. New York: J. Wiley.

Naor, A., & Perl, A. (2015). Introduction. In A. K. Szemeredi (Ed.), *Art in the life of mathematicians* (pp. 1-7). Providence, RI: American Mathematical Society.

Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(1), 1-20. doi:10.1007/s10758-010-9158-6

Schiralli, M. (2007). The meaning of pattern. In N. Sinclair, D. Pimm, & W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity* (pp. 239- 279). New York, NY: Springer.

Schwartz, J. (1989). Intellectual mirrors: A Step in the direction of making schools knowledge-making places. *Harvard Educational Review, 59* (1), 51-62. doi:10.17763/haer.59.1.t8n120v0j4265w46

Sequin, C. H. (2017). Reverberating echoes: Contemporary art inspired by traditional Islamic art. *Journal of Mathematics and the Arts, 11*(2), 114-127. doi:10.1080/17513472.2017.1326082

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing from research to effective practice* (pp. 141-174). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4614-6258-3_7

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of culture: Theory and practice of plane pattern analysis*. Seattle, Washington: University of Washington Press.

Werner, A. (1962). What is Jewish art? *Judaism, 11*(1), 32-43.

"כאשר מבינים, ניתן לפתור באמצעות 'תרגיל פשוט'..." תלמידי כיתות ה'-ו' מסבירים פעולת חילוק שברים באמצעות ייצוגים באקסל

ענת קלמר
חנה לב-זמיר



ד"ר ענת קלמר
מרצה באקדמית גליל מערבי ובמכללת אורנים.
תחומי מחקר עיקריים: התפתחות ההבנה המתמטית באמצעות המחשה ויזואלית של מושגים ופעולות ושילוב כלים ממוחשבים בהתמודדות עם פתרון בעיות מתמטיות.



ד"ר חנה לב-זמיר
מרצה בכירה במכללת אורנים, ראש החוג לחינוך מתמטי ומרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללה.
תחום העניין המרכזי - הכשרת מורים להוראת המתמטיקה, עם דגש בפיתוח חשיבה אלגברית בכיתות בית הספר היסודי וטיפוח יצירתיות בקרב מורים ותלמידים.

תקציר

חלפו כמעט 20 שנים מאז המחקר של מה (Ma, 1999), שבדק ידע בקרב מורים למתמטיקה בנושא פעולת חילוק שברים. נכון להיום מעט מאוד השתנה בגישת המורים. מרבית המורים מתמודדים עם פתרון תרגילי חילוק שברים באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי ומתקשים במתן משמעות לאלגוריתם זה. אחד השינויים המהותיים מאז מחקרה של מה (Ma), הוא התפתחות הטכנולוגיה ושילוב המחשב בהוראה ולמידה. התפתחות זו מרחיבה היום את מגוון האפשרויות העומדות לפני המורים לייצוגים ויזואליים דינמיים התומכים בהתמודדות עם הסבר סיטואציות מתמטיות במגוון נושאים, כמו בחילוק שברים.

מחקר זה מתמקד בתיאור תהליך הוראה, שמזמן למורה ובהמשך לתלמיד, דרכים להבנות את פעולת החילוק באמצעות המחשה הנשענת על הגדרת יחידת הייחוס (המחלק) (Lamon, 1994), שלם הייחוס והמחולק.

המחקר איכותני ומציע סביבה דינמית ממוחשבת שבה המורה והתלמיד יכולים לבנות בעצמם את תהליך הפתרון בדרך המובילה להבנה. המחקר בודק השפעות של ידע תוכן-פדגוגי-טכנולוגי של 9 מורות על יכולת התלמידים להסביר את משמעות פעולת החילוק בשברים. כל מורה עבדה עם תלמיד אחד. המורות בחרו את התלמידים.

ברמת המורה, הממצאים מעידים על התפתחות ידע מתמטי, ידע פדגוגי וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי במהלך המחקר שניכרו בניתוח של המורים את עבודות התלמידים. ברמת התלמיד, הממצאים מעידים על האקסל ככלי המאפשר לתאר את תהליך פעולת החילוק מתוך שימוש במושגים מדויקים על המחלק (יחידת הייחוס), המחולק ושלם הייחוס.

מילות מפתח: חילוק שברים פשוטים; ידע מורים; ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי; הבניית ידע; נימוקים; ייצוג ויזואלי; אקסל.

סקירת ספרות

ידע של מורים למתמטיקה בנושא חילוק שברים

מה (Ma, 1999) בחנה במחקרה ידע של מורים למתמטיקה בנושא פעולת חילוק שברים, הן ברמת ידע תוכן ויכולת פתרון והן ברמת ידע פדגוגי הנוגע לדרכי הוראה ומתן משמעות לפעולה. מחקרה כלל אוכלוסיית מורים למתמטיקה בארצות הברית ואוכלוסיית מורים למתמטיקה בסין. חלפו כמעט 20 שנים ותמונת המצב המתארת את ידע המורים מעידה כי לא חל שינוי ניכר (קלמר-שורץ ולב-זמיר, 2018).

מה (Ma, 1999) נתנה למורים בארה"ב ובסין שאלות בנושא חילוק שברים והציגה את תוצאות ההתמודדות שלהם. המורים התבקשו לפתור תרגיל וגם להציג את תהליך הפתרון בדרך שתהיה בעלת משמעות לתלמיד, במתן סיטואציה מילולית מתאימה. 43% מהמורים למתמטיקה בארצות הברית, לעומת 72% מהמורים בסין, הציגו פתרון אלגוריתמי נכון. המורים מארצות הברית התקשו בהצגת סיפור שייתן משמעות לפעולת החילוק ואלה שניסו את כוחם, סיפוריהם לא ייצגו את התרגיל הנתון.

יש מקום לשער כי היעדר הבנת משמעות הפעולה בחילוק שברים מנעה מהמורים את היכולת לספר סיפור מתמטי מתאים ואף מנעה מהם יכולת לייצג את התרגיל בהמחשה. מרבית המורים המחישו תרגיל חילוק בחצי באמצעות חילוק ב-2 או כפל בחצי ולא את התרגיל המבוקש. ראוי לציין כי 90% מהמורים הסינים הצליחו לייצג את תרגיל החילוק בשברים בייצוג סיפורי מתאים, מקצתם אפילו ביותר ממשמעות אחת.

מחקרה של מה (Ma, 1999) מציג את החשיבות של הבנת משמעות הפעולות והמושגים כדי להצליח לייצג את הסיפור המתמטי, ואת הפער בין ידע מורים בארצות הברית לידע המורים בסין בנושא חילוק בשברים.

פעולת החילוק בשברים פשוטים

חילוק שברים פשוטים נלמד בשתי דרכים, האחת נסמכת על משמעות של חלוקה לחלקים שווים והשנייה נסמכת על משמעות חילוק להכלה (משרד החינוך התרבות והספורט, 2006). בעוד שבמספרים שלמים אפשר להציג סיטואציות חילוק לחלקים שווים וחילוק להכלה, יש בשברים פשוטים הגבלות המותנות במחלק (אם הוא שלם או שבר הקטן מ-1). חוסר מודעות להבחנות אלה מוביל לא אחת לאינטואיציות שגויות ולהישען יותר על אלגוריתם ויכולת ביצועית ופחות על הבנה מושגית (Tirosh, 2000; Gravemeijer & Galen, 2003; Ma, 1999). שרון ושוורצות (Sharon & Swarthout, 2015) מדגישות את חשיבות הייצוג הוויזואלי לכל סיטואציה לצד הייצוג הסימבולי וקישורו לידע קודם של התלמיד בנושא חילוק מספרים טבעיים. למון (Lamon, 1994) מדגישה את חשיבות הגדרת יחידת הייחוס – Referent Unit – בפעולת חילוק שברים. במשמעות של חילוק להכלה, המחלק הופך להיות יחידת הייחוס עבור המחולק. לדוגמה, נסתכל על התרגיל $\frac{2}{5} \div \frac{2}{3}$. המנה לא נוגעת לשלם המקורי – Original Whole, אלא נסתכל עליה כמספר הפעמים ש-$\frac{2}{5}$ נכללות בתוך $\frac{2}{3}$ של השלם המקורי. בעבודה זו נראה בשלם המקורי כשלם הייחוס,1 כאשר המחלק הוא יחידת הייחוס שאת מוכלותה במחולק אנחנו מחפשים.

1. שלם הייחוס מוזכר במאמרן של שחברי ופלד (2012) בנושא בעיות אחוזים. הן מדברות על שלם ייחוס דינמי.

המחקר הנוכחי נשען על מחקריהן של שיפטר ופרליץ (Schifter, 1998; Perlwitz, 2005) הרואות בקונפליקט קוגניטיבי מנוף ללמידה משמעותית. פרליץ מתארת דרכי פתרון של תלמידי קולג' בבעיית חילוק שלם בשבר והתמודדות עם דילמה בין הפתרון שהתקבל מיישום אלגוריתם כפל בהופכי ובין זה שהתקבל בעזרת ייצוג ויזואלי. זימון דילמה זו והתמודדות איתה מחייבים את המורה להיות בעל ידע רחב. להבין את המתמטיקה מאחורי הפתרונות, ללכת עם האינטואיציות, אך לדעת מי מהן נכונה מתמטית ומי שגויה. לדברי בול (Ball, 2010), ידע זה מכונה "ידע ייחודי להוראה", המשלב בין הבנה מושגית לשליטה אלגוריתמית.

פיתוח אלגוריתם הוא רכיב חיוני של המתמטיקה. לאלגוריתם יש יתרון הניכר בתהליך פתרון המתאים לכל התרגילים מסוג מסוים. ביצוע האלגוריתם בדרך כלל מהיר וקצר. יתרונו של האלגוריתם בביצוע אוטומטי שאינו מצריך חשיבה על משמעות בכל שלב, אך כאן גם חסרונו. לימוד אלגוריתם מקל על הגעה לפתרון אבל לא בהכרח מקושר להבנה אם לא נעשים חיבורים לידע קודם ואם לא נשאלות השאלות המובילות ליצירת חיבורים כאלה (Gravemeijer & Galen, 2003). אנשי החינוך המתמטי אינם שוללים את עצם החשיבות של שליטה ביצועית, אלא טוענים שתהליך למידה של האלגוריתם בלי הבנה הוא בעל ערך מועט ובדרך כלל אין ידע אלגוריתמי זה תורם לידע המתמטי הכללי של התלמיד. ראוי שהתלמיד יבנה את האלגוריתם בנייה פעילה, כתהליך המושתת על הבנה של מהות הפעולה, באופן שהתלמידים יתנסו ב"המצאות" של דרכי פתרון ומתוך "המצאות" אלה, בתיווך מושכל של המורה, "יצמח" האלגוריתם (Gravemeijer & Galen, 2003).

חילוק נחשב המסובך מבין ארבע פעולות החשבון. שברים פשוטים נחשבים למספרים המורכבים ביותר בבית ספר יסודי. חילוק שברים יכול להיחשב כפסגת המתמטיקה בבית הספר היסודי (Ma, 1999). כל אחת מארבע פעולות החשבון בשברים פשוטים מאגדת בתוכה מגוון משמעויות ותובנות המכוונות לביצוע האלגוריתם. פעולת חילוק שברים בבית הספר היסודי, בדרך כלל, מתמקדת בביצוע האלגוריתם בעוד ששאלת ה"למה?" בדרך כלל אינה מקבלת מענה באמצעות בנייה מדורגת של הידע בידי הלומד והבנת הפעולה נשארת מעורפלת (Tirosh, 2000). בדיון על חולשתו של אלגוריתם הנלמד בלי דגש בהבנתו, מציגים תירוש (Tirosh, 2000), אשלוק (Ashlock, 1994) וגרבר (Grabber, 1993) מגוון שגיאות הממוינות לקטגוריות, כמו ביצוע שגוי של האלגוריתם ושגיאות הנובעות מתפיסות ואינטואיציות כלפי פעולת החילוק.2

בפרק להלן נדון בהרחבה בתהליך בניית משמעות לפעולת חילוק שברים פשוטים.

בניית משמעות לפעולת חילוק שברים פשוטים

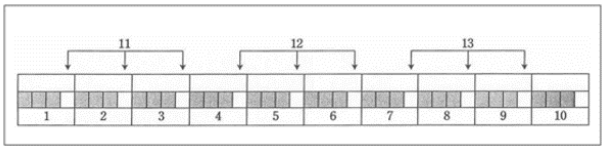
קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018), דנו במאמרן במספר גורמים שיש ביכולתם לתמוך בבניית משמעות לפעולת החילוק בשברים: יצירת דרך אישית, בחינת משמעויות שונות של חילוק וקישורן לאלגוריתם של כפל בהופכי, ייצוג ויזואלי והעלאת קונפליקט קוגניטיבי כבונה משמעות. פרליץ (Perlwitz, 2005) רואה בקונפליקט קוגניטיבי מנוף ללמידה משמעותית. היא מתארת דרכי פתרון של תלמידי קולג' בבעיית חילוק שלם בשבר והתמודדות עם הקונפליקט בין הפתרון שהתקבל משימוש באלגוריתם ובין זה שהתקבל בעזרת ייצוג ויזואלי (ראו איור 1 המציג את בעיית הציפיות ואיור 2 המציג את פתרונה של התלמידה קריסטין ודילמת החלק הנותר).

2. פירוט נמצא במאמרן של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018).

בכיתת התפירה של גב' סמית, התלמידים תופרים ציפיות לכריות עבור תצוגת הבית הפתוח. גב' סמית קנתה לכיתתה 10 יארד של בד עבור הפרויקט. עבור כל ציפית נדרש $\frac{3}{4}$ יארד של בד. כמה ציפיות לכריות ניתן לגזור מבד זה?

איור 1: בעיית הציפיות
(תורגם מתוך Perlwitz, 2005)

קריסטין: קודם ציירתי 10 חתיכות של בד באורך 1 יארד. אחרי זה הוצאתי $\frac{3}{4}$ מכל חתיכה ונשארה חתיכת בד של $\frac{1}{4}$ בכל חלק של 1 יארד. אחרי זה חיברתי את כל החתיכות של $\frac{1}{4}$ כדי לראות כמה קבוצות של $\frac{3}{4}$ אני יכולה לקבל. התשובה הסופית היא 13 ציפיות לכריות עם שארית של $\frac{1}{4}$ חתיכה [הפסקה], או מה שחשבתי שהוא $13\frac{1}{4}$. כאשר הלכתי לבדוק את זה בשיטה הישנה של כפל בהופכי, התשובה הייתה $13\frac{1}{3}$ [כנראה נבוכה] אני לא מצליחה להבין למה.



איור 2: פתרונה של קריסטין ודילמת החלק הנותר
(תורגם מתוך Perlwitz, 2005)

הסטודנטים במחקרן של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018) התבקשו לפתור את הבעיה ולהסביר כיצד הגיעו לפתרון מתוך תהליכי למידה המבוססים על משמעות. הסטודנטים יישמו את האלגוריתם של כפל בהופכי והגיעו למנה $13\frac{1}{4}$. מגוון האסטרטגיות שהוצגו לפתרון הבעיה העידו על מגוון קישורים תוכניים. כמה מהדרכים הובילו לתשובה שהתקבלה באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי וכמה מהן הובילו לתשובה $13\frac{1}{4}$ באמצעות ייצוג ויזואלי. שתי המנות שהתקבלו יצרו קונפליקט שהוביל ללמידה משמעותית העוסק במשמעויות של החלק הנותר: משמעות אחת חלק מיארד ומשמעות שנייה חלק מהבד לציפית אחת.[1]

כדי להבטיח שיח מתמטי מפרה, על המורה להיות בעל ידע רחב. בפרק להלן נדון במאפייני ידע מורה ונסביר מאפיינים אלה על סמך חילוק שברים פשוטים.

מה מורים צריכים לדעת בעניין הוראת חילוק שברים?

מחקריו של שולמן (Shulman, 1987) על ידע מורים שימשו בסיס לחוקרים מתחום החינוך המתמטי ואפיינו את הידע הייחודי למורים למתמטיקה. האבחנה היא **בין ידע תוכן מתמטי לידע תוכן פדגוגי**. בול (Ball, 2010) מבחינה בין שלושה מאפייני ידע תוכן מתמטי ושלושה מאפייני ידע תוכן פדגוגי, כמפורט להלן:

ידע תוכן מתמטי:

א. ידע תוכן כללי (Common Content Knowledge – CCK).

ב. ידע תוכן ייחודי (להוראה) (Specialized Content Knowledge – SCK).

ג. ידע מתמטי רחב (Knowledge at the Mathematical Horizon).

ידע תוכן פדגוגי:

א. ידע המשלב בין ידע מתמטי לידע על התלמידים (Knowledge of Content and Students – KCS).

ב. ידע המשלב בין ידע מתמטי לידע על הוראה (Knowledge of Content and Teaching – KCT).

ג. ידע של מתמטיקה ותוכנית לימודים (Knowledge of Curriculum – KCC).

ידע התוכן הייחודי להוראת שברים פשוטים מחייב ידע הכולל מגוון רחב של אלגוריתמים לפתרון מעבר לאלגוריתם המקובל (כפל בהופכי), וכן הבנת העקרונות המתמטיים שמשמשים לבסיס הידע הנדרש לכל אלגוריתם. על המורה לדעת איזה תהליך חישובי מספק תשתית להוכחת נכונות אלגוריתם החילוק ככפל בהופכי ואילו עקרונות מתמטיים עומדים בבסיסם. כמו כן ידע המורה צריך לכלול גם היכרות עם ייצוגים חזותיים.[2]

ידע ייחודי להוראה התופס מקום נכבד בעשורים האחרונים, נוגע לאוריינות טכנולוגית של המורה.

ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי בהוראת מתמטיקה - TPCK:

ידע המורה במאה העשרים ואחת חייב לכוון לכלים הדינמיים הממוחשבים הזמינים והמשתנים תדיר. כשמדובר בשילוב מחשבים בהוראה, יש לבחון את מאפייני הידע שהמורים נדרשים להם. הוראה טובה המשלבת כלים דינמיים ממוחשבים, נמצאת בזיקה לידע תוכן מתמטי וקישורו לידע פדגוגי (Hughes, 2005; Escuder & Furner, 2011). מישרה וקוהלר (Mishra & Koehler, 2006) מכנים ידע זה בשם Technological Pedagogical Content Knowledge – TPCK. טבח וסלוצקי (2015) הציעו מסגרת תאורטית לאפיון פעולות ההוראה המתבצעות בסביבות טכנולוגיות, מתוך התמקדות במרכיבי הידע של מורים שונים זה מזה. המסגרת התאורטית שפיתחו טבח וסלוצקי (שם), נוגעת לשלושה רבדים: מטרת המורה במהלך השיעור, האמצעי הטכנולוגי שנבחר ודרך השימוש בו. ממצאי מחקרן מלמדים שלמרות הגיוון שהטכנולוגיה מאפשרת בכיתה, מורים מלמדים בגישה המסורתית שבה המורה במרכז. בפעמים שבהן המורים השתמשו בטכנולוגיה, הם עשו זאת בדרך סטטית.

כדי שמורים יוכלו לשלב את המחשב בהבניית מושגים ופעולות מתמטיות ולהתאים את הכלים לדרכי חשיבה מגוונות של תלמידים, עליהם לרכוש ידע שיאפשר להם להיות ורייני טכנולוגיה בחינוך מתמטי. מורה המשלב כלים דינמיים ממוחשבים בהוראה, צריך לשאול את עצמו אם הכלי הממוחשב תומך בבניית תובנות מתמטיות שהוא רוצה להשיג והאם יש יתרון בשילוב המחשב על פני האלטרנטיבות הלא ממוחשבות. חשוב להגדיר את המטרות הפדגוגיות לפני קבלת ההחלטות בדבר הטכנולוגיות שישרתו את הלמידה (Offir, 2010). המצב שבו בתי הספר מוצפים בהצעות לסביבות מתוקשבות לפני שהמורים הגדירו לעצמם מה הם רוצים להשיג מסביבות אלו, אינו נכון להוראה. אופיר (Offir, 2010) ניסח

1. ראוי לציין שהבעיה אכן יוצרת קונפליקט קוגניטיבי, עם זה יש לתת את הדעת על כך שאין משמעות לרבע ציפית וגם לא לשליש ציפית. מסיבה זו, בעת שחזור מחקר נציג בעיה שבה יש משמעות לחלק הנותר, לדוגמה כמה צנצנות של ¾ ליטר אפשר למלא מתוך מכל של 10 ליטר ריבה. במידה שתתקבל גם צנצנת שאינה מלאה, נבדוק כמה ריבה תהיה בצנצנת האחרת. בשאלה מסוג זה ראוי להזכיר את מספר הצנצנות המלאות והחלק הנותר מקבל משמעות.

2. ראו דוגמאות במאמרן של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018).

מודל לקבלת החלטות לפי עקרון אימוץ טכנולוגיות בחינוך. המודל יוצא מהמטרות הפדגוגיות של המורה המאמץ את הטכנולוגיה, ומעצבים את הטכנולוגיה על פי המטרות הפדגוגיות.

ישנם כמה נתונים שצריך להביא בחשבון בבואנו לבחור את הכלים הטכנולוגיים המתאימים להוראה. ענבל-שמיר וקלי (2007) פיתחו מחוון לאפיון וניתוח פעילויות מתוקשבות. המחוון עוסק בשישה ממדים של הוראה, ונותן ביטוי למידת ההבניה שיש בפעילות כמו למידת הקשר בין הלומדים בבניית התובנות שלהם (ראו נספח 1 – טבלת פירוט ממדים ורמות בכל ממד).

יש לתת תשומת לב להוראה באמצעות פעילויות מתוקשבות הכוללת בחירה מושכלת של כלים קיימים וטיפוח סביבה דינמית פתוחה, שבה גם המורה וגם התלמיד שותפים לבניית הייצוגים למושגים ולפעולות. בבניית הייצוג המתוקשב על ידי המורה והתלמיד, יש מסר שגם המורה וגם התלמיד מקבלים עליהם אחריות ללמידה. מורים ותלמידים שיהיו שותפים ליצירת ייצוגים כמודלים דינמיים ויוכלו להסביר את הפעולות בבעיות המתמטיות המוצבות לפניהם, ייתכן שייטיבו להבין ויהיו מסוגלים ליצור אסטרטגיות למגוון רחב של בעיות. המורים יבססו את ידע התוכן הפדגוגי-טכנולוגי והתלמידים יבנו את הידע המתמטי שלהם. היכולת של המורה ושל התלמיד לבנות עולם זוטא שבתוכו התלמיד יפעל כמו בתוך מעבדת חקר לגילוי ובניית תובנות מתמטיות, עולם שבו יוכל לדמיין ולהמחיש את הפעולות והמושגים המתמטיים ולקשרם לידע קיים, יאפשר למורים ולתלמידים ללמוד וללמד לשם הבניה של הידע. אחת הסיבות למורכבות בהבנת מושג השבר ופעולות עם שברים נובעת מכך שלתלמידים מעט הזדמנויות שבהן הם בונים לעצמם היגיון עם הכמויות בייצוג של שבר. לטענת אמפסון, לוי והקנברג (Empson, Levi, & Hackenberg בתוך Kent, Nielson, 2015), אם תלמידים לא יכולים לראות את השברים ככמויות יהיה להם קשה לשלב היגיון בפעולות איתם. ממצא זה מתקשר לקושי של המורים בהבנת משמעות הפעולה בחילוק שברים, ממצא שמנע מהמורים את היכולת להציג סיפור מתמטי מתאים לתרגיל ובהמשך אף מנע מהם יכולת להמחיש את התרגיל (Ma, 1999). סביר שלקושי זה יהיה ביטוי בהוראה המכוונת להבנה בעלת משמעות.

השפעות של ידע טכנו-פדגוגי על בחירת כלים דינמיים להבניית פעולת חילוק עם שברים

קנת, אמפסון ונילסן (Kent, Empson, & Nielsen, 2015), מדברים על מודלינג ישיר (Direct Modeling) שבו תלמיד יוצר אסטרטגיות שמשלבות ייצוג של כל הכמויות באופן שמשקף את מבנה הבעיה שלפניו. אשר לשברים פשוטים, אסטרטגיות אלה מבוססות על ההבנה המוקדמת של שברים כחלק משלם וההבנה של התלמידים בפעולת החילוק במשמעות של מנייה של כמויות. עבודות אחרות מתארות ומדגישות את החשיבות של מודליזציה בבניית פתרון לבעיות מתמטיות (Ferrucci, Yeap, & Carter, 2003). הדגש בהן הוא ביכולת התלמידים לייצג את הכמויות הנתונות בבעיה והיחסים ביניהן, כדי לעשות לעצמם ויזואליזציה של יחסים מתמטיים מופשטים.

ישנם כיום באינטרנט מגוון כלים דינמיים שבעזרתם אפשר להמחיש את פעולת החילוק ובפרט חילוק שברים פשוטים. בדרך כלל, סביבות אלה נותנות את הכלים "מוכנים" והתלמיד צופה פסיבי בתהליך. מתוך ממצאי המחקר המציג את יחסן של המורות לשילוב כלים טכנולוגיים בהוראה (קלמר-שורץ ולב-זמיר, 2018), נלמד שמרבית המורות נוהגות לשלב את הטכנולוגיה במהלך ההוראה, אלא שהמורות הזכירו את הכלים שהמכנה המשותף להם הוא שהכלי מנהל את הפעולה ואת תהליך הלמידה. הן לא העלו יכולת לבנייה עצמית של ייצוגים בכלים הדינמיים, שבה התלמיד והמורה דומיננטיים והם אלה המכוונים את תהליך הלמידה. ראוי לציין כי קיימים אתרים רבים המאפשרים לתלמיד אקטיביות, אך גם הם ברובם אינם גמישים בבחירת סוגי התרגילים והרצף שלהם שלא בהכרח מובילים למטרות שמורה בחר לשיעורו.

ישנן סביבות פתוחות, כמו אקסל או גאוגברה ואחרות (dudamath), המאפשרות בניית עולם המחשה לפי הבנת התלמיד. בניית מודל של חילוק להכלה באקסל או בגאוגברה מאפשרת המחשה של פעולת החילוק הן עבור מספרים טבעיים (ובכך מתחברת לידע הקודם של התלמידים) והן עבור שברים. בנייה כזו דורשת מהתלמיד רמה גבוהה של חשיבה שאותה מכנים סמית ושטיין (Smith & Stein, 1998) "עשייה מתמטית", המכוונת להבנה מושגית שאינה מושתתת בהכרח על חשיבה אלגוריתמית. עשייה זו מחייבת את התלמיד להבין את משמעות המושגים והפעולות, ורפלקציה על התקדמותו בדרך להשגת המטרה.

תיאור המחקר
אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 9 מורות שהן סטודנטיות שנה שנייה לתואר שני בחינוך מתמטי, ו-9 תלמידי כיתות ה'-ו'. המורות שהשתתפו במחקר היו כלל הסטודנטיות בקורס ל"שילוב המחשב בהוראת מתמטיקה" במכללה לחינוך בישראל. כל המורות בעלות ותק של 5 עד 15 שנות הוראה והן מלמדות מתמטיקה בכיתות ה'-ו' של בית הספר היסודי. באמתחתן ניסיון בהוראת חילוק שברים וניסיון בהוראה המשלבת טכנולוגיות. כל מורה התבקשה לבחור תלמיד אחד שהיא תעבוד איתו בזמן המחקר. 8 מכלל התלמידים הם תלמידי כיתה ו' ונמצאו בשלב שלאחר למידת אלגוריתם חילוק שברים באמצעות כפל בהופכי. מורה אחת לימדה בזמן המחקר בכיתה ה' וביקשה להשתתף במחקר. מכאן שתלמיד אחד למד בזמן המחקר בכיתה ה' טרם לימוד פורמלי של אלגוריתם חילוק שברים. המטרה בבחירת תלמידי כיתה ו' הייתה לבדוק את ההבנה המושגית לאחר שנבנתה אצלם היכולת הביצועית (אלגוריתמית). השתתפותו של תלמיד כיתה ה' במחקר אומנם נבעה מאילוץ של המורה, אך הדבר טומן בחובו ערך מוסף של בדיקת הבנה מושגית טרם למידת האלגוריתם.

מטרת המחקר

מחקר זה בודק השפעות של ידע מורים, ידע תוכן מתמטי, ידע פדגוגי וידע טכנו-פדגוגי בהוראת חילוק שברים פשוטים, על התפתחות ההבנה בקרב תלמידים. ממטרת המחקר נגזרות שלוש שאלות המחקר.

שאלות המחקר

א. כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל פתרון שגוי (ראו איור 1 ואיור 2)?

ב. כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם
   1. הסבר תהליכי החילוק?
   2. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?
   3. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?

ג. מהן ההשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית?

כלי המחקר

1. **שאלון מקדים** – נבדקה התמודדות התלמידים עם פתרון תרגיל חילוק שברים לאחר הצגת בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון השגוי של קריסטין בשלמת החלק הנותר.
2. **תוכנת אקסל** מעוצבת להמחשת מרכיבי תרגילי חילוק שברים.

קובץ אקסל הוכן מראש לצורך המחקר ויש בו גיליון נפרד עבור כל תרגיל חילוק. בגיליונות יש תרגילים שעלו בהדרגה ברמת הקושי, מחילוק מספרים טבעיים לחילוק מספר טבעי בשבר וחילוק שבר בשבר. בכל תרגיל הפותר בנה את הסיטואציה הנתונה של חילוק ובדק הכלה של המחלק במחולק בעזרת העתקה והדבקה. בשלב בניית מודליזציה של התרגיל, הפותר היה צריך לתאר את שלם הייחוס שממנו "נגזר" המחלק ולפי זה נבנה המחולק. לדוגמה ראו נספח 2 המתאר התנסות בבניית תרגילי חילוק באקסל.

אותו קובץ שימש הן בשלב המקדים עבור המורות, והן בשלב ההוראה עבור התלמידים.

בגיליון האקסל הודגש שלם הייחוס. המחולק והמחלק יוצגו ביחס לשלם הייחוס. במקרה של מנה שאינה מספר טבעי, נבדק איזה חלק מיחידת הייחוס הוא החלק הנותר (ראו נספח 2 – דוגמאות לתרגילים שהמורות המחישו באקסל בשלב ההתנסות האישית).

בשל ההתנסות בשלב המקדים, החלטנו לא לשלב תרגילים של חילוק שבר במספר טבעי בשלב ההוראה, מכיוון שחילוק כל מספר במספר טבעי מזמן יישום של חילוק במשמעות חילוק לחלקים. בחרנו להתמקד בתרגילים שבהם "נוח" יותר ליישם משמעות חילוק להכלה. הייצוג של תרגילים מסוג זה של חילוק שבר במספר טבעי במשמעות של חילוק להכלה באמצעות אקסל, מסורבל, ולזה בדיוק אנחנו מתכוונות שעל המורה להכיר יתרונות וחולשות של אמצעי המחשה נבחר.

בתהליך ההתנסות בפתרון תרגילי חילוק באמצעות ייצוגים באקסל יש ארבעה חלקים (לא בהכרח בסדר המוצג כאן):

א. יצירת השלם (שלם הייחוס)
ב. יצירת המחולק
ג. יצירת המחלק (יחידת הייחוס)
ד. בדיקת מספר הפעמים שהמחלק (יחידת הייחוס) מוכל במחולק, כלומר המנה.

3. **שאלון לאחר התנסות** – חזרה על השאלה עם דילמת החלק הנותר בבעיית הציפיות, שניתנה בשלב הראשון וזאת לאחר ארבעה שיעורים של בניית ייצוגים באקסל לתרגילי חילוק ופתרונם.

מהלך המחקר

מחקר זה איכותני ויש בו שלב מקדים שבו התנסו המורות בייצוג תרגילי חילוק באקסל. בהמשך, בשלב ההוראה, המורות התנסו בהוראה של חילוק שברים בשילוב אקסל. לבסוף, רפלקציה של כל מורה.

השלב המקדים – התנסות של המורות בהמחשת פתרון תרגילי חילוק שברים פשוטים באמצעות ייצוג באקסל. האקסל מאפשר ייצוג תרגילי חילוק שברים ומתן משמעות לארבעה המונחים על פי למון (Lamon, 1994): יחידת הייחוס (המחלק), השלם המקורי (שלם הייחוס), מחולק ומנה. ראוי לציין כי בייצוג תרגילי חילוק באקסל יש ערך מוסף על פני ציור על דף, בכך שהלומד יכול לבדוק את המוכלות של המחלק במחולק על ידי העתקה והדבקה ולשמור על דיוק בדיקתו.

במהלך ארבעה מפגשים שבהם המורות התנסו בהמחשת פתרון תרגילי חילוק באמצעות ייצוגים באקסל, הוגדרו המונחים הרלוונטיים.

שלב ההוראה – כל מורה התבקשה להנחות תלמיד אחד על פי שלושה שלבים המוצגים בטבלה 1.

טבלה 1: שלבי התנסות עם תלמידים

שלב	התנסות עם תלמידים	התאמה לשאלת מחקר
1	שלב ראשון התקיים טרם ההתנסות בבניית ייצוגים של פעולת החילוק באקסל. במהלכו נבדקה התמודדות התלמידים עם פתרון תרגיל חילוק שברים לאחר הצגת בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון השגוי של קריסטין בשלמת החלק הנותר (ראו איור 2). שלב זה התבצע בנוכחות המורות אך בלי התערבותן.	מענה על שאלת המחקר הראשונה: כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל הפתרון השגוי?
2	שלב ההתערבות נמשך ארבעה מפגשי למידה, ובו התלמידים למדו לייצג תרגילי חילוק שברים באקסל. בשלב זה נבנתה התובנה על משמעות חילוק שברים.[5] המורות חיזקו את האינטואיציות של התלמידים כלפי פעולת החילוק בשברים מתוך קשר לידע קודם על חילוק מספרים טבעיים. קישור זה התבצע באמצעות ייצוג מרכיבי תרגילי החילוק באקסל. כל מורה בחרה חלק מהשאלות שבמאגר (נספח 3 – מאגר שאלות). בחירת השאלות נקבעה לפי התפתחות הלמידה של התלמיד שעימו עבדה המורה. המורות התבקשו להוסיף שאלות המעידות על תובנה חשבונית לפי שיקול דעתן.[6]	שלב ההתערבות כהכנה לקראת המבדק שיענה על שאלת המחקר השנייה.
3	בדיקה חוזרת לאחר כשבועיים של ידע תלמידים ויכולתם להסביר את הפתרון של אותה שאלה עם דילמת החלק הנותר בבעיית הציפיות שניתנה בשלב הראשון וזאת לאחר ארבעה שיעורים של בניית ייצוגים באקסל.	מענה לשאלת המחקר השנייה: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם א. הסבר תהליכי החילוק? ב. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי? ג. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?

1. 8 מבין 9 התלמידים עברו תהליך זה לאחר שפורמלית למדו לבצע את פעולת החילוק באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי.
2. כל מורה קיבלה החלטה על מספר התרגילים וסוג התרגילים שיוצגו לתלמיד.

שלב הרפלקציה – בתום שלב ההוראה התבקשה כל מורה לבצע רפלקציה על התהליך שעברה. המורות התבקשו לדון ברפלקציה בהתפתחות הידע שלהן כמורות (ידע תוכן מתמטי, ידע פדגוגי וידע פדגוגי-טכנולוגי). שלב זה נתן מענה לשאלת המחקר השלישית: מהן ההשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית?

כל מורה ביצעה תהליך איסוף הנתונים של השלב המקדים ושלב ההוראה בזמן תיעוד כל אחד מהמפגשים עם התלמיד שעבדה עימו. המורות הקליטו את השיח עם התלמיד, שכתבו אותו וצילמו את שלבי הפתרון לכל תרגיל שהוצג בכל אחד מהמפגשים (ראו טבלאות 2-5). כל מורה כתבה רפלקציה והגישה אותה לחוקרות.

ניתוח הנתונים

השיח בין תלמיד למורה במהלך המפגשים נותח על סמך תיעוד המפגשים עם התלמידים. תיעוד המפגשים כלל הקלטות, שכתוב וצילום דוגמאות כדי לבחון תהליך התפתחות ידע התלמידים. השיח עם התלמידים נותח ונבדק דמיון ושוני בקרב התלמידים (שמונה תלמידים מכיתה ו' ותלמיד אחד מכיתה ה'). הניתוח מלווה בציטוטים, בדוגמאות לאיורי פתרונות התלמידים ובדוגמאות של בנייה באקסל.

רפלקציות המורות נאספו ונותחו במהלך בחינת שלוש קטגוריות ידע מורה: ידע תוכן מתמטי, ידע תוכן פדגוגי וידע תוכן טכנו-פדגוגי.

ממצאים

חשיפתן של המורות לאקסל והתנסותן בו ככלי לייצוג ופתרון תרגילי חילוק, שימש בסיס ידע חיוני שעליו נשען תהליך ההוראה שלהן עם התלמידים. בתיאור הממצאים במחקר זה, נתמקד בידע התלמידים לפני תהליך ההתערבות, בידע שנבנה במהלך התנסותם באקסל ובידע שבא לידי ביטוי בתום התהליך. לסיכום, הבאנו ציטוטים מרפלקציות של המורות המתארות את תרומת התהליך להתפתחותן המקצועית.

שאלת המחקר הראשונה הייתה כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל פתרון שגוי?

כמתואר בטבלה 1, בשלב ראשון נבדק ידע תלמידים בעניין בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון של שאלת דילמת החלק הנותר (ראו איור 2), לפני ההתנסות בייצוג הפעולה באקסל. בתיאור הממצאים נציג דיווח של אחת המורות המייצגת את התהליך שאפיין את השיח בין המורות לתלמידים. לאחר מכן יוצגו נתונים המשווים בין התמודדות כל התלמידים עם דילמת החלק הנותר לפני תהליך הלמידה באקסל ולאחריו.

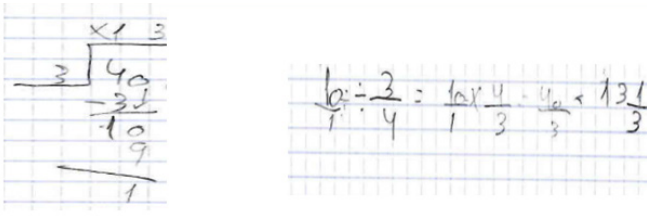
חלק ראשון - פתרון תרגיל חילוק שברים והסבר דילמת החלק הנותר

שמונה המורות שעבדו עם תלמידי כיתה ו', ציינו שמאחר שפתרון תרגילי חילוק באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי היה שגור אצל תלמידיהן, אך טבעי היה שהם בחרו לפתור באמצעות יישום האלגוריתם המוכר. נציג פתרון של תלמיד כיתה ו' ואת פתרונו של תלמיד כיתה ה'.

דוגמה לפתרון של תלמיד כיתה ו' לבעיית הציפיות (ראו איור 1):

$$10 \div \frac{3}{4} = \frac{10}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

כשהגיע לתשובה $\frac{40}{3}$, הוא כתב בצד הדף תרגיל חילוק במאונך. בסיום הוא רשם את התוצאה $13\frac{1}{3}$ (ראו איור 3).



איור 3: מציאת המנה באמצעות כפל בהופכי וחילוק במאונך

לאחר פתרון זה התפתח השיח הזה:

מורה: "איך ידעת שהתשובה היא $13\frac{1}{3}$?"

תלמיד: "מפני שהמכנה של השבר $\frac{40}{3}$ הוא 3, ולכן התשובה חייבת להיות עם מכנה 3."

מורה: "למה אתה מתכוון?"

תלמיד: "שעשיתי חילוק, העברתי את השבר המדומה למספר מעורב ולכן המכנה נשאר 3."

מעיון בממצאים של שאר שבעה תלמידי כיתה ו', התקבלה תמונה דומה של פתרון הנשען על אלגוריתם, עם נימוק המתבסס על התוצאה.

המורה שעבדה עם תלמיד כיתה ה', שלא הכיר את אלגוריתם הכפל בהופכי, מתארת את דרך ההתמודדות שלו עם הפתרון בדרך שהייתה חשובה לו:

תלמיד: "זה חילוק... אני לא יודע איך ... לא למדתי... זה יהיה יותר מ-10, אבל אני לא יודע להסביר, אולי ארשום $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ .... עד שאגיע ל-10... רגע, $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ זה $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}$ זה 3. בכל 3 מטרים יש לנו 4 פעמים. עוד 3 מטרים, זה כבר 6 מטרים, יש לנו כבר 8 פעמים... עוד 3 מטרים זה כבר 9 מטרים וזה 12 פעמים. נשאר עוד מטר זה עוד פעם אחת $\frac{3}{4}$ אז התשובה היא 13 וקצת."

בהמשך לפתרון הבעיה, נבחנה התמודדותם של התלמידים עם דילמת החלק הנותר. המורות הציגו לתלמידים את דרך הפתרון של קריסטין (ראו איור 2). תגובות התלמידים על דילמת החלק הנותר מוצגות בטבלה 2.

טבלה 2: תגובות על דילמת החלק הנותר

תגובות התלמידים על הפתרון של קריסטין	מספר התלמידים
התשובה הנכונה היא $13:\frac{1}{3}$. היא פשוט טעתה בחישוב.	4 תלמידי כיתה ו'
כשעשיתי חילוק, העברתי את השבר המדומה למספר מעורב המכנה נשאר 3. חייב להיות 3 היא טועה. לא יכול להיות 4.	1 תלמיד כיתה ו'
שתי התשובות נכונות זה גם $13:\frac{1}{3}$ וגם $13\frac{1}{4}$	2 תלמידי כיתה ו'
הציור מראה שאני טעיתי. זה מוזר כי פתרתי כמו שלימדו אותי. אני לא מבין מה קרה כאן.	1 תלמיד כיתה ו'
התשובה של קריסטין נכונה.	1 תלמיד כיתה ה'

בשלב הראשון, כשהתבקשו התלמידים לפתור את בעיית הציפיות, כל 8 תלמידי כיתה ו' פתרו באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי. 5 מהם פתרו נכון ו-2 מהם שגו במהלך הפתרון, אך תיקנו את הטעות. תלמיד אחד לא ידע להסביר את הקונפליקט בין תשובתו לתשובתה של קריסטין. תלמיד כיתה ה' שפתר את הבעיה מתוך הישענות על פעולת החילוק במשמעות של חילוק להכלה והגיע לפתרון קרוב לתשובה המדויקת, אבל לא ציין מהו החלק הנותר, טען שתשובתה של קריסטין נכונה. גם תשובתו וגם תשובתה של קריסטין היו מעט יותר מ-13 והוא לא ראה סתירה בין התשובות. אף לא אחד מהתלמידים הסביר את התשובה השגויה בהסבר משמעות הסתירה, אלא הניב תשובות, כמו "היא טעתה בחישוב", "שתי התשובות נכונות", "אני לא מבין...", "חייב להיות...".

חלק שני - שלב ההוראה

שאלת המחקר השנייה הייתה: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם

1. הסבר תהליכי החילוק?
2. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?
3. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?

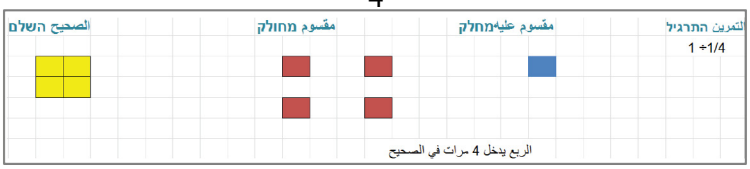
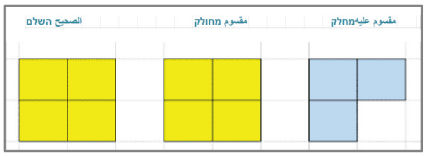
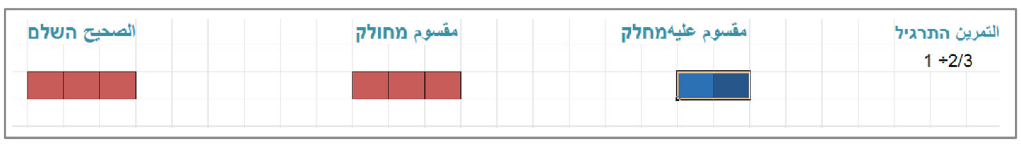
במענה לשאלת המחקר השנייה על כל סעיפיה, בחרנו להתמקד תחילה בתיאור מקרה של אחת המורות שעבדה עם תלמיד כיתה ו'. תיאור זה משקף במידה רבה את התהליך שהתבצע בין שאר המורות ותלמידיהן.

מורה: "התלמידים מכירים את תוכנת האקסל, אבל לא מהכיוון של ייצוג תרגילים. לקח לי כחצי שעה להסביר לתלמיד על תוכנת האקסל, איך 'משרטטים', 'גוזרים', 'מדביקים' ו'צובעים'. הדגמתי באקסל תרגיל חילוק של שלם בשלם ואחר כך ביקשתי מהתלמיד לייצג בעצמו תרגיל דומה. ביקשתי שייצור את המחולק, המחלק והמנה. עברנו לחילוק שלם בשבר ובהמשך לחילוק שבר בשבר (ראו טבלה 3). ביקשתי מהתלמיד לייצג את התרגילים באקסל תוך כדי ששאלתי אותו שאלות מכוונות. ביקשתי שבכל תרגיל ייצג באקסל את שלם הייחוס, את המחולק ואת יחידת הייחוס (המחלק). בשלב ראשון, הצגתי לתלמיד את שלושת התרגילים הבאים: $1:\frac{1}{4}$, $1:\frac{3}{4}$ ו-$1:\frac{2}{3}$, בכולם המחולק שלם אחד."

טבלה 3 מתארת את תהליך העבודה ואת הדיאלוג בין המורה לתלמיד שלה במפגש הראשון.



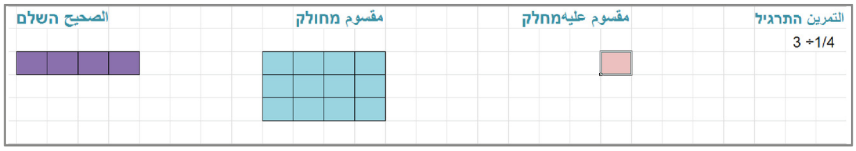
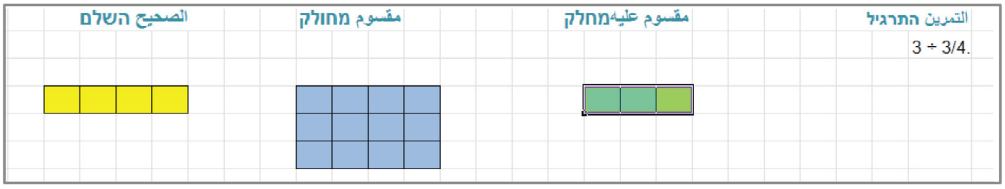
טבלה 3: מפגש למידה ראשון עם התלמיד

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
1	$1:\frac{1}{4}$ **חילוק שלם בשבר יחידה**	מורה: "איך תייצג את השלם של התרגיל $1:\frac{1}{4}$?" תלמיד: "השלם יהיה מורכב מארבעה רבעים, כל משבצת היא רבע אחד. אבדוק כמה פעמים רבע נכנס בתוך השלם."  **איור 4: ייצוג של התרגיל $1:\frac{1}{4}$ באקסל על ידי התלמיד**  **איור 5: ייצוג באקסל של פתרון התרגיל $1:\frac{1}{4}$** התלמיד ייצג את התרגיל באקסל ורשם תשובה נכונה לאחר שבחר להפריד את המחולק לארבעה רבעים, ואמר: "ככה אפשר לראות שהמחלק נכנס 4 פעמים במחולק".
2	$1:\frac{3}{4}$ **חילוק שלם בשבר שמונהו גדול מ-1**	בתרגיל $1:\frac{3}{4}$, התלמיד ייצג את השלם כארבעה רבעים, את המחלק כ-3 משבצות (רבעים). מורה: "מה אתה רוצה לבדוק?"  **איור 6: ייצוג של התרגיל $1:\frac{3}{4}$ באקסל על ידי התלמיד** תלמיד: "כמה פעמים נכנסות 3 משבצות בתוך השלם. נשארת לי משבצת אחת לא מכוסה ולכן התשובה היא $1:\frac{1}{3}$." מורה: "תסביר איך הגעת ל- $1:\frac{1}{3}$?" תלמיד: "נשארה משבצת אחת של המחולק שלא כיסיתי. 3 משבצות הן המחלק שלי והחלק שנשאר הוא אחד מתוך השלוש."
3	$1:\frac{2}{3}$	התלמיד הסביר בדרך מילולית את תהליך הפתרון של תרגיל $1:\frac{2}{3}$ בדרך זו: "השלם (הכוונה לשלם הייחוס), הוא שלוש משבצות. שתי משבצות ($\frac{2}{3}$) (הכוונה ליחידת הייחוס) נכנסות פעם אחת בתוך ה'שלוש משבצות' ונשארה לי משבצת אחת לא מכוסה, שהיא מחצית משתי המשבצות (מחצית של $\frac{2}{3}$) ולכן התשובה היא $1:\frac{1}{2}$." להלן הצגת הפתרון וההסבר המילולי עם בניית הייצוג באקסל.  **איור 7: ייצוג של התרגיל $1:\frac{2}{3}$ באקסל על ידי התלמיד**

במפגש השני הוצגו תרגילי חילוק שבהם המחולק היה מספר טבעי הגדול מ-1. במפגש זה הוצגו התרגילים: $3:\frac{1}{4}$, $3\div\frac{3}{4}$ ו- $2\div\frac{3}{8}$.

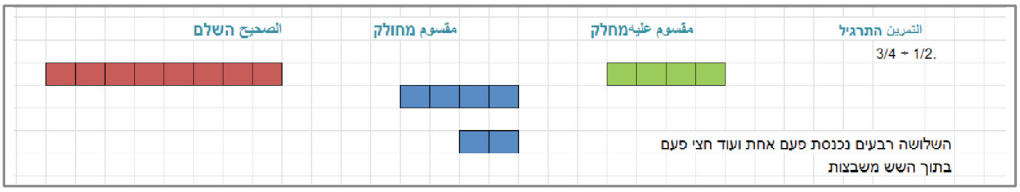
טבלה 4 מתארת את תהליך העבודה והשיח בין אותה מורה לאותו תלמיד במפגש השני.

טבלה 4: מפגש למידה שני עם התלמיד

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
4	$3:\frac{1}{4}$ **חילוק מספר טבעי גדול מ-1 בשבר יחידה**	תלמיד: "אני יודע ש- $\frac{1}{4}$ נכנס 12 פעמים ב-3, אבל אני יכול להראות גם באקסל. השלם (שלם הייחוס) שלי הוא $\frac{4}{4}$ ולכן 3 שלמים (המחולק) מהווים $\frac{12}{4}$. המחלק הוא משבצת אחת (רבע השלם)." התלמיד מנה 12 משבצות בתוך המחולק ואמר: "$3:\frac{1}{4}=12$".  **איור 8: ייצוג של התרגיל $3:\frac{1}{4}$ באקסל על ידי התלמיד**
5	$3:\frac{3}{4}$ **חילוק מספר טבעי גדול מ-1 בשבר שמונהו גדול מ-1**	בתרגיל להלן התלמיד הכין באקסל מלבן של 4 משבצות כמייצג את שלם הייחוס והסביר: "המחולק הוא 3, כלומר מלבן של 12 משבצות (3 פעמים שלם הייחוס). המחלק הוא $\frac{3}{4}$, כלומר מלבן של שלוש משבצות (יחידת הייחוס)." בהמשך "גזר" התלמיד מכל שורה אופקית של המחולק שלוש משבצות. מנה 3 פעמים את יחידת הייחוס בתוך המחולק ונשארה לו שלשה אחת במצב אנכי שעדיין לא מנה. הוא היסס אך אחרי כמה שניות גזר כל משבצת משלוש המשבצות המופיעות במאונך וסידר אותן מחדש, אופקית, מתחת לשלשות שקיבל ורשם את המנה, 4. מורה: "למה היית צריך לבצע את הגזירות של השלשה האחרונה?" תלמיד (חושב מעט ואומר): "אה ... רק עכשיו קלטתי שלא הייתי צריך. הרי כל שלוש משבצות הן יחידת הייחוס שלי ולא משנה איך הן מונחות. כעת אני תופס שיכולתי לגזור לפי העמודות ומיד לקבל אותה מנה בפחות גזירות."  **איור 9: ייצוג של התרגיל $3:\frac{3}{4}$ באקסל על ידי התלמיד** מורה: "בוא ננסה כעת לבדוק את התשובה שלך בעזרת כפל בהופכי." התלמיד פותר את התרגיל ככפל בהופכי, מגלה שתשובתו נכונה והוא מרוצה מהביצועים שעשה.
6	$2:\frac{3}{8}$	בתרגיל זה התלמיד מתחיל בייצוג באקסל ובמהלך הבניה הסביר מה שהוא עושה. תלמיד: "כל שלם הוא $\frac{8}{8}$ ולכן המחולק הוא פעמיים השלם, כלומר, 16 משבצות (16 שמיניות). המחלק הוא 3 משבצות (3 שמיניות). כמה פעמים קבוצה של 3 משבצות נכנסת בתוך ה-16? 5 פעמים ונשאר לי 1 ולכן התשובה היא $5\frac{1}{8}$." בתוך שהוא מביט באקסל, הוא מזהה בעיה ואומר: "לא נכון, החלק שנשאר הוא אחד מתוך השלוש שמהוות את יחידת הייחוס ולכן המנה היא $5\frac{1}{3}$".

במפגש השלישי הוצגו התרגילים: $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}$ ו- $\frac{3}{4}\div\frac{1}{4}$, בהם גם המחולק וגם המחלק שברים פשוטים. ראו טבלה 5.

טבלה 5: מפגש למידה שלישי עם התלמיד

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
7	$\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ חילוק שבר בשבר	תלמיד: "השלם (שלם הייחוס) צריך להתחלק ב-2 וב-4 ולכן הוא $\frac{8}{8}$. המחולק $\frac{3}{4}$ מיוצג אצלי על ידי שש משבצות (6 שמיניות) ויחידת הייחוס, החצי, זה 4 משבצות (4 שמיניות). אני צריך לבדוק כמה פעמים ה-4 משבצות נכנסות בתוך ה-6 משבצות." התלמיד מתחיל לייצג את התרגיל באקסל. הוא כותב בתחתית הדף: "חצי נכנס פעם אחת ועוד חצי פעם, בתוך שש משבצות" ורושם תשובה $\frac{1}{2}$."  **איור 10: ייצוג של התרגיל $\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ באקסל על ידי התלמיד**
8	$\frac{3}{4}\div\frac{1}{4}$	התלמיד הסתכל על התרגיל ואמר: "אני יודע את התשובה בלי אקסל, זה 3. כי $\frac{1}{4}$ נכנס 3 פעמים ב-$\frac{3}{4}$." בהמשך ניגש התלמיד לאקסל ומבלי לדבר הציג את השלם, הציג את המחלק והמחולק ואמר: "רבע הוא משבצת אחת והוא נכנס 3 פעמים בתוך שלושה רבעים". מורה: "בוא נקשר בין שני התרגילים שעשינו כעת $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ ו-$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$. מה תוכל לומר?" תלמיד: "בשני התרגילים המחולק שווה, הוא $\frac{3}{4}$ והמחלק בתרגיל השני הוא מחצית מהמחלק שבתרגיל הקודם, $\frac{1}{4}$ הוא מחצית ה-$\frac{1}{2}$. כשמסתכלים על המנות של שני התרגילים, בתרגיל השני המנה גדולה פי 2 מהמנה של התרגיל הראשון. כמו שלמדנו, למשל, אם המנה של 24:8 היא 3 אז המנה של 24:4 תהיה גדולה פי 2, היא 6. גם כאן $1\frac{1}{2}$ זה חצי של שלוש." מורה: "יפה! אתה מקשר מאוד יפה בין תרגילים."

חלק שלישי - חזרה לדילמת החלק הנותר

סעיפים ב ו-ג בשאלת המחקר השנייה היו: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם -

ב. התייחסות לחלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?

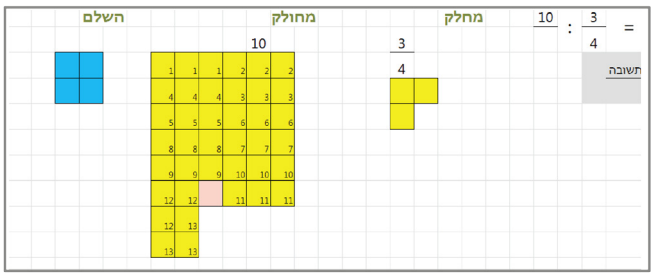
ג. התייחסות לדילמת החלק הנותר בעקבות הצגת פתרון שגוי?

עד כה עסקנו בתיאור מקרה של תלמיד בודד. התלמידים האחרים שעברו תהליכים דומים של ייצוג תרגילי חילוק באקסל, נעזרו במודל שהם יצרו באקסל או בציור, בבואם לפתור את בעיית הציפיות ולהסביר את דילמת החלק הנותר (ראו איור 2). להלן 2 דוגמאות של תשובות תלמידות.

תלמידה א (תלמידת כיתה ו'):

המחלק הוא $\frac{3}{4}$ והמחולק הוא 10, לכן, בגלל שהמכנה של המחלק הוא 4 אייצג את השלם כ 4 רבעים" (בכחול באיור). התלמידה ייצגה את הסיטואציה באקסל, כשהיא מייצגת את שלם הייחוס באמצעות 4 משבצות ואת המחולק באמצעות 40 משבצות. היא החלה להעתיק ולהדביק שלשות של משבצות כדי לבדוק כמה שלשות מכסות את המחולק (כמה פעמים המחלק, שהוא יחידת הייחוס, מוכל במחולק). כשמנתה שלשות, היא נתנה מספר זהה לכל שלשה (ראו איור 13) והשיבה שיש 13 שלשות ונותרה משבצת אחת לא מכוסה. היא אמרה שהחלק הנותר הוא חלק מהמחלק, לכן התשובה $13\frac{1}{3}$.

זו גם התוצאה שקיבלתי כשכפלתי בהופכי. קריסטין טעתה.



איור 11: תשובה של תלמידה לדילמת החלק הנותר עם ייצוג באקסל

כששאלתי אותה:

אז איך אפשר להסביר את הטעות של קריסטין?

השיבה:

המחלק הוא שלוש משבצות, לכן המשבצת שנותרה היא רק 1/3 ממנו. קריסטין אולי הסתכלה על השלם (שלם הייחוס) שיש בו ארבעה חלקים, לכן טעתה.

לפני ההתנסות באקסל תלמידה זו לא יכלה לזהות את משמעות החלק הנותר ולא הצליחה להסביר למה החלק הנותר אצלה הוא $\frac{1}{3}$ ואצל קריסטין $\frac{1}{4}$. לאחר ההתנסות הבינה התלמידה את משמעות החלק הנותר, ראתה אותו ויזואלית והצביעה עליו. התלמידה הוסיפה:

הדרך קלה מאוד וזה נראה יותר ברור במיוחד הענין עם החלק הנותר.

התלמידה סיכמה את תהליך הלמידה באמצעות האקסל ואמרה:

לדעתי זה מצריך יותר מדי זמן. צריך לצייר ולאחר מכן לבצע את פעולת החילוק, זה מאוד מעייף. אבל, כדאי פעם אחת ללמוד עם אקסל **ואז, כשמבינים ניתן לפתור דרך "תרגיל פשוט"**.

תלמידה ב (תלמידת כיתה ו') נתנה הסבר המבוסס על ידע קודם וקישרה בין חילוק במספרים טבעיים לחילוק בשברים. היא אמרה:

החלק הנותר הוא מתוך $\frac{3}{4}$ כי זה בדיוק כמו בחילוק מספרים טבעיים כשאני מחלקת

(1) 11 : 5 = 2 אז החלק הנותר הוא 1 מתוך 5 (המחלק)

ובחילוק שברים זה אותו עיקרון, החלק הנותר הוא $\frac{1}{3}$ מ- $\frac{3}{4}$.

לפני תהליך ההתנסות באקסל, שום תלמיד לא הצליח להסביר את משמעות החלק הנותר בבעיית הדילמה, ואילו לאחר למידה 8 תלמידים הצליחו לעשות זאת. לאחר ההתנסות של התלמידים בפתרון תרגילים באמצעות אקסל, 8 מתוך 9 התלמידים יכלו להסביר את תשובתה השגויה של קריסטין. רק אחד התלמידים נזקק לפתרון התרגיל באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי כדי להסביר את משמעות החלק הנותר בעוד שהשאר לא נזקקו לו.

שאלת מחקר שלישית נגעה להשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית.

כאמור, כל מורה תיעדה את תהליך הלמידה עם התלמיד, ובתום התהליך כתבה רפלקציה על תרומת התהליך להתפתחות הידע שלה כמורה. רפלקציה זו כללה את התהליך שבו המורות השתתפו בלמידה אישית ובהמשך כיצד שלב זה בא לידי ביטוי בתהליך ההוראה. המורות הדגישו בכתיבתן את חשיבות השפה המתמטית המדויקת, את ההשפעה המזיקה בהוראה הנשענת על אלגוריתם וכנגד זה את חשיבות בניית תהליכי למידה שמפתחים הבנה באמצעות ייצוגים דינמיים. נגלה בדברי המורות קטגוריות של סוגי ידע מורה. להלן מקבץ ציטוטים מתוך רפלקציות של המורות, הממוין לפי סוגי ידע.

התפתחות ידע תוכן מתמטי

"לאור ההתעסקות שלי עם המשימה, הגעתי למסקנה, שמורים למתמטיקה בבית הספר היסודי העוסקים בהוראת חילוק שברים, צריכים לדעת לבטא ולייצג בצורה נכונה ומדויקת את כל מרכיבי התרגיל, בכל דרך שיבחרו ולקשר בין המרכיבים האלו."

"לפתור תרגיל חילוק באמצעות כפל בהופכי, זה טכני ואני לא ממש התעניינתי בשאלה: למה זה נכון. אין לי ספק שכמורה אני חייבת להבין לעומק את המשמעות של מה שאני עושה על מנת ללמד מעבר להנחיות לפעולה. היום אני ממש יכולה לראות את תמונת התרגיל לפני הפתרון..."

"המורים צריכים להיות מודעים... עליהם להציג גם את המחלק וגם את המחולק ביחס ליחידה השלמה שאותה הם קבעו, שלם הייחוס, ולמנות את מספר הפעמים בהם נכנסת יחידת הייחוס (המחלק) במחולק, מה החלק הנותר, ואיזה חלק הוא מהווה מתוך יחידת הייחוס ולדעת לרשום את המנה בצורה מתמטית נכונה."

"למדתי להתבונן בתרגיל ולהבין את המשמעות של כל מספר בתרגיל. זו הפעם הראשונה שנתקלתי במונחים, כמו שלם הייחוס או יחידת הייחוס... עכשיו באמצעות האקסל, אני מרגישה שבאמת הבנתי את התהליך."

"שימוש בשפה מתמטית לאורך הוראת הנושא הוא עניין מאוד חשוב שעל המורה לשים לב אליו. בשילובו של האקסל בהוראת הנושא לא יהיה הרבה ערך מוסף, אם לא ישתמש המורה במושגים המתמטיים הנכונים והמדויקים לשם הוראה."

ציטוטים המתייחסים להתפתחות ידע תוכן פדגוגי

"מורים המלמדים את הנושא, צריכים להתחבר לדרכי הפתרון של התלמידים, הנכונות והפחות נכונות, להבין את המקור שלהן, ולנתח את הטעויות של התלמידים, במיוחד את טעויות החשיבה, לנסות להוביל את התלמידים להבנה מעמיקה."

"מורים צריכים לתכנן את הוראתם כך שהוראה זו תתחיל מהידע האינטואיטיבי שיש לתלמידים בנושא, תתנגש עם הקשיים האינטואיטיביים שיצוצו במהלך ההוראה, תטפל בקשיים אלה כראוי על מנת שיתרחש תהליך של למידה."

"הטיפול בטעויות תלמידים לשם הוראה נכונה ולשם התגברות על הטעויות, צריך להיות מלווה בשאילת שאלות מתאימות שתאפשר למורה להבין את מקור הטעות ולטפל בו כראוי."

"מעולם לא שמתי לב לשתי המשמעויות של החלק הנותר, פעם כשזו התשובה הנכונה, שמתארת חלק מהמחלק ופעם כשזה חלק מהשלם. לקח לי זמן להבין את זה, אז בטח שגם לתלמידים זה מורכב."

"הרבה פעמים אנו נתקלים במורים המלמדים את הנושא רק בעזרת טכניקת הכפל בהופכי, מבלי להסביר את המקור של הטכניקה ומבלי לאפשר לתלמידים לחקור את הנושא לעומק."

"בעבודתי זו נחשפתי למידת השפעת הוראת האלגוריתם על התלמיד, והתלות שהוא מפתח באלגוריתם זה. תלות זו היוותה מחסום ללמידה משמעותית בתחילת העבודה. לקח לי הרבה זמן עד שהצלחתי לגרום לתלמיד לא להשתמש באלגוריתם ולהציג דרך נוספת."

"היה מעניין לראות תלמיד שלא למד איך פותרים על ידי כפל בהופכי, מסוגל להתמודד עם המשימה תוך גיוס הבנה ויכולת להגיע לתשובה הגיונית. זה נתן לי אומץ להעז יותר ולא לחשוב שאם לא לימדתי, התלמידים לא יוכלו להתמודד."

"הכלי (האקסל), אפשר לתלמיד להציג את התרגיל באופן ויזואלי. הוא חייב היה להיות פעיל בבניית הייצוג. היה מדהים לראות את התלמיד מציג תרגילים, משתמש בשפה מתמטית נכונה, מסביר כל מהלך שהוא עושה ומסוגל גם להסביר איפה הוא מתקשה."

ציטוטים הנוגעים להתפתחות ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי

"התהליך גרם לי להיות מודעת ליתרונות של הטכנולוגיה, ולראות איך אפשר לנצל יתרונות אלה. חשוב להכיר את החסרונות של הטכנולוגיה הזו על מנת לתעל את ההוראה שלנו ולתכנן אותה בהתאם. למשל, זה לוקח זמן רב, אז חשוב להיות ממוקדים."

"בעקבות ההתנסות שלי עם המשימה, התברר לי שאם אני רוצה לנסות דרך הוראה מסוימת, אני צריכה להבין אותה וללמוד אותה לעומק. כשהתחלתי בהעברת הפעילות, התכוננתי לקראת המשימה ייצגתי בעצמי תרגילים באקסל על מנת להכיר את הפעילות, להתחבר אליה, ולדעת לשאול את השאלות הנכונות. במהלך ההעברה של המשימות, היו מקומות שבהם לא הרגשתי ביטחון במה שאני מעבירה ואת זה לא אהבתי במיוחד."

"שילוב האקסל בהוראת חילוק שברים, מאפשר לי כמורה להמחיש את המשמעות של פעולת החילוק, להציג מושגים מתמטיים בצורה ברורה, דבר שיכול לתרום לפיתוחה של הבנה מעמיקה. הרגשתי אחרי התהליך עם התלמיד שלי, שהוא ממש רואה את המנה."

"זה היה עבורי חדש ומלמד... לימדתי מספר פעמים את הנושא... תמיד לפי הספר ולפעמים שילבתי כל מיני יישומונים... הפעם הרגשתי שאני עברתי תהליך, הייתי מעורבת וזה היה מעניין וחשוב."

סיכום ודיון

מחקר זה התמקד בהתמודדות תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים ויכולתם לדון במשמעות החלק הנותר (Perlwitz, 2005), באמצעות דילמה שהוצגה לפניהם טרם תהליך ההתערבות ולאחריו.

הצגנו דרך הוראה המאפשרת לתלמיד לבנות את תהליך החילוק בשברים מתוך המחשה המתבססת על הגדרת שלם הייחוס ובניית המחולק והמחלק (יחידת הייחוס) לפי אותו שלם (שחברי ופלד, 2012; Lamon, 1994). בניית התרגיל נעשתה באקסל. יש לציין שמהות הפתרון באמצעות האקסל לא מכוונת להקניית אלגוריתם הכפל בהופכי, אלא לכלי שבאמצעותו אפשר להציג פתרון ויזואלי, להבין את משמעות המנה ובמיוחד את משמעות החלק הנותר, כשהמנה אינה מספר טבעי. אין במאמר זה משום המלצה להשתמש דווקא בתוכנת האקסל, אלא ברעיון של הבניית התהליך על ידי התלמיד בכלי דינמי. לדוגמה תרגיל 6 (ראו טבלה 4 לעיל) מראה כיצד התלמיד פועל ומסביר כל שלב בתהליך החילוק. נראה שהייצוג הוויזואלי מאפשר לו להבין את הטעות שלו. התשובה האינטואיטיבית מכוונת אותו לראות במשבצת שנותרה $\frac{1}{8}$, אבל התלמיד בוחן את תשובתו (החלק הנותר מתוך מה?) ומתקן את הטעות במתן הסבר ש"החלק הנותר הוא 1 מתוך 3". יש מקום לשער שתהייה זו לא הייתה מתעוררת אם היה פותר באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי, שהיה מוביל אותו לתשובה המדויקת. הייצוג החזותי של הפתרון שחרר אצלו את התלות באלגוריתם ופינה מקום להערכה ביקורתית. נראה ששלב ההוראה חשוב מאוד, שכן הייתה תמיכה ביכולתו של התלמיד להציג את נתוני התרגיל ולהסביר את כל שלבי הפתרון, מתוך שימת דגש בשימוש במושגים הנוגעים להכלה ולהבחנה במשמעות החלק הנותר.

מתוך ציטוטי המורות אפשר ללמוד על משמעות התהליך שעברו ועל תרומתו להתפתחות ידע התוכן המתמטי וידע התוכן הפדגוגי שלהן.

בתרגיל 7 (ראו טבלה 5), התלמיד "מתבונן" במחלק ובמחולק, וקובע את שלם הייחוס. מבחינה מתמטית מתבצעת כאן בדרך אינטואיטיבית הרחבה של המחולק והמחלק לשברים בעלי מכנה זהה $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{6}{8}+\frac{4}{8}$ התלמיד בודק כמה פעמים 4 "נכנס" ב-6. בהמשך נראה שקורה דבר נוסף, התלמיד "מסתכל" על תרגיל 8 וקובע את המנה, כשהוא מסביר את קביעתו ואף מסוגל להקיש ממנת התרגיל $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$, שמנת התרגיל הבא $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$ תהיה גדולה פי 2 מקודמתה. נראה שבמהלך הפעילות פיתח התלמיד יכולת ליישם עקרונות מתמטיים מוכרים ולהרגיש די בטוח בתשובתו.

לאחר תהליך הלמידה של התלמיד, חזרה כל מורה לדילמת החלק הנותר כדי לבחון תוצאות ההתנסות של התלמיד על יכולתו להתבונן ולהגיב בביקורתיות על פתרונה של קריסטין (ראו איור 2). נלמד מתגובותיהם על שינוי ניכר בהבנתם את משמעות המנה. התהליך שחרר אותם מהתלות באלגוריתם, ובד בבד חיזק את יכולתם לבחון בביקורתיות תשובה שונה מזו שהגיעו אליה, בעת שהם מלווים קביעותיהם בהסברים ונימוקים. נראה שייצוג הפתרון באקסל צייד את התלמידים ביכולת להסביר נכונות או טעות בלי צורך בהדגמה של פתרון אלגוריתמי. הכלי שיחרר את התלמידים מהתלות באלגוריתם (Kamii & Dominick, 1998). הם ידעו לציין שהחלק הנותר בבעיית הציפיות נוגע ליחידת הייחוס (1 מתוך 3) ואף להסביר את מקור הטעות של קריסטין כפי שהסבירה תלמידה א: "קריסטין אולי הסתכלה על שלם (הייחוס) שיש בו ארבעה חלקים, לכן טעתה ..", או: "אולי בלבלה בין יארד שלם לבין החלק מהציפית (התכוונה ל- $\frac{1}{4}$ יארד). יפה היה לראות את הסברה של תלמידה ב, הנשען על ידע במספרים טבעיים כדי להסביר מדוע החלק הנותר הוא $\frac{1}{3}$ מתוך $\frac{1}{4}$. אחת התלמידות סיכמה את התהליך בהזכירה את הזמן הרב הנדרש לייצוג התרגיל באקסל, ועם זה היא ציינה את תרומת הייצוג להבנה: "לדעתי זה מצריך יותר מדי זמן... זה מאוד מעייף... אבל כדאי פעם אחת ללמוד דרך אקסל ואז כשמבינים ניתן לפתור דרך "תרגיל פשוט" (באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי)."

נקודת המוצא למחקר זה היא ראיית חשיבות בהבניית הידע וביצוע פעולות חשבוניות המושתתות על תובנה של התלמיד. המחקר מציע סביבה דינמית ממוחשבת שבה המורה והתלמיד יכולים לבנות בעצמם את תהליך הפתרון בדרך המובילה להבנה. התפיסה המנחה את המחקר היא שאיכות ההוראה היא פועל יוצא של ידע מורה: ידע תוכן מתמטי וידע פדגוגי (Shulman, 1987; Ball, 2010) ונוסף על אלה, ידע על אודות שילוב מושכל של כלים דינמיים ממוחשבים בהוראתו, כלומר ידע תוכן-פדגוגי-טכנולוגי (טבח וסלוצקי, 2015; Mishra & Koehler, 2006).

ל-8 מתוך 9 התלמידים שהשתתפו במחקר, היה ידע פורמלי על אודות חילוק שברים באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי, אך נלמד ממצאי המחקר שידע ביצועי זה אינו מעיד על הבנה. חסר זה

בהבנה בא לידי ביטוי כשהתבקשו לדון בסתירה בין הפתרון האלגוריתמי שהגיעו אליו לפתרון הוויזואלי (השגוי) שהוצג לפניהם.

התלמידים למדו לייצג תרגילי חילוק שברים באקסל (כשהמחלק נתון כשבר פשוט), במשמעות של חילוק להכלה. דיווחי המורות ועבודות התלמידים מלמדים על התפתחות מהותית ביכולת התלמידים להניב הסברים בעלי משמעות על החלק הנותר לאחר הייצוג באקסל. הידע שלהם לא התמקד בקביעת נכונות הפתרון, אלא גם ביכולתם להבין את מקור הטעות.

מתוך ציטוטי המורות אפשר ללמוד על משמעות התהליך שעברו ועל תרומתו להתפתחות ידע התוכן המתמטי וידע התוכן הפדגוגי שלהן. יפה היה לראות את התמקדותה של אחת המורות בשני התפקידים של החלק הנותר ובהיבט הפדגוגי הנובע מכך:

> מעולם לא שמתי לב לשתי המשמעויות של החלק הנותר, פעם כשזו התשובה הנכונה, שמתארת חלק מהמחלק ופעם כשזה חלק מהשלם. לקח לי זמן להבין את זה, אז בטח שגם לתלמידים זה מורכב.

קושי זה תואם את המתואר במחקרה של שיפטר (Schifter, 1998), על אודות התובנה של המורה שבמהלך הצגת הבעיה והדילמה בעקבותיה, נוכחה בכפל התפקידים של החלק הנותר ובצורך לדון במשמעות שתי התשובות שהתקבלו.

בדיון על ייצוג תרגיל החילוק באמצעות אקסל, הזכירו המורות את מקומן כמזמנות סביבה טכנולוגית שבה גם הן וגם התלמידים פעילים, ואת תרומת הכלי להבנת התהליך באמצעות המחשת הפתרון, שימוש במושגים מתמטיים ופיתוח יכולת של "ראיית" המנה.

מרפלקציות של המורות נלמדת חשיבותו של התהליך האישי בהתפתחות הידע הייחודי להוראה (Ball, 2010), הכולל מגוון ייצוגים לפתרון, כמו ייצוגים סימבוליים (כתיבת תרגילים) והבנת משמעות המנה מעבר ליכולת הצגת פתרון באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי. המורות דנו בחשיבות השימוש בייצוגים ויזואליים (פתרון באמצעות כלים טכנולוגיים) ואף הבחינו בין יישומים שבהם התלמיד פועל במסגרת נתונה, לכלי האקסל שבו התלמיד "מייצר" את הפתרון ומביא לידי ביטוי הבנה באשר לתפקיד כל "שחקן" בתרגיל. שילובים אלה מחייבים התנסות של המורים בדרך להוראה המכוונת ללמידה משמעותית.

המחקר מלמד ששילוב כלים טכנולוגיים ובמקרה הספציפי – האקסל, בהוראת חילוק שברים, תרומתו בשני מישורים:

1. ברמת מורה – הכלי מאפשר להמחיש את המשמעות של פעולת החילוק ובתוך כך להבין הבנה עמוקה יותר את הרעיונות המתמטיים בבסיס הפעולה, כמו מקור קושי אפשרי לתלמידים. המורים הדגישו את הידע המתמטי, הידע הפדגוגי (Ball, 2010) וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי (טבח וסלוצקי, 2015; Mishra & Koehler, 2006), שהתפתח במהלך המחקר. התפתחות זו ניכרת בהבנה עמוקה יותר של מהות חילוק השברים, הבנה שאינה נסמכת על אלגוריתם בלבד, יכולת לצפות טעויות של תלמידים ויכולת להתמודד עם טעויות אלה. המורים ציינו שהחלטה על שילוב מחשב בהוראה ובלמידה, מחייבת במידה רבה את המורה לעבור תהליך של היכרות והתנסות עם הכלי הנבחר, בחינתו והבנת משמעות שילובו בהוראה. על המורים לחשוב על תהליך תיווך בעל משמעות ומתוך כך תרומתם המרבית להתפתחות ידע מתמטי מהותי בקרב תלמידיהם. המורים דיברו על יתרונות וחסרונות של שילוב הכלי (אקסל), בעצם היותו כלי מחייב מעורבות של התלמיד ומעודד שאילת שאלות והבנה של כל ייצוג.
2. ברמת התלמיד – הכלי מאפשר לתלמידים לתאר את תהליך פעולת החילוק מתוך שימוש במושגים מדויקים על המחלק (יחידת הייחוס), המחולק ושלם הייחוס. לאחר העבודה באקסל, תלמידים השתמשו בשפה מתמטית נכונה, הסבירו כל שלב בדרך לפתרון ואף היו "פנויים" לשילוב תובנה מספרית ויישום עקרונות מתמטיים כדי לנמק או לזהות טעויות בפתרונותיהם. הייצוג הוויזואלי וההבנה שנדרשה מהם שחררו אותם מהתלות באלגוריתם וביססו הבנה עמוקה של מהות הפעולה (Kamii & Dominick, 1998). התלמידים היו מעורבים בתהליך הפתרון והיו מודעים לייצוג המחלק והמחולק לפי היחידה השלמה שקבעו אותה כ"שלם הייחוס". הם מנו את מספר הפעמים שבהן נכנס המחלק במחולק, הבינו את משמעות החלק הנותר המתקבל וידעו לרשום את המנה בדרך מתמטית נכונה. שיאו של התהליך ביכולתם של התלמידים לדון בדרך ביקורתית בפתרון שגוי לאחר הדילמה שהוצגה לפניהם ולכוון למקור אפשרי לשגיאה.

תרומת המחקר

תרומתו בהשפעות של ידע מורה (ידע תוכן וידע פדגוגי) וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי על הבניית ידע של תלמידים במהלך ייצוג דינמי של תרגילים באקסל. ידע המורה הוא בסיס להוראה המכוונת להבנת משמעות הפעולה והשפעתו על עומק ההבנה של התלמיד ועל יכולתו להסביר ולנמק את תשובותיו. מחקר זה רואה חשיבות בבחירה בכלים דינמיים פתוחים שמאפשרים ייצוג מושגים ופעולות מתמטיות ומגביר את המעורבות של התלמיד, במקרה שלנו בנושא חילוק שברים פשוטים. שילוב ייצוג ויזואלי באמצעות אקסל של תהליך הפתרון מעמיק את ההבנה של התלמיד ואף מאפשר לתלמיד לבחון תהליכי פתרון בדרך ביקורתית.

מגבלות המחקר

אוכלוסיית התלמידים במחקר זה קטנה. 9 תלמידים, כאשר 8 מהם בשלב המחקר שלטו במיומנות הפתרון האלגוריתמי. היה אפשר ללמוד שידע קודם זה לא הספיק כדי להעיד על הבנה של משמעות הפתרון.

חסרונה של קבוצת ביקורת שלמדה באותו זמן את הנושא, מתוך שימת דגש בתהליכים המבוססים על עקרונות הלמידה המשמעותית, מקשה על ייחוס השינויים בידע התלמידים לייצוג ויזואלי באמצעות האקסל וראוי שייבחן בהיקף גדול יותר, אולי אף באמצעות כלים טכנולוגיים אחרים.

רשימת מקורות

טבח, מ' וסלוצקי, ג' (2015). חקר מורים שעשו הסבה ממקצוע בתחום הטייטק להוראת מתמטיקה בסביבה ממוחשבת. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' בלאו, א' כספי, נ' גרי, י' קלמן וו' זילבר-ורוד (עורכים), **ספר כנס צ'ייס למחקרי טכנולוגיות למידה: האדם הלומד בעידן הטכנולוגי** (עמ' 136-146). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

משרד החינוך התרבות והספורט. (2006). **תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.** ירושלים: המחבר. אוחזר מתוך http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf

ענבל-שמיר, ת' וקלי, י' (2007). הוראה מתוקשבת – דרך חיים או מעמסה למורה? אפיון הקצוות של טווח העשייה המתוקשבת של מורים. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' כספי וי' יאיר (עורכים), **ספר כנס צ'ייס למחקרי טכנולוגיות למידה: האדם הלומד בעידן הטכנולוגי** (עמ' 174-181). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

קלמר-שורץ, ע' ולב-זמיר, ח' (2018). ידע מורים וביטויו בהוראת חילוק שברים פשוטים. **מספר חזק 2000, 29,** 8-27.

שחברי, ג"ע ופלד, א' (2012). מודלינג וקונפליקט קוגניטיבי כדרך לשיפור תפיסת שלם הייחוס בשברים. **מספר חזק 2000, 21,** 23-30.

Ashlock, R. B. (1994). *Error patterns in computation* (6th ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Ball, D. L. (2010). *Knowing mathematics well enough to teach it: From teachers' knowledge to knowledge for teaching.* Paper Presented at the Institute for Social Research Colloquium, Ann Arbor, MI.

Escuder, A., & Furner, J. M. (2011). *The impact of geogebra in math teachers' professional development.* Paper presented at the International Conference on Technology in Collegiate Mathematics Annual Conference, Denver, Colorado.

Escuder, A., & Furner, J. M. (2012). The Impact of GeoGebra in Math Teachers' Professional Development. Retrieved from Hohenwarter, J., & Hohenwarter, M. (2012). *Introduction to GeoGebra version 4.2.*

Ferrucci, B. J., Yeap, B-.H., & Carter, J. A. (2003). A modeling approach for enhancing problem solving in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(9), 470-475.

Gravemeijer, K., & Galen, F. V. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In W. G. Martin, J. Kilpatrick, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 114-122). Reston, VA: NCTM.

Grabber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *The Arithmetic Teacher, 40*(7), 408-411.

Hughes, J. E. (2005). The role of teacher knowledge and learning experiences in forming technology-integrated pedagogy. *Journal of Technology and Teacher Education, 13*(2), 277-302.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematicsacgk.

Kent, L. B., Empson, S. B., & Nielsen, L. (2015). The richness of children's fraction strategies. *Teaching children mathematics, 22*(2), 84-90.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany, NY: State University of New York Press.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. doi:10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Offir, B. (2010). *The process of change in education: Moving from descriptive to prescriptive research.* Hauppauge N.Y.: Nova Science Publishers.

Perlwitz, M. D. (2005). Dividing Fractions: Reconciling Self-Generated Solutions with Algorithmic Answers. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(6), 278-283.

Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2015). How many in one? *Mathematics in the Middle School, 20*(5), 308-312.

Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1(1), 55-87. doi:10.1023/A:1009911200478

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching In the Middle School,* 3(5), 344-350.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25. doi:10.2307/749817



נספח 1 - מחוון לאפיון וניתוח פעילויות מתוקשבות שפיתחו מורים (מתוך: ענבל-שמיר וקלי, 2007, עמ' 176)

המימד	אפיון גבוה (3)	אפיון בינוני (2)	אפיון נמוך (1)
ניצול הערך הטכנולוגי	הטכנולוגיה הכרחית בביצוע הפעילות. יש הפנייה למגוון אתרים עשירים, עדכניים, או כאלה המשלבים טקסט עם מרכיבים ויזואליים המסיעים להבנת התכנים לדוגמא: הלומד משתמש בהדמיות באופן אקטיבי, מבצע אינטראקציה עם התכנים, או שותף פעיל לדיאלוג בפורום.	המרכיב הטכנולוגי עשוי ליצור עניין וחידוש, אך ללא שינוי במהות הלמידה ולכן ניתן להמרה בפעילות לימודית שאינה מתוקשבת. העניין יכול להיות מושג על ידי: הפנייה לקישורים בודדים, או שימוש בפורום כמקום להבעת עמדה אך ללא דיון.	השימוש בתקשוב הוא טכני ואינו משפיע על מהות הלמידה. תלמידים מורידים דפי עבודה מסורתיים ממוחשבים, לעיתים, ממלאים ומחזירים למורה ישירות או לפורום. הדגש על המימד הארגוני וניהולי. אין קישורים למקורות ברשת.
רמת חשיבה נדרשת	הפעילות מעודדת חשיבה, שאילת שאלות, נקיטת עמדה או הסקת מסקנות, מעודדת יצירתיות, יזמות והבניית ידע בדרך של ניתוח, יישום, אנליזה, סינתזה, רפלקציה והערכה. (בלום – רמה 6-3).	הפעילות מעודדת הבנה תוך שימוש במספר מוגבל של מיומנויות חשיבה: מתן דוגמאות, תיאור, סיכום או הסבר כללי למידע שנאסף ברשת (בלום – רמה 2).	שינון ידע. התמקדות בשאלות ותשובות סטנדרטיות. מכוונת לביצוע משימות איסוף מידע פשוטות (בלום – רמה 1).
מידת השיתופיות	יש שימוש במרכיבים תיקשוביים התומכים בעבודה שיתופית כחלק בלתי נפרד ומהותי בתהליך הלמידה. הלומדים משמשים מקור מידע לעמיתיהם לדוגמא: לומדים דנים בנושאים משותפים; בונים תוצר משותף; מתייעצים; מעריכים זה את זה או מתייחסים לתוצרי עמיתים.	יש הנחיות מפורשות לכך שתלמידים יעבדו בכיתה בזוגות או בקבוצות, אך ללא תמיכה טכנולוגית באינטראקציה בין עמיתים. (תלמידים עובדים ביחד בכיתה ומגישים עבודה למורה בפורום). אין אינטראקציה בין קבוצות.	אין התייחסות ללמידה שיתופית. מתוך ההנחיות עולה כי הלמידה היא אישית. לעיתים הלומדים מנועים מעבודה שיתופית מתוך העיקרון שלמידה יש לבצע רק באופן עצמאי. לעיתים התשובות מועלות לפורום, אך לשם עיון המורה בלבד.
קרוב התכנים לעולמו של הלומד	קיים קישור לעולמו התרבותי של הלומד ולידע הקודם שלו. אפשר לעשות זאת על ידי: א) בחירת הקשר שעשוי לעניין את הלומדים, ב) עיסוק בפתרון בעיית אמת. ג) קיום דיונים אקטואליים ורלוונטיים ללומדים.	יש ניסיון לקשר את התכנים לעולמו של הלומד, אולם הקישור אינו משמעותי. למשל הבעת אפשרות להביעה דיעה אישית, או יצירת סיפור מסגרת מלאכותי שאיננו קשור ישירות למהות ולאופי הפעילות.	אין ניסיון לקשר ולקרב את התכנים לעולמו של הלומד. מושם דגש על חומר שהלומד צריך לדעת או לזכור.
הכוונה לתוצרים עשירים	קיימות הנחיות מפורטות ומובנות למשימה, העוזרות ללומד בבניית התוצר, ומאפשרות למורה לשמש כמנחה. התוצר מגוון, יצירתי או מקורי. מאפשר ניצול כישורים אישיים וביטוי עצמי.	ההנחיות מאפשרות תוצר בעל פתיחות מסוימת וביטוי אישי, אולם הן כלליות, ואינן תומכות או מבנות את תהליך הלמידה. למשל: כתוב סיפור בעקבות...; בנה ת.ז. של... מה הייתי עושה אילו..., דעתי על...	ההנחיות מכוונות לתוצר אחיד, סגור ומוגדר על ידי המורה (המורה במרכז הלמידה). לא נדרשת יצירתיות לביצוע התוצר. למשל: שאלות ותשובות סטנדרטיות, מיון נתונים בטבלה...
הערכה שזורה	הערכה ניתנת ע"י המורה או התלמידים העמיתים על פי קריטריונים ברורים נתונים מראש. ההערכה מלווה את תהליך הלמידה ומשביחה אותו.	קיימת התייחסות להערכת התוצרים, אך ללא הצגת קריטריונים ברורים. באתר או בכיתה, ללא ביצוע הערכה מעצבת.	אין התייחסות לאופן שבו הלומד מוערך. או שההערכה מסכמת (נשלחת למורה לבדיקה ומתן ציון) ואינה מהווה חלק מעצב בתהליך הלמידה.

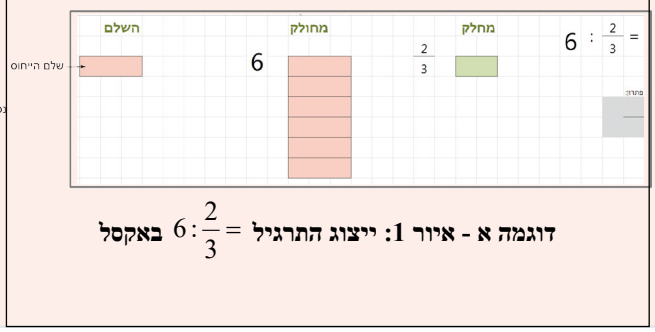
נספח 2 - התנסות המורות במכללה בשלב המקדים

דוגמאות לשלושה תרגילים מההתנסות של המורות לבניית ייצוגים לתרגילי חילוק שברים באקסל.

א. חילוק שלם בשבר; ב. חילוק שבר בשלם; ג. חילוק שבר בשבר.

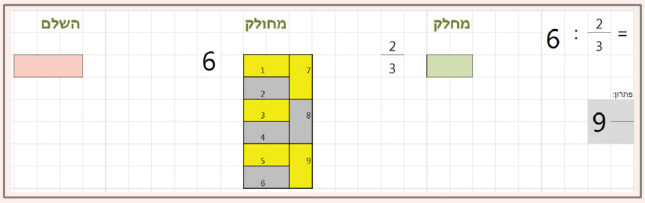
דוגמה א - תרגיל חילוק שלם בשבר:

$6:\frac{2}{3}=$ שלם הייחוס בנוי מ-3 משבצות בגיליון האקסל, המחלק ממחיש $\frac{2}{3}$ משלם הייחוס (על ידי 2 משבצות מתוך 3), והמחולק מהווה 6 פעמים שלם הייחוס (18 משבצות). לפתרון התרגיל יש לבדוק כמה פעמים $\frac{2}{3}$ מוכל ב-6 (ראו איורים 1, 2 נספח 2):



דוגמה א - איור 1: ייצוג התרגיל $6:\frac{2}{3}=$ באקסל

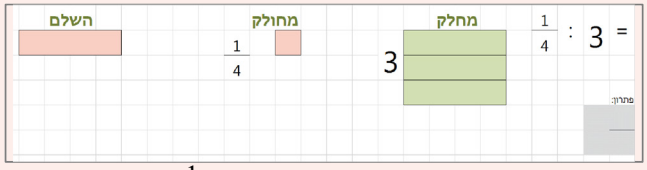
המחשת הפתרון: המחלק מוכל 9 פעמים במחולק.



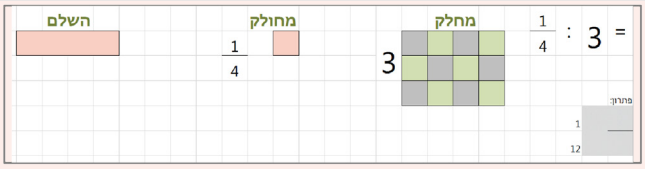
דוגמה א - איור 2: המחשת הפתרון של התרגיל $6:\frac{2}{3}=$ באקסל

דוגמה ב - תרגיל חילוק שבר בשלם: $\frac{1}{4}:3=$

בדוגמה זו, שלם הייחוס בנוי מ 4 משבצות, המחלק מהווה 3 פעמים שלם הייחוס, והמחולק הוא $\frac{1}{4}$ מתוך שלם הייחוס. לפתרון התרגיל יש לבדוק איזה חלק של ה- 3 מוכל ב- $\frac{1}{4}$:



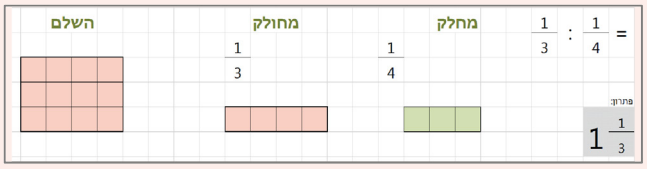
דוגמה ב - איור 1: ייצוג התרגיל $\frac{1}{4}:3$ באקסל



דוגמה ב - איור 2: המחשת הפתרון, $\frac{1}{12}$ של המחלק מוכל במחולק

דוגמה ג - תרגיל חילוק שבר בשבר: $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=$

כדי להצליח לייצג את המחלק ואת המחולק בעזרת משבצות שלמות שלם הייחוס ייבנה מ-12 משבצות (כפולה משותפת של 4 ושל 3), המחלק מהווה $\frac{1}{4}$ משלם הייחוס, והמחולק הוא $\frac{1}{3}$ משלם הייחוס.



דוגמה ג - איור 1: המחשת הפתרון, המחלק מוכל במחולק פעם אחת ועוד שליש ממנו (מהמחלק).

נספח 3 - שאלות לתלמידים

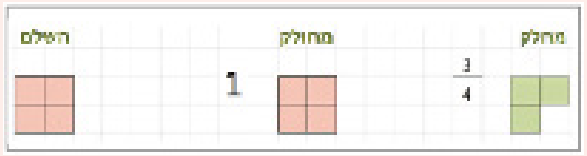
חילוק שברים – בניית מודל דינמי

שיעור 1

1. בנו את התרגילים הבאים באקסל.
2. תארו בכתב את תהליך הפתרון.

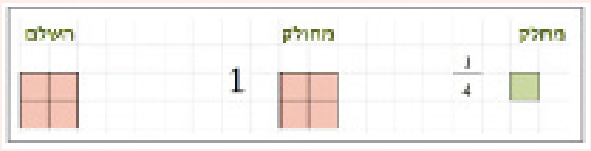
לפניכם שתי דוגמאות להמחשה:

דוגמה 1



- חילקנו 4 רבעים ב $\frac{1}{4}$
- בדקנו כמה פעמים $\frac{1}{4}$ מוכל בשלם

דוגמה 2



- חילקנו 4 רבעים ב- $\frac{3}{4}$
- בדקנו כמה פעמים $\frac{3}{4}$ מוכל בשלם

פתרו:

א. פתרו את התרגילים הבאים תוך בנייה באקסל וכתיבת התרגילים ב"שפה" של המכנים המופיעים בכל תרגיל.

ב. תארו בכתב את הפתרון לאחר הבנייה באקסל.

$$2:\frac{3}{4}=$$
$$5:\frac{3}{4}=$$
$$10:\frac{3}{4}=$$
$$1:\frac{3}{4}=$$
$$1:\frac{3}{8}=$$
$$2:\frac{3}{8}=$$
$$5:\frac{3}{8}=$$
$$10:\frac{3}{8}=$$

שיעור 2

א. פתרו את התרגילים הבאים תוך בנייה באקסל וכתיבת התרגילים ב"שפה" של המכנים המופיעים בכל תרגיל.

ב. תארו בכתב את הפתרון לאחר הבנייה באקסל.

$$\frac{1}{4}:2=$$
$$\frac{1}{4}:3=$$
$$\frac{3}{4}:2=$$
$$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=$$
$$\frac{3}{4}:\frac{1}{3}=$$
$$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=$$
$$\frac{3}{4}:\frac{1}{5}=$$
$$\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=$$

תלמידי תיכון צופים בסרטונים לימודיים בדרכים מגוונות בעת הכנת שיעורי בית במתמטיקה

מהא מנסור

אליק פלטניק



מהא מנסור

מורה ורכזת ומתמטיקה בבית ספר תיכון בקרית החינוך עתיד דלית-אל-כרמל. בעלת 18 שנות ותק בהוראה.

בשנת 2017 סיימה תואר שני בהצטיינות יתרה במסלול הוראת המתמטיקה על-יסודי במכללת אורנים.



ד"ר אליק פלטניק

מרצה במכללת אורנים ובמכללת שאנן.

תחומי מחקר עיקריים: למידה מבוססת חקר, למידה מעוגנת גוף, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

מאמר זה מתמקד באמצעים טכנולוגיים המסייעים לתלמידי תיכון בהכנת שיעורי בית במתמטיקה. במאמר זה יוצגו ממצאים מתוך מחקר גישוש שבדק כיצד תלמידים משתמשים באחד המשאבים הטכנולוגיים הנפוצים ביותר – סרטוני וידאו שמציגים את הפתרון של בעיה מתמטית צעד אחר צעד. המחקר בדק בכלים איכותניים שש תלמידות תיכון שמסתייעות בקביעות בסרטונים בזמן הכנת שיעורי בית. לצורך המחקר בוצעו ראיונות ונעשו תצפיות שעוצבו כסימולציה של הכנת שיעורי בית עם היכולת להשתמש בסרטונים. זוהו ואופיינו שני דפוסים של צפייה בסרטונים. הדפוס הראשון: צפייה בסרטון וידאו טרם ניסיון פתרון עצמאי. קיים גם דפוס משנה שהוא צפייה במספר סרטונים ברצף כדי להבין את התוכן לעומק. הדפוס השני: צפייה מקוטעת בסרטון. כאן תלמיד צופה בחלקים מתוך הסרטון ובעת הצורך. דפוסי צפייה אלה מושפעים מצרכיו האישיים של התלמיד ומרמת הבנתו. מוצגות ההמלצות לבעלי עניין בלמידה בשילוב טכנולוגיות (מורים, תלמידים ומפתחי סרטונים).

מילות מפתח: שיעורי בית; סרטונים לימודיים; הסתברות; דפוסי צפייה.

מבוא

מאמר זה מתמקד באחת הגישות שנועדה לספק לתלמידים מענה בעת הכנת שיעורי הבית, כלומר סרטוני וידאו שמספקים הסבר מלא ומפורט לפתרון עבור שאלות שמופיעות בספר הלימוד. חוקרים רבים הדגישו את חשיבות שיעורי הבית במתמטיקה בשל תרומתם החיובית בהיבט הפדגוגי, הרגשי והקוגניטיבי (למשל Cooper, & Valentine, 2001; Roschelle, Feng, Murphy, & Mason, 2016; Zhu & Leung, 2011). ההיבט הפדגוגי בא לידי ביטוי בכך ששיעורי הבית מסייעים למורה בתרגול החומר הנלמד בכיתה. ההיבט הרגשי נוגע להתמודדות מוצלחת של התלמידים עם שיעורי הבית, התמודדות המובילה לפיתוח אישיות עצמאית ויכולת לשאת אחריות על הלמידה. ההיבט הקוגניטיבי מכוון לכך ששיעורי הבית

תורמים להבנת החומר הנלמד ולזכירתו, וכן גם מפתחים מיומנויות של חשיבה עצמאית (Cosden, Morrisom, Albanese, & Macias, 2001). חוקרים רבים תומכים במתן שיעורי בית מתוך אמונה כי שיעורי בית שמתוכננים היטב ומבוצעים בעקביות, תורמים לצמיחה הרגשית של התלמיד ולהתפתחותו הקוגניטיבית (קופינסקי, 2009; Cooper, 1994). יתרה מזו, מחקרים מציינים שלשיעורי הבית יש קשר חיובי עם הישגים אקדמאיים (Fan, Xu, Cai, He, & Fan, 2017).

החשיבות הרבה של נושא שיעורי הבית במתמטיקה הגבירה את הצורך באספקת משאבים טכנולוגיים שמטרתם לסייע לתלמידים בהתמודדות עימם. משאבים אלה, שהופיעו בעשור הראשון של המאה העשרים ואחת, תומכים במגוון דפוסי למידה חדשים שנהוגים כיום במוסדות חינוך. כיום למידה בסביבה מתוקשבת היא רחבה ומגוונת, שכן הטכנולוגיה זמינה ללומד בעת ובמקום הנוחים לו (Zhang, Zhao, Zhou, & Nunamaker, 2004). בסביבה זו הלומד מתבקש להיות פעיל בלמידתו, לדעת להפעיל שיקול דעת בתהליך הלמידה, כגון החלטה על מעבר לייצוג או ליחידה מסוימת המופיעים בסביבה המתוקשבת, או חזרה נוספת על יחידות הוראה מסוימות לפי הצורך והקצב שלו (Jacobson & Archodidou, 2000).

בעשור האחרון החלו מורים ומרצים לשלב פעמים רבות משאבי למידה מוקלטים בשיעורים שלהם בכיתות "הפוכות", כיתות "מעורבבות" וקורסים מקוונים פתוחים ("MOOCs"). לפי גירסטין (Gerstein, 2011) במודל הכיתה ההפוכה התלמידים לומדים בבית באמצעות מצגות וקטעי וידאו קצרים, שקיימים ברשת. הם צופים בביתם במצגות ובקטעי הווידאו הקצרים, כדי להבין ולתרגל את החומר הנלמד. זאת לעומת הלמידה המסורתית שבה המורה הוא מקור הידע, כאשר הקניית החומר החדש מתבצעת בתוך הכיתה בעזרתו, והתלמידים אחראים לתרגל ולהכין את שיעורי הבית בעצמם (De Araujo, Otten, & Birisci, 2017).

למרות הצמיחה המתמדת בהיקפה של הוראה משולבת טכנולוגיה וכל מיני מודלים של סביבה וירטואלית, המחקר בנושא רחוק מלהיות מקיף (Barbour, 2010). למשל קיימים מחקרים שתיארו את ההשפעה החיובית של הכיתות ההפוכות, ובעקיפין של הרצאות וידאו, על למידת מדעים (למשל Moravec et al., 2010). עם זה מעטים יחסית סיפקו נתונים אמפיריים התומכים בטענות אלו, ואלה מחקרים שכללו נתונים אמפיריים סבלו מבעיות מתודולוגיות למיניהן (ראו Weinberg & Thomas, 2018).

מאמר זה מציין במיוחד את אחת הדרכים הנפוצות בעידן הטכנולוגיה, שהיא סרטוני וידאו המסבירים במפורט פתרונות של תרגילים שמופיעים בספר הלימוד. מחקרים קודמים (למשל Khan, 2011) לא ניסו להפריד את הלמידה שעשויה להתרחש בכיתה מהלמידה שעשויה להתרחש משימוש במשאבים מחוץ לכיתה. בשל כך הם לא בחנו את הדרך שבה תלמידים משתמשים במשאב חשוב זה. לכן חשוב לנו להפיק תמונה מהימנה כיצד תלמידים צופים בסרטונים, ולהבין מה הם לומדים מצפייה בסרטונים וכיצד.

סקירת ספרות

שיעורי בית

ההגדרה הרווחת ל"שיעורי בית" היא "כל עבודה הניתנת על ידי בית הספר, המבוצעת מחוץ לשעות בית הספר והאחריות המרכזית על ביצועה מופקדת ביד הלומד" (Hallam בתוך בן-צבי, 2009, עמ' 3). הכנת שיעורי הבית היא פעילות חינוכית יומיומית נפוצה בעבור תלמידים, הורים ומורים, ולכן אין זה מפתיע ששיעורי הבית נחשבים לעיתים קרובות לאסטרטגיה חינוכית חשובה לשיפור ההישגים הלימודיים של התלמידים (Cooper, Robinson, & Patall, 2006; Xu & Corno, 2006). קופר (Cooper, 1994) וקופינסקי (2009) ציינו את ההשפעות החיוביות של שיעורי הבית בהיבט הלימודי על תהליכי ההוראה, הלמידה וההערכה. ההשפעות החיוביות מתבטאות כך:

א. השפעות מיידיות על הלמידה וההישגים הלימודיים: שליטה טובה יותר בנלמד, הבנה טובה יותר של הנלמד, פיתוח חשיבה ביקורתית ופיתוח הבנה מושגית ועיבוד מיידי.

ב. השפעות ארוכות טווח המתבטאות בהנעה ללמידה בשעות הפנאי.

ג. פיתוח גישה חיובית לבית הספר וללמידה.

ד. פיתוח הרגלי למידה טובים יותר.

ה. טיפוח משמעת עצמית וקבלת אחריות להתקדמות האישית, הכוונה עצמית, ארגון זמן, מעורבות בלמידה ועצמאות בפתרון בעיות.

עם זה מחקרים מציינים כי בעת הכנת שיעורי בית ישנו הבדל משמעות בסגנון הלמידה של התלמידים. כל תלמיד הוא עולם ומלואו, המושפע בין השאר מהאופי ומדרך החיים של סביבתו, ולכן הדרך שבה התלמיד מכין את שיעורי הבית ייחודית ואופיינית לו. דרך זו משתקפת בגיבוש דפוסים וסטנדרטים ייחודיים של הכנת שיעורי בית, סדר עדיפויות, אופן ההכנה, מקום הכנת שיעורי הבית ושותפים להכנתם (Hong, Milgram, & Rowell, 2004).

טכנולוגיה בלמידת מתמטיקה ובשיעורי בית בפרט

חוקרים רבים טוענים שטכנולוגיות המידע והתקשורת הן כלי רב עוצמה ליצירת סביבה לימודית כזו שהתלמידים שולטים בה במעשיהם ובהחלטות באווירה פתוחה ותומכת (למשל לוין, 1995). אווירה זו מעודדת חשיבה חופשית, פעלתנות ונטילת אחריות ללמידה. על יסוד זה, קינג וצוקר (King & Zucker, 2009) קובעים שלמידה באמצעות מחשב יכולה לאתגר את התלמידים לפי רמתם ולהעניק להם למידה מתאימה. נוסף על כך, מברך (Mevarech, 1993) טענה שסביבה טכנולוגית מסייעת לפיתוח כישורים מתמטיים, ואף מפחיתה את החרדה ממקצוע המתמטיקה ויכולה להגביר מוטיבציה לימודית של התלמידים.

קויצ'ו וקלר (Koichu & Keller, 2017) ציינו כי בתחילת הדרך הסביבה הטכנולוגית עשויה לשמש המשכיות לסביבה הכיתתית, אך עם הזמן התהליכים שהתרחשו בסביבה הטכנולוגית באו לידי ביטוי בלמידה בשיעורים, ולהפך גם תהליכים שהתרחשו בשיעורים באו לידי ביטוי בסביבה הטכנולוגית. לבסוף שתי הסביבות השתלבו, ונוצר מרחב למידה חדש וייחודי.

כדי לטפל בבעיית חוסר מוטיבציה להכנת שיעורי הבית בקרב תלמידים, אחת הגישות היא שימוש במקורות טכנולוגיים לצורך התעניינות של התלמידים בלימודי מתמטיקה ובו בזמן להגביר את הביטחון העצמי שלהם בפתרון בעיות מתמטיות. הרבה מורים כבר משתמשים בטכנולוגיה בשיעורי המתמטיקה שלהם במגוון דרכים ובהיקפים למיניהם. עם זה לא ברור עד כמה תלמידים משתמשים בטכנולוגיה בהכנת שיעורי הבית, ומה הוא יחסם של המורים כלפי שימוש זה (Chao, Chen, Star, & Dede, 2016).

המחקרים שאכן מתמקדים בשימוש בטכנולוגיה בשיעורי בית מראים יתרונות ברורים לתלמידים ולמורים (למשל Olisama, Odumosu, & Areelu, 2018; Roschelle et al., 2016). רות

ועמיתיה (Roth, Record, & Ivanchenko, 2008) ציינו במחקרם כי הסביבה הטכנולוגית (מערכת מתוקשבת המסייעת בשיעורי בית) משפרת את המוטיבציה של התלמידים להכין שיעורי בית, ומפחיתה את השגיאות הנפוצות בתרגול רגיל. ממחקרם של קיטסנטס ועמיתיה (Kitsantas, Cheema, & Ware, 2011) עולה כי פערים בהישגי תלמידים מצטמצמים ככל שעולה הזמינות של המשאבים הדרושים לצורך הכנת שיעורי הבית, וכן כי ככל שמוקדש זמן רב יותר להכנת שיעורי הבית, כן עולים הישגי התלמידים במתמטיקה.

כל סקירה של אמצעים טכנולוגיים המסייעים ללמידת מתמטיקה ולביצוע שיעורי בית בפרט לא תהיה מלאה בלי אזכור של אקדמיית קהאן. סאל קהאן, מחלוצי שיטת ההוראה ההפוכה, המייסד של Khan academy[1], טען כי ללמידה באמצעות סרטונים ישנה העדפה בשל שלוש סיבות עיקריות:

א. את הסרטונים אפשר לראות בכל עת, והם אינם תלויים בזמינות המלמד.

ב. אפשר לראות את הסרטונים בקצב אישי וכמה פעמים שחפצים.

ג. על הלומד אין לחץ, כלומר לא קיים בו חשש מפני המלמד, היות שהמלמד אינו שואל אותו שאלות כגון "האם החומר הובן?" או "האם יש לחזור על ההסבר?" (Khan, 2011).

יש לציין שבעוד שהכיתות "ההפוכות" הוכרזו ככלי רב ערך ללמידה של תלמידים, מעט ידוע על התהליך שבו תלמידים לומדים ממשאבים חוץ-כיתתיים (Weinberg & Thomas, 2018). למשל, עדיין לא ברור אילו מאפיינים צריכים להיות לסרטון וידאו אפקטיבי ללימודי מתמטיקה ולא ברור באילו אופנים תלמידים שונים משתמשים באותו סרטון.

סרטוני וידאו אפקטיביים

ג'ונסון ומאייר (Johnson & Mayer, 2009) הציעו דרכים לבנות את תהליך הצפייה בסרטוני אנימציה כך שיעודד למידה יעילה יותר. הם ציינו שתלמידים הצופים בסרטונים ילמדו טוב יותר כאשר הם ירשמו הערות או יענו על שאלות בשעת צפייה כיוון שקל לזכור רמזים חזותיים יותר מרמזים שמיעתיים.

מחקרים קודמים לא ניסו להבחין בין למידה מתוך קטעי וידאו ובין למידה מפעילויות בכיתה. במקום זאת הם ראו בתהליך צפייה בסרטונים "קופסה שחורה", בהנחה שהתלמידים לומדים מתוך קטעי וידאו בדרכים דומות.

וינברג ותומס (Weinberg & Thomas, 2018) חקרו מהלכים של הבניית משמעות (sense making) בקרב סטודנטים לתואר ראשון שצופים בסרטוני הרצאות על נושאים בסטטיסטיקה. ממצאיהם מראים שלסטודנטים היו מהלכים של הבניית משמעות שונים מאוד זה מזה, וכי האתגרים שעמדו לפני התלמידים היו שונים מאוד זה מזה. תוצאות אלה מדגישות את הצורך להביא בחשבון את המגוון הרחב של הרקע של הסטודנטים ואת שיטות של הבניית משמעות בעת יצירת סרטונים. כמו כן יש חשיבות רבה להבנת אינטראקציות של סטודנטים באמצעות קטעי וידאו, כך שסרטוני וידאו יוכלו להפוך לכלי הדרכה שימושיים יותר בעבור תלמידים רבים. החוקרים זיהו תכונות מסוימות בסרטוני וידאו שיכולות לשפר את תהליך הלמידה בסביבה טכנולוגית. למשל הקול של הקריין צריך להיות עם מבטא רהוט, נוסף על סגנונות השיחה המקובלים.

המחקר בודק את אוכלוסיית תלמידי תיכון ואת הדרך שבה התלמידים משתמשים במשאב טכנולוגי אחר (אך נפוץ לא פחות) – סרטוני הסבר לפתרון בעיות.

ממטרה זו נגזרות שאלות המחקר:

מהן אסטרטגיות הצפייה שבהן התלמידים משתמשים?

מהם מאפייני הסרטונים שלדעת תלמידים מסייעים להם או מפריעים להם בלמידה?

מתודולוגיה

לצורך המחקר הנוכחי נבחרה השיטה האיכותנית, משום שיש חשיבות רבה להיות בקרב התלמידים, לראות ולהבין את דרך הצפייה בסרטונים לצורך פתרון שיעורי הבית.

הכנת שיעורי הבית אינה מתבצעת בבית הספר, אי לכך ניסינו ליצור תנאים שמצד אחד יוצרים אווירה נוחה ושקטה בעבור התלמידים ומצד אחר הם מאפשרים לנו להיות בקרבת התלמידים כדי לחוש את החוויות שלהם ולהבין לעומק את התפיסות שלהם. לצורך כך במהלך המחקר התלמידים הגיעו לחדר בבית ספרם, ישבו סביב שולחן עם כיבוד קל ומול המחשב.

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו תלמידי כיתה י"א הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל בבית ספר ממלכתי בצפון הארץ. מספר תלמידים בבית ספר זה רכשו מנוי לאתר עם סרטוני וידאו שמסבירים תרגילים מתוך ספר לימוד. ראוי לציין שהלמידה בכיתות אינה של "כיתה הפוכה". כלומר המורה מבצעת את שלב הקניית החומר הנלמד בכיתה והגישה לאתר הסרטונים המקוון היא בדרך כלל לצורך תרגול.

פנינו לכל התלמידים בבית הספר שמשתמשים במשאב זה וביקשנו את עזרתם להשתתף במחקר. לתלמידים הובהר כי ההשתתפות במחקר היא מתוך בחירה אישית וכי תלמיד שיבחר לא להשתתף במחקר לא ייפגע בשום מצב. כמו כן הובהר לתלמידים כי הנתונים יישארו חסויים ולא ישתמשו בהם מלבד לצורכי מחקר. נוסף על כך הם קיבלו הסבר על חשיבות מחקר ומטרתו לספק תמונה מהימנה של התנהגות טבעית עם המשאב. מכל התלמידים הסכימו להשתתף במחקר שש תלמידות שמשתמשות בסרטוני וידאו כמשאב העוזר להן להתמודד עם שיעורי הבית במתמטיקה:

תלמידה א: מאופיינת בנחישות וביחס רציני כלפי הלימודים.

תלמידה ב: תלמידה ביישנית, שקטה, משקיעה ומתקשה במתמטיקה.

תלמידה ג: תלמידה חכמה, בעלת הישגים גבוהים ובעלת שאיפות גבוהות להצלחה.

תלמידה ד: תלמידה טובה במקצועות ההומניים אך מתקשה במתמטיקה.

תלמידה ה: תלמידה רצינית, חכמה ובעלת שאיפות גבוהות להצלחה.

תלמידה ו: תלמידה טובה, בעלת שאיפות גבוהות ללימודים באקדמיה.

התלמידות הוזמנו לשיחות אישיות, הוסבר להן שהמחקר מיועד אך ורק לצורך בדיקת יעילות המשאב. לאחר מכן במשך חודש ימים נבדקה תדירות השימוש במשאב. רק לאחר שווידאנו שהתלמידות אכן משתמשות בקביעות במשאב, התחלנו במחקר.

1 אקדמיית קהאן הוא אתר באינטרנט המכיל סרטונים ותרגולים במגוון רחב של נושאים. בשנת 2006 נוסד בידי סלמן קהאן. האתר חינמי ונגיש לכולם.

כלי המחקר

במחקר הנוכחי שילבנו שני כלים לאיסוף נתונים: ראיונות ותצפיות. רצינו לקבל דיווח עצמי של התלמידים על הצפייה בסרטוני וידאו כמשאב העוזר בהכנת שיעורי הבית. לצורך זה בחרנו להשתמש בריאיון מובנה למחצה. כנהוג בסוג זה של הריאיון, המראיין מכין שאלון המכיל שאלות מוגדרות מראש שהן השאלות הבסיסיות הנוגעות לנושאים הקשורים למטרת המחקר, אך החוקר יכול להוסיף ולהעלות שאלות על פי התשובות והתפתחות הריאיון. בריאיון עצמו רצף השאלות אינו מוכתב ויש מקום לשאלות ספונטניות כאשר למרואיין חופש תגובה רחב והחוקר יכול להגיב או לשאול על נקודות חדשות שהמרואיין מעלה (צבר-בן יהושע, 2001). נוסף על גמישות ויכולת להעלות שאלות המאורגנות סביב נושאים מסוימים, סוג ריאיון זה נחשב למהימן יותר מריאיון פתוח (Schensul et al., 1999). במהלך הראיונות רצינו גם ליצור קשר אישי בין המראיינת למרואיינים, קשר זה נותן למרואיינים את היכולת לחשוף את רגשותיהם ודעותיהם לפני המראיינת.

בחרנו בתצפית כדי לאסוף עוד מידע על מאפייני התלמידים המשתמשים במשאב ועל הגורמים המרכיבים ואת סביבת העבודה בזמן פתרון תרגילים, ונוסף על כך לבחון מקרוב את דרך העבודה של התלמידים באתר ולראות איך הם משתמשים בסרטון מבחינת משך צפייה, ריכוז והתמקדות. בסוף תצפית שארכה כשעה, כל תלמידה נשאלה על תוכן הסרטון, על החומר הנלמד וגם שאלות הקשורות להתנהגותן בזמן התצפית. בעת עריכת התצפית השתמשנו ביומן לרישום נקודות בולטות באמירות שלהן בעת הריאיון ובעת התצפית, כמו צפייה בסרטון בעת הפתרון, משך הזמן ותדירות הצפייה.

מהלך המחקר

בשלב הראשון התקיים ריאיון עם כל תלמידה בנפרד. הריאיון התחיל בשאלות העוסקות ברקע האישי של המרואיינות, ובהמשכו נשאלות שאלות שעוסקות בשאלות המחקר כדי להבין את דרך השימוש במשאב הטכנולוגי ככלי עזר בהכנת שיעורי הבית. חלקו הראשון של הריאיון התמקד בנושא שיעורי בית והיחס של התלמידים כלפי שיעורי הבית. החלק השני של הריאיון התמקד בדרך שבה התלמידים משתמשים בסרטוני וידאו.

לפיכך הן נשאלו שאלות, כמו מה גורם לך לפתור שיעורי בית? מה המשמעות של שיעורי הבית עבורך? מה את עושה כשאת מכינה עבודות בית במתמטיקה ונתקלת בבעיה? מתי את צופה בסרטונים? עם מי את צופה? מה את אוהבת בסרטונים? מה המלצות שלך לשיפור בסרטונים?

בשלב השני התקיים מפגש נוסף עם התלמידות. התלמידות התבקשו לפתור שאלות בנושא בעיה מילולית או הסתברות, עם אופציה להשתמש בסרטון בחופשיות כרצונן בדרך המתאימה להן. הקפדנו לבחור שאלות שיש להן פתרון יחיד באתר. בשלב ביצוע המחקר התלמידות היו בחזרות לקראת מבחני המתכונת ובגרות הקיץ. התרגילים שנבחרו היו בנושא בעיות מילוליות והסתברות מתוך שאלות הבגרות, כיוון שהנושא נחשב קשה אצל רוב התלמידים, וגם דורש רמת הבנה יותר משאר הנושאים האחרים שיש להם אלגוריתם קבוע או דורשים שימוש בנוסחאות. הצפייה בתלמידות הפותרות "שיעורי בית" בעת שהשתמשו בסרטוני הווידאו אפשרה לנו הצצה למה שמתרחש בפועל, כאשר מורה לא נמצאת בסביבה. לאחר התצפית, כדי להשלים את התמונה, וכן כדי לקבל נקודת ראות אחרת, ביצענו ריאיון מבוסס משימה (Goldin, 2000). בריאיון זה דנו בכל מיני היבטים של פתרון בעיה, צפייה בסרטון ומאפייני הסרטונים שניכרים בלמידה ובהכנת שיעורי בית בפרט. התלמידות התבקשו לענות על שאלות המעידות על למידה והבנה, למשל "תסביר בבקשה במילים שלך את השאלה", "תסביר את משמעות הפתרון". הקפדנו לבדוק האם תלמידה מסבירה במילותיה או אם השתמשה באותן מילים המופיעות בסרטון. לפי פרקינס (1998), פעולות כמו ניסוח עובדות או פתרון בשפה או דרך דיבור אחרת מעידות על "ביצועי הבנה".

לסיכום, אלה הם הנתונים הגולמיים שנאספו לכל משתתפי המחקר: (1) ראיונות מוקלטים ומשוכתבים של שלב ראשון (מידע כללי על הרגלי למידה של תלמידות עם דגש בעשיית שיעורי בית בעת צפייה בסרטונים); (2) הקלטות ופרוטוקולים של תצפיות במשימת הדמיה של שיעורי בית; (3) ראיונות מבוססי משימה.

ניתוח נתונים

הנתונים נותחו באמצעות ניתוח תוכן במהלך הפקה שיטתית של היסקים תקפים שאפשר לחזור עליהם, מתוך מסרים המוצגים בתוכן כלשהו בקשר מסוים (צבר-בן יהושע, 2001). בתחילת תהליך ניתוח התוכן חיפשנו בראיונות רכיבים בולטים, חשובים וחוזרים על עצמם. בנתונים שנאספו, הגדרנו רכיבים אלה כקטגוריות לניתוח. ניתוח התוכן אִפשר זיהוי אובייקטיבי של התמות בתוכן הראיונות (צבר-בן יהושע, 2001). קביעת הקטגוריות נעשתה לאחר קידוד קפדני של כל הראיונות. במהלך הניתוח חולקו אמירות התלמידות לקטגוריות מסוימות, כשכל קטגוריה כללה אמירות שיש להן מכנה משותף מבחינת התוכן. לאחר מכן בחנו בתצפיות דפוסי התנהגות של התלמידות, השווינו בין דיווח של התלמידה בריאיון ובין דרך עבודתה. הקטגוריות הראשיות חולקו לקטגוריות משנה על פי תתי-נושאים דומים שנמצאו בקטגוריות הראשוניות. הוחלט מהן תתי-הקטגוריות העיקריות בעלות המשמעות למחקר זה, שעליהן נשען הדיון.

יש לציין שהראיונות התבצעו בשפה הערבית בעיקר. לצורך נוחותן של התלמידות הן דיברו בשתי השפות: ערבית מדוברת ועברית כפי שהן נוהגות. עקב השימוש בשתי השפות, בעת תמלול הראיונות התרגום נעשה באופן המאפשר שמירה מיטבית של התוכן העיקרי והחשוב.

ממצאים

המחקר הנוכחי ביקש לתאר ולהבין את דרך הצפייה בסרטוני הווידאו לצורך פתרון שיעורי הבית. מניתוח הראיונות ותצפיות שנערכו עלה כי התלמידים משתמשים באסטרטגיות לסוגיהן בזמן הצפייה בסרטונים וזה לפי צורכיהם. נתאר בהמשך הפרק את שני הדפוסים העיקריים. נוסף על כך, בתת-פרק נפרד נציין כמה עמדות אופייניות של התלמידים כלפי הסרטונים.

דפוס ראשון: צפייה ממושכת בכל הסרטון

תלמידות א, ב, ד, ו דיווחו כי בזמן היתקלותן בקשיים מסוימים, הן נעזרות באתר, בוחרות בסרטון הרצוי, וצופות בו עד הסוף ברצף ובלי הפסקות, ורק לאחר מכן הן חוזרות לשאלה בניסיון לענות עליה ולפתור אותה על פי מה שהבינו מהסרטון. רובן ציינו גם שבמהלך פתרון הן לא חוזרות לצפייה, אלא מנסות להתמודד לבד כי עבורן זהו המדד להבנת החומר והפנמתו.

להלן כמה תשובות אופייניות לשאלה שעלתה בריאיון והתמקדה בראש ובראשונה בדרך הצפייה בסרטוני הווידאו: "האם אתה

משתמש בסרטוני וידאו לפני שאתה מנסה לפתור או אחרי שאתה נתקל בקושי מסוים?"

תלמידה א: "אני קוראת את השאלה, מנסה לפתור. אם אני נתקלת בבעיה אז אני נכנסת לאתר ורואה את כל הסרטון ואחרי שמסיימת אותו, אני מנסה לפתור אותו עוד פעם לבד כדי לבדוק אם הבנתי את השאלה."

תלמידה ב ענתה: "אם לא הבנתי את השאלה או החומר היה קשה, אז אני קודם צופה בכל הסרטון כדי להבין כי בסרטונים גם יש הסבר כללי ולא רק לשאלה עצמה."

כמו כן קיימת ואריאציה נוספת של דפוס זה, שהיא צפייה בכמה סרטונים ברצף כדי להבין את התוכן לעומק.

תלמידה ד העידה כי חשוב לה לצפות בסדרה של סרטונים ברצף לפני פתרון השאלות, וזה מתוך רצון ללמוד למידה אפקטיבית ויעילה. היא צופה בסרטונים לצורך הבנה מעמיקה של החומר, וכל זה עוד לפני שהיא ניגשת לשאלות. היא טוענת ששיטה זו תורמת לה במידה ניכרת וזה מקל עליה בהתמודדות עם השאלות, במיוחד השאלות שאין להן סרטוני הסבר. "אני צופה בכמה שיותר סרטונים עד שמרגישה שהבנתי את החומר ומנסה לפתור לבד. בשיטה הזו אני לומדת את החומר ובזכותה מצליחה לפתור."

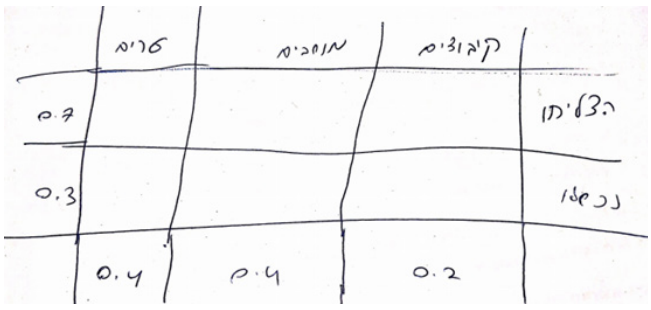
ממצאי תצפיות בתלמידות א, ב, ד, ו מחזקים את נתוני הראיונות ומעידים על אותו דפוס צפייה.

נזכיר שהתצפיות התבצעו בחדר מחשבים בבית הספר, האווירה בחדר הייתה שקטה. התלמידות ישבו עימנו לצד המחשב, והתבקשו לעיין בשאלה משאלות בגרות ברמה 5 יח"ל בנושא הסתברות שהכנו מראש (איור 1).

במבחן הכניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים,
40% היו ממושבים ו-40% היו מערים.
70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.
$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.
ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.
א. מבין כל הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?
ב. (1) משה הצליח במבחן.
מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?
(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

איור 1: שאלת בגרות (שאלון 806, קיץ 2016) שהתלמידים קיבלו בהדמיית שיעורי בית

תלמידה ב קראה את השאלה, ציירה טבלה והתחילה למלא אותה במידה חלקית. היא חזרה לעיין בשאלה, שוב צבעה את הנתון הראשון שמופיע בשאלה (20% שהיו מהקיבוצים) ורשמה בטבלה (איור 1) בשורה המתאימה 0.2, וכך עשתה בשאר הנתונים (40% ממושבים ו-40% מערים, 70% מהנבחנים). התלמידה צבעה את הנתונים ורשמה אותם בטבלה במקום המתאים. השלב הזה התבצע במשך 5 דקות.



איור 2: צילום של הטבלה שהכינה תלמידה ב

בשלב הזה לאחר מילוי חלקי של הטבלה, התלמידה ביקשה להריץ את הסרטון בטענה שהיא רוצה להיות בטוחה שהתחילה בדרך נכונה. הסרטון (כמו רוב הסרטונים שנגישים לתלמידים) התחיל בהקראת השאלה, לאחר מכן כל הנתונים הודגשו באמצעות צבע וניתן הסבר על דרך השימוש בהם לפתרון התרגיל.

התלמידה צפתה בסרטון כולו במשך 12 דקות. בעת הצפייה היא רק הסתכלה על המסך, לא הביטה לצדדים, לא רשמה דבר, רק שמעה את ההסבר. כשהסתיים הסרטון תלמידה ב חזרה לשאלה, סימנה את שאר הנתונים ואז המשיכה למלא את הטבלה בהסתמך על הנתונים שהיא צובעת. בשלב מסוים היא התחילה להרכיב משוואה.

בדומה לה, כשתלמידה ו התבקשה לפתור את התרגיל, היא קראה אותו ומייד, בלי שום ניסיון לפתור ואז התחילה לצפות בכל הסרטון בקשב רב. לאחר מכן התלמידה פתרה את השאלה, אך קיבלה תשובה שונה מזו שהופיעה בסרטון (היא זכרה גם את התשובה). זה גרם לה מיד לחזור ולקרוא את השאלה ולגלות טעות בהזנת נתונים בטבלה. לאחר מכן תלמידה הרכיבה את המשוואה שוב ופתרה אותה נכון.

חשוב לציין כי התלמידות היו מרוכזות וקשובות מאוד בזמן הצפייה. לאחר הצפייה בכל הסרטון, הן חזרו לפתור והצליחו בכוחות עצמן לסיים את פתרון השאלה בהסתמך על הדרך שהציגו בסרטון.

דפוס שני: צפייה מקוטעת בסרטון

תלמידות ג ו-ה ציינו שהן צופות בחלקים מקוטעים מהסרטון, הצפייה היא מסורגת. הן עוצרות את הסרטון אחרי כל שלב, מנסות ללמוד ולהבין. הן עוצרות סרטון ופותרות ושוב מפעילות את הסרטון לצורך המשך ההסבר וכך הלאה.

תלמידה ה: "אני קוראת את השאלה, אם אני נתקלת בקושי בהתחלה, אני פותחת את הסרטון ולא שומעת את כולו, אני מתחילה לצפות בדיוק בקטע שנתקלתי, כלומר אני מריצה אותו, אין לי סבלנות לשמוע את כולו כשאני מבינה את החומר. במקרים בודדים אני כן צופה בהתחלה של הסרטון כשאין לי גישה לשאלה ואיני יודעת איך להתחיל. בקיצור, אני צופה רק מקטעים שיש בהם קושי ואני עוצרת הסרטון וממשיכה לפתור."

כלומר התלמידות שהן דיווחו שהצפייה מותנית במצב של "תקוע", של אי הבנה שאמורה להיפתר באמצעות צפייה בקטעים מסוימים שתלמידות לומדות מפי המרצה בסרטון. הן עוצרות, מנסות לפתור ושוב חוזרות לסרטון כאשר נתקעות.

זיהינו את דפוס הצפייה לעיל גם בתצפיות שנערכו לתלמידות ג ו-ה. בהתחלה הן קראו את השאלה והתחילו לפתור אותה, עצרו, הריצו את הסרטון והתחילו לצפות משלב מסוים.

תלמידה ג קראה את השאלה וסימנה את הנתונים. חמש דקות בערך לאחר שמילאה חלק מהטבלה, היא ביקשה להריץ את הסרטון. היא דילגה על השלבים של הקראת השאלה וסימון הנתונים וצביעתם והתחילה לצפות בהצגת שלבי הפתרון. לאחר צפייה של שלוש דקות בערך, הפסיקה התלמידה את הסרטון ושוב חזרה למלא את הטבלה. לאחר מילוי הטבלה קראה שוב את השאלה והפעילה מחדש את הסרטון בנקודת העצירה והתחילה לשמוע את ההסבר המפורט איך להרכיב את המשוואה.

בזמן הצפייה הסתכלה התלמידה כל הזמן על הסרטון, לא היה דבר שהסיח את דעתה. היא התמקדה רק בהסבר. לאחר שהתחילו להסביר את הפתרון, הפסיקה התלמידה את הסרטון, הרכיבה את המשוואה ופתרה אותה לבד. כשקיבלה את התשובה, היא הריצה את הסרטון כדי לראות את התשובה, היא לא שמעה את ההסבר ורק חיפשה את התשובה. תהליך החיפוש נמשך כדקה.

המראיין: "למה את מריצה את הסרטון אם הגעת לתשובה נכונה?"

תלמידה ג: "אני רוצה להיות בטוחה שפתרתי נכון לפני שאני אמשיך."

לאחר שראתה התלמידה את התשובה הזהה לתשובה שלה היא המשיכה בפתרון. היא קראה את הסעיף השני ופתרה במשך שתי דקות. לאחר שסיימה הריצה שוב את הסרטון והתחילה לצפות רק בפתרון של הסעיף.

המראיין: "למה את מריצה את הסרטון אם פתרת את השאלה?"

תלמידה ג: "אני רוצה להיות בטוחה שאני מבינה את החומר ופתרתי נכון לפני המעבר לסעיף הבא."

...

"אני לא זוכרת איך פותרים, אני זוכרת שיש נוסחה שונה לסעיף הזה."

המראיין: "קוראים לזה נוסחת ברנולי."

תלמידה ג: "אני רוצה לצפות כי בסרטון הם לא רק פותרים, אלא רושמים את הנוסחה בצד ומסבירים עליה קצת."

התלמידה שוב הריצה את הסרטון, צפתה והקשיבה להסבר של הסעיף האחרון והנהנה בראשה לאות הבנה.

תלמידה ג: "אהה נכון, עכשיו אני מבינה איך לפתור סעיף זה."

התלמידה חזרה לשאלה ופתרה אותה לאחר שרשמה על הדף את נוסחת ברנולי בזמן הצפייה.

חשוב לציין שכל התלמידות ציינו שהן השתמשו לעיתים תכופות בסרטונים. כמו כן הייתה התאמה מלאה ועקבית בין האופן שבו פעלו התלמידות בסימולציה ובין התיאור שהן נתנו על הרגלי השימוש בסרטונים בעת הכנת שיעורי הבית. כל תלמידה למדה בעקיבות לפי אחד משני הדפוסים. עם זה אנחנו לא יכולים לעמוד על דפוס צפייה מסוים שמביא לידי הצלחה בפתרון בעיות יותר מהאחר.

עמדות התלמידים כלפי צפייה בסרטונים לצורך הכנת שיעורי בית

כמה מהעמדות היו חיוביות וכמה מהן – שליליות. בין הקשרים שבהם הביעו התלמידות עמדות חיוביות נמצאים אלה: זמינות ונגישות החומר; הנאה ועניין בהסבר הטוב שמלווה בצבעים; קיום של כלי עזר נוסף בפתרון שיעורי בית ובהבנת החומר.

א. נגישות וזמינות של חומר הלימוד

התלמידות הביעו עמדות חיוביות כלפי הסרטונים, עמדות אלו נבעו בעיקר מתוקף זמינותם של הסרטונים ונגישותם. המחשבים הנייחים או הניידים נמצאים בכל עת עם הילד, ולכן הם יכולים בכל שעה, גם מחוץ לגבולות הכיתה, לבצע מטלות. התלמידות ציינו שהן צופות בסרטונים לפי קצב אישי שלהן, אין הגבלה למספר הצפייה בסרטונים (פעם או יותר). התלמידות יכולות להריץ את הסרטון ולצפות בקטעים ממנו או לבחור לצפות בכולו (כמו שראינו בתתי-פרקים קודמים). כמו כן התלמידות יכולות להגיע לסרטונים בכל זמן ובכל עת במיוחד בשעות אחר הצהריים, וכן בכל מקום ובכל כלי. מקצתן צופים בסרטונים במחשב הנייד והאחרות במחשב הנייח. לפעמים הן בוחרות לצפות בסלון ולפעמים בחדר שלהן, העיקר שהן נמצאות בסביבה שקטה.

תלמידה ה: "תמיד אפשר לחזור על ההסבר של השאלה ולצפות בה מספר פעמים כדי להבין יותר טוב."

תלמידה ד: "צורת הדיבור של המנחה, הקצב שלו שמאפשר לנו להבין את החומר, ואיפה שאני לא מבינה את החומר אני יכולה לעצור ולחזור ולשמוע וזה מה שיפה בעניין הסרטונים, שאפשר לצפות בהם שוב ושוב עד שנבין."

התלמידות דיווחו שהדרך להשגת הידע קלה יותר בעזרת הסרטונים. לפני כן כשלא ידעו לפתור, הן ניסו להיעזר בסביבה שלהן (בעיקר הורים), ואם לא קיבלו מענה היו נתקעות ומגיעות לכיתה בלי לפתור את שיעורי הבית. כיום באמצעות הסרטונים התלמידים לא מחכים יותר להסבר של המורה בכיתה כדי להבין איך פותרים. הם נכנסים מייד לאתר וצופים בסרטונים. הדבר נותן להם הרגשה של הקלה ויחס חיובי למקצוע המתמטיקה.

תלמידה ו: "קודם כשהיו לי קשיים או לא הצלחתי לפתור הייתי מחפשת כל מיני דרכים. אם זה עזרה מחברים או לקבוע שיעור פרטי ואתה אינך מקבל את הפתרון במיידית כמו עכשיו ולפעמים זה היה מתסכל אותי כי אני אוהבת לסיים כל העבודה ולא למשוך את שיעורי הבית לעוד יום."

תלמידה ה: "זה פשוט נמצא בכל זמן ובכל מקום שאני רוצה לפתור אוכל לגשת בלי לחכות ולדעתי הווידאו מסביר יותר טוב מהמורה וזאת בגלל סביבת הלימודים, כאן אני לבד עם המחשב, ובבית הספר יש כיתה, לפעמים יש רעש, לומדים בסביבה שונה לגמרי."

ב. הנאה ועניין

תלמידות דיווחו על עניין רב והנאה בעת השימוש בסרטונים ככלי עזר. הסרטונים משמשים בעבורן חידוש בדרך הלמידה, שמשתלב עם סגנון החיים המודרניים של המאה העשרים ואחת בעידן הווירטואלי, שבו התלמידים מחוברים שעות רבות למסכים למיניהם.

תלמידה ג: "הסרטון מעניין, וכמו מורה פרטי בשבילי, ואני אוהבת להשתמש בנייד שלי אז גם כן אני אוהבת להשתמש בסרטונים."

תלמידה ד: "מעניין מאוד, כי הוא חדשני ואני מתחברת לטכנולוגיה ואוהבת לשבת מול הנייד הרבה שעות, וגם מתי שנוח לי אני צופה בסרטונים."

תלמידה ו: "הסרטונים מאוד מעניינים ומועילים קודם כי העולם של היום מבוסס על טכנולוגיה, ואני מאוד מחוברת למחשבים, אוהבת לבלות שעות מול המחשב, בנוסף כששומעים את הסרטון מרגישה כאילו הוא מדבר איתך ומסביר לך כאילו אתה בשיעור."

התלמידות דיווחו על כך שהן אהבו את הדרך החווייתית להתמודדות עם "המתמטיקה", קל להן לצפות בסרטון ההסבר מלקרוא דוגמה פתורה. הן ציינו לחיוב את תהליך הלמידה, בעיקר לאחר:

ג. ההסבר הטוב שמלווה בצבעים

התלמידות מעידות כי האמצעים הוויזואליים, ובמיוחד הצבעים, עוזרים מאוד ומשפרים פלאים את טיב הפתרון ומוסיפים עוד רובד חשוב שביכולתו לגרום להפנמת הסוגיות הנלמדות והטמעתן. לדעתן, הצבעים מספקים אמצעי להמחשת החומר ועוזרים מאוד ללמידה מאחר שבאמצעות הצבעים התלמידים מזהים את הנתונים החשובים המביאים לידי פתרון.

תלמידה א: "אני אוהבת את הסרטונים הרבה, הוא (הקריין בסרטון) משתמש בהרבה צבעים שזה עוזר לי להבין יותר טוב."

תלמידה ב: "בסרטונים נכללים הרבה צבעים, הרבה הסבר, כך

שהתלמיד לא ישתעמם וזה גם מראה את הפתרון בצורה מפורטת וברורה, כלומר לא מסובך להבין את השלבים."

תלמידה ד: "הצבעים שהוא משתמש מכוונים אותנו לשים לב לנתונים החשובים שבעזרתם אנו יכולים לפתור."

ד. כלי עזר נוסף בפתרון שיעורי בית ובהבנת החומר

נכון לכל המרואיינות, הסרטונים שמלווים אותן בהכנת שיעורי הבית השפיעו לטובה על הלימודים ועזרו להן להבין היטב את הסוגיות הנלמדות. התלמידות דיווחו שבעזרת הסרטונים הן מצליחות להתמודד עם שיעורי הבית ולפתור שאלות במתמטיקה. כאשר הן צופות בסרטונים, הן מקשיבות להסבר ולומדות את הדרך.

תלמידה ד: "לפני הסרטונים היה לי קשה מאוד לפתור שיעורי בית אפילו שאלה אחת, רק בעזרת מורה פרטי ואם הוא לא פנוי אז לא הייתי מוכנה לשיעורים והייתי צוברת פערים, אך כשהכרתי את הסרטונים התחלתי ללמוד ולהכין שיעורים בכל המרץ כי הדרך מעניינת."

תלמידה ב: "לאחר צפייה ממושכת בסרטונים כבר יש לי ביטחון לפתור בכוחות עצמי, לפעמים אני צופה בסרטון, מבינה את ההסבר שלהם, עוצרת את הסרטון ומנסה להמשיך לפתור בדרך שלי. לפעמים הדרך שלנו יותר קלה להבנה מאשר בסרטון, לפעמים אנחנו מתחילים בשאלה והסרטון בא ומציג פתרון יותר קל להבנה, אז עדיף לשנות את הדרך שבה התחלנו. העיקר שאני פותרת ומבינה מה שאני עושה."

נוסף על כך, יש לסרטונים חשיבות רבה בהשלמת פער לימודי. כמה מהתלמידות דיווחו שבעת שהן מתכוננות לבחינה או נעדרות מהשיעור הן צופות בסרטונים מתוך מחשבה שאם הן צופות בהסבר של כמה דוגמאות פתורות, בדרך זו הן מבינות יותר לעומק את החומר הנלמד וכך הן מצמצמות פערים.

תלמידה ד: "בדרך כלל כשיש לי בחינה אני יושבת המון ופותרת הרבה תרגילים ושומעת הרבה סרטונים. אני זוכרת מקרה שכמה ימים לפני הבחינה הייתי משועממת ונסעתי עם ההורים לביקור חברים, אז נכנסתי לאפליקציה ורק צפיתי בסרטונים."

תלמידה ו: "לפעמים כשאני חולה ולא מגיעה לבית הספר, אני שואלת על החומר ואז אני נכנסת ושומעת כמה סרטונים וכך אני מגיעה לשיעור בלי לצבור פער."

ה. הדרכים המגוונות בפתרון השאלות

התלמידות ציינו כי הסרטונים חשפו אותן לגישות מגוונות, וזה מפתח את החשיבה ומגביר את ההבנה.

תלמידה א: "הוא מועיל מאוד כי הוא כמו המורה, מסביר את הכול בהרבה דרכים שעוזרות לנו להבין את החומר יותר טוב."

תלמידה ב: "מאז שנחשפתי למשאב, אני מגיעה מוכנה כל הזמן לשיעורים ובמיוחד לפני הבחינות אני שומעת הרבה סרטונים, כי יש פתרונות נוספים חוץ ממה שאנחנו חשבנו שהשאלה נפתרת, לדעתי שיטות שונות לפתרון מגבירות את ההבנה של החומר וזה מה שמשך אותי לסרטונים."

ו. חוסר הזדמנות לחשוב

מתוך הראיונות עולה כי ישנם תלמידים שסבורים שהסרטונים חוסמים את החשיבה ומגבילים את התפתחותם הקוגניטיבית ולא מאפשרים להם להתמודד עם המשימות בעצמם. כשמריצים את הסרטונים, ההסבר מתחיל, והתלמיד צריך להקשיב, אין בסרטונים אלמנט אנושי, בהסבר המוקלט אין מקום לשאילת שאלות. הסרטונים לא נותנים רמזים שמעוררים את החשיבה.

תלמידה א: "מפריע לי שאני לא יכולה לשאול שאלות כמו שאני שואלת את המורה, לדעתי הוא צריך להפסיק את ההסבר לפעמים כדי לאפשר לנו לחשוב."

תלמידה ג: "מפריע לי שהוא לא מאפשר לנו זמן לחשוב ולפעמים לא עושה את כל החישובים. אני כן רוצה שהסרטון יראה אחרת, בהתחלה רק יכוון אותנו ויסביר רק את הדברים החשובים ואז ייתן לנו זמן לנסות".

תלמידה ה: "הייתי מציעה לתת לתלמיד הזדמנות לפתור לבד וזאת על ידי מתן רמזים קטנים".

תלמידה ו: "הבעיה שהם לא נותנים לנו זמן לחשוב. היה יותר טוב אם שואלים שאלות שמכוונות לפתרון בהתחלה כדי שאנחנו ננסה לפתור לבד."

ז. הסחת דעת בעיקר בשל השימוש בנייד למטרות שאינן רלוונטיות

התלמידות ציינו שבעת צפייה בסרטונים, במיוחד במכשיר הנייד, הן קיבלו הודעות שגרמו להסחת דעת, ואז נאלצו להתעלם מהסרטון ולקרוא הודעות.

תלמידה ב: "אני לא אוהבת בסרטונים שאם אנחנו צופים בטלפונים הניידים שלנו אז כשיש הודעות אנחנו עוזבים את הסרטונים ומתחילה לענות לחברים ולדעתי זו בעיה כללית של השימוש בהם."

תלמידה ד: "מפריע לי שיש הרבה הפרעות שאני לא יכולה לעצור בזמן הסרטון, בדרך כלל אני צופה בסרטון בנייד ואז כשמתחילות הודעות, אני עוזבת ועונה לחברות ואז שוב חוזרת לסרטון."

דיון

במחקר הנוכחי נבדקה תופעה יחסית חדשה במערכת החינוך, כלומר סרטוני וידאו לימודיים המשמשים כלי עזר נלווה לספרי הלימוד. המטרה הייתה לבדוק את דרך הצפייה בסרטונים בעת הכנת שיעורי בית ואת עמדות התלמידים כלפי סרטונים אלו.

אסטרטגיות צפייה לסוגיהן

כפי שעולה מהמחקר הנוכחי, יש הבדל בין התלמידים בדפוסי הצפייה בסרטונים לצורך הלמידה. יש תלמידים שבוחרים לצפות בסרטוני הסבר עוד לפני שהתחילו לפתור את הבעיה בעצמם בטענה שיבינו יותר את החומר. יש גם תלמידים שבוחרים לצפות בסרטונים במקוטע. כלומר צופים בחלק מהסרטון ועוברים לפתרון, ובעת הצורך חוזרים שוב וכך לאורך כל הסרטון.

דרכי צפייה אלה אותנטיות ומעידות על אקטיביות של התלמידים בעת התמודדות עם הכנת שיעורי בית. כפי שראינו, העצירות של הסרטונים אינן ספונטניות וגם לא גורמות לתלמידים לוותר על העצמאות. כאשר תלמידות נתקעו בפתרון, הן נעזרו רק בחלק מסוים בסרטון והמשיכו לפתור. הדרך שבה תלמידות פתרו, ההצלחה בפתרון הבעיות והתשובות שלהן לשאלות עומק על תוכן הבעיה בפרט והחומר הלימודי בכלל - כל אלה העידו על הבנה. השפה שהן השתמשו בה לא הראתה תלות והעתקה עיוורת מסרטונים.

הבחירה בין האסטרטגיות נעשית בעיקר על פי צרכיו האישיים של התלמיד ורמת ההבנה של החומר הספציפי. ממצא זה עולה בקנה אחד עם ספרות מחקרית העוסקת בפרסונליזציית למידה בסביבה טכנולוגית (למשל Olisama et al., 2018). בסביבה טכנולוגית התלמיד יכול לעבור בקצב שלו לייצוג או ליחידה מסוימת המופיעים בסביבה המתוקשבת, או לחזור שוב על יחידות הוראה מסוימות לפי הצורך (Jacobson & Archodidou, 2000). גם במחקרנו הבחנו

שהתלמידים מסוגלים לאבחן את צורכיהם הלימודיים ולפעול לפיהם, לזהות את היכולת להשתמש בסרטונים ולבחור את אסטרטגיית הצפייה מתוך צורך ספציפי.

סביבה טכנולוגית בכלל והמשאב של סרטוני הווידאו בפרט נותנים יכולת להמשיך למידה מחוץ לכיתה ומשמשים נתיב נוסף ולפעמים אלטרנטיבי ללמידה. חשוב, כמו שציינו קויצ'ו וקלר (Koichu & Keller, 2017), חשוב שהתקשוב ישמש המשכיות לסביבה הכיתתית, שתלמידים יכינו שיעורי בית כהמשכיות ללמידה בשיעורים. במחקר שלנו ראינו שתלמידים הופכים את הסרטונים לכלי שנותן מענה גמיש ללומדים בעלי יכולות שונות, מאחר שהלמידה התבצעה בקצב אישי שכל לומד התאים ליכולתו. התלמידים צופים בסרטונים מתוך רצון ללמוד ולהבין, מתאמנים על פתרון השאלות בעצמם בלי נוכחות המורה וכך משלימים את החומר הנלמד. עם זה יש לציין שהתלמידים במחקר שלנו לעיתים קרובות מיהרו מדי לפנות לסרטון שהוא מקור החיצוני לידע ולא נתנו לעצמם סיכוי להתמודדות עצמית או עם שותפות (השוו עם Koichu, 2018).

האסטרטגיות המגוונות מעידות על כך שתלמיד הוא עולם ומלואו, המושפע בין השאר מהאופי ומדרך החיים של סביבתו. לכן בדומה לממצאיהם של הונג, מילגרם ורוול (Hong, Milgram, & Rowell, 2004), הדרך שבה התלמיד מכין את שיעורי הבית היא ייחודית ואופיינית לו, ומשפיעה על גיבוש דפוסים וסטנדרטים ייחודיים של הכנת שיעורי בית, סדר העדיפויות, דרך ההכנה, מקום הכנת שיעורי הבית, השותפים להכנתם ועוד. על פי האמור לעיל אין ביכולתנו להציע אסטרטגיה מסוימת כיעילה יותר, מאחר שהתלמידים צופים לפי הצרכים שלהם. עם זה הצפייה בסרטון ההסבר היא תהליך של למידה מדוגמאות פתורות. תהליך זה הוזכר בספרות המקצועית כתהליך טבעי ויעיל, התלמידים צופים בסרטון לאחר שקבעו להם מטרה להבין ולהצליח.

למיטב ידיעתנו מעט המחקרים שעסקו בהכנת שיעורי בית במהלך צפייה בסרטוני וידאו כלל לא עסקו בדפוסי הצפייה של תלמידים, בהנחה שהם לומדים מתוך קטעי וידאו בדרכים דומות. שני דפוסי צפייה בסרטונים בעת הכנת שיעורי בית במתמטיקה שזיהינו ואפיינו, הם תרומה ייחודית של מחקר זה.

תפיסות חיוביות כלפי הסרטונים

ממצאי המחקר מעידים על כך שלמשאב של הסרטונים יש תפקיד חשוב בהנעת תלמידים להכין שיעורי בית במתמטיקה. שילוב סרטוני ההסבר בחייהם הלא פורמליים בעת הכנת שיעורי הבית, מעודד את התלמידים ללמידה יעילה, בדומה לממצאים של וואנג ורייבס (Wang & Reeves, 2007), שטענו כי כאשר התלמידים מעוניינים ומעורבים יותר בלמידה, הם יכולים להבין יותר את המידע החדש. לכן עירור המוטיבציה וקידומה עלולים להגביר את המעורבות במשימה.

ממצאי המחקר מראים כי שימוש בסרטונים יוצרים אצל התלמיד תחושות חיוביות של שלווה וסיפוק כלפי המקצוע. התלמידים עוסקים בפעילות מתוך מימוש מטרה של שליטה בחומר והצלחה. זה נתמך בספרות המחקרית, מחקרים רבים הראו שהתלמידים שהציבו לעצמם מטרות של שליטה בחומר וראו שהמטלה מעניינת, מאתגרת וחשובה, נטו לעסוק יותר מאחרים בפעילות מטה-קוגניטיבית, להפעיל אסטרטגיות קוגניטיביות רבות יותר ולהשקיע מאמץ בביצוע המטלה (גלובמן והריסון, 1994; עשור, קפלן וקנט-מימון, 2001).

חשוב לציין את הנגישות של התלמידים למחשב, כך שעצם התעסקותם איתו אינה זרה כלל לתלמידים, כמו העזרים הטכנולוגיים שמתלווים למחשב, כגון האינטרנט, העזרים הוויזואליים והשמיעתיים שהמחשב מעניק, תורמים ללמידה ולהבנת החומר הנלמד. לפי סלנט (2003) שטען כי שימוש ביחידות לימוד ממוחשבות מאפשר יצירת עניין והנאה אסתטית אצל הלומד בזמן הלימודים.

התחושות החיוביות כלפי משאב הסרטונים נבעו מהזמינות שהטכנולוגיה מאפשרת. התלמיד יכול לחזור לחומר הנלמד בכל עת ומכל מקום שבו יש גישה לאינטרנט, שלא כשיעור רגיל בכיתה הנלמד בפעם אחת ומתפוגג מייד עם תומו. מקצת הדוגמאות והרעיונות יישארו בזיכרון התלמידים ובמחברותיהם ואת השאר הם יכולים לשכוח.

הזמינות של המשאב מייעלת את תהליך הלמידה, התלמיד יכול בכל עת לעיין בהסברים ולהבין אותם, להתאמן ולתרגל את החומר הנלמד ולהשוות את תהליך הפתרון שלו עם הדרכים למיניהן המוצגות בסרטונים. חיזוק לנאמר בעניין זה נמצא בסקירה הספרותית אצל אזבדו, קרומלי וסיברט (Azevedo, Cromley, & Seibert, 2004) שטענו כי סביבה טכנולוגית היא סביבה המאפשרת ללומד הזדמנויות ללמידה פעילה, שבה הלומד נמצא במרכז ומחליט בעצמו את תהליך הלמידה שלו – מה ללמוד? איך ללמוד? האם הוא מבין את החומר? מתי לשנות את המטרות והאסטרטגיות שתכנן ומתי להגביר מאמץ? לפי צורך ועניין. במהלך התצפיות ראינו שלפי טענה של קאן (Khan, 2011), תלמידים כן צופים בסרטונים בקצב אישי וכמה פעמים שרוצים. יתרה מזו, על הלומד אין לחץ כלומר לא קיים בו חשש מפני המלמד, היות שהמלמד אינו שואל אותו שאלות, כגון "האם החומר הובן?" או "האם יש לחזור על ההסבר".

תחום העניין וההנאה היו מובהקים לכל המרואיינים, דבר זה עלה בקנה אחד עם מה שטען בנדורה (Bandura, 1997): אנשים מפגינים עניין, מתמידים בפעילויות שבהן הם מרגישים יעילים ומפיקים מהן סיפוק עצמי.

תפיסות שליליות כלפי הסרטונים

ממצאי המחקר הנוכחי מציינים כי התלמידים שצופים בסרטוני וידאו נתקלים בקשיים בעבודתם במחשב. קשיים אלה נובעים מהסחות דעת בזמן הצפייה מצד אחד, ומהרגלי עבודה שאינם מקדמים הבנה מצד אחר.

הקושי העיקרי העולה מדברי המרואיינים במחקר הוא כאמור קושי הנובע מכך שהמשאב הוא לא גמיש מספיק ולא מאפשר להם הזדמנות לחשוב ולהגיע לפתרון בכוחות עצמם. לפי קויצ'ו (Koichu, 2015, 2018) אינטראקציה עם מקור מידע על הפתרון או חלקיו, כגון משאב האינטרנט, צריכה לספק רק את הרמזים לפתרון נוסף על היותו כמחסן נוח של עובדות פוטנציאליות, אך לא כמקור לספק את כל הפתרון.

במקרה שלנו סרטוני הווידאו נותנים הזדמנות ללמידה פתוחה, אך יש מקום לשנות את העיצוב כדי לעודד חשיבה יצירתית. בהסתמך על הממצאים שלנו, אנו קוראים למפתחי הסרטונים והאתרים לימודיים לספק בתוך הסרטון את ההזדמנויות לחשוב ורמזים לפתרון כדי שבסופו של התהליך התלמיד יגיע לפתרון בכוחות עצמו.

מסקנות והמלצות

המניע הראשוני למחקר זה נבע מהאמונה שלנו (מחוזקת בממצאים של המחקר החינוכי) בחשיבותם של שיעורי הבית במקצוע המתמטיקה. רבים מהתלמידים מתקשים בהתמודדות עם שיעורי הבית ואינם מקבלים מענה בשעות הלא פורמליות, ועל כן הדבר עוצר אותם מלהתקדם ומרתיע אותם מהמקצוע. מכיוון שעולמם של התלמידים הוא עולם טכנולוגי, מומלץ וכדאי לנצל משאבים טכנולוגיים וסרטוני וידאו בפרט ולשלבם בלמידה בשעות הלא פורמליות של התלמידים כשאין המורה נוכח בשעות אלו, כדי שתהליך הלמידה ימשיך להתקיים ולהתקדם בשעות אלו.

היות שהמחקר הנוכחי נעשה בקרב שש תלמידות, יש מקום להניח שתוצאות מהימנות יותר תתקבלנה כאשר מחקר זה יתרחב ויכיל יותר תלמידים וכאשר גם זמן המחקר יהיה ארוך יותר. במחקר ארוך טווח נוכל לבדוק את הישגי התלמידים בבחינות הבגרות ולראות אם התלמידים שהשתמשו במשאב נשארו בקבוצת הלימוד או אפילו עברו לרמה גבוהה יותר. כמו כן כדי לתקף את ממצאי המחקר הנוכחי כדאי לערוך מחקר שיכלול תלמידים רבים מאוכלוסיות אחרות.

בהתחשב בחוויות ובתחושות החיוביות כלפי מקצוע המתמטיקה שדיווחו עליהם התלמידים בראיונות לאחר השימוש בסרטונים, כדאי לבדוק את יעילות המשאב הנידון על תלמידים מתקשים במתמטיקה ולומדים בהקבצות נמוכות.

שימוש בסרטונים תורם לתלמיד משתי בחינות: מצד אחד הוא יוצא מהשגרה, מהשעמום ומגבולות הכיתה, ומצד אחר בגישה זו המורה חושף את התלמידים למשאב חשוב אחר של ידע מתמטי. הסרטון יכול להוסיף להסבר של מורה בשביל דוגמאות מסוימות. הסרטון עשוי למשוך את תשומת ליבם של התלמידים ולקרבם לנושא יותר מההוראה הפרונטלית שמועברת בידי המורה, וזה לבטח חוסך מהמורה גם זמן ומאמץ. מאחר שסרטוני הסבר מלווים את רוב ספרי הלימוד, המורה יכול לנצלם כדי להגיע לרמות חשיבה גבוהות בכיתה. למשל שיתוף התלמידים בהוראה באמצעות הפניה מקדימה לסרטונים והכנת קטעי שיעור שמשלבים הסברים מסרטונים עם העיבוד של התלמידים. על פי רמת התלמיד מורה יכולה לבקש ממנו לפתור את השאלה על הלוח, למצוא פתרון אחר, לשאול שאלות או לפתח דיון ולמתוח ביקורת על פתרונות מהסרטונים. כמו כן אפשר לעודד תלמידים לערוך סרטונים, להוסיף כתוביות עם הסברים חלופיים או להפיק סרטוני הסבר משלהם.

מתוך הממצאים עולה כי תלמידים מסוגלים להתאים לצורכיהם אפילו משאבים טכנולוגיים לא גמישים, כמו הסרטונים שחקרנו. הסרטונים נתנו מענה ללומדים בעלי סגנונות למידה מסוימים, תלמידים פעילים יותר ותלמידים פסיביים יותר, אך זה קרה לא בזכות המשאב, אלא בזכות התלמידים ושימוש באסטרטגיות מגוונות. לכן אנו ממליצים למפתחי האתרים והסרטונים להוסיף לסרטונים את ההיבט האנושי של שאילת שאלות, כי מהמחקר עולה הצורך בשדרוג הסרטונים הקיימים, שכן הסרטונים לא נותנים לתלמיד להרהר, לחשוב ולהיות פעילים בלמידה. היום קיימת אופציה להכניס שאלות לתוך הסרטון, וברגע שישנה שאלה הסרטון עוצר ונותן זמן לתלמיד לענות על השאלה שמכוונת לפתרון. לכן שווה ומומלץ לשדרג את הסרטונים בדרך זו. נוסף על כך, מומלץ למפתחי האתרים לבנות צ'ט נוסף לסרטונים כדי שהתלמידים יוכלו לשוחח עם מורה למתמטיקה בדרך מקוונת ולשאול שאלות, להתייעץ ולנהל דיון פורה על כל שאלה שעולה במהלך פתרון שיעורי בית. יתרה מזו, היות שמשאב זה נותן לתלמידים חלופה להבנות ידע בעצמם, חשוב להקפיד על שילובו כדרך למידה בסיסית במיוחד בשעות הלא פורמליות.

רשימת מקורות

בן-צבי, ד' (2009, פברואר). **מודלים חלופיים לשיעורי בית: חלק משינוי פני הלמידה וההוראה**. הרצאה שהוצגה ביום עיון בנושא "מה לשיעורים ולבית? בדק בית לשיעורי הבית". מכון מופ"ת, תל-אביב. אוחזר מתוך http://portal.macam.ac.il/DbImage.aspx?image=file&id=2291

גלובמן, ר' והריסון, ג' (1994). למידה פעילה: גישה הטרוגנית להוראה. בתוך י' ריץ' ור' בן-ארי (עורכים), **שיטת הוראה לכיתה הטרוגנית** (עמ' 55-97). אבן יהודה: רכס.

לוין, ת' (1995). תוכנית לימודים בעידן הטכנולוגי. בתוך ד' חן (עורך), **החינוך לקראת המאה העשרים ואחת** (עמ' 73-85). תל-אביב: רמות.

סלנט, ע' (2005). יחידות לימוד אינטגרטיביות מתוקשבות (IU) – התחליף לספרי לימוד בעידן האינטרנט. **ספירלה - מתחדשים בחינוך**. אוחזר מתוך http://www.amalnet.k12.il/sites/hadshanut/articles/had00166.asp?title=%ED%E9%F8%E1%E7%EE%20%E7%FA%F4%EE

עשור, א', קפלן, ח' וקנט-מימון, י' (2001). **דו"ח הערכת סיפוק צרכים בבתי ספר: תוכנית צמיחה בקהילה**. באר-שבע: אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, המחלקה לחינוך.

פרקינס, ד' (1998). מהי הבנה? **חינוך החשיבה, 10**, 5-12.

צבר-בן יהושע, נ' (2001). מבוא: ההיסטוריה של המחקר האיכותי, השפעות וזרמים. בתוך נ' צבר-בן יהושע (עורכת), **מסורות וזרמים במחקר האיכותי** (עמ' 13-28). לוד: דביר.

קופינסקי, ר' (2009). האם הגיע הזמן לבטל את שיעורי הבית? הצעה לסדר יום לימודים חדש. **קו לחינוך פורטל החינוך לישראל**. אוחזר מתוך http://www.kav-lahinuch.co.il/?CategoryID=671&ArticleID=7692

Azevedo, R., Cromley, J. G., & Seibert, D. (2004). Does adaptive scaffolding facilitate students' ability to regulate their learning with hypermedia? *Contemporary Educational Psychology, 29*(3), 344-370. doi:10.1016/j.cedpsych.2003.09.002

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: the exercise of control*. New York: W. H. Freeman.

Chao, T., Chen, J., Star, J. R., & Dede, C. (2016). Using digital resources for motivation and engagement in learning mathematics: Reflections from teachers and students. *Digital Experiences in Mathematics Education, 2*(3), 253-277. doi:10.1007/s40751-016-0024-6

Cooper, H. (1994). *Homework research and policy: A review of the literature* (Report). St. Paul: Center for Applied Research and Educational Improvement.

Cooper, H., & Valentine, J. C. (2001). Using research to answer practical questions about homework. *Educational Psychologist, 36*(3), 143-153. doi:10.1207/S15326985EP3603_1

Cooper, H., Robinson, J. C., & Patall, E. A. (2006).

Research in Mathematics Education (pp. 3841-3848). Institute of Education, Dublin City University, Ireland. Retrieved from https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0562.pdf

Madden, M., Lenhart, A., Duggan, M., Cortesi, S., & Gasser, U. (2013). *Teens and technology 2013*. Washington, DC: Pew Research Center. Retrieved from http://youthtoday.org/wp-content/uploads/sites/13/hotdocs/PIP_TeensandTechnology2013.pdf

Mevarech, Z. R. (1993). Who benefits from cooperative computer-assisted instruction? *Journal of Educational Computing Research, 9*(4), 451-464. doi:10.2190/G98F-16VB-0KTY-UNH5

Moravec, M., Williams, A., Aguilar-Roca, N., & O'Dowd, D. K. (2010). Learn before lecture: A strategy that improves learning outcomes in a large introductory biology class. *CBE-Life Sciences Education, 9*(4), 473-481. doi: 10.1187/cbe.10-04-0063

Olisama, V. O., Odumosu, O. M., & Areelu, F. (2018). Effects of teachers' utilisation of tiered home assignment on students' achievements in mathematics. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 17*(4), 88-101. doi:10.26803/ijlter.17.4.6

Roschelle, J., Feng, M., Murphy, R. F., & Mason, C. A. (2016). Online mathematics homework increases student achievement. *AERA Open, 2*(4), 1-12. doi: 10.1177/2332858416673968

Roth, V., Ivanchenko, V., & Record, N. (2008). Evaluating student response to WeBWorK: A web-based homework delivery and grading system. *Computers and Education, 50*(4), 1462-1482. doi:10.1016/j.compedu.2007.01.005

Schensul, S. L., Schensul, J. J., & LeCompte, M. D. (1999). *Essential ethnographic methods: Observations, interviews, and questionnaires*. Walnut Creek, Calif.: AltaMira Press.

Wang, S. K., & Reeves, T. C. (2007). The effects of a web-based learning environment on student motivation in a high school earth science course. *Educational Technology Research and Development, 55*(2), 169-192. doi:10.1007/s11423-006-9016-3

Weinberg, A., & Thomas, M. (2018). Student learning and sense-making from video lectures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(6), 922-943. doi:10.1080/0020739X.2018.1426794

Xu, J., & Corno, L. (2006). Gender, family help, and homework management reported by rural middle school students. *Journal of Research in Rural Education, 21*(2), 1-13.

Zhang, D., Zhao J. L., Zhou, L., & Nunamaker J. F. (2004). Can e-learning replace classroom learning? *Communications of the ACM, 47*(5), 75-79. doi:10.1145/986213.986216

Zhu, Y., & Leung, F. K. S. (2011). Motivation and achievement: Is there an East Asian model? *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1189-1212. doi:10.1007/s10763-010-9255-y

Zucker, A. A., & King, K. E. (2009). Teaching with laptops. *The Science Teacher, 76*(9), 22-26.

Does homework improve academic achievement? A synthesis of research, 1987-2003. *Review of Educational Research, 76*(1), 1-62. doi:10.3102/00346543076001001

Cosden, M., Morrision, G., Albanese, A. L., & Macias, S. (2001). When homework is home work: After school programs for homework assistance. *Educational Psychologist, 36*(3), 211-221. doi:10.1207/S15326985EP3603_6

De Araujo, Z., Otten, S., & Birisci, S. (2017). Conceptualizing "homework" in flipped mathematics classes. *Educational Technology & Society, 20*(1), 248-260.

Fan, H., Xu, J., Cai, Z., He, J., & Fan, X. (2017). Homework and students' achievement in math and science: A 30-year meta-analysis, 1986-2015. *Educational Research Review, 20,* 35-54. doi:10.1016/j.edurev.2016.11.003

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gerstein, J. (2011, June 25). *The flipped classroom model: A full picture* [Blog post]. Retrieved from https://usergeneratededucation.wordpress.com/2011/06/13/the-flipped-classroom-model-a-full-picture/

Hong, E., Milgram, R. M., & Rowell, L. L. (2004). Homework motivation and reference: A learner-centered homework approach. *Theory into Practice, 43*(3), 197-204. doi:10.1207/s15430421tip4303_5

Jacobson, M. J., & Archodidou, A. (2000). The design of hypermedia tools for learning: Fostering conceptual change and transfer of complex scientific knowledge. *Journal of the Learning Sciences, 9*(2), 145-199. doi:10.1207/s15327809jls0902_2

Johnson, C. I., & Mayer, R. E. (2009). A testing effect with multimedia learning. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 621-629. doi:10.1037/a0015183

Khan, S. (2011, March). *Let's use video to reinvent education* [Video file]. Retrieved from http:// www.ted.com/talks/salman_khan_let_s_use_video_to_reinvent_education.

Kitsantas, A., Cheema, J., & Ware, H. W. (2011). Mathematics achievement: The role of homework and self-Efficacy beliefs. *Journal of Advanced Academics, 22*(2), 310-339. doi:10.1177/1932202X1102200206

Koichu, B. (2015). Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2668-2674). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In G. Kaiser, H. Forgasz, M., Graven, A., Kuzniak, E., Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 307-324). Cham, Switzerland: Springer.

Koichu, B., & Keller, N. (2017). Implementation enterprise through the lens of a theory of diffusion of innovations: A case of online problem-solving forums. In *Proceedings of the 10th Conference of the European Society for*

ייצוגי כמות וגמישותם: הכוח המניע תהליכי חישוב והבנה מתמטית

רחל שי
אמאל שריף-רסלאן



רחל שי
מרצה במכללת שאנן.
בעבר מרצה, רכזת קורס מאבחנים דידקטיים ומדריכה פדגוגית במכללה האקדמית הערבית לחינוך בחיפה.
תחום התמחות: הוראה מתקנת במתמטיקה ומאבחנת דידקטית בגישה דינמית.



אמאל שריף-רסלאן
ראש החוג למתמטיקה במכללה אקדמית ערבית לחינוך, חיפה.
בוגרת תואר ראשון ושני בפקולטה למתמטיקה בטכניון, ותואר שלישי מהמחלקה להוראת המדעים בטכניון.
תחומי המחקר שלה הם מתמטיקה שימושית ברפואה (בפרט קרדיולוגיה) וחשיבה מתמטית מתקדמת.
כתבה פרסומים רבים בתחומים אלה.

תקציר

המחקר בחן בהרחבה את ייצוגי הכמות ואת השפעתם על הרהיטות החישובית. ייצוגי הכמות נבחנו מכמה נקודות מבט של המעבד המַבני ושל המעבד הסדרתי: כזיהוי מהיר, כתהליכי השלמה לשלם וכמבט גמיש על השלם וחלקיו. נקודות מבט אלה נבחנו באמצעות השפעתן על החישוביות ועל גילוי תובנות מתמטיות של משמעות התרגיל, הקשרים הלוגיים בין תרגילי החיבור לחיסור והבנת שאלות מילוליות.

במחקר השתתפו 118 תלמידים, 97 מהם בני 7-8 שנים הלומדים בכיתות ב' בבית-ספר יסודי ו-21 תלמידים המתקשים בחשבון ומוגדרים בחינוך המיוחד תלמידים עם לקויות למידה. מקצתם מקבלים תמיכה לימודית בחשבון בקבוצות קטנות ולומדים בכיתה הרגילה במסגרת "שילוב", והאחרים לומדים בכיתות מיוחדות ללקויי למידה הנמצאות בבית הספר הממלכתי במסגרת "כיתות מקדמות". התלמידים עם לקויות למידה בני 9-13 שנים. התלמידים הלומדים בכיתות ב' הרגילות מוינו לשלוש קבוצות על פי הישגיהם בחשבון באמצעות המשתנים האלה: א. הצלחה גבוהה – תלמידים השולטים היטב בתכנים (ציון 90-100); ב. שליטה בינונית – תלמידים המכירים את התכנים אך שוגים רבות ביישומם (ציון 65-89); ג. שליטה נמוכה – תלמידים מתקשים שאינם עומדים בדרישות המינימום של כיתה א' (ציון 0-65). החלוקה והמונחים המגדירים קבוצות אלה מתבססים על סולם נבו (1995).

לצורך המחקר נבנה מבדק מיפוי בנושא הלימודי "תחום העשרים" שהותאם להיבטים שפורטו לעיל ושימש כלי המחקר.

ממצאי המחקר הראו הבדלים מובהקים בין הקבוצות כדלקמן: נמצאו הבדלים צפויים ברהיטות החישובית בעיקר בתחום עשרים. המחקר הראה כי ההבדלים קיבלו ביטוי גם ברוב תפקודי הליבה: סוביטייז (זיהוי מהיר של כמויות עד 4) ואומדן מהיר עד 10, הפקת ציור דו-ספרתי, גמישות הייצוג המבני, הכולל השלמת עיגולים לשלם חסר – עד 10 ועד 20 בשרטוט ותובנת ההיפוך בין חיסור

לחיבור מתוך מבט גמיש על שרטוט. נמצא כי סוביטייז ואומדן וכן הפקת ציור עד 20, הם מנבאים לרהיטות חישובית בתחום 20. כמו כן נמצא קשר מובהק ומנבא הצלחה בין תובנת קשר ההיפוך לפתרון תרגילים ויישום שאלות מילוליות.

על פי ממצאי המחקר, נבנה מודל התערבות המציג את הקשר בין שלושת תחומי העניין בהוראת החשבון: ייצוגי כמות וגמישותם, תהליכי חישוב והבנה מתמטית. המודל מכוון את מורי המתמטיקה בהעמקת דרכי הוראתם להיבטים קדם-חישוביים של הייצוג וגמישותו, למען תלמידים רגילים ותלמידים מתקשים כאחד.

מסקנות המחקר גורסות שממצאים אלה עשויים לשפוך אור על הבנת קשיים מתמטיים בקרב תלמידים ולתרום מבחינה דידקטית להעמקת דרכי ההוראה בכיתה הרגילה, ובוודאי כהוראה מתקנת לתלמידים מתקשים.

מילות מפתח: רהיטות חישובית; תובנה מספרית; הבנה מתמטית; ייצוג כמותי; עיבוד מידע כמותי-מספרי; תהליכי תפיסה מתמטית; מנגנוני למידה מתמטיים.

מבוא

תוכנית הלימודים במתמטיקה בשנים האחרונות מדגישה את הקשר בין בקיאות בעובדות יסוד בחשבון ובין תובנה מספרית המספקים בסיס להשגת רהיטות חישובית (משרד החינוך, 2006). מחקרים רבים מדגישים את חשיבות השליטה בעובדות היסוד כבסיס להתפתחות המתמטית. רהיטות חישובית היא שליטה בתהליך חישובי מהיר המתפתח עם תובנה מספרית המחזקת את זיכרון העובדות, ולא כזיכרון תשובות הנרכש באמצעות שינון. בן-יהודה, שרוני ואלמוג (2014) פיתחו כלי לבדיקת רהיטות חישובית, שמבוסס על תובנה מספרית המתמקדת בגילוי קשרים לוגיים בין תרגילים. הכלי נועד לתלמידים בכיתות ג'-ו'. המבדק בדק את השפעת הקשרים הלוגיים בעת שהנבחנים פתרו את התרגילים.

המחקר הנוכחי מציע כלי למיפוי כיתתי בחשבון לכיתה ב'. הוא בוחן היבטים למיניהם בתהליכים קדם-חישוביים המשפיעים על איכות תהליכי החישוב. הכלי בודק שלושה תחומי תפקוד בהתמודדות המתמטית בתחום העשרים: א. ייצוגי כמות – משמעותם המספרית וגמישותם; ב. חישוביות; ג. הבנה מתמטית. השימוש בכלי עשוי לסייע למורים באיתור התלמידים המתקשים בכיתה הרגילה. בד בבד הכלי מאפשר למורה לנתח את מאפייני החולשה המתמטית של התלמיד המתקשה מתוך בחינת מנגנוני הלמידה המשפיעים על היכולת החישובית ולשמש כלי לאבחון התלמידים המתקשים בפעולות חישוב החל מנושא "תחום עשרים" ואילך לכל הכיתות בבית הספר היסודי. יש לציין כי נקודת המוצא של המחקר נשענת על מחקרים קודמים (הניק ורובינשטיין, 2008; מרק-זיגדון, 2011; Libertus, Feigenson, Halberda, 2011), הטוענים כי הטמעה של דגם מבני חזותי כמייצג כמות מראה תהליך תפיסתי המשפיע על בניית ייצוגים מנטליים ועל התפתחות חוש למספרים.

החידוש במחקר זה הוא הדגש בקשר בין הייצוגים וגמישותם להשפעתם על הרהיטות החישובית, על התובנה החישובית ועל ההבנה המתמטית.

מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון קשרים אלה ואת השפעתם על החישוביות בעזרת שתי נקודות מבט של אופנות החישוב: רהיטות חישובית ותובנה חישובית הנובעים מגמישות התפיסה של השלם וחלקיו.

רקע תאורטי

לב העיסוק החשבוני במוסדות החינוך הוא פתרון תרגילים במתמטיקה. עם זאת התרגילים הם ביטוי לשפה החשבונית ומשמשים כלים לפעילות החשבונית, אך הפתרון הטכני שלהם אינו מבטא את מהותם. ערכם ניכר במשמעות שניתנת להם ובמערכות הקשרים המתגלות ביניהם.

במאמר זה המילה "חישוב" מייצגת את תהליכי פתרון התרגילים ואת משמעותם, הנובעים מהמנגנונים המשפיעים על התפתחותם. יכולת החישוב מתפתחת על בסיס שתי מערכות למידה שמשלימות זו את זו: תהליכי תפיסה ותהליכי שפה וחשיבה. תהליכי התפיסה אחראים על הקלט והעיבוד הכמותי, ומאפשרים בניית ייצוגים מילוליים ובלתי מילוליים לכמויות. הם מספקים את אבני היסוד לתהליכי החישוב הנשמרים בזיכרון. תהליכי השפה והחשיבה משפיעים על ההמשגה, על התובנות המתמטיות ועל ההבנה.

א. ייצוג המספר ומשמעותו הכמותית

המתמטיקה מתבססת על מספרים שהם אבני היסוד שלה. ייצוג הוא אחד מחמשת התהליכים המתמטיים המופיעים בסטנדרטים (NCTM, 2000). הייצוג מאפשר לילד לבנות דימוי פנימי מנטלי למושג מתמטי מופשט המשמש בסיס למשמעות המושג. במילים אחרות, הייצוג מאפשר לחשוב על כמות כדימוי מתמטי מופשט, וכך לנתח סיטואציה מתמטית בלי צורך בהמחשה (לינצ'בסקי ותובל, 1993).

מקובל לדון בשלושה אופני ייצוג למספר: ייצוג כמותי, מילולי וגרפי. הייצוג הכמותי מבטא כמות הניתנת למניה כגון ●●, הייצוג המילולי הוא שם המספר כגון "ארבע" והייצוג הגרפי הוא המספר הכתוב , כגון 4. הקשר ביניהם מעניק את המשמעות למספרים (מרק-זיגדון, 2011).

זיכרון ייצוגי הכמות משמש בסיס לתפיסת הכמות, אבל תמונת כמות סטטית עדיין אינה מאפשרת פעולה על הכמות, שכן החישוביות מחייבת גמישות הייצוג. אדם עשוי לזכור את תמונת נקודות הקובייה ולקשר בין שלושת הייצוגים: מקבץ הכמות, שם המספר והמספר הכתוב, ועדיין לגלות קושי בתהליכי החישוב המתבטאים ביכולת לפרק ולצרף את הכמות המספרית להרכבים מגוונים. לצד זאת גמישות חשיבתית מסייעת להשוואה בין הייצוגים, להכללה ולמסקנת הערך המופשט של המספר. מכאן שגמישות ייצוגי הכמות היא הכוח המניע את תהליכי החישוב ומאפשרת תובנה מספרית וחישובית.

ב. חישוב

פעולת החישוב נחוצה לשם פתרון תרגילי חשבון ונוגעת למכלול התהליכים הפנימיים הפועלים במוחו של האדם בעת הפתרון. היא כוללת הליכים אלגוריתמיים הנשענים על תהליכי תפיסה גמישים של פירוק וצירוף הכמות מצד אחד, ומצד אחר היא עוסקת בתהליכי הבנה של משמעות הפעולה עצמה וגילוי תובנות באשר לקשרים בין מספרים ובין תרגילים. גישה זו אינה מצטמצמת למתן תשובה נכונה או שגויה לתרגיל על פי התפיסה המסורתית הצרה, ואף מטילה דופי בתהליכי שינון מילוליים של תרגילים מבודדים ללא הקשרים ביניהם (Boaler, Williams, & Confer, 2015; Baroody, 2006; Gravemeijer & van Galen, 2003).

רהיטות חישובית ותובנה מספרית

תהליכי החישוב כוללים שני היבטים:

א. רהיטות חישובית;

ב. תובנה מספרית.

יש להבחין בין רהיטות של עובדות יסוד לרהיטות פרוצדורלית.

ברודי (Baroody, 2006) מגדיר רהיטות עובדות יסוד "יישום יעיל, מתאים וגמיש של מיומנויות חישוב במספרים חד-ספרתיים"; מסמך התקנים האמריקאי, ה-CCSSM, מציין שרהיטות פרוצדורלית היא מיומנות ביצוע פרוצדורות בדרך גמישה, מדויקת, יעילה ומתאימה (Kling & Bay-Williams, 2014).

תובנה מספרית עוסקת בתהליכי חשיבה המשפיעים על גילוי אסטרטגיות לשם פתרון יעיל באמצעות מציאת קשרים בין המספרים. אנשים שיש להם תובנה מספרית הם אלה שיכולים להשתמש בגמישות במספרים (Boaler et al., 2015).

טבלה 1: התקנים של CCSSM הנוגעים לרהיטות ולשליטה בעובדות יסוד*

גן חובה	מחברים ומחסרים עד 5 ברהיטות.
כיתה א'	מחברים ומחסרים עד 20, בהפגנת רהיטות בחיבור וחיסור עד 10. משתמשים באסטרטגיות, כגון מניית המשך, או השלמה ל-10, פירוק המספר לקבלת 10, שימוש בקשר בין חיבור לחיסור ויצירת סכומים שקולים שהם קלים יותר וידועים.
כיתה ב'	מחברים ומחסרים ברהיטות עד 20 מתוך שימוש באסטרטגיות מנטליות. בסוף כיתה ב' יודעים את הסכומים של 2 מספרים חד-ספרתיים מהזיכרון.
כיתה ג'	כופלים ומחלקים ברהיטות עד 100, מתוך שימוש באסטרטגיות, כגון הקשר בין כפל לחילוק (כגון מתוך הידיעה כי 8X5=40 , יודעים כי 5=8:40). מבינים תכונות של פעולות. בסוף כיתה ג' יודעים את כל המכפלות של 2 מספרים חד-ספרתיים מהזיכרון.

* מתוך קלינג ובייי-ויליאמס (Kling & Bay-Williams, 2014).

טבלה 1 מראה התפתחות הדרגתית מתהליך של חקר וגילוי מתוך אסטרטגיות מוחשיות (מנייה) לפיתוח אסטרטגיות מנטליות גבוהות ועד להפנמה של העובדות בזיכרון.

ברודי (Baroody, 2016) מציין שלושה היבטים בהתפתחות החישוב: א. חישוב בעזרת אסטרטגיית המנייה; ב. שימוש איטי ומודע באסטרטגיות הנובע מהסקת מסקנות בעת גילוי הדפוסים והיחסים בין המספרים; ג. רהיטות חישובית, שליפת הסכומים וההפרשים מרשת הזיכרון, אם בתהליך אסטרטגי מהיר ואם בשליפה ישירה. שלב זה הוא נקודת השיא של הרצף ההתפתחותי בתהליכי הלמידה. ראוי להבין כי שימוש באסטרטגיות נוגע לתהליך חיפוש התשובה החשבונית בדרכים מגוונות: תחילה כמנייה והמשכו שימוש באסטרטגיות מנטליות הנשענות על זיכרון העובדות הבסיסיות או חלקן. חשוב לתת את הדעת להבדלים בין אסטרטגיות אלו.

אסטרטגיית המנייה היא שלב של ייצוג הכמות באמצעות האצבעות כתנועת ספירה מוחשית. מניית המשך נחשבת לאסטרטגיה מתקדמת במנייה מכיוון שהילד כבר מסוגל לראות בכמות של אחד מהמחוברים בקבוצה ולהמשיך את המנייה מהאמצע (שטיינברג, 2003).

אסטרטגיות מנטליות נחשבות לאסטרטגיות מפותחות יותר מאסטרטגיות המנייה. הן נשענות על השליטה בזיכרון פעולות היסוד, הנחשבות כעובדות החשבון ומאפשרות תהליכי חישוב מורכבים. הן נובעות מתובנה חישובית המביאה לגילוי קשרים לוגיים בין מספרים ובין פעולות. תהליכים אלה מחייבים זיכרון עבודה גמיש המאפשר את פעולת הפירוק והצרוף בדרכים מגוונות על בסיס הבנת הקשרים ביניהם. חישוב המבוסס על תובנה כזו מעמיק את ההבנה המתמטית ובו בזמן מצמצם את העומס על הזיכרון.

ברודי (Baroody, 2016) מציין שלושה תנאים התפתחותיים של התפיסה המאפשרים תובנה זאת: היכולת לראות את קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור, היכולת לזהות את היחסים בין השלם לחלקיו ועיקרון השלמת הנעלם לשלם, במונחים של שלם וחלק. עיקרון זה נובע משני העקרונות הראשונים.

תובנת קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור עשויה לסייע לפתרון תרגילי החיסור כשנוצר קושי, במיוחד אצל תלמידים מתקשים. המחקר של פלטנבורג ועמיתיה (Peltenburg, Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2012) מחזק טיעון זה. הם מצאו כי תלמידי חינוך מיוחד בני 8-12, שנכשלו בתרגילי חיסור בתחום 100, הצליחו להתגבר על הקושי בעזרת אסטרטגיית ההשלמה לשלם, לפחות בתרגילים שבהם ההפרש היה קטן, כגון 59-61=. דה סמיט ועמיתיו (De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010) הגיעו למסקנה דומה על תלמידי כיתות ג' בחינוך הרגיל. תובנה זו היא בסיס להבנת חוקי האלגברה הנלמדים בשלב שלאחר מכן.

המחקר הנוכחי עוסק בגילוי קשרים בין תרגילים בעזרת סכמה מבנית של שתי קבוצות עיגולים במלבן  : המחקר בודק מי הם התלמידים שרואים מיד את הקשר לארבעת התרגילים: 4+3=, 3+4=, 7-3=, 7-4=. מטלה זו נותנת ביטוי לגמישות התפיסה: מבט מימין לשמאל, משמאל לימין, מהשלם לחלקים ומהחלקים לשלם בתרגיל. לצד זה נזהה את גמישות החשיבה לגילוי הבנת הקשרים בין התרגילים: חוק החילוף; קשר ההיפוך בין חיבור לחיסור.

ג. הבנה מתמטית

לפי חוקרים בחינוך המתמטי (פישביין, תירוש וברש, 1998; Hiebert & Lefevre, 1986), הידע המתמטי כולל שלושה מרכיבים: ידע אינטואיטיבי המוגדר כידע מיידי, הנראה כמובן מאליו; ידע אלגוריתמי שבו טמון הידע התהליכי; ידע פורמלי הנוגע להבנת המופשט. על סמך רכיבים אלה, סקמפ (1991) דן בשני סוגים של הבנה מתמטית: הבנה אינסטרומנטלית והבנה רלציונית. הבנה אינסטרומנטלית מתבטאת בהצלחה של ביצוע פרוצדורה. במקרה של פעולות חשבון היא מתבטאת בשליטה בתהליך החישובי והפעלת האלגוריתם על בסיס הכרה וזכירה של שלבי הפעולה ללא הסבר. הבנה רלציונית נוגעת ליכולת לזהות יחסים בין רכיבים אחרים של בעיה ולקשר ביניהם. היא נובעת מהבנת המושגים, משמעות הפעולות החשבוניות והקשרים ביניהם. הבנת זיקות אלה מביאה לידי גילוי חוקיות ויכולת להסביר ולנמק.

בבסיס ההבנה המתמטית נמצאת היכולת לקשר בין סוגי ידע מגוונים בתחום המספרים. דהאן וכהן (Dehaene & Cohen, 1997) טוענים שקיים קשר בין שלושה סוגי ידע הקשורים להבנה, ידע סמלי, ידע מושגי וידע אנלוגי. הידע הסמלי מתבטא במשמעות שהילד מעניק למספר הכתוב, הידע המושגי מתבטא בתובנת מושג המספר כמייצג כמות בעלת ערך קבוע בלי קשר לצורת הייצוג

והידע האנלוגי מתבטא במסוגלות להעביר את הבנת הסמל כמושג ליישומים אחרים, על בסיס הבנת העיקרון הדומה הנובע מתהליכי ההשוואה. לדוגמה כמות או גודל המקושרים למספר כלשהו, מקבלים משמעות כמותית מתוך השוואה עם כמויות ומספרים אחרים. המתמטיקה במהותה היא תחום ידע מופשט, המחייב את הלומד להיעזר במושגים של השפה הבנויים על תהליכי חשיבה. מיומנויות החשיבה, כגון הכללה, הסמלה, יכולת העברה, יישום והסקת מסקנות מאפשרות את התפתחות ההבנה המתמטית. השפה מאפשרת להשתמש במילים בניסיון להסביר ולנמק את המסקנות שהובילו לתובנה (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009).

הקשר בין שלושת תחומי התפקוד המתמטי

בין שלושת תחומי התפקוד המתמטי מתקיימים קשר והשפעה הדדית. הפנמת ייצוגים של כמות מאפשרת חשיבה על מספר ללא המחשה, וגמישותם מאפשרת את החישוב הן כפעולה אינסטרומנטלית והן כחשיבה רלציונית. החשיבה הרלציונית משפיעה על ההבנה המתמטית.

המספרים וייצוגם הכמותי הם אבני היסוד של הלמידה החשבונית. כאשר הייצוגים מופנמים בזיכרון בדרך גמישה, הם נגישים גם לפעולת החישוב וגם לפעולת החשיבה.

מה משפיע על התפתחות תקינה של ייצוגי כמות?

תהליכי התפיסה הכמותיים הראשוניים תלויים במאפיינים חזותיים-מרחביים של הכמות, תחילה בלי מילים ולאחר מכן בקשר לשפת המספרים. למידע חזותי-מרחבי יש תפקיד מפתח ביצירה והפעלה של דימוי מנטלי (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009). המעבד המרחבי מאפשר התייחסות כיוונית לסדרתיות על פני ציר המספרים, וגם התייחסות דו-ממדית למבנה ייצוג חזותי כגון נקודות הקובייה. דמיון חזותי-מרחבי הוא הבסיס להתפתחות רעיונות מתמטיים (Dehaene & Cohen, 1997). האינטגרציה של המספרים מיוצגת בקורדינטות ויזיו-מרחביות. במחקרי דימות מוח נמצא כי הפעלת ביצועים חזותיים-מרחביים, שהיו קשורים למשימות של השוואת כמויות, מתבצעת באותו אזור במוח, בקורטקס הפרינטלי הימני והשמאלי (Fias & Fischer, 2005). חוקרים אלה מצטטים את רורקי וקונווי (Rourke & Conway, 1997), שמצאו כי הפרעות למידה חזותיות-מרחביות נמצאו בהלימה לעיכוב או להתפתחות לא תקינה בלימודי המתמטיקה.

רוב התלמידים בונים לעצמם ייצוגים מספריים בדרך אינטואיטיבית על בסיס התנסות מוחשית עם כמויות. תהליכי מנייה חוזרים של כמויות מובילים להתפתחות הקשר בין הייצוגים המוחיים של הכמות לשמם המספרי (Geary, 2004). הקשר בין הייצוגים של הכמות (כמותי, מילולי וגרפי) מתרחש כתכלול בין הייצוג המבני של כמות כמקבץ שלם לייצוג הסדרתי מילולי המאפשר שיום.

תהליכי העיבוד של ייצוגי הכמויות מתרחשים כפעילות המתרחשת בו בזמן בין חמישה מעבדים: מעבד מבני, מעבד סדרתי, מעבד מרחבי, מעבד סמנטי ומעבד גרפי (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; קדרון, 1991). שלושת המעבדים הראשונים – המבני, הסדרתי והמרחבי – אחראים על קלט ועיבוד חזותי-מרחבי כתהליכים תפיסתיים בלתי-מילוליים של ייצוגים כמותיים, הבונים זיכרון כתמונות ייצוגים אלה הם בסיס לשיום ולקשר המילולי. שני המעבדים האחרים – הסמנטי והגרפי – מאפשרים את בניית השפה המתמטית, את השמות, המושגים והסמלים המשמשים כלים של השפה והחשיבה (שי, 2009).

חוקרים מסוימים עמדו על ארבעה תפקודי ליבה מולדים, המשתתפים בעיבוד המספרים והתפתחות החוש למספרים (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; מרק-זיגדון, 2011; Dehaene & Cohen, 1997). תפקודי ליבה אלו כוללים זיהוי מהיר של כמויות קטנות עד 4 (subitizing), אומדן מהיר כצירוף מהיר של כמויות בדידות קטנות, השוואה בין כמויות וזיהוי שינויים בכמויות. תפקודי ליבה אלה מאפשרים לתלמיד לבנות לעצמו ייצוגים של כמויות, המופנמים עם הזמן בזיכרון כדימוי פנימי. ליברטוס ועמיתיה (Libertus et al., 2011) מציינים כי אפשר לזהות חוש גבוה למספרים כבר בגיל שלוש, כך שתפקוד יעיל וגמיש של מעבדי התפיסה מאפשר את התפתחות החוש למספרים. מחקרים עומדים על קשר בין קלט כמותי מהיר של כמויות עד 4 (subitizing) בגיל הגן לרהיטות חישובית בבית הספר כבר בכיתה א' (מרק-זיגדון, 2011; Libertus et al., 2011). מרקוביץ (2005) מתארת את החוש למספרים כאינטואיציה המקשרת בין המשמעויות המגוונות של המספר. החוש למספרים כולל את פיתוח היכולת לראות את היחסים בין מושגים מתמטיים למיניהם, עובדות מתמטיות ויכולות מתמטיות, ולכן מאפשר גישה אליהם בעת הצורך.

לאינטואיציה זו חמישה רכיבים:

- הבנת המשמעויות של מושג המספר (גילוי הקשר בין המשמעות הסידורית למשמעות המבנית).
- פיתוח תובנות של היחסים המורכבים בין מספרים והקשר בין אמצעי ההמחשה למושג המספר.
- זיהוי גדלים יחסיים של מספרים.
- פיתוח אינטואיציות הנובעות מהשפעת היחס בין מספרים לפעולות על מספרים.
- פיתוח יכולת השוואה למדידת חפצים ומצבים בסביבתם.

איכות תהליכי התפיסה המולדים של תפקודי הליבה שהזכירו לעיל דהאן וכהן (Dehaene & Cohen, 1997), משפיעה על הקלות או הקושי בבניית ייצוגי כמות וגמישותם. נגישות הזיכרון לייצוגים מאפשרת את הגילוי האינטואיטיבי של הקשרים ביניהם. האינטואיציה הראשונית למספרים היא לא בהכרח מילולית, ואולם היא מתפתחת בזכות השפה ותהליכי החשיבה. השפה מאפשרת את ביסוס האינטואיציות ואת גיבושן לתובנות ומאפשרת את ההבנה המתמטית הכללית (מרקוביץ, שם). לסיכום, החוש למספרים הוא שילוב בין תהליכי תפיסה יעילים ובין כישורי שפה וחשיבה מפותחים.

תלמידים תת-משיגים בחשבון

לתלמידים תת-משיגים בחשבון מאפיינים שונים זה מזה שעיקרם קושי או איטיות בשליפת תשובות נכונות לתרגילי חשבון בסיסיים כבר בתחום עשר וקושי לבנות דימויים מנטליים למושגים מתמטיים המתבטא בקושי להפיק משמעות מספרית מסמלים (Geary, 2005). מאפיין אחר הוא הקושי לתת משמעות לשפה החשבונית ולקשר בינה ובין סיטואציות כמותיות. קשיים אלה גורמים לרתיעה מהתמודדות עם אתגרי החשבון (ברוזה ובן-דוד קוליקנט, 2017; כ"ץ ודרור, 2014).

הנסיבות המשפיעות על הכשל החשבוני נובעות מאטיולוגיות שונות מאוד זו מזו, אף שהסימפטומים נראים דומים בחלקם:

- לקויי למידה בחשבון, דיסקלקוליה, הם ליקויים תפיסתיים בתהליכי קלט ועיבוד כמותי המשפיעים בעיקר על החישוביות, אך לא בהכרח על ההבנה. הקושי בהבנה עלול להיות תוצאה משנית לקושי בבניית ייצוגי הכמות. הוא נובע מדיספונקציה של מערכת העצבים המרכזית, המשפיעה על עיבוד מידע מספרי.

- קשיים בהבנה מתמטית העשויים לנבוע מהתפתחות שפתית נמוכה וקשיים בתהליכי החשיבה הקשורים להכללה, הפשטה והסמלה. קשיים אלה משפיעים על ההבנה המתמטית, שהיא מופשטת במהותה. תלמידים אלה לעיתים רוכשים מיומנויות יסוד בחשבון ומסוגלים לפתור תרגילים, אולם הם נוטים לזכור את התהליך האלגוריתמי בלי הבנה, ולגלות קשיים בהבנת עקרונות מתמטיים וביישום שאלות מילוליות.
- אטיולוגיות אחרות המשפיעות על הכשל החשבוני בעקיפין, כגון חסך סביבתי, לקויות חושים והפרעות רגשיות, מעכבות את תהליכי הלמידה בדרך כלל ובחשבון בפרט.

מקובל להבחין בין תלמידים עם לקויות למידה ובין תלמידים עם קשיים בחשבון, שאינם מוגדרים כלקויות למידה (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; מרק-זיגדון, 2011). בפרק הבא נתמקד בלקות החשבון, הדיסקלקוליה, כדי להתחקות אחר מנגנוני התפיסה החשבונית.

דיסקלקוליה - שיבוש בתפקודי הליבה הכמותיים

קושי בתהליכי העיבוד והבניה של ייצוגי הכמות הוא אבן הנגף של תלמידים עם לקות למידה בחשבון, המעכבת את התפתחות כושר החישוב. מחקרים השוואתיים בין תלמידים דיסקלקוליים לתלמידים רגילים מראים הבדלים מובהקים בתפקודי הליבה הכמותיים. תפקוד הסוביטייז נמצא לקוי אצל תלמידים דיסקלקוליים והתבטא בזמן תגובה ארוך לזיהוי כמויות מעל 3 עם טעויות רבות. נוסף על כך, גמישות הייצוג הסדרתי נמצאה לקויה בהשלמת סדרות (מרק-זיגדון,2011; Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2009; Piazza et al., 2010). לקות זו משבשת את התהליך הראשוני של בניית הייצוגים ושמירתם בזיכרון. לפעמים תהליך זה אינו מתחיל להתגבש בלי תיווך. גרי (Geary, 2004) מציין כי המאפיין הבולט של תלמידים עם לקויות במתמטיקה הוא הקושי ליצור דימויים מנטליים של מושגים מתמטיים. תלמידים אלה אינם עוברים מהשימוש במנייה לפיתוח ייצוגים מוחיים של עובדות פשוטות. הם רואים בתהליך המנייה פעולה טכנית ואינם מצליחים להפעיל תהליכי למידה המובילים להפנמת הסכום כמייצג כמות. המחקר של מרק-זיגדון (2011) מאשש את הקשר בין בניית ייצוגים לחישוביות. נמצאה קורלציה בין איטיות תלמידים עם לקויות למידה בזיהוי מהיר של כמויות קטנות להופעת קושי בולט בדליית עובדות חשבון במספרים חד-ספרתיים. למרבה ההפתעה, תלמידים אלה גילו תובנות על המבנה העשרוני ועיקרון הפוזיציה של מספרים רב-ספרתיים כמו תלמידים רגילים.

מאפיין אחר של לקות החשבון עשוי להתבטא בחולשה של כושר הקידוד המקשר בין הכמות לסמל הגרפי שלה (הניק, 2008). קושי זה נראה כמו דיסלקציה (לקות קריאה). עם זה מחקר שנערך בקרב סטודנטים מבוגרים המעידים על עצמם כדיסקלקוליים ללא קשיים בקריאה, מראה איטיות בזיהוי מספרים כתובים בלבד בלי קשיים בזיהוי אותיות ומילים (הניק ורובינשטיין, 2008). חוקרי לקויות למידה מתמטיות (הניק ורובינשטיין, 2008; הניק, רובינשטיין, אשכנזי ומרק-זיגדון, 2010; מרק-זיגדון, 2011) מציינים כי לקות החשבון היא נוירו-קוגניטיבית. נמצא כי באזור IPS (העמק התוך קודקודי), החריץ בחלק העורפי במוח, הוא קצר יותר אצל לקויי למידה המגלים איטיות בתגובת הסוביטייז של זיהוי כמויות קטנות.

מטרת המחקר היא לבדוק את הקשר בין תהליכי עיבוד של ייצוגים וגמישותם להשגת רהיטות חישובית של עובדות חיסור וחיבור בתחום עשרים, וכבסיס לגילוי תובנה מתמטית על בסיס הייצוג הגמיש.

נושא "חשבון בתחום עשרים" נבחר כתחום תוכן, כיוון שעל בסיס זה מתפתחים כל תהליכי החישוב המתקדמים, ובשל המציאות המראה שחסך בתחום זה מקבל ביטוי אצל תלמידים מתקשים גם בכיתות הגבוהות.

אלה הן שאלות המחקר הנגזרות מכך:

1. האם נמצא קשר בין תפקודי הליבה להצלחה בתהליכי חישוב ורהיטות החישוב?
2. אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הצלחה ברהיטות חישובית?
3. אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הבנה מתמטית?

שיטת המחקר

האוכלוסייה

א. תלמידים רגילים בכיתות ב' הלומדים בבתי הספר של החינוך היסודי הממלכתי.

ב. תלמידים מתקשים במתמטיקה בכיתות ג' עד ו', הלומדים בכיתות מקדמות ללקויי למידה ותלמידי כיתות שילוב המתקשים במתמטיקה, הלומדים בכיתות בתי הספר היסודיים וחטיבות הביניים.

משתתפי המחקר

118 תלמידים השתתפו במחקר הנוכחי: 97 תלמידים מכיתות ב' (גיל 7-8 שנים) הלומדים בחינוך הרגיל ו-21 תלמידים תת-משיגים בני 9-13 שנים שהם תלמידי כיתת שילוב הלומדים בכיתה רגילה ותלמידי חינוך מיוחד הלומדים בכיתות מקדמות ללקויי למידה. בין התלמידים הרגילים בכיתות ב' ובין אלו הלומדים בכיתות של תלמידים עם לקויות למידה של החינוך המיוחד נמצאו גם תלמידים תת-משיגים שהצליחו יפה במבדק החשבון בתחום העשרים. תלמידים הלומדים בחינוך המיוחד מבוגרים בגילם מתלמידי כיתות ב', ולכן יש מקום לצפות שלפחות כמה מהם יצליחו בנושא הבסיסי הנחקר.

נבו (1995) פיתח סולם ציונים המגדיר ארבע תת-קבוצות: תלמידים מצטיינים, תלמידים השולטים היטב בחומר, תלמידים שעומדים בדרישות המינימום ואלו שאינם עומדים בדרישות המינימום. על פי סולם הציונים של נבו ובשל התפלגות הציונים במבדק (איור 1), הוחלט לחלק את משתתפי המחקר לשלוש קבוצות: תלמידים מצטיינים השולטים היטב בתכנים (טווח ציונים 91-100), תלמידים שמכירים את התכנים (טווח ציונים 66-90) ותלמידים שאינם עומדים בדרישות המינימום (טווח ציונים 65 ומטה).

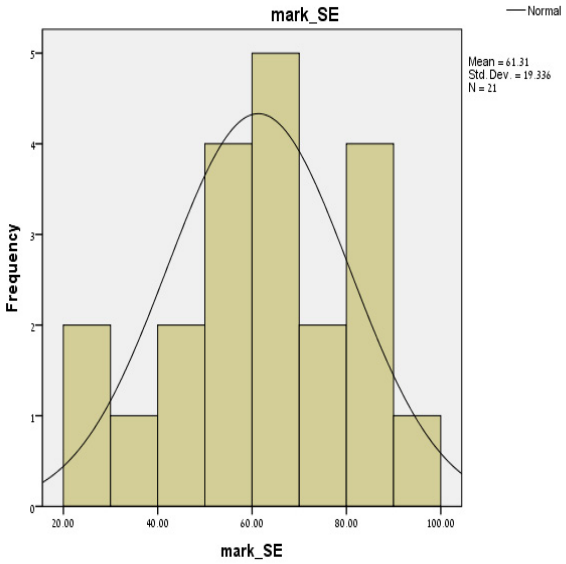
יש לציין כי בחינוך הרגיל לקראת סוף כיתה ב', יש מקום לצפות לשליטה ולרהיטות חישוב בתחום 20 (על פי הסטנדרטים של CCSSM, ראו טבלה 1 בהמשך). התרשימים באיור 1 ממחישים את חשיבות האיתור המוקדם של התלמידים שלא הגיעו לרמה הנדרשת.

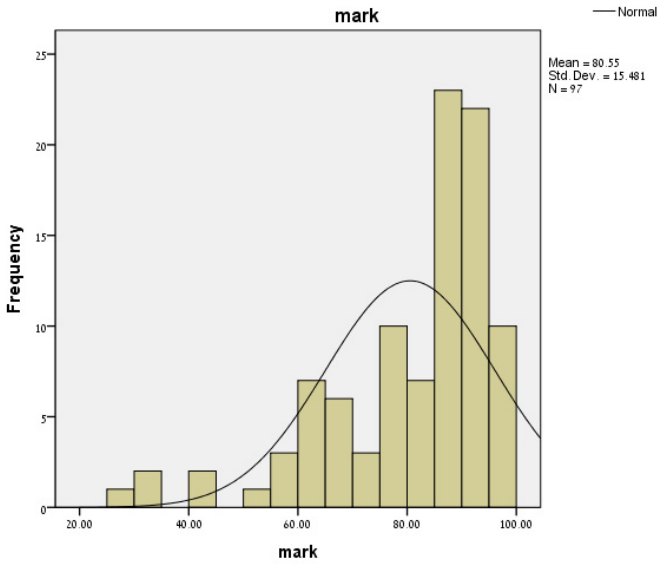
כלי המחקר

במהלך המחקר הנוכחי פותח כלי עבור מורים המלמדים בכיתות ב' בחינוך הרגיל או תלמידים עם לקויות או שניהם בחישובים בסיסיים בחיבור וחיסור בכל גיל. הכלי מאפשר מיפוי כיתתי וניתוח פרטני גם יחד. הוא כולל את שלושת התחומים: ייצוגים ומשמעותם הכמותית, חישוב והבנה מתמטית. הכלי נכתב בשתי שפות: עברית וערבית.

תיאור כלי המחקר

כלי המחקר משתמש במבדק מיפוי בתחום עשרים, הכולל 20 סעיפים. בכל סעיף ישנם שלושה עד ארבעה תרגילים מאותו סוג. נוסף על כך, הכלי כולל טבלת מיפוי כיתתי לשימוש המורה לשם ניתוח של הממצאים המסתמכים על פתרונות התרגילים לכל הכיתה ולכל תלמיד בנפרד (נספח 2). הכלי בוחן שלושה תחומי מיומנות בחשבון: משמעותם המספרית וגמישותם של ייצוגי כמות, חישוב והבנה מתמטית. טבלה 2 מתארת את דרך הבדיקה. נספח 1 מציג דוגמה של בדיקה בעזרת הכלי לכל אחד מתפקודים אלה. כך מתאפשרת בדיקת הקשר בין יכולות התפקוד להשפעת הייצוגים על איכות החישוב וההבנה. יש לציין כי ההגדרה של "רהיטות חישוב" במחקר הנוכחי היא מיומנות ביצוע תהליכי חישוב של תרגילי חיסור וחיבור בתחום עשרים בדרך מדויקת, יעילה ומהירה. ייצוגי הכמות נבחנו בהרחבה מנקודות מבט הנוגעות לתפקודי הליבה של תהליכי עיבוד התפיסה הכמותית שהם זיהוי מהיר של ייצוגי כמויות, השוואה וזיהוי שינויים בכמות.





טבלה 2: תחומי התפקוד המתמטי ודרך בדיקתם (דוגמאות בנספח 1)

ייצוג המספר ומשמעותו הכמותית	
הייצוג המבני בתחום 10 ובתחום 20, חמש נקודות מבט	ייצוג סדרתי בתחום 20, שלוש נקודות מבט
א. זיהוי מהיר של כמויות בדידות עד 10, וזיהוי כמויות עד 20 כייצוגים של כסף. ב. הפקת ייצוג מהזיכרון – שרטוט למספר כתוב. ג. השוואה בין ייצוגים. ד. זיהוי שינויים בכמות – השלמת החסר ל-10 ול-20. ה. תבנית ייצוג והתאמת ארבעה תרגילים לתבנית.	א. השלמת סדרת המשך קדימה. ב. השלמת מספרים בספירה לאחור. ג. השלמת סדרה בדילוגים.
חישוב	
מיומנויות חישוב, ארבע נקודות מבט משלימות	הייצוג הסדרתי בתחום 20, שלוש נקודות מבט
א. הבנת הקשר בין ייצוגי כמות חזותיים לתרגילים. ב. פתרון תרגילים מדורגים. ג. השלמת נעלמים. ד. פתרון תרגילים לפי רמזי קשר.	א. דיוק – תשובות נכונות לתרגילים. ב. פתרון מנטלי (תצפית על הילד – פתרון עם או ללא מנייה). ג. מהירות – הספק תרגילים נכונים בזמן. ד. מסוים – יציין את מידת השליטה בתהליך.(*)
(*) רהיטות חישוב נמדדת בזמן היא עדות לתהליך חישוב כמיומנות נרכשת. עם זה חשוב לציין כי המורה לא הגביל.	
הבנה מתמטית	
תובנה חישובית	הבנת שאלות מילוליות
א1. גילוי הקשר בין השלם לחלקיו ובין התרגילים בעניין תבנית משותפת במהלך הבנת חוקי החשבון : חוק החילוף בחיבור (a+b=b+a) ועיקרון ההפיכות בקשר בין החיבור והחיסור כפעולות הפוכות c-b=a a+b=c. א2. יישום תובנות חישוב בתרגילים עם רמזי קשר והשפעתם על הדיוק וההספק.	א. שאלת חיבור עם נתונים גלויים. ב. שאלת השוואה והבנת חישוב ההפרש. ג. הסקת מסקנה על פי נתון קודם (זיכרון עבודה). ד. חישוב עודף על פי נתון המשתמע מהשאלה הקודמת.

תוקף ומהימנות הכלי

המהימנות הפנימית של כל אחד משלושת החלקים בכלי המחקר, משמעותם המספרית וגמישותם של ייצוגי כמות, חישוב והבנה מתמטית, נבדקה באמצעות חישוב האלפא של קרונבך. מקדמי המהימנות של שלושתם נמצאו בטווח 0.82 עד 0.86. עקיבותו הפנימית של הסולם כולו הייתה $\alpha k=0.83$.

ממצאי המחקר

ממצאי המחקר עוסקים בהבדלים בין קבוצת התלמידים השולטים היטב בתכנים (טווח ציונים 91-100), שהוגדרו "תלמידים מצטיינים" (מצוינים), קבוצת תלמידים עם טווח ציונים 66-90, שהוגדרו "תלמידים המכירים את התכנים" (בינוניים) וקבוצת התלמידים עם טווח ציונים 65 ומטה שהוגדרה "תלמידים שאינם

עומדים בדרישות המינימום" (חלשים), וכן בהבדלים בין קבוצת התלמידים הלומדים בחינוך המיוחד (בני 9-12 שנים) וקבוצת התלמידים החלשים בכיתה ב' רגילה.

בטבלה 3 מוצגת ההשוואה בין המיומנויות של שלוש הקבוצות (בחינוך הרגיל): בתפקודי הליבה שהוגדרו ברקע התאורטי (סוביטייז ואומדן, השוואת כמויות, זיהוי שינויים בכמות וגמישות הייצוג) בפתרון התרגילים וביישום שאלות מילוליות. נוסף על כך, מוצגת השוואת משתנים אלה בין קבוצת התלמידים הלומדים בחינוך המיוחד ובין קבוצת התלמידים החלשים בכיתה ב' רגילה.

תפקודי ליבה

מטבלה 3 עולה כי קיימים הבדלים מובהקים בתפקודי הליבה בין שלוש הקבוצות הלומדות בחינוך הרגיל ברכיבים האלה: 1. הספק בדקה של קלט הסוביטייז ואומדן ייצוגים עד 10; 2. הפקת ציור למספר דו-ספרתי; 3. השוואת כמויות ייצוגים משורטטים; 4. גמישות הייצוג בהשלמת החסר לייצוג משורטט ל-10 וגם ל-20 – תובנת ההיפוך על פי סכמה.

לבדיקת מקור ההבדל נערך ניתוח המשך מסוג Bonferroni שהראה כי בחינוך הרגיל ההבדל היה בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות "המצוינים" ו"הבינונים". כמו כן נמצא שאין הבדל מובהק בין שתי הקבוצות האחרונות בכל אחד מהמשתנים שצוינו לעיל מלבד תובנת ההיפוך, שבה קיימים הבדלים בין כל זוג משלוש הקבוצות.

לבדיקת ההבדל בין קבוצת ה"חלשים" בחינוך הרגיל וקבוצת החינוך המיוחד נערך מבחן t-test שהראה כי קיים הבדל מובהק רק לגבי הסוביטייז והאומדן עד 10 לאחר שנמצאה חולשה בולטת עוד יותר בקרב ליקויי הלמידה המאובחנים (טבלה 3).

פתרון תרגילים

טבלה 3 מציינת הבדלים מובהקים בפתרון תרגילים בחינוך הרגיל בין שלוש הקבוצות: ברהיטות שנמדדה כהספק פתרון נכון של תרגילים (מדורגים / עם רמזי קשר) בפרק זמן של דקה וחצי, במציאת צירופים לעשר כתרגיל חיבור או כתרגיל חיסור ובתרגילים המדורגים, שבהם היה אפשר לזהות הבדלים בפתרון תרגילי חיסור כבר בתחום 10. בתחום עשרים נמצאו הבדלים מובהקים בפתרון תרגילי חיבור עם העברה וחיסור ללא פריטה ועם פריטה.

לבדיקת מקור ההבדל נערך ניתוח המשך מסוג Bonferroni שהראה כי בחינוך הרגיל ההבדלים היו בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות "המצוינים" ו"הבינוניים" בכל המיומנויות שצוינו בפסקה לעיל. כמו כן נמצא הבדל בין שתי הקבוצות, "המצוינים" ו"הבינוניים", בכל אחת מהמיומנויות האלה מלבד ב"תרגילי חיסור בתחום 10". יש לציין כי לא נמצאו הבדלים בין כל הקבוצות בפתרון תרגילי חיבור בתחום 10 ובתחום 20 ללא העברה.

לבדיקת ההבדל בין קבוצת ה"חלשים" בחינוך הרגיל ובין קבוצת החינוך המיוחד נערך מבחן t-test שהראה כי קיים הבדל מובהק רק בפתרון תרגילי חיבור עם העברה בתחום 20, ובפתרון תרגילי החיסור בתחום 20 (טבלה 3).

הבדלים דומים בחינוך הרגיל בין שלוש הקבוצות נמצאו גם במציאת צירופים ל-10 וגם בהשלמת תרגילים עם נעלמים. כמו כן הממצאים מראים כי אין הבדל מובהק בין התלמידים ה"חלשים" בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד (טבלה 3).

יישום שאלות מילוליות

הממצאים מראים כי קיימים הבדלים מובהקים במשתנה זה בין שלוש הקבוצות בחינוך הרגיל. ההבדלים ניכרו בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות, "המצוינים" ו"הבינוניים" וגם בין הקבוצות עצמן, "הבינוניים" ו"המצוינים". נוסף על כך, נמצא הבדל מובהק במשתנה זה בין התלמידים החלשים בחינוך הרגיל לתלמידי החינוך המיוחד (טבלה 3).



טבלה 3: תפקודי ליבה ותרגילים בקבוצות "המצוינים", "הבינוניים", "החלשים" ותלמידי החינוך המיוחד

	מיומנות	מצויינים	בינוניים	חלשים	F	df	*p	SE-חינוך מיוחד	t-test	**p
הספק	הספק בדקה 1 – כתיבת מספר לכמות (סוביטייז ואומדן עד 10)	0.898 (0.15)	0.732 (0.21)	0.628 (0.21)	11.192	95	<0.0001	0.4905 (0.183)	-2.126	0.041
	הספק בדקה וחצי – תרגילים מדורגים	0.96 (0.07)	0.82 (0.18)	0.5 (0.15)	44.908	93	<0.0001	0.5863 (0.18)	1.463	ns
	הספק בדקה וחצי – תרגילים עם רמזי קשר	0.97 (0.07)	0.73 (0.24)	0.40 (0.23)	41.738	95	<0.0001	0.4813 (0.256)	1.354	ns
הפקה	הפקה1 – ציור למספר עד 10	3 (0.97)	2.98 (0.87)	2.47 (0.8)	2.267	96	Ns	2.69 (0.915)	0.768	ns
	הפקה1 – ציור למספר דו-ספרתי	3.83 (0.33)	3.5 (0.94)	2.75 (1.55)	6.73	96	0.002	3 (1.194)	0.555	ns
הבנת הערך המספרי	כתיבת מספר לשרטוט של ייצוג דו-ספרתי[1]	4.03 (3)	3.86 (2)	4.48 (1)	2.739	87	ns	(1.3) 3	-0.792	ns
	שימור כמות בתחום 6 (יישום סימני השוואה: <=>)[2]	1 (0)	0.94 (0.21)	0.75 (0.41)	6.504	96	0.02	0.88 (0.31)	1.106	ns
	השוואה בתחום 20 (ייצוג כסף) [2]	2.9 (0.26)	2.87 (0.6)	2.13 (1.2)	8.884	96	0.0001>	2.3 (1.06)	0.557	ns
לקראת חישוב										
המעבר מייצוג לתרגיל	השלמת שרטוט ל-10 והתאמת תרגיל3	3.78 (0.39)	3.42 (0.84)	2.56 (1.35)	10.608	96	0.0001>	2.6 (1.3)	0.074	ns
	השלמת שרטוט ל-20 והתאמה לתרגיל3	3.26 (0.89)	3.11 (0.94)	1.91 (1.13)	11.645	96	0.0001>	2.05 (1.6)	0.3	ns
חישוב										
צירופים ל- 10	חיבור 10=_+_	2.97 (0.19)	2.84 (0.57)	1.93 (1.14)	15.009	94	0.0001>	2.07 (1.21)	0.35	ns
	חיסור _=_-10	2.93 (0.37)	2.52 (0.99)	1.25 (1.28)	16.582	94	0.0001>	1.714 (1.31)	0.308	ns
השלמת נעלם (חיבור וחיסור)	חיבור	2.97 (0.19)	2.67 (0.65)	2.06 (1.06)	10.068	96	0.0001>	2.238 (0.995)	0.516	ns
	חיסור	2.9 (0.31)	2.77 (0.58)	1.86 (0.86)	17.462	94	0.0001>	1.905 (1.09)	0.137	ns
תרגילי חיבור וחיסור	חיבור בתחום 10	3.86 (0.35)	3.88 (0.33)	3.79 (0.43)	0.421	93	ns	3.91 (0.3)	1.952	ns
	חיבור ללא העברה בתחום 20	1.9 (0.41)	1.8 (0.57)	1.5 (0.85)	2.25	92	ns	1.76 (0.77)	0.945	ns
	חיבור עם העברה בתחום 20	1.97 (0.19)	1.82 (0.52)	0.93 (0.92)	19.859	93	0.0001>	1.67 (0.97)	2.259	0.031
	חיסור בתחום 10	4 (0)	3.86 (0.69)	3.07 (1.44)	7.835	93	0.001	3.286 (1.42)	0.435	ns
	חיסור ללא פריטה בתחום 20	2 (0)	1.8 (0.53)	0.5 (0.65)	54.112	93	0.0001>	1.191 (1.03)	2.223	0.033
	חיסור עם פריטה בתחום 20	1.97 (0.19)	1.78 (0.46)	0.07 (0.27)	139.163	93	0.0001>	0.905 (1.18)	2.588	0.014
הבנה מתמטית										
תובנת ההיפוך	קשר בין חיבור לחיסור[3]	1.38 (0.9)	0.52 (0.8)	0.25 (0.58)	14.085	96	0.0001>	(0) 0	-1.787	ns
יישום	שאלות מילוליות	0.83 (0.19)	0.58 (0.25)	0.2 (0.13)	39.742	94	0.0001>	0.235 (0.53)	2.201	0.035

*p השוואת שלוש הקבוצות בחינוך הרגיל

**p השוואת החינוך המיוחד עם קבוצת התלמידים "החלשים" בחינוך הרגיל

1 סוביטייז ואומדן – זיהוי מהיר של ייצוגים מבניים

2 השוואת כמויות

3 זיהוי שינויים בכמות וגמישות הייצוג

הממצאים מראים שיש קשר בין תפקודי הליבה להצלחה בתהליכי החישוב ובמיוחד ברהיטות חישובית.

להשלמת התמונה יש לבחון אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הצלחה ברהיטות חישובית וגם בהבנה מתמטית.

טבלה 4 מציגה ממצאי רגרסיה ליניארית רבת משתנים (multiple linear regression analysis) כדי לנבא את הספק רהיטות התרגילים באמצעות תפקודי הליבה.

טבלה 4: ממצאי רגרסיה לניבוי הספק רהיטות תרגילים מדורגים באמצעות תפקודי ליבה (קלט-סוביטייז ואומדן, הפקת ציור עד 20, השלמת ציור עד 20 ותובנת ההיפוך – חיסור/חיבור מתוך שרטוט)

המשתנים המסבירים	B	β	t	p-value	R	R^2	R^2_{adj}
קבוע	0.299	-	3.320	0.001	0.581	0.337	0.307
קלט-סוביטייז ואומדן	0.303	0.317	3.234	0.002			
הפקת ציור עד 20	0.053	0.260	2.908	0.005			
השלמת ציור עד 20	0.024	0.124	1.365	0.176			
תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.041	0.18	1.853	0.067			

מהתבוננות בממצאי הרגרסיה (טבלה 4), עולה כי התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(3,92)=11.189$, $p<0.0001$) עם מתאם מרובה של 0.581 ואחוז השונות המוסברת הוא 33.7%. מהטבלה עולה כי ערכי מקדמי הרגרסיה המתוקננים (β) מציינים תרומה מובהקת של המשתנים קלט-סוביטייז ואומדן והפקת ציור עד 20 להספק רהיטות התרגילים, ואילו לשני המשתנים האחרים, השלמת ציור עד 20 ותובנת ההיפוך, אין תרומה מובהקת להספק זה.

נוסף על כך, נראה מהטבלה כי למשתנה קלט-סוביטייז ואומדן יש השפעה חזקה ביותר על הספק רהיטות תרגילים מדורגים. על סמך מקדמי הרגרסיה הלא מתוקננים (0.303 ו-0.053 לקלט-סוביטייז ואומדן ולהפקת ציור עד 20 בהתאמה) התקבלו מתאמים חיוביים. משמעותם היא שככל שקלט-סוביטייז ואומדן גבוהים יותר, כך הספק רהיטות התרגילים המדורגים גבוה יותר. בהתאמה נמצא מתאם חיובי עבור המשתנה הפקת ציור עד 20.

טבלה 5 מציגה את ממצאי רגרסיה ליניארית (linear regression analysis) כדי לנבא את התובנה החישובית ואת הבנת השאלות המילוליות באמצעות תובנת ההיפוך, חיסור/חיבור, מתוך שרטוט.

מטבלה 5 עולה כי עבור התובנה החישובית התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(1, 94)=16.294$, $p<0.0001$) עם מתאם 0.384 ואחוז שונות מוסברת 14.8%. כמו כן נמצא שערך מקדם הרגרסיה הלא מתוקנן הוא 0.116, כלומר ככל שתובנת ההיפוך גדלה, כך עולה גם התובנה החישובית.

טבלה 5: ממצאי רגרסיה לניבוי תובנה חישובית והבנת שאלות מילוליות באמצעות תובנת ההיפוך, חיסור/חיבור מתוך שרטוט

המשתנה המנובא	המשתנה המסביר	b	β	t	p-value	R	R^2	R^2_{adj}
תובנה חישובית	קבוע	0.661	-	19.686	<0.0001	0.384	0.148	0.139
	תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.116	0.384	4.037	<0.0001			
הבנת שאלות מילוליות	קבוע	0.535	-	14.033	<0.0001	0.262	0.068	0.058
	תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.085	0.262	2.615	0.01			

עבור הבנת השאלות המילוליות התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(1, 93)= 6.837$, $p=0.01<0.05$) עם מתאם 0.262 ושונות מוסברת 6.8% בלבד. כמו כן נמצא שערך מקדם הרגרסיה הלא מתוקנן הוא 0.085, כלומר ככל שתובנת ההיפוך גדלה, כך גם הבנת השאלות המילוליות (טבלה 5).

ממצאים המסכמים את טבלה 5 מראים כי תובנת ההיפוך מנבאת רהיטות חישובית. המתאם בין תובנת ההיפוך לשאלות המילוליות קיים, אך היה נמוך יותר.

בקבוצת התלמידים הלומדים החינוך המיוחד, אף שנמצא מתאם מובהק בין הרהיטות החישובית להפקת שרטוט למספר דו-ספרתי ($rp=0.528$, $p=0.015<0.05$), לא נמצאו מתאמים מובהקים בתפקודי הליבה האחרים. ייתכן שממצאים אלה מושפעים מההטרוגניות של התלמידים בקבוצה זו הנובעת מהגיל והיכולת התפקודית. כמו כן יש לציין כי רובם לא פתרו כלל את תרגילי החיסור, נתון שהשפיע על הממצאים הקשורים לחישוביות. רק בקבוצה זו נמצא קשר מובהק בין הקלט המבני לספירת הדילוגים ($rp=0.585$, $p=0.005<0.05$). יש להדגיש כי השונות הבין-אישית בין התלמידים הייתה גדולה, אך אפשר לראות כי ילדים שקלט הסוביטייז שלהם היה איטי ונמוך, טעו גם בספירת הדילוגים.

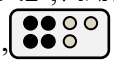
דיון

ממצאי המחקר הראו כי לתפקודי הליבה יש השפעה על התפתחות יכולת החישוב, אם כי קיימים הבדלים במידת השפעתם על המעבר לרהיטות החישובית.

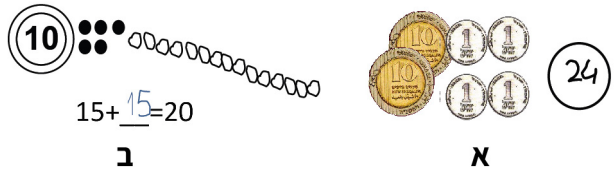
כצפוי, נמצאו הבדלים בולטים ברהיטות החישובית בתחום עשרים בין תלמידים חלשים לאחרים. אולם מכיוון שמטרת המחקר הייתה לאתר את תפקודי ליבה עם ההבדלים הניכרים ביותר ואת מידת ההתאמה ביניהם לרהיטות החישובית, נמצא כי ההתאמה המהותית הייתה בין תפקודי המעבד המבני ובמיוחד גמישותו לרהיטות החישובית. לפיכך יש מקום להניח כי חולשה בתפקודים אלה עשויה לנבא קושי בהשגת רהיטות חישובית.

לעומת זאת, לתפקוד המעבד הסדרתי לא נמצאה השפעה חיובית על הרהיטות החישובית. כל התלמידים בכל הרמות הצליחו בהשלמת הסדרות, אבל לא הייתה לכך השפעה על הרהיטות, לא של

התלמידים המתקשים ולא של הבינוניים. הייצוג הסדרתי הנכון, השלמת סדרות עד 20, ובכללו השלמה מאמצע הסדרה וספירת דילוג, סייע לתלמידים החלשים והבינוניים בפתרון נכון של תרגילי חיבור באמצעות אסטרטגיית המנייה. בדרך כלל גרמה המנייה לטעויות בתרגילי החיסור במיוחד בתחום עשרים. ברוב הפעמים שבהן נצפתה מנייה, היא עיכבה את מהירות תהליכי הפתרון שהיו באופיים אינסטרומנטליים, בלי הבנת משמעות הפעולה. מעט טעויות הופיעו אצל התלמידים המתקשים בהשלמת סדרת דילוגים. מעניין לציין כי נמצאה התאמה בין קושי זה לקושי בזיהוי מהיר של כמויות כמבנה. נראה שבטעויות אלה יש רמז לקושי בקלט המבני, המשפיע על היכולת להפנים ייצוגי כמות כמקבץ, ולפעול באמצעותן בחשיבה על פי הזיכרון.

הקשר בין הסוביטייז לרהיטות חישובית נמצא במחקרים קודמים (מרק-זיגדון, 2011; Libertus et al., 2011). המחקר הנוכחי העמיק את החקר בגמישות הייצוג המבני והשפעתו. הגמישות נבדקה בשתי דרכים: א. כהשלמה לשלם בשרטוט ובתרגיל; ב. כתובנת ההיפוך בין החיסור לחיבור על פי השרטוט  , הנוגע לשלם וחלקיו. נמצא קשר בין השלמת שרטוט מספר דו-ספרתי לרהיטות חישובית, וקשר מובהק בין תובנת ההיפוך לרהיטות החישובית (להלן דוגמה).

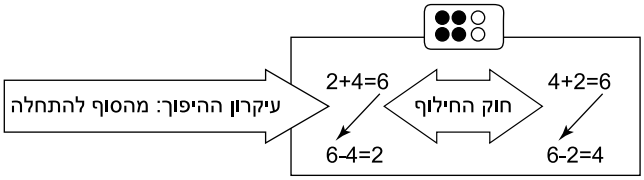
א. השלמה לשלם: ההשלמה לעשר הייתה קלה לכלל התלמידים שנעזרו במניית המשך. לעומת זאת בתחום עשרים בלט קושי אצל תלמידים חלשים בפירוק נכון של הסכמה המייצגת את העשרת והאחדות וכתיבת התרגיל המתאים. הנטייה למנייה אינסטרומנטלית בלי הבנה הייתה מלכודת לטעויות. יש לציין כי לא הייתה לתלמידים בעיה לזהות סכמה זו כמספר דו-ספרתי במטלה כגון איור 2א', אלא שבהשלמה ל-20, תלמידים חלשים השלימו כמתואר באיור 2ב'.



איור 2: דוגמה לטעות אופיינית בהשלמה ל-20

ב. הקשר המובהק שנמצא בין תובנת ההיפוך לרהיטות החישובית השפיע במיוחד על הדיוק בתרגילי החיסור ועל הבנת השאלות המילוליות.

המטלה המתוארת באיור 3 מבטאת את גמישות הייצוג המשמשת תפקוד ליבה. חוק החילוף מתגלה כמבט, פעם לשמאל ופעם לימין. הבנת ההיפוך בין החיבור לחיסור מחייבת מבט מהשלם לחלקים ולהפך, מהחלקים לשלם.



איור 3: דוגמה לתובנת ההיפוך על פי שרטוט

במחקר הנוכחי נמצא שהתלמידים החלשים והבינוניים לא ראו ולא הבינו את הקשר בין פירוק השלם לתרגילי החיסור. קושי זה התבטא בטעויות בפתרון תרגילי החיסור. כולם פתרו את התרגילים באמצעות אסטרטגיית המנייה, וככל שההפרש היה גדול יותר בין המספרים, כן היו יותר טעויות. בתחום עשרים, חלק מהתלמידים נמנעו מהפתרון. הטעות האופיינית בחיסור התבטאה בסטייה של מספר אחד עקב מנייה שגויה לאחור, כגון 9=4-12. כנראה שהתחילו את המנייה לאחור מהמספר 12, ולכן הגיעו ל-9 כך: 12, 11, 10, 9. ממצא זה מתאים לטענת ברודי (Baroody, 2016), שהמעבר מפתרון בעזרת אסטרטגיית המנייה לרהיטות חישובית תלוי בהתפתחות שלוש תובנות: הבנת הקשר בין השלם לחלקיו, הבנת עיקרון ההשלמה לשלם והבנה כי בין החיבור לחיסור מתקיים קשר של היפוך הסדר. גם מחקרם של פלטנבורג ועמיתיה (Peltenburg et al., 2012) הראה כי תובנת קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור השפיעה מאוד על רהיטות חישובית אצל תלמידי כיתה ד'.

במחקר הנוכחי נעשתה הבחנה בין התלמידים החלשים הלומדים בכיתה רגילה לקבוצת תלמידים עם לקויות למידה (ל"ל) בני 9-12. ההבדלים התבטאו בקלט המבני של סוביטייז ואומדן עד 10, שהיה חלש יותר אצל תלמידים עם לקויות למידה. בשאר תפקודי הליבה לא נמצאו הבדלים בינם ובין החלשים בכיתה ב' בחינוך הרגיל. תלמידים עם לקויות למידה, כמו החלשים בחינוך הרגיל, הצליחו בהשלמת סדרות. מיומנות זו סייעה להם בחיבור בעזרת אסטרטגיית המנייה, שהייתה נכונה יותר מזו של התלמידים החלשים בחינוך הרגיל. אולם אסטרטגיית המנייה לא סייעה להם בחיסור, 57% מהם לא פתרו כלל את תרגילי החיסור עם הפריטה, 29% מהם לא פתרו כלל חיסור בתחום 20 ללא פריטה. מכאן נסיק כי אסטרטגיית המנייה סייעה לפתרון אינסטרומנטלי, אך כנראה בלי תובנה חישובית.

ההבדלים הבולטים בין הקבוצות בכיתה ב' רגילה ניכרו בתרגילים בתחום עשרים. קבוצת התלמידים המצטיינים (השולטים היטב) פתרו נכון את כל התרגילים בדקה וחצי. הם סיימו מהר עוד יותר את אשכול התרגילים עם רמזי הקשר. כצפוי, יש מקום לומר כי הם בעלי רהיטות חישובית גבוהה ותובנה חישובית. הצלחתם בחישוב הייתה מותאמת להצלחתם בתפקודי הליבה. לעומתם תלמידים שהראו חולשה בתפקודי הליבה המבניים, פתרו בעזרת אסטרטגיית המנייה, עבדו באיטיות ונטו לטעויות בחיסור בתחום עשרים. אשכול התרגילים עם רמזי הקשר לא עזר להם ואף גרם לטעויות רבות יותר, כי התרגילים הופיעו בתחום עשר ועשרים לסירוגין. ממצאים אלה מתקשרים לטיעון כי הפתרון באמצעות אסטרטגיית המנייה אינו מספיק יעיל לפתרון תרגילים כבר בתחום עשרים. החולשה בגמישות הייצוג המבני, שנמצאה אצל רוב התלמידים המתקשים, עשויה להסביר את הקושי במעבר להכללה באמצעותו, המתבטאת בעיקר בחיסור. כל זמן שאין הפנמה של ייצוג מבני גמיש המאפשר את ראיית השלם וחלקיו, התלמיד אינו מסוגל להשתחרר מהמנייה האינסטרומנטלית, שחוזרת על עצמה, ללא הפנמת הסכום.

תובנת ההיפוך שנמצאה בהתאמה גבוהה עם פתרון התרגילים ועם הבנת השאלות המילוליות, ומבטאת את גמישות הייצוג, סייעה לתלמידים המצליחים. לעומת זאת אצל התלמידים המתקשים היא נמצאה כחולשה בולטת ועשויה להסביר את הקושי שלהם לעבור לאסטרטגיות מנטליות. טיעון זה מתאים לטיעון של ברודי (Baroody, 2016) שהמעבר לאסטרטגיה מנטלית מחייב הימצאות תובנות אלה.

מסקנות דידקטיות

הקשר שנמצא בין תפקודי הליבה לחישוביות, עשוי לשפוך אור על תהליכי הוראה יעילים שעשויים לעודד את התפתחות תפקודים אלה. מודעות המורה לתפקודי הליבה ולתהליכי תפיסה ראשוניים עשוי להשביח את ההוראה עבור כלל התלמידים ועבור התלמידים המתקשים במיוחד.

למורים רבים יש נטייה להדגיש בהגזמה את תהליכי ספירה ומנייה המייצגים את המעבד הסדרתי, ופחות לחזק את תהליכי הקלט והעיבוד של הייצוג המבני. נטייה זו מביאה כמה מהילדים לראות באסטרטגיית המנייה את הדרך המרכזית לפתרון תרגילים. תופעה זו מעכבת את יכולתם לדמות כמויות ולעבור לתהליך המנטלי של החישוב. התוצאות של עיכוב זה ניכרות בקושי להתמודד עם תרגילי החיסור, שכן אסטרטגיית המנייה לאחור בחיסור מורכבת יותר. תלמידים אלה אינם מפנימים את הסכומים וההפרשים ואינם מגיעים לרהיטות חישובית גם בכיתות גבוהות. טענה זו מתקשרת לדברי גרי (Geary, 2004), המציין כי האפיון הבולט של תלמידים עם לקויות במתמטיקה הוא הקושי ליצור דימויים מנטליים של מושגים מתמטיים. חשוב אפוא לחשוף את התלמידים בו בזמן לשני הייצוגים, הסדרתי והמבני. יש להדגיש את חיזוק תהליכי העיבוד של הייצוג המבני ובעיקר להגמשתם כבסיס לפתרון מנטלי.

בתחילת הוראת החשבון, בגן ובכיתה א', חשובה התנסות דינמית עם אמצעי המחשה מגוונים במהלך מנייה, שיח ומלל להמשגת מושג המספר. לצד ריבוי דוגמאות, מומלץ לחשוף את הילדים גם לדגמים מבניים סכמתיים של נקודות מאורגנות, כגון דגם הנקודות במשחק הדומינו, דגמי תבניות ליי וכדומה. נקודות היווצרות צורה דו-ממדית נקלטות כתמונה של השלם ובו בזמן גם את פרטיו כבודדים. את דגם זה אפשר להמחיש גם מבחינה דינמית באמצעות דסקיות, פקקים וכדומה. הדגם מסייע למעבר מהתלות בהמחשה להפנמה בזיכרון ומכאן הוא משמש גשר לקראת הבניית הייצוג המופשט. פנל ורואן (Fennel & Rowwan, 2001) מציינים את חשיבותם של דגמי הייצוג ככלים לטיפוח ההבנה והמשמעות של המספרים ופעולות החשבון. הדגמים מאפשרים מעבר מן ההתנסות הסביבתית המוחשית המגוונת למבנה סכמתי וכוללני. ככל שהם יותר פשטניים בצורתם, כן הם מאפשרים תהליך של ארגון מבני. סכמות כמות עד עשר, הבנויות מעיגולים, עומדות בקריטריון זה.

ייצוגי כמות בתחום עשר נבנים במהלך תהליכי הלמידה ומעוררים את תהליכי ההגמשה בעת הבנייתם:

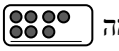
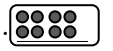
א. **חשיפה לדגם מבני ושיום המספר:** מומלץ לפתח באמצעות משחקים, כגון דומינו, קובייה או כל דגם כמותי מובנה של נקודות בארגון צורני, המסייע לתהליכי קלט כמותי והבנייתו כייצוג המופנם בזיכרון בהתאמה לשם המספר.

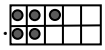
ב. **הפקה:** מומלץ לתת לילד לבנות דגמים מבניים באמצעות פריטים עגולים, כגון פקקים או דסקיות. התנסות פעילה זו במהלך חשיפה לדגם, תחזק את תהליכי הקליטה, תחילה כהעתקה ובהמשך כבניית דגם לאחר חשיפה קצרה והסתרה. בניית הדגם מהזיכרון מראה את הפנמתו.

ג. **תהליכי הגמשה לפירוק וצירוף תפיסתי יתפתחו כפעולת השלמה לדגם:** מתוך הדגם שהילד בנה מהזיכרון, יש להסתיר חלק מהדסקיות כשעיני הילד עצומות. עליו לענות על השאלות: כמה היו קודם? כמה חסר עד...? תהליך ההשלמה לשלם על פי רמז מחזק את הפנמת השלם ובו בזמן מכין את תהליכי הפירוק והצירוף של השלם וחלקיו (כ"ץ, 1978; Losq, 2005).

תהליכים תפיסתיים אלה (א-ג) מאפשרים לילד להשתחרר מהמנייה ולעבור לפעולה חישובית מנטלית באמצעות "ייצוגים מופנמים בתהליכי הגמשה".

גמישות הייצוגים מאפשרת את התפתחות תהליכי חישוב המתקדמים. תובנה חישובית נובעת מתהליכי תפיסה הנוגעים לראייה הגמישה של הקשר בין השלם לחלקיו. קשר זה הוא בסיס לגילוי היחסים בין המספרים ובין הקשרים בין התרגילים, חוק החילוף ותובנת ההיפוך בין החיסור לחיבור (Baroody, 2016). גרבנמייר וואן גאלן (Gravemeijer & Van Galen, 2003) מתארים שהיכולת לתובנת המספר היא יכולת להתמצא בסביבה המתמטית המורכבת מרשת של יחסים בין מספרים לעובדות. הם ממליצים על דגם ייצוג נקודות כמותי בתחילת ההוראה, המכוון את הילד לראות בקבוצות את השלם כבסיס תפיסתי לתהליכי הצירוף בכמות.

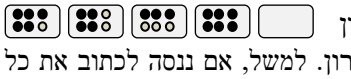
כבר ב-1978 הציגה כ"ץ עקרונות תפיסתיים אלה. היא הייתה נוירולוגית ופסיכולוגית שפיתחה שיטה להוראה מתקנת באמצעות דגמים של כרטיסי ליי, לדוגמה   .

עקרונות דומים של הוראה מתקנת באמצעות תבניות עשר מופיעים במאמרו של לוסק (Losq, 2005), לדוגמה   .

שני הדגמים מציגים דרך הוראה המבוססת על הבניית ייצוגים בתחום עשר, בעזרת דגמים המכוונים את העין לקליטה מהירה של הכמות. הם מאורגנים בזוגות, כאשר גודל הכרטיס מכוון לעשר. הם מדגימים למידה המגמישה את הייצוג באמצעות פעילות השלמת דיסקיות לשלם. יש ביניהם הבדל קטן אך בעל משמעות. בתבניות ליי של כ"ץ אין חלוקה למשבצות ונוסף על כך, יש מרחק קטנטן בין רביעייה לרביעייה. לטענת כ"ץ, עיקרון זה מסייע למאמץ הלמידה כהשלמה לגשטלט, בלי יכולת מנייה. לעומת זאת, המשבצות מאפשרות מנייה.

פעולת ההשלמה לשלם חסר מסייעת לתהליכי הפתרון של התרגילים. למרבה ההפתעה, לאחר תרגול זה הקושי בפתרון תרגילי החיסור נעלם גם אצל תלמידים עם לקויות למידה. על פי שיטת כ"ץ, יש ללמד את החיסור לפני החיבור. לאחר שהילד יודע לפתור תרגילי חיסור בתחום מספר כלשהו, הוא עשוי לגלות כמעט בכוחות עצמו את קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור (כ"ץ, 1978). גילוי זה מארגן ומקשר בין התהליך התפיסתי לתהליך המנטלי גם יחד. תבניות מוכרות משמשות אפוא קשר רעיוני תומך זיכרון לפעולות החישוב.

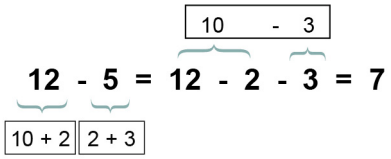
גמישות במהלך מבט על תבניות, כגון  מביאה לידי תובנות המתמטיות של גילוי הקשרים בין התרגילים, חוק החילוף וקשר ההיפוך בין החיבור לחיסור. תובנות אלה משפיעות על הבנה מתמטית של הקשר בין השלם לחלקיו, המתבטאת בשאלות מילוליות.

נוסף על כך, תבניות כגון  מצמצמות את העומס על הזיכרון. למשל, אם ננסה לכתוב את כל התרגילים האפשריים לכמות 6 , נגלה 18 תרגילים (לא כולל תרגילים עם נעלם). לעומת זאת אם נבין את הקשרים הנובעים מכל סכמה, נראה כי לפנינו ייצוגים של 4 סכמות בלבד. הסכמה מאפשרת לרכז את התרגילים כאשכולות מקושרים הנטמעים בזיכרון ביתר קלות.

תחום עשרים

תחום עשרים נשען על הרהיטות בתחום עשר, המשמשת מנוף להתפתחות תהליכי חישוב מתקדמים (בן-יהודה ואחרים, 2014; Baroody, 2006; Kling & Bay-William, 2014). פתרון תרגילי חישוב מעל עשר הוא אתגר מורכב הן מבחינת תהליכי הפעולה המצריכים גמישות זיכרון עבודה מתמטי והן מבחינת הצורך לגייס תובנות מתמטיות. אם התלמיד לא יצליח להפעיל במהירות תהליכי פירוק וצירוף של הרכבי הכמות בתחום עשר, הוא לא יצליח להתמודד עם תהליכי הפתרון בתחום עשרים. תרגילי הפריטה וההעברה בתחום עשרים מחייבים זיכרון עבודה גמיש,

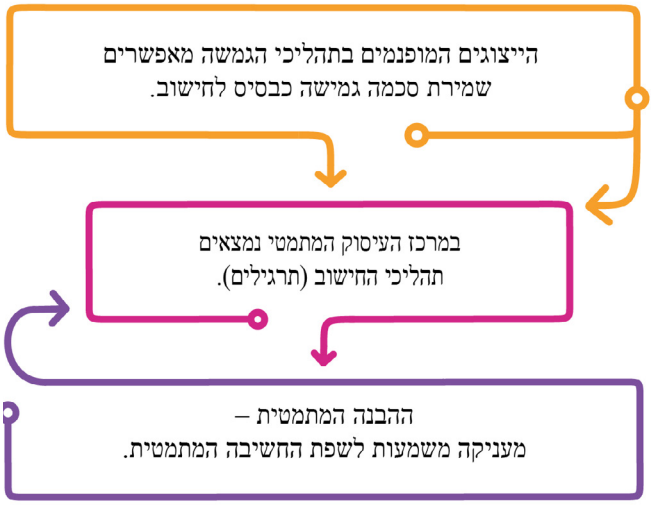
שיאפשר כמה תהליכי פירוק וצירוף בו בזמן. לדוגמה כאשר התלמיד פותר תרגיל עם פריטה באסטרטגיית ההשלמה לעשר, עליו לבצע ארבעה תהליכי פירוק וצירוף, כמעט בו בזמן:



איור 4: ארבעה תהליכי פירוק וצירוף בתרגיל אחד

ההליך החישובי מחייב שימוש גמיש בזיכרון העובדות והבנת הקשרים בין הפעולות. תלמידים מגלים עובדות נגזרות על בסיס העובדות שהם זוכרים וגילוי הקשרים ביניהם (Baroody, 2006). לדוגמה, אסטרטגיית פתרון לעומת תרגילי "תיאומים". לדוגמה: 13-6=, נחשב לתרגיל קשה. לעומתו את התרגיל 6+6=12 קל יותר לזכור. הבנת הקשר בין המספרים והבנת הקשר בין החיבור לחיסור, עשויה לנווט את הילד לפתרון.

מכל האמור לעיל אפשר להפיק מודל המציג את ההשפעה של ייצוגי הכמות על החישוב וההבנה:



איור 5: שלושת מוקדי ההוראה במתמטיקה

סיכום

המחקר הנוכחי ביסס את הטענה כי הצלחה בחשבון קשורה קשר ישיר לבשלות ותקינות תפקודי הליבה התפיסתיים המקבלים ביטוי בהפנמת ייצוגי כמות ובעיקר בגמישותם. הם משפיעים על הרהיטות החישובית ועל ההבנה כאחד.

חוש לכמויות הוא מתנת אל מולדת, המעניקה יתרון לניחנים בה. הם נהנים מתפיסה מהירה וגמישה של כמויות הנובעת מאיכות תפקודי הליבה. מנגנונים אלה משפיעים על התפתחותם החשבונית בלי מאמץ קוגניטיבי נראה לעין. לעומתם תלמידים עם לקויות למידה חייבים להשקיע מאמץ קוגניטיבי והפניית קשב כדי לקלוט כמויות בסיסיות אפילו בתחום ארבע. רוב התלמידים נמצאים בטווח בין המחוננים לתלמידים המתקשים בחשבון.

ניסיון ההוראה המתקנת עם תלמידים עם לקויות למידה מראה כי אפשר לפתח תהליכי למידה ולסייע לתלמידים אלו בהבניה של ייצוגי כמות כתהליכים גמישים וכבסיס לתהליכי פירוק וצירוף הנדרשים בחישוביות. שימוש בכלים ובתהליכי הוראה מותאמים בכיתה הרגילה מעלים את רמת ההצלחה גם של תלמידים ממוצעים בכיתה וגם של תלמידים עם לקויות למידה.

רשימת מקורות

בן-יהודה, מ' ואילני, ב' (2008). **פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך: תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים**. תל-אביב: מכון מופ"ת.

בן-יהודה, מ' ושרוני-יצחק, ו' (2009). **אח"ד מי יודע? אבחון חשבון דידקטי: ערכה לאבחון ואיתור קשיים בחשבון/מתמטיקה**. חולון: יסוד.

בן-יהודה, מ', שרוני, ו' ואלמוג, נ' (2014). פיתוח כלי לבדיקת המהירות והדיוק בחישוב המבוסס על תובנה מספרית בקרב תלמידים בכיתות ג'-ו'. **דפים, 58**, 197-224.

ברוזה, א' ובן-דוד קוליקנט, י' (2017). תהליכי למידה של תלמידים תת-משיגים במתמטיקה בסביבה עשירה בפיגומים ותיווך אינטנסיבי של מורה - חקר מקרה. **מספר חזק 28, 2000**, 14-29.

הניק, א' (2008). מחקרי מוח וחינוך. בתוך פ"ש קליין וי"ב יבלון (עורכים), **ממחקר לעשייה בחינוך לגיל הרך** (עמ' 31-37). ירושלים: האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים.

הניק, א' ורובינשטיין א' (2008). היבטים נוירוקוגניטיביים של דיסקלקוליה התפתחותית. **Medicine: ילדים**, 42-46.

הניק, א', רובינשטיין, א', אשכנזי, ש' ומרק-זיגדון, נ' (2010). היבטים נוירוקוגניטיביים בעיבוד מידע נומרי. **אוריינות ושפה, 3**, 113-130.

כ"ץ, צ' (1978). **הקניית החשבון על פי הגישה ההתפתחותית: מדריך למורה** (מהדורה ניסיונית). תל-אביב: המחבר.

כ"ץ, ש' ודרור, ט' (2014). אמונות מחוללות פעולה – גם במתמטיקה. **שאנן, יט**, 195-219.

לינצ'בסקי, ל' ותובל, ח' (1993). תפקיד המודלים כאמצעי מסייע למתקשים בחשבון: ניתוח מושג השבר. **מגמות, לה**, 96-109.

מרקוביץ, צ' (2000). **חוש למספרים: פעילויות לפיתוח החוש למספרים והחשיבה המתמטית** (מהדורה ניסיונית). חולון: יסוד.

מרק-זיגדון, נ' (2011). דיסקלקוליה התפתחותית: הגדרה, מאפיינים, והשלכות דידקטיות. **מספר חזק 19, 2000**, 10-14.

משרד החינוך. (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: מחבר.

נבו, ד' (1995). בין "דרישת מינימום" ל"רמת הצטיינות": הצעה לסולם ציונים חדש. **הד החינוך, סט**(9), 10-13.

סקמפ, ר' (1991). הבנה רלציונית (Relational) והבנה אינסטרומנטלית (Instrumental) חלק א'. **על"ה, 8**, 24-29.

פישביין, א', תירוש, ד' וברש, א' (1998). ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית. **על"ה, 22**, 12-28.

קדרון, ר' (1991). **ליקויי למידה התפתחותיים: הגדרה, אפיונים וקווי-יסוד לטיפול**. ירושלים: משרד החינוך והתרבות.

שטינברג, ר' (2002). פתרון בעיות מילוליות בגן. **הד הגן, 67**(1), 22-33.

שי, ר' (2009). **אבחון יסודות החשבון: מבט חדש על פעילויות מבחן מינקוביץ'**. חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2009). Numerical distance effect in developmental dyscalculia. *Cognitive Development, 24*(4), 387-400. doi:10.1016/j.cogdev.2009.09.006

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combination: And how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22-31.

Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with basic differences in grade 1. *PNA, 10*(3), 161-190.

Boaler, J., Williams, C., & Confer, A. (2015). Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. *YouCubed*, 1-28.

Common Core State Standards of Mathematics (CCSSM). (2010). *Common core state standards initiative: Preparing America's students for college & career*. Retrieved from http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex, 33*(2), 219-250. doi:10.1016/S0010-9452(08)70002-9

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20*(3), 205-215. doi:10.1016/ j.learninstruc.2009.02.020

Fennel, F., & Rowwan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics, 7*(4), 288-292.

Fias, W., & Fischer, M. H. (2005). Spatial Representation of Numbers. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 43-54). New York: Psychology Press.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37*(1), 4-15.

Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.114-122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates.

Kling, G., & Bay-Williams, J. M. (2014). Assessing basic fact fluency. *Teaching Children Mathematics, 20*(8), 488-497. doi:10.5951/teacchilmath.20.8.0488

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science, 14*(6), 1292-1300. doi:10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x

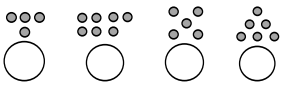
Losq, C. S. (2005). Number concepts and special needs students: The power of ten-frame tiles. *Teaching Children Mathematics, 11*(6), 310-315.

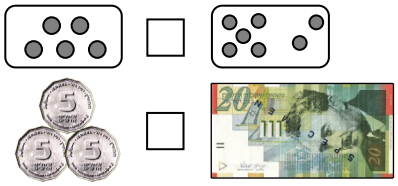
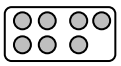
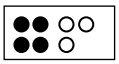
Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100-A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 351-369. doi:10.1007/s10649-011-9351-0

Piazza, M., Facoetti, N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116*(1), 33-41. doi:10.1016/j.cognition.2010.03.012

Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities, 30*(1), 34-46.

נספח 1: דוגמאות מהמבדק – בנושא תפקודי החשבון

1. בדיקת הייצוגים וגמישותם		
תפקודי תפיסה	**המטלה**	**מיומנויות חשיבה**
זיהוי ואומדן כמויות בדידות בתחום 10 וכתיבת המספר	שיום וכתיבת מספר לסכמת ייצוג (מוכרות ולא מוכרות) 	**קשר בין אופני הייצוג:** כמותי, מילולי, גרפי
זיהוי ערך הכסף, כייצוג מספר דו-ספרתי וכתיבת המספר		**הבנת ההמרה:** הכללה והבנת הערך המספרי של הסמל הכתוב

הפקת ייצוג מהזיכרון	צייר עיגולים לפי המספר 8 צייר את העשרות ואת האחדות במספר 17	יישום הבנת ההמרה והפנמת המבנה העשורי
השוואה בין כמויות	השווה שים סימן: =< > 	**שימור כמות** תובנה על פי היסק של הערך המספרי של הכסף
לקראת חישוב: ייצוג גלוי וגמישותו – המעבר לשפת החשבון		
השלמה לשלם כבסיס לתהליכי פירוק וצירוף	כמה חסר עד 10?  כמה חסר עד 20?  כתוב תרגיל __+__=10 __+__= 20	**הבנת שפת החשבון המופשטת:** קשר בין הייצוג החזותי לתרגיל הכתוב
תפקודי תפיסה	**המטלות**	**מיומנויות חשיבה**
ייצוג סדרתי וגמישותו	___, ___, 16, 17, 18, ___,_____,_____ ___, ___, 30, 40, 50, ___,_____,_____	השלמה לאחור וספירת דילוג על פי השוואה והיסק
הקשר בין השלם לחלקיו – מבט גמיש על התבנית	כתוב תרגילים מתאימים לציור 	**תובנות קשרים לוגיים בין תרגילים:** חוק החילוף ועיקרון ההפיכות: חיבור / חיסור

2. חישוביות

סוגי התרגילים	דוגמאות של התרגילים	מיומנויות חישוב
תרגילים מדורגים	**חיבור וחיסור בתחום 10:** 6-3= 3+4= **חיבור וחיסור בתחום 20:** ללא העברה וללא פריטה 13+4= 14-3= עם העברה ועם פריטה 16-7= 8+6=	**קריטריונים להערכה:** **יעילות**: פתרון מנטלי לעומת פתרון באמצעות מנייה **דיוק ומהירות**: מספר תרגילים נכונים בדקה וחצי (בסימון קו) **הערה:** לאחר סימון הקו התלמיד ממשיך לפתור בלי הגבלת זמן
השלמת נעלמים	חיבור וחיסור בתחום 10 ובתחום עשרים 8 - ___= 5 3 +___= 9 14 - ___=7 8 +___=12	תובנה וגמישות תהליכי פתרון
שליפה מהזיכרון של הרכבים ל-10	10 -___=___ ___+___=10 10 -___=___ ___+___=10 10 -___=___ ___+___=10	א. דליית הרכבי הכמות של 10 מהזיכרון ב. דיון על תובנה בארגון התשובות, כגון: 8+2=10 10-2=8
פתרון תרגילים לפי רמזי קשר	9-4= 5+4= 19-5= 14+5=	**תובנה חישובית הספק:** מספר התרגילים הנכונים בדקה וחצי

3. הבנה מתמטית

גילוי קשרים	א. הבנת חוקי חשבון ב. יישום תובנות בפתרון	תובנה והיסק
הבנה שפתית	הבנה כללית של הוראות הבנה ויישום שאלות מילוליות	הקשר בין המוחשי למופשט

נספח 2: טבלת מיפוי קבוצתי למבדק חשבון בתחום עשרים

1. ייצוג כמותי ומשמעות המספר (מנגנוני תפיסה)								
מס'	שם התלמיד	ייצוג מבני				ייצוג סדרתי		
		קלט זיהוי מהיר של כמויות		הפקה הילד מצייר לפי המספר		השלמת סדרות בתחום 20	גמישות להפיכות	ספירת דילוגים
		שיום כמות בדידה עד 10	שיום מספר דו-ספרתי על פי ייצוג כסף	תחום 10	תחום 20	השלמת סדרה בספירה קדימה	השלמת סדרות בספירה לאחור	השלמת סדרה בספירת דילוגים

לקראת תהליכי חישוב: גמישות הייצוג המבני			
מס'	שם התלמיד	הקשר בין דגם ייצוג מבני לתרגילים כתובים: כהשלמת החסר כמציאת 4 תרגילים לתבנית	
		השלמת עיגולים לכמות 10 וכתיבת תרגיל	השלמת ציור לכמות וכתיבת תרגיל 20	תובנת הקשר בין השלם לחלקיו: 4 תרגילים לתבנית

2. חישוב								
א. רהיטות חישוב								
מס'	שם	תחום 10		תחום 20			ניקוד רהיטות מספר תרגילים נכונים בדקה וחצי	הערות העתק טעויות ציין האם נעזר במנייה
		חיבור	חיסור	חיבור ללא העברה	חיבור עם העברה	חיסור ללא פריטה	חיסור עם פריטה	

II. קריטריונים להערכת רהיטות חישובית		
דיוק, הספק, יעילות סמן ✓ אם פתר הכול נכון בזמן וללא מנייה.	**דיוק חלקי:**	כתוב את מספר התרגילים הנכונים.
	הספק:	ציין כמה תרגילים הספיק לפתור בדקה וחצי.
	יעילות:	ציין אם השתמש במנייה לחיבור או לחיסור?

ב. תובנה חישובית								
מס'	שם	השלמת נעלם		השלמה ל-10		תובנה חישובית לפי רמזי קשר		ניקוד רהיטות	הערות
		חיבור	חיסור	חיבור	חיסור	חיבור	חיסור	כתוב את מספר התרגילים הנכונים בדקה וחצי	העתק טעויות. ציין האם נעזר במנייה

3. הבנה מתמטית							
מס'	שם	הבנת שאלות מילוליות				הבנת הוראות (התרשמות כללית)	כתיבה חשבונית (התרשמות כללית)
		נתונים גלויים	השוואת כמויות (חישוב בכמה יותר?)	שאלה עם נתון סמוי (זיכרון עבודה)	חישוב עודף	תאר: האם קורא ומבין הוראות בכתב? אם התקשה בקריאה, קרא בפניו . תאר את הבנתו בעל פה.	תאר אם עלו קשיים, כגון התארגנות על הדף, סדר, כתיבה נכונה. האם הופיעו שיכולי ספרות או כתב ראי?

השפעה של הוראה קמשלבת בין ידע, מיומנויות ומבנים-אלגבריים על יכולת פתרון משוואות

רוית פלדמן
רונית בסן צינצינטוס



רוית פלדמן
מרצה במכללת סמינר הקיבוצים ורכזת תחום מתמטיקה בחטיבת הביניים אליאנס תל-אביב. בעלת תואר שני בחינוך מתמטי. ותק רב בהגשה לבגרות ברמות הלימוד השונות.



ד"ר רונית בסן צינצינטוס
ראש החוג למתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים. מרצה בכירה במכללה, בעלת ניסיון עשיר בהדרכת מורים ובפיתוח חשיבה מתמטית. תחומי מחקר עיקריים: התאמת מודלים מתמטיים לפתרון בעיות, דרכי חשיבה ותפיסות שגויות במתמטיקה של תלמידים ומתכשרים להוראה, והתפתחות מקצועית של מורים.

תקציר

תלמידים מתקשים בבחירת פעולות אלגבריות לפתרון בעיות וחסרה להם מיומנות של הסתכלות לוגית על ביטויים אלגבריים.

הוך ודרייפוס הציגו פתרון של תלמיד שפעל לפי כללי האלגוריתמים שלמד אך לא הבחין בהפרש שני ביטויים זהים, כך שמבלי לבצע אף חישוב, פתרון המשוואה הוא הקבוצה הריקה. הוא חסר מיומנות המכונה "חוש למבנה".

מבנה אלגברי הוא מבנה מתמטי המורכב מקבוצה עם פעולה או פעולות, המקיימות אקסיומות מסוימות. המחקר עוסק בהשפעת ההוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות ומבנים אלגבריים על הגמישות המחשבתית, ההבנה, יעילות פתרון התלמידים והישגיהם. מטרתו לבחון השפעת ההוראה על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות. שאלות המחקר בדקו האם ההוראה תגרום לשיפור ביכולת זיהוי מבנים אלגבריים ולשיפור בהישגי תלמידים בפתרון משוואות.

הממצאים מראים כי לפני ההוראה כשליש מהתלמידים פתרו בשימוש בחוש למבנה. בשאר הפתרונות פנו לפתרון מסורבל או לא פתרו כלל. נראה שקיימת מוגבלות בהפעלת שיקול דעת לפני שתלמידים ניגשים לפתור והם אינם בוחנים דרכים אחרות לפתרון. לאחר ההוראה, אחוז גבוה מהתלמידים השתמשו בחוש למבנה ואחוז ההצלחה עלה. טרם ההוראה נמצא כי יש קשר בין מידת ההצלחה בפתרון התרגיל ובין שימוש או אי שימוש בחוש למבנה. מכאן שיש לבנות את תוכנית הלימודים באיזון נכון ולשלב בין חיזוק המיומנות והשליטה של התלמידים בחוקים הפורמליים ובין פיתוח טכניקות ומיומנות חשיבה לוגית. הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים, מביאה לשיפור בפנייה לשימוש בחוש למבנה ובהישגי התלמידים ומכאן תרומתה.

מילות מפתח: פתרון משוואות; מבנים-אלגבריים; חוש למבנה.

מבוא

תלמידים ניגשים לפתרון תרגילים באמצעות פרוצדורות אריתמטיות ואלגבריות שלמדו. פתרון תוך שימוש בפרוצדורות לעיתים מסורבל ומאריך את משך זמן הפתרון. הוא גם יכול לגרום לריבוי טעויות חישוב ולקושי בהגעה לפתרון כאשר נדרשת יכולת חשיבה והבנה מלבד יכולת אלגוריתמית פרוצדורלית. ישנם תרגילים שבהם תשומת לב למבנהו המיוחד של התרגיל, תאפשר פתרון קל, מהיר ויעיל יותר. מיומנות זו של התבוננות וניצול מבנה התרגיל לפתרון, נקראת בספרות המקצועית "חוש למבנה" (Linchevski & Livneh, 1999).

סקירה ספרותית

הרעיון למחקר עלה בשל משוואה מתוך בחינת בגרות במתמטיקה, כאשר תלמיד שגה בהעתקה וקיבל את המשוואה הזו: $1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{132}$ (Hoch & Dreyfus, 2004). התלמיד פתר על פי האלגוריתמים שלמד: פתח סוגריים, כפל במכנה משותף וכינס אברים דומים. למעט חוסר התמקדות בתחום ההצבה של המשוואה, התלמיד לא טעה. דרך הפתרון שלו העידה על שליטה סבירה בטכניקה אלגברית. אולם חסרה מיומנות אחרת המכונה "חוש למבנה". הוא לא הבחין בהפרשם של שני ביטויים זהים.

מיומנות זו מתבטאת באלגברה תיכונית ביכולת לטפל בביטוי אלגברי כיחידה, לזהות שקילות למבנים מוכרים ולבדוק אילו פעולות כדאי לבצע כדי לנצל את המבנה. מיומנויות אלה היררכיות ושליטה ביכולת מצריכה שליטה ביכולות קודמות. כבר בלימודי האריתמטיקה יש לחשוף תלמידים למבנה התרגיל כדי שיפתחו חוש למבנה (Linchevski & Livneh, 1999). הוך ודרייפוס (Hoch & Dreyfus, 2004) מצאו כי אחוז ההצלחה בקרב הפותרים עם שימוש בחוש למבנה היה גבוה במידה ניכרת (100%) מאלו שלא השתמשו בו (29%) ופתרונותיהם הכילו טעויות אלגבריות לא מעטות. ייתכן שתלמידים ניגשים לתרגיל מצוידים במכלול אלגוריתמים שלמדו ומבצעים אותם בין שהם מתאימים ובין אם לאו, ואילו מהלך הפתרון הנשען על שימוש בחוש למבנה מזמן יכולות מוגבלות מאוד לביצוע טעויות אלגבריות. לטענתם, יש לשנות את הרגלי תלמידנו ולעסוק ביתר הדגשה ביכולות שימוש במבנים אלגבריים דומים לצורך פיתוח חוש למבנה באלגברה.

חוש למבנה באלגברה תיכונית מתבטא כבר מגיל צעיר בלימודי האריתמטיקה בבית הספר היסודי ונקרא בספרות המקצועית "חוש למספרים". כלומר חוש למספרים מתבטא ביכולת להבין את הקשרים בין המספרים לפעולות, להשתמש שימוש גמיש במספרים, להשתמש באומדן ולשפוט סדרי גודל של מספרים, לשפוט היגיון של תשובות, לעבור בין הצגות שונות של מספרים, לקשר את התשובות שמתקבלות למציאות, וכך למעשה נשתמש במספרים בחוכמה (Markovits, Hershkowitz, & Bruckheimer, 1989).

חוש למספרים איננו מתפתח בטבעיות אצל מרבית התלמידים, וכדי לשפרו יש לתת להם במהלך כל הלימוד בבית הספר משימות מגוונות שבהן החישוב הנדרש מועט או לא קיים בכלל. תוכנית הלימודים במתמטיקה המיועדת לפתח בתלמידים את החוש למספרים צריכה לפתח בדרכים גמישות ויצירתיות הן ידע לצורות שונות של מספרים והן מערכים לשימוש בידע זה (Resnick, Lesgold, & Bill, 1990).

אי אפשר למדוד את הישגי התלמידים באמצעות יכולתם לפתור תרגילים מבודדים, אלא על פי יכולתם להחליט איזו פעולה לנקוט במצב נתון, באילו מספרים להשתמש והערכתם בדבר היגיון התוצאה. מכאן שמתאים לעשות שינויים כבר בבסיס הוראת החשבון (Burns, 2000). טענה דומה מעלים הסוברים כי למרות היותו של פיתוח חוש למספרים חיוני לכישורי החיים וחשיבותו לחיי היומיום ולפיתוח חשיבה מתמטית, תוכנית הלימודים בבית הספר היסודי אינה תואמת ומתמקדת בפרוצדורות ואלגוריתמים חישוביים (Markovits & Pang, 2007). "חוש למספרים" לא התפתח במפורש ובמידה ניכרת. עם זה נמצא כי מספר התשובות הנכונות כמעט הוכפל לאחר פעילויות מתאימות, ולכן רצוי שפעילויות כאלו ישולבו בתוכנית הלימודים לפני כיתות ו'-ז' (Markovits et al., 1989). הוראה נכונה צריכה לפתח תובנה מספרית והבנת קשרים בין פעולות, להישען על הדרך שבה ילדים חושבים, להתבסס יותר על אומדן וחישוב בעל פה ופחות על חישובי נייר פורמליים ולעודד ילדים להמציא דרכים לפתרון משלהם (Burns, 2000).

קשיי תלמידים בפתרון משוואות באלגברה

ההתנהגות המתמטית של התלמיד נוגעת לשלושה היבטים בסיסיים: **הפורמלי** העוסק באקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות; **האלגוריתמי** העוסק בטכניקות פתרון ובאסטרטגיות סטנדרטיות; **האינטואיטיבי** העוסק במידת הסובייקטיביות שבה היחיד מקבל במישרין מושג, משפט או פתרון. לפעמים ישנה התאמה מוחלטת בין שלושת המרכיבים. אך לעיתים בתהליכי למידה, הבנה ופתרון יכולים להיווצר קונפליקטים שמביאים לידי תפיסות מוטעות וטעויות שיטתיות. כדי להתגבר על הטעויות, על התלמיד להבין את הבסיס הפורמלי המצדיק את האלגוריתם. לימוד אלגוריתמים בלא הבנה ברורה של ההצדקה ושל המסגרת הפורמלית מוביל לשימוש מוטעה (Fischbein, 1994). קשיים בהפעלת טכניקה אלגברית היא תופעה שכיחה. אחת הסיבות לכך היא שהתכנים נלמדים בעיקר למידה טכנית ולא נשענים על הבנה (Hoch & Dreyfus, 2004; Booth, 1981). תלמידים השתמשו בטכניקה של פתרון חישובי גם כשכלל לא היה צורך. ייתכן שהם מעדיפים את הפתרון החישובי שהוא בטוח יותר מבחינתם וכך הם נכנסים לרוטינה של עבודה טכנית בפתרון המשוואות (Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1990). בדרך כלל תלמידים מצליחים לפתור משוואות ואי שוויונות מסוימים ממעלה ראשונה ושנייה, אבל התהליכים שהם מבצעים חסרי משמעות בעבורם. הם מתקשים בפתרון משוואות ואי שוויונות שאי אפשר לפתור בגישה אנליטית (סוזן, 2000).

בבית ספר היסודי לא מושם דגש בראייה מבנית של ביטויים חשבוניים, ולכן התלמידים מתקשים להתמודד עימם בלימודי האלגברה. אי הדגשת המבניות היא למשל מקור הקושי בטיפול בביטוי $a+b$ כאובייקט באלגברה (Booth, 1989). יש שתי תפיסות של ראייה מבנית של ביטויים מתמטיים. האחת, תפיסה ראשונית, תהליכית, סדרתית ויורדת לפרטים שנוגעת לביטוי המתקבל מתוצאה של סדרת פעולות, והשנייה, תפיסה מבנית, מורכבת יותר, הרואה בביטוי אובייקט שלם מבלי לכוון לאיברים המרכיבים אותו. חוסר היכולת של התלמידים להבין את דואליות התהליך-המבנה של סמלים אלגבריים הוא אחד ממקורות הקושי שלהם בלימודי האלגברה (Sfard, 1991). תלמידים רבים רואים בביטוי אלגברי ביטוי שאינו שלם ונוטים להוסיף "=0" ואז לפשט ולפתור את המשוואה שנוצרה. נמצא כי תלמידים נוטים לראות בביטויים אלגבריים משוואות ולעשות בהם פעולות המותרות רק למשוואות (Kieran, 1992).

תלמידים נוטים לפנות לרעיון הראשון שנראה להם מתאים לפתרון, בלי תכנון וניתוח מעמיק של מאפייני הבעיה ונתוניה. תופעה זו של תכנון נמהר עקב היעדרותה של בקרה עצמית ראשונית אצל התלמיד עלולה להתרחש במגוון תחומים הדורשים פתרון בעיות, אפילו יומיומיות, כמו בעיות במתמטיקה (Schoenfeld, 1992). הנטייה הטבעית שלנו כבני אדם בקבלת החלטות היא לפנות למוכר לנו מהעבר, גם כשהבחירה איננה מתאימה בהכרח (Ginat, 2007). תגובה אינטואיטיבית זו מבוססת על מנגנון שבו כאשר אנו נתקלים במצב מסוים המחייב דיון, מתבצעת בדיקה אם מצב זה דומה לאחד המצבים המוכרים לנו מהעבר, והתגובה היא לפי הצורך. ככל שניסיונו של האדם בתחום מסוים עשיר יותר, כך האינטואיציה שלו בתחום תהיה טובה יותר (וינר, 2000).

גישות בהוראת המתמטיקה

בתחום החינוך המתמטי יש התלבטות מתמדת בין שתי גישות המאפיינות למידה בכיתה. האחת מדגישה את חשיבות הקניית התכנים המתמטיים העיקריים, בהדגשת הידע הפרוצדורלי (למשל הפעלת פעולות חשבון והמניפולציות האלגבריות). השנייה מדגישה את פיתוח תהליכי החשיבה הדרושים להתמודדות עם בעיות מתמטיות ובניית מודלים מתמטיים לסיטואציות (פרידלנדר, 2008).

מורים רבים מלמדים מהר מדי לצורך הספק גבוה. קיימת הבחנה בין שני סוגים של הבנה: Relational Understanding – ידיעה של מה לעשות ומדוע; Instrumental Understanding – ידיעה כללית, בלי הבנת הסיבות ובלי יכולת יישום. בשל עומס תוכנית הלימודים והשפעת הבחינות, מורים רבים ואפילו המנוסים, ממשיכים ללמד מתמטיקה בעיקר על פי הבנה אינסטרומנטלית (Skemp, 1976). בדומה לכך, מורים ותלמידים מאמינים שאפשר להצליח במתמטיקה באמצעות שינון חוקים ונוסחאות ובאמצעות תרגול טכני רב (Schoenfeld, 1989). על המורים להימנע מלהציג לפני התלמידים פתרון מלא וישיר. הבנה מהותית יותר תושג אם יוצגו גישושים ראשוניים וחלקיים בלבד ודרכים להתמודד עימם. מומלץ לדון במליאת הכיתה ורצוי לפתור בעיות בקבוצות קטנות כשהמורה משמש נווט בלבד ומפקח באמצעות שאלות מכוונות (Schoenfeld, 1987). תוכנית הלימודים שמה דגש בתוצרים ובתהליכי חשיבה ומדגישה כי המתמטיקה אינה רק מקצוע נוקשה בעל חוקים חד-משמעיים, אלא מקצוע בעל היבט רחב שבו אפשר להתמודד עם משימות לא שגרתיות באמצעות שילוב בין חשיבה אלגוריתמית ובין חשיבה מסתעפת ויצירתית (חכים וגזית, 2011).

במחקר הנוכחי המתמקד בפתרון המשוואות, נעשה שימוש בפירוק לגורמים באמצעות הוצאת גורם משותף, נוסחאות הכפל המקוצר ובפירוק לגורמים של טרינום ריבועי, נושאים שנלמדו בהרחבה בלימודי המתמטיקה בחטיבת הביניים.

מטרת המחקר

לבחון את השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות.

שאלות המחקר

האם הוראה המשלבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות?

האם הוראה המשלבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור בהישגי התלמידים בפתרון משוואות?

השיטה

המחקר שילב בין מחקר כמותני למחקר איכותני ואוכלוסיית המחקר כללה קבוצת לימוד בת 23 תלמידים בכיתה י', הלומדים מתמטיקה ברמת 4 יחידות לימוד.

כלי המחקר

שאלון מקדים: בשאלון שש מטלות. שאלות 1, 4, 5 הן משוואות שאפשר לפתור אותן בשתי דרכים: בטכניקה אלגברית ובחוש למבנה. דרך הפתרון תהיה יעילה ומהירה כאשר ישתמשו בחוש למבנה, לדוגמה שאלה 4: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$. שאלה 2 אינה דורשת פתרון משוואה, אך דורשת זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי להגיע לתשובה נכונה. שאלה 3 היא משוואה שידע התלמידים מאפשר לפתור אותה רק באמצעות טכניקה אלגברית של פתרון משוואה שגרתית והיא איננה דורשת חוש למבנה: $\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4}{x^2+2x}$. שאלה 6: $\left(\frac{x^2+12}{x}\right)^2-15\left(x+\frac{12}{x}\right)+56=0$ היא משוואה וכדי לפתור אותה יש לבצע מניפולציה אלגברית ולזהות את המבנה, אחרת יהיה קשה לפתור אותה (ראו נספח א).

יחידת הוראה: מנתה שבעה שיעורים. כדי לפתח אצל התלמידים את החוש למבנה מעבר להתבוננות הטכנית ולשפר את גמישות מחשבתם והישגיהם. בתחילה המטרה הייתה לפתח אסטרטגיה לעבודה עם מספרים לצורך שיפור חוש למספרים. לאחר מכן הועברו פעילויות לפיתוח גמישות הבחירה ושימוש באלגוריתם יעיל בפתרון משוואות. בהמשך ניתנו משימות לפיתוח הבנה איכותית של ביטויים אלגבריים באמצעות שימוש בלוגיקה מתוך ראייה כוללת של הנושא. כמו כן הושם דגש בפיתוח היכולת לעבור בין הצגות שונות של ביטויים שקולים, ובשלב האחרון הושם דגש בביסוס והעמקת ההבנה באמצעות שיעורים חווייתיים (ראו נספח ב).

שאלון מסכם: דומה לשאלון המקדים. הוא ניתן לאחר ההוראה כדי לבדוק שינוי ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות ובהישגי התלמידים.

ראיונות: נעשה שימוש בריאיון חצי מובנה. על סמך דרכי הפתרון שהציגו בשאלון המסכם נבחרו שמונה תלמידים, ארבעה שפתרונם נשען ברובו על חוש למבנה וארבעה שהמעיטו להשתמש בחוש למבנה. המטרה הייתה לזהות את תהליך החשיבה של התלמידים ולברר האם השתמשו בחוש למבנה ואם לא, להוביל אותם בעזרת שאלות מנחות לדרכי פתרון יעילות יותר. מטרה נוספת, לברר עם התלמידים האם יחידת ההוראה השפיעה על גמישות מחשבתם ועל דרך פתרון התרגילים.

ממצאים

כאמור, מטרת המחקר הייתה לבחון את השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות. תוצאות המחקר הנוכחי יוצגו בארבעה חלקים: ממצאים מניתוח השאלון המקדים, ממצאים איכותניים מהליך העברת יחידת ההוראה ומהראיונות, ממצאים מניתוח השאלון המסכם והשוואה בין השאלונים.

ממצאים טרם ההוראה

טבלה מס' 1 מציגה את שיעורי ההצלחה בפתרון השאלות ושיעורי המשתמשים בחוש למבנה. נראה כי כאשר נעשה שימוש בחוש למבנה, כך עולה שיעור ההצלחה בפתרון השאלה. בשאלות 1, 3,

5א אין כלל שימוש בחוש למבנה ושיעורי ההצלחה נמוכים מ-40%. בשאלות 2א, 2ג, 2ד, 5ב ו-6 – רק מי שהשתמש בחוש למבנה הצליח לפתור את התרגיל נכון.

טבלה מס' 1: אחוזי ההצלחה ואחוזי המשתמשים בחוש למבנה
(N=23)

שאלה / אחוז	1	2א	2ב	2ג	2ד	3	4	5א	5ב	6
הצלחה	39	96	78	44	13	39	44	35	13	13
פנייה לחוש למבנה	0	96	91	79	13		22	0	13	22
הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה	ללא חוש למבנה	100	86	56	100	ללא חוש למבנה	100	ללא חוש למבנה	100	61
הצלחה בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה	39	0	0	0	0	39	28	35	0	0

טבלה מס' 2 מציגה את התפלגות דרכי הפתרון עבור השאלות טרם ההוראה. שאלות 1, 4, 5 הן משוואות שאפשר לפתור בשתי דרכים, אך תלמיד שישתמש בחוש למבנה – דרך הפתרון תהיה יעילה ומהירה יותר בעבורו, ולכן דרכי הפתרון של התלמידים בקטגוריה זו נותחו יחדיו. בשאלות אלו היה אפשר לפתור באמצעות זיהוי מבנה וגם ללא זיהוי המבנה. בממוצע רק כ-7% השתמשו בחוש למבנה, כ-30% פתרו נכונה ללא שימוש בחוש למבנה וכ-50% ניסו לפתור ללא שימוש בחוש למבנה בדרך נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון.

בשאלה 2 שאינה דורשת פתרון משוואה, אך דורשת זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי לחשב באמצעותו ביטוי אחר, בממוצע כ-60% מהנבדקים פתרו נכונה עם שימוש בחוש למבנה, כאשר אחוז ההצלחה במגמת ירידה חדה ככל שמתקדמים בסעיפים. כמו כן שיעור הפתרון השגוי ללא זיהוי חוש למבנה במגמה הפוכה ועלה בהדרגה ככל שמתקדמים הסעיפים והגיע לשיא של כ-50% בסעיף ד', שבו כ-40% לא פתרו כלל.

בשאלה 3 אי אפשר לפתור באמצעות זיהוי מבנה. נמצא שכ-50% מהתלמידים פתרו בדרך נכונה, אך טעו בשלבי התהליך בעוד שאחוזי ההצלחה עמדו על פחות מ-40%.

בשאלה 6 המורכבת ביותר, שאותה אפשר לפתור אך ורק באמצעות זיהוי מבנה אלגברי, כ-80% מהתלמידים טעו בטכניקה האלגברית לחלוטין או לא פתרו כלל.

טבלה מס' 2: שכיחות (באחוזים) דרכי פתרון בשאלון טרום ההוראה
(N=23)

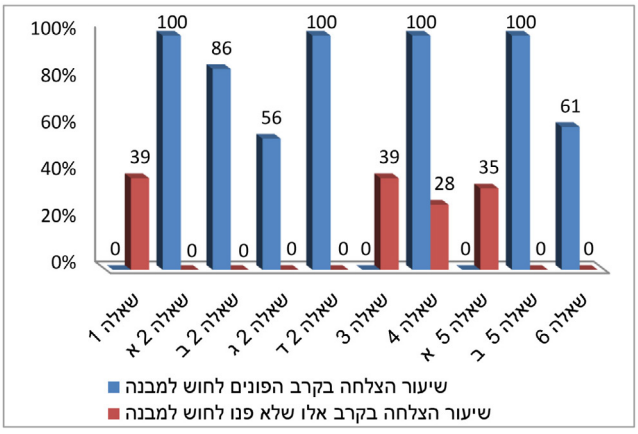
שאלה / אחוז	אפשר לפתור עם שימוש בחוש למבנה ובלעדיו			לא נדרש פתרון משוואה, אלא זיהוי מבנה אלגברי נתון				אי אפשר לפתור בשימוש בחוש למבנה	אי אפשר לפתור בשימוש בחוש למבנה
פתרון/שאלה	1	4	5	2א	2ב	2ג	2ד	3	6
נכון עם שימוש בחוש למבנה	0	22	0	96	78	44	13	-	13
עם שימוש בחוש למבנה + טעות	0	0	0	0	13	35	0	-	8.5
נכון ללא שימוש בחוש למבנה	39	22	35	-	-	-	-	39	-
טכניקה אלגברית נכונה + טעות	52	48	57	0	0	0	0	52	-
טכניקה אלגברית שגויה	9	4	9	4	9	17	48	9	70
לא פתר	0	4	0	0	0	4	39	0	8.5

בשאלה 5 סעיף א' בדק האם התלמידים השתמשו בחוש למבנה. סעיף ב' בדק האם תלמידים שבסעיף א' לא פתרו באמצעות חוש למבנה יוכלו, לאחר הכוונה, לנמק כיצד אפשר לבצע מניפולציה אלגברית נדרשת כדי להגיע למשוואה השקולה. נמצא כי רק 13% הצליחו, לאחר ההכוונה, לזהות את המניפולציה האלגברית הנדרשת.

גרף מס' 1 ממחיש ויזואלית את הפערים הניכרים בשיעורי ההצלחה בין המשתמשים בחוש למבנה לאלו שלא משתמשים בו.

את שאלה 3 שלא היה אפשר לפתור באמצעות חוש למבנה, הצליחו לפתור 39% אחוזים. בשאלות שהיה אפשר לפתור גם באמצעות חוש למבנה וגם בלעדיו, אחוזי הצלחה לאלו שלא השתמשו בחוש למבנה, היו נמוכים מ-40%.

בשאלות אחרות שהיה אפשר לפתור רק באמצעות חוש למבנה, אחוזי ההצלחה של המשתמשים בחוש למבנה היו גבוהים מאוד וכמה מהם הגיעו ל-100% בעוד שמי שלא השתמש בחוש למבנה – לא הצליח כלל.



גרף מס' 1: אחוזי ההצלחה של תלמידים שפתרו בשימוש בחוש למבנה לעומת אלו שלא פתרו באמצעותו (N=23)

ממצאים מתהליך יחידת ההוראה

נתאר את הממצאים כפי שנצפו במהלך העברת יחידת ההוראה.

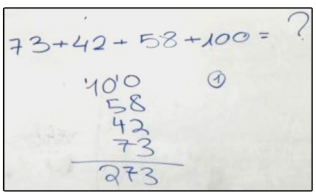
חוש למספרים

שיעור הפתיחה עסק במספרים טבעיים ורציונליים לצורך פיתוח חוש למספרים כדי להעלות את מודעות התלמידים ששימוש בחוש למספרים מאפשר פתרון יעיל ומהיר. לדוגמה:

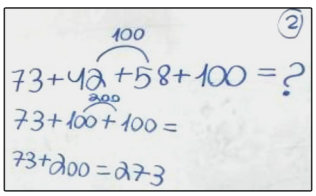
1. $73+42+58+100=?$
2. $3\frac{3}{4}+7.1-5.24+0.25+1\frac{9}{10}=?$

מניתוח תשובות התלמידים והערותיהם בשיעור נראה כי הם לא הורגלו למשימות כאלה בשלב זה של לימודיהם. התרגילים כללו מספרים בלבד ללא שימוש באלגברה, ולכן נשמעו אמירות כגון "אין משוואה?", "את מבקשת רק לפתור?", "יש פה רק מספרים?". רוב התלמידים פתרו באמצעות חיבור במאונך לפי סדר הופעת המספרים בתרגיל. בתרגילים עם שברים, רבים חששו לנסות לפתור וביקשו להיעזר במחשבון. כשלא קיבלו אישור לשימוש במחשבון, נשמעו אמירות כי "הם לא מסתדרים עם שברים", "אי אפשר בלי מחשבון". אסטרטגיית פתרון נפוצה הייתה להעביר את כל השברים בתרגיל לשברים פשוטים או עשרוניים ולחשב על פי סדר הופעתם. טענה חוזרת שנאמרה היא כי שיטת ההוראה גורמת להם לפתור על פי הסדר, כי כך המורים תמיד מבקשים מהם.

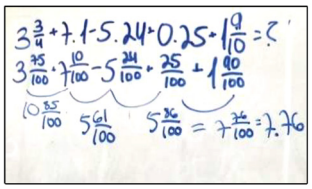
במהלך השיעור תלמידים הציגו פתרונות שונים זה מזה במליאה, ובדיון נבחנו ההבדלים ביניהם. נשמעו כל מיני אמירות, בהן אמירה זו: "לא תמיד רואים". טענה שחזרה על עצמה ממספר תלמידים: "אומנם הדרך השנייה (שימוש בחוש למספרים) יותר קלה לחישוב, אך אני עדיין מעדיף לפתור לפי הסדר". לקראת סוף השיעור כבר היה אפשר לזהות שימוש בחוש למספרים, כאשר את התרגיל האחרון מרבית התלמידים פתרו בשימוש בחוש זה. לסיום השיעור, התלמידים נחשפו למחקרים בנושא חוש למספרים, הוסבר להם מהו חוש למספרים ושהוא אינו מתפתח בטבעיות, ולכן חשוב לפתחו. נשמעו אמירות כגון "שיעור זה היה שונה", "מפתח הבנה וחשיבה מתמטית".



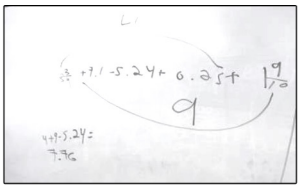
תמונה 1:
פתרון טכני ללא שימוש בחוש למספרים



תמונה 2:
פתרון באמצעות חוש למספרים



תמונה 3:
פתרון טכני ללא שימוש בחוש למספרים



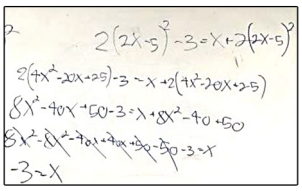
תמונה 4:
פתרון באמצעות חוש למספרים

גמישות לשימוש במספר אלגוריתמים בפתרון משוואות

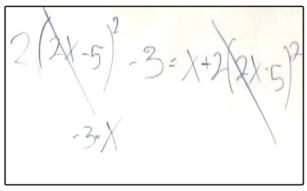
התקיימו מספר שיעורים בנושא כדי לפתח גמישות שתאפשר לבחור מבין מספר אלגוריתמים את היעיל ביותר לפתרון המשוואות. באחד השיעורים נחלקו התלמידים לקבוצות, כל קבוצה קיבלה משוואה אחרת והתבקשה לפתור בשתי דרכים לפחות, לפרט את היתרונות והחסרונות של כל דרך ולהציג את המסקנות לפני הכיתה. המורה עברה בין הקבוצות נמנעה מלהתערב, אך עודדה את התלמידים להגיע לפתרונות בעצמם. ואכן, התלמידים שיתפו פעולה היטב.

דוגמה למשוואות שהוצגו: $2(x-4)^2-18=0$ $\frac{x-3}{2(x-3)}=7$.

מניתוח תשובות התלמידים נראה שהאסטרטגיה השכיחה לפתרון הייתה בדרך טכנית: בפתיחת סוגריים, כינוס איברים דומים ופתרון המשוואה. מרבית הקבוצות התקשו למצוא דרך פתרון אחרת. בעת דיון במליאה, הצעותיהם של שאר התלמידים והשאלות המנחות של המורה גרמו להם לחפש דרכים אחרות לפתרון. בסופו של דבר, לכל משוואה הוצגו שתי דרכים לפתרון: באמצעות חוש למבנה וללא שימוש בחוש למבנה. כמו כן נמצא כי התלמידים התקשו לראות במבנה האלגברי איבר אחד. לדוגמה, הם התקשו לבצע פעולות על הביטוי $x-4$ כעל איבר אחד. הוצגו יתרונות וחסרונות של כל דרך. הדעה הרווחת הייתה שהדרך ה"טכנית" (ללא שימוש בחוש למבנה) היא הבטוחה יותר ולכן מבחינתם גם הדרך הקלה יותר. הדיון נסב על יעילות הפתרון ועל חישובים מיותרים שלעיתים גורמים לטעויות. נאמרו טענות כגון "אבל ככה לימדתם אותנו...", "לא תמיד אפשר לשים לב...", "אמרו לנו כשיש שברים צריך לחפש מכנה משותף...", "אבל לא בכל התרגילים זה מצטמצם יפה, אז צריך לדעת דרך שעובדת תמיד...", וכן הדיון עסק במודעות למתן תשומת לב לתרגיל לפני שניגשים לפתור. לא תמיד יש דרך יעילה יותר מהדרך הטכנית, אבל התבוננות בתרגיל לפני הפתרון לעיתים חוסכת עבודה ומונעת חישובים מיותרים שלעיתים גורמים לטעויות בחישוב.



תמונה 5:
פתרון משוואה ללא שימוש בחוש למבנה



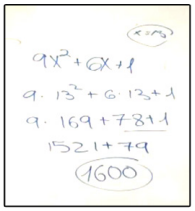
תמונה 6:
פתרון משוואה עם שימוש בחוש למבנה

במצא אחר מרבית התלמידים חשבו שהמשוואות $x^2=t$ ו- $x=\sqrt{t}$ שקולות. לדוגמה, פתרון המשוואה $(x-4)^2=9$ הוצג כך: $x-4=3\rightarrow x=7$ ואף תלמיד לא תהה לגבי הפתרון הנוסף.

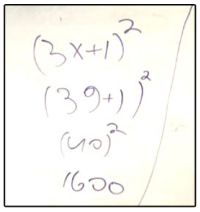
היכולת לעבור בין הצגות מגוונות של ביטויים שקולים

כדי לפתח את המיומנות לעבור בין הצגות אלגבריות למיניהן על פי יעילות המיטבית בדרך הפתרון, פותחו שני מערכי שיעור. מניתוח מערכי השיעורים ותשובות התלמידים עולה כי התלמידים התקשו מאוד במעבר בין שתי הצגות שונות זו מזו לאותו הביטוי במידה שלא ניתנה הוראה מפורשת. לדוגמה, תלמידים התבקשו לחשב את ערך הביטוי $9x^2+6x+1$ עבור $x=13$. האסטרטגיה הנפוצה הייתה הצבת $x=13$ וחישוב לפי סדר ההופעה. תלמידים רבים שגו בחישוב הביטוי. תלמיד אחד בלבד נעזר בנוסחת כפל מקוצר של דו-איבר בריבוע. התלמידים טענו שבשל האיסור בשימוש במחשבון, החישוב

ארוך ומתיש. טענה חוזרת שנשמעה מפי התלמידים כי לא ניתנה הוראה בתרגיל להשתמש בנוסחת הכפל המקוצר: "אם היית מבקשת מאיתנו להשתמש בנוסחת הכפל המקוצר, היינו מצליחים".



תמונה 7:
הצגה לא יעילה של ביטוי אלגברי



תמונה 8:
הצגה יעילה של ביטוי אלגברי
כפל מקוצר של דו איבר בריבוע

נוסף על כך, לא רק שהתלמידים לא הבחינו במבנים זהים, הם כלל לא הבינו את המושג "ביטוי שקול".

לדוגמה בתרגיל שבו נדרש למצוא את הביטוי השקול לביטוי $\frac{x^2+4+2x^2-2y^2-(x^2+4)}{3x+3y}$, התלמידים לא הבינו כלל את המטלה ולכן התנהל דיון מהו המושג ביטוי שקול. לאחר מכן האסטרטגיה הנפוצה ביותר הייתה פתיחת סוגריים ורובם לא הבחינו שישנם ביטויים זהים. לעומת זאת לאחר שהבחינו במבנה הזהה וגילו שההפרש בין שני הביטויים הזהים הוא אפס, לא נצפה קושי בפירוק לגורמים על פי נוסחת הכפל המקוצר להפרש ריבועים. לעומת תרגילים אחרים שבהם נוסחת הכפל המקוצר הייתה מורכבת מאיברים שבהם המעריך אינו מהמעלה השנייה, כמו $\frac{2x-y+x^3+4-2x+y}{x^6-16}$ שבו מרבית התלמידים לא הצליחו ליישם את הנוסחה להפרש ריבועים. קושי רב נצפה בשאלות כשנתבקשו למצוא את ערכו של ביטוי מבלי לחשב את ערכי הפרמטרים שמהם הוא מורכב. כמו בשאלה זו, נתון: $a-b=4$, $ab=96$. מבלי לחשב את a ו-b מצא את ערך הביטוי a^2+b^2. אף תלמיד לא הצליח לפתור. מרביתם פתרו מערכת משוואות ומצאו את ערכי הפרמטרים. כאשר נתבקשו להסביר, כמה מהם ענו כי לא שמו לב. רבים טענו כי לא ידעו כיצד לחשב ללא מציאת הפרמטרים a ו-b, ורבים מהם ויתרו על המשימה.

ממצא חשוב אחר היה כי תלמידים רבים ביצעו פעולות שמותרות רק על משוואות, גם על ביטויים אלגבריים. לדוגמה: חילקו את הביטוי $36a^2-48a+16$ ב-4 או לחלופין, השוו את הביטוי לאפס ופתרו כמשוואה. דוגמה אחרת, הביטוי $1+\frac{x}{2x+3}$. כאשר התבקשו התלמידים למצוא את הביטוי השקול לו, כמה מהם ראו בביטוי משוואה וניסו למצוא את ערכו של x. מקצתם אף ביצע מכנה משותף והעלים את המכנה.

ביסוס ההבנה והעמקתה באמצעות שיעורים חווייתיים

כדי לבסס ולהעמיק את ההבנה הועברו כמה שיעורים בשלב האחרון של יחידת ההוראה, במתכונת חווייתית השונה מהשיעורים בתוכנית הלימודים הרגילה.

שיעור בחדר מחשבים: התלמידים פתרו בקצב אישי משימות שהוצגו לפניהם במצגת. המצגת נתנה מענה אוטומטי האם התשובה נכונה ורק לאחר שהגיעו לתשובה הנכונה עברו למשימה הבאה. התלמידים התרגשו ללמוד בחדר מחשבים.

משחק זיכרון ממוחשב: הורכב מארבע משוואות ומהפתרונות. התלמידים התבקשו לפתור בדרך היעילה ביותר כדי לעמוד בלוח הזמנים. הכיתה חולקה לקבוצות וכל קבוצה בתורה ניסתה למצוא זוגות מתאימים, משוואה ופתרונה, במשחק הזיכרון. קבוצה שהצליחה, הסבירה את דרך הפתרון היעילה ביותר שמצאה. התלמידים שיתפו פעולה במהלך המשחק והיו מרוכזים ומרותקים למסך.

שיעור בספרייה: הספרנית הציגה את ספרי הלימוד במתמטיקה והתלמידים התבקשו לעיין בהם ולחבר שאלות העוסקות בחוש למבנה. מסקנתם הייתה שספרי הלימוד לא יעזרו כי רוב התרגול בהם לא עוסק בחוש למבנה, ולכן הם חיברו את השאלות בעצמם. נראה כי השאלות שחיברו היו דומות מאוד לאלה שהוצגו בשיעורים, אך הצלחתם הייתה חשובה.

נראה כי כל השיעורים החווייתיים היו מוצלחים מאוד.

ממצאים לאחר הוראה

טבלה מס' 3 מציגה את שיעורי ההצלחה בפתרון השאלות ושיעורי המשתמשים בחוש למבנה בשאלון המסכם לאחר ההוראה.

טבלה מס' 3: אחוזי ההצלחה בפתרון השאלות ואחוזי השימוש בחוש למבנה בשאלון המסכם לאחר העברת יחידת ההוראה (N=23)

שאלה / אחוז	1	2א	2ב	2ג	2ד	3	4	5	6
הצלחה	96	96	87	65	30	35	61	52	26
משתמשים בחוש למבנה	96	96	96	87	30	אי אפשר	100	78	74
הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה	100	100	91	75	100	לא השתמשו בחוש למבנה	61	67	35
הצלחה בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה	0	0	0	0	0	35	כולם השתמשו בחוש למבנה	0	0

טבלה מס' 4 מציגה את התפלגות דרכי הפתרון בקטגוריות הנבחרות בשאלות השאלון המסכם לאחר העברת יחידת הוראה:

בשאלות 1, 4, 5 בממוצע למעלה מ-90% השתמשו בחוש למבנה וכ-70% מהם פתרו נכונה.

גם בשאלה 2 על כל סעיפיה בממוצע כ-80% השתמשו בחוש למבנה וכ-70% הצליחו לפתור נכונה.

שאלה 3 – פחות מ-40% הצלחה. כ-50% השתמשו בטכניקה נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון.

שאלה 6 – למעלה מ-70% השתמשו בחוש למבנה, אך לעומת שאלות אחרות, רק כ-25% פתרו נכונה.

טבלה מס' 4: שכיחות (באחוזים) דרכי פתרון בשאלון המסכם (N=23)

	אפשר לפתור באמצעות שימוש בחוש למבנה וגם ללא שימוש בחוש למבנה			לא נדרש פתרון משוואה. נדרש זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי לחשב באמצעותו ביטוי אחר			אי אפשר לפתור באמצעות חוש למבנה	אפשר לפתור רק בשימוש בחוש למבנה
דרך פתרון / שאלה	1	4	5	2 א	2 ב	2 ג	3	6
נכון עם שימוש בחוש למבנה	96	61	52	96	87	65	30	26
חוש למבנה + טעות	0	39	26	0	9	22	-	48
נכון ללא שימוש בחוש למבנה	0	0	0	-	-	-	35	-
טכניקה אלגברית נכונה + טעות	4	0	17	0	0	0	52	-
טכניקה אלגברית שגויה	0	0	4	4	4	4	13	22
לא פתר	0	0	0	0	0	9	0	4

השוואה בין השאלונים טרם העברת יחידת ההוראה ולאחריה

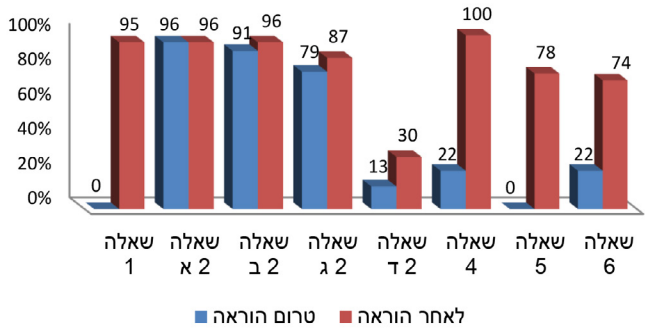
טבלה מס' 5 מציגה את ממוצע שיעורי ההצלחה ושיעורי השימוש בחוש למבנה לפני ההוראה ולאחריה ואת הפערים ביניהם.

נראה כי בממוצע שיעורי ההצלחה עלו במידה ניכרת בכ-20% לאחר ההוראה. כמו כן שיעור השימוש בחוש למבנה גדל במידה ניכרת בכ-45% לאחר ההוראה. שיעור הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה גבוה ועומד על כ-80% ומעלה בשני השאלונים לעומת שיעור הצלחה נמוך מאוד בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה.

טבלה מס' 5: ממוצע אחוזי ההצלחה ואחוזי המשתמשים בחוש למבנה לפני ההוראה ולאחריה והפערים ביניהם (N=23)

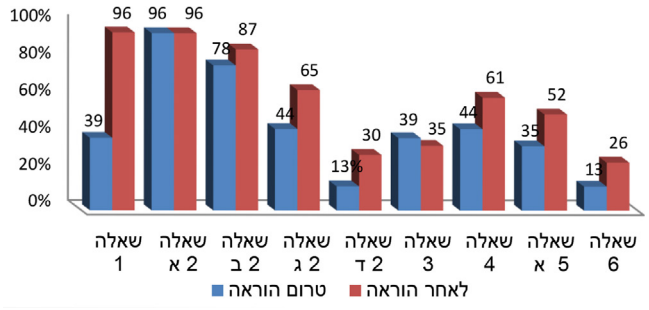
	לפני ההוראה	לאחר ההוראה	פער
הצלחה	41	61	19
שימוש בחוש למבנה	37	82	45
הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה	86	79	-7

גרף מס' 2 מציג את ההבדלים בשיעורי המשתמשים בחוש למבנה בפילוח לפי שאלות לפני ההוראה ולאחריה. נראה כי למעט שאלה 2א, בכל השאלות יש גידול בשיעור המשתמשים בחוש למבנה לאחר ההוראה. בשאלות 1, 4, 5, 6 הגידול הוא מהותי ביותר.



גרף מס' 2: אחוז המשתמשים בחוש למבנה בכל שאלה לפני ההוראה ולאחריה (N=23)

גרף מס' 3 מציג את ההבדלים בשיעורי ההצלחה לכל שאלה לפני ההוראה ולאחריה. נראה כי בכל השאלות, למעט שאלה 2א ו-3, שיעורי ההצלחה גבוהים במידה ניכרת לאחר ההוראה.



גרף מס' 3: שיעורי ההצלחה בפילוח לפי שאלות לפני ההוראה ולאחריה (N=23)

ממצאים עיקריים מהראיונות האישיים

מהראיונות עולה כי ההוראה גרמה לתלמידים לשנות את גישתם לפתרון התרגילים, להתבונן ולחשוב לפני הפתרון על בחירת האסטרטגיה המתאימה. לטענתם, לפני ההוראה הם ניגשו לתרגיל באסטרטגיה טכנית מבלי להסתכל על התרגיל בכללותו ועל הדרכים הטמונות בו. תלמידה אמרה: "נראה לי שאם היית נותנת את התרגיל בגיל צעיר הייתי פותרת כך (עם שימוש בחוש למבנה) ובגלל שלימדו אותנו את השיטות של לפתוח סוגריים ומכנה משותף, אז אני מתרגלת לעבוד רק בשיטה הזו". תלמיד אחר הוסיף "פשוט רגיל ישר לנסות לפתור את התרגיל ולא לחפש דרכים קלות יותר". התלמידים טענו כי לאחר ההוראה הם הבינו שאסטרטגיית השימוש בחוש למבנה יכולה לסייע להם בפתרון קל, מהיר ויעיל יותר עם פחות סיכויים לטעויות בדרך. תלמידה אמרה: "ברור שהדרך השנייה עדיפה (שימוש בחוש למבנה), זה יותר מהיר. בשנייה אחת אפשר לפתור את זה. הדרך הראשונה מבלבלת, את יכולה לעשות הרבה טעויות כשלא שמים לב. לי זה קורה כל הזמן. הכול מתבלגן לי כשיש הרבה מספרים". למרות ההבנה כי פתרון המבוסס על חוש למבנה מאפשר פתרון קל ויעיל יותר, היו שטענו כי בכל מקרה ימשיכו להשתמש בדרך המוכרת והבטוחה יותר בעבורם. תלמיד טען כי "יהיה יותר קל להשתמש בדרך השנייה אבל אני כנראה אשתמש בזה (הצביע על השאלון הראשון) כי זה יותר אוטומטי". רבים טענו כי השיעורים האלה אפשרו לפתח חשיבה מתמטית, שכן הם לא קיבלו את האסטרטגיה הנכונה מהמורה מייד ובדרך ישירה, אלא נאלצו להגיע בכוחות עצמם ובעזרת חברי הקבוצה לפתרון. "בדרך כלל באים, שואלים את המורה והיא אומרת איך אפשר לתקן ולפתור, וכאן כשהייתה עבודת כיתה רציתי לשאול אותך איך מוצאים את הפתרון ובאתי שוב ושוב ולא קיבלתי את התשובה. ביקשת מאיתנו לחשוב". תלמיד אחר טען כי בהוראת זיהוי מבנה אלגברי, "אתה יותר חושב בעצמך, כי בשיעורים אחרים אתה לומד איך לפתור את התרגיל ואתה מתרגל רק את הדרך

הזו ובשיעורים האלה אתה צריך לחשוב ולהתעלם מהדרך שבה הרגילו אותך ומסתכל על התרגיל בעצמך". גם תלמידים, שבשאלון המסכם נראה כי נתרמו פחות מיחידת ההוראה, טענו כי "נראה לי שבטווח הרחוק השיעורים עוזרים. אם יעשו תרגילים כאלה מההתחלה, לדוגמה במבחנים, אז הם יעזרו". מרבית התלמידים חשבו כי יש להוסיף נושא זיהוי מבנים אלגבריים לתוכנית הלימודים הרגילה. מרביתם זכרו היטב את השיעורים החווייתיים יותר, כגון עבודה בקבוצות, שיעור בחדר מחשבים וכדומה.

דיון ומסקנות

בפרק הנוכחי נעמוד על משמעותם ותרומתם של ממצאי מחקר זה שהתמקד ביכולת תלמידים לזהות מבנה אלגברי בפתרון משוואות כדי לבחון השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות.

כאמור, שאלת המחקר הראשונה הייתה האם הוראה משולבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות.

טרם העברת ההוראה, רק 37% השתמשו בפתרון אלגנטי לעומת 82% לאחריה. בשאר הפתרונות התלמידים הציגו פתרון מסורבל או שלא פתרו כלל. תלמידים רבים פתרו בדרך טכנית באמצעות פרוצדורות אריתמטיות ואלגבריות שלמדו. דבר שגרר ריבוי טעויות חישוב, חוסר התמקדות בקבוצת הצבה וקושי למציאת פתרון לתרגילים שדרשו יכולת חשיבה והבנה מעבר ליכולת טכנית. אחוז נמוך זה מראה כי קיימת מוגבלות בהפעלת שיקול דעת לפני שתלמידים ניגשים לפתור והם אינם בוחנים דרכים מגוונות לפתרון. ממצאים אלו מחזקים חוסר הפעלת בקרה תחילית בידי תלמידים ופנייה לרעיון המוכר הראשון ללא תכנון וניתוח מעמיק. לדוגמה, תלמידים נוטים לפנות בפזיזות ומתוך שגרה לתרגיל ומנסים לפתור באנלוגיה לבעיה דומה המוכרת להם גם אם השימוש במשאב לא בהכרח נחוץ לפתרון (Schoenfeld, 1992). כאשר אנו נתקלים במצב המחייב התמקדות, מתבצעת בדיקה אם מצב זה דומה לאחד המצבים המוכרים לנו מהעבר והתגובה היא לפי הצורך. ניסיונו של הקודם של האדם ישפיע על תוצאות התהליך. ככל שניסיונו של האדם בתחום מסוים גדול יותר, כן האינטואיציה שלו כלפי התחום תהיה טובה יותר (וינר, 2000).

מתוצאות המחקר עולה כי בכל השאלות (למעט אחת) היה גידול בשימוש בחוש למבנה לאחר ההוראה. ייתכן שהסיבה כי בשאלה זו זיהוי המבנה היה מיידי ואינטואיטיבי.

בשאלות מסוימות נצפה שיעור שימוש נמוך בחוש למבנה גם לאחר ההוראה. ייתכן שההסבר נעוץ בממצא כי בתרגילים אלו על התלמיד להסתכל על מבנה התרגיל, לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות מבנה דומה ונוסף על כך, לדעת מהי המניפולציה שיש לבצע כדי לנצל את המבנה. כלומר כאשר נדרשת מניפולציה אלגברית כדי לזהות את המבנה המשותף, יש קושי אצל התלמידים בזיהוי המבנה.

כאשר המבנה המשותף הופיע באותו אגף של המשוואה, אף לא אחד השתמש בחוש למבנה לפני ההוראה בעוד שלאחריה השתמשו כמעט כולם בחוש למבנה. ניכרת עלייה בשימוש בחוש למבנה בשאלה שבה המבנה המשותף הופיע בשני אגפי המשוואה (22% לפני ההוראה לעומת 100% לאחריה). ממצא זה מאשש את ממצאיהם של הוך ודרייפוס (Hoch & Dreyfus, 2004). ככל הנראה, הופעת המשתנה בשני אגפי המשוואה עזרה בזיהוי איברים דומים. סיבה אחרת מתאימה היא הופעת השאלה לאחר שפתרו שאלה קודמת שדרשה שימוש בחוש למבנה. נראה כי הוראה ממוקדת במבנים אלגבריים גררה עלייה ניכרת בשימוש בחוש למבנה.

שאלת המחקר השנייה לא הסתפקה בבדיקה האם הוראה משולבת מבנים אלגבריים הגבירה את השימוש בחוש למבנה, אלא המשיכה ובדקה האם גם היא הביאה לשיפור בהישגים.

נמצא כי שיעור ההצלחה עלה לאחר ההוראה. תחילה, שליש מהתלמידים השתמשו בחוש למבנה לפני ההוראה ואחוזי הצלחתם היו גבוהים במיוחד. השאר שניסו לפתור ללא זיהוי המבנה אחוזי הצלחתם, היו מזעריים. כלומר עוד בשלב טרום ההוראה נמצא כי קיים קשר בין מידת ההצלחה בפתרון התרגיל לשימוש או אי שימוש בחוש למבנה. רוב התלמידים שהשתמשו בחוש למבנה הגיעו לתשובה נכונה. למרות זאת, מרבית התלמידים מעדיפים את הדרך הארוכה והבטוחה יותר מבחינתם, אף על פי שבפועל בדרך זו יש סיכוי גדול יותר לטעות. הדבר מלמד על דרכי עבודה ולמידה שגויים. ממצא זה במחקר הנוכחי דומה לממצאיהם של הוך ודרייפוס שמצאו כי כל התלמידים שהשתמשו בחוש למבנה הצליחו לפתור נכון את התרגילים, ולעומתם התלמידים שלא השתמשו בחוש למבנה – הצלחתם הייתה נמוכה (Hoch & Dreyfus, 2004).

מהמחקר הנוכחי עולה כי למעלה ממחצית הפותרים ללא שימוש בחוש למבנה פתרו בדרך אלגברית נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון. ממצא זה מחזק את מחקרם של הוך ודרייפוס שבו מרבית התלמידים הציגו שליטה בטכניקה אלגברית, אך פתרונות התלמידים שלא השתמשו בחוש למבנה הכילו טעויות אלגבריות לא מעטות, שלא הופיעו בפתרונות של אלה שהשתמשו בחוש למבנה. עם זה יש מקום לראות כי שיעור השימוש בחוש למבנה עלה ב-45% לאחר ההוראה בעוד שאחוז הצלחה גדל ב-20% בלבד. גם כאן הדבר נובע מטעויות חישוב ובעיקר מחוסר התמקדות בקבוצת הצבה. כאשר נדרשו לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות מבנה דומה ולהיעזר במשתנה אחר לצורך פתרון המשוואה, אחוז ההצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה היה נמוך מאוד גם לאחר ההוראה. על פי הוך ודרייפוס תלמיד נחשב למגלה חוש למבנה אם הוא יכול לעשות את הדברים האלה: לזהות מבנה מוכר בצורה הפשוטה ביותר, לטפל בביטוי אלגברי מורכב כיחידה ובאמצעות הצבה מתאימה לזהות מבנה מוכר בצורה מורכבת יותר ולהבחין איזה פעולות כדאי לבצע כדי לנצל את המבנה. היכולות האלה היררכיות וכדי לשלוט ביכולת מסוימת יש לשלוט ביכולות הקודמות לה. בשאלה זו נצפתה עלייה בזיהוי המבנה מתוך השוואה בין שני השאלונים. למרות הצורך לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות את המבנה המשותף, למעלה משלושה רבעים מהתלמידים הצליחו לעומת כחמישית בלבד לפני ההוראה. אולם כאמור, בשאלה זו לא הספיק רובד זיהוי המבנה בלבד, אלא התלמיד היה צריך לחשוב כיצד לנצל את המבנה המשותף ולמרות הגידול בזיהוי המבנה, שני שלישים מבין אלו שזיהו לא ידעו מהי המניפולציה כדי לנצל את המבנה. ייתכן שזו הסיבה לאחוזי ההצלחה הנמוכים. בדומה לממצא זה, סוזן (2000) טוענת כי לתלמידים יש קשיים בפתרון משוואות שאי אפשר לפתור אותם בגישה אנליטית המוצגים בלי רמז לאלגוריתם מוכר שיביא לידי פתרון. לסיכום, ממצאי המחקר הראו כי הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים גררה עלייה בהישגי התלמידים.

בכל תהליך ההוראה נמצא כי תלמידים אינם מכירים את מושג השקילות כלל. הם מפעילים חוקים בשרירותיות, מה שיצר קושי בהתמודדות עם המטלות. ממצא זה תואם לממצאיהן של ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), וכן את ממצאיהם של שטיינברג ועמיתיו (Steinberg et al., 1990), שטענו כי

לתלמידים הבנה לקויה בנושא שקילות של ביטויים אלגבריים ומשוואות ולפיכך נימוקיהם אינטואיטיביים בעיקר.

כמו במחקרה של קירן (Kieran, 1992), גם במחקר זה נצפה כי בכל תהליך ההוראה הנבדקים ביצעו פעולות שמותרות על משוואות גם על ביטויים אלגבריים. הסיבה לכך ככל הנראה שלפחות אחד האגפים של המשוואה הוא ביטוי אלגברי, ולכן נוצרת השפעה סמויה של מודל "פעולות בפתרון משוואות" ומכלילים גם על ביטוי אלגברי. נוסף על כך, אחוז ניכר מהנבדקים לא ידע לבצע פעולת שורש ריבועי על שני אגפי המשוואה. התלמידים סברו שהדרך היחידה היא הפעלת אלגוריתם סטנדרטי של פתיחת סוגריים, ולכן הם איבדו בדרך את אחד הפתרונות. נראה שהסיבה לכך היא תוכנית הלימודים שחלק ממנה נשען על הבנה אינסטרומנטלית. סקמפ (Skemp, 1976) טען שלימוד הכללים בלי הסיבות מאפשר לתלמיד לתפקד בתוך גבולות מוגדרים מאוד המאפשרים להתמודד עם בעיות סטנדרטיות בדרך טובה, אך ללא ההבנה של מה לעשות ומדוע התלמיד לא יוכל להתמודד עם מטלות חדשות.

אם כן, יש מקום להסיק כי בבניית תוכנית הוראה יש חשיבות רבה ליצירת קשרים בין הידע הפורמלי ובין התהליכים האלגוריתמים. ממצא זה מחזק את טענתו של פישביין (Fischbein, 1994) כי על התלמיד להבין את הבסיס הפורמלי המצדיק את האלגוריתם. ממצא זה שעלה במהלך ההוראה, הביא להתמקדות בנושא זה במהלך הדיונים במליאה. היה אפשר לזהות בשאלון המסכם כי זו סייעה במידה ניכרת בהפחתת טעויות כאלה.

כמו כן נמצא כי אף שנושא פירוק לגורמים נלמד בהרחבה בכיתה ט', התלמידים אינם מודעים למושג. הם שולטים בטכניקה של הוצאת גורם משותף אך בלי להבין את המטרה. ממצא זה מדגיש את הצורך בחידוד מושגי היסוד בשפה האלגברית וחיזוק הידע המושגי במהלך לימוד נושא מסוים.

"בכל תהליך ההוראה נמצא כי תלמידים אינם מכירים את מושג השקילות כלל. הם מפעילים חוקים בשרירותיות, מה שיצר קושי בהתמודדות עם המטלות."

מושגי היסוד נבנים ומוגדרים במהלך ההוראה. ההוראה במחקר הנוכחי נבנתה בדרך שונה מעט מהשיעורים בתוכנית הלימודים הרגילה. השיעורים נבנו כשיעורים חווייתיים, המלווים בשילוב עבודה בקבוצות, דיונים במליאה ושימוש בעזרים לא שגרתיים. שינוי זה תואם לגישת ההוראה הדוגלת בכך שעל המורים להימנע מנתינת פתרון מלא וישיר לתלמידים (Schoenfeld, 1987). מהראיונות האישיים נלמד כי דרך לימוד זו אינה שגרתית עבור התלמידים ולעיתים התקשו להתמודד איתה. "השיעורים הראשונים דרשו מאיתנו יותר לחשוב אבל בהמשך היה יותר בסדר", "לא היה קל, רציתי תשובה ולא קיבלתי... בדרך כלל באים, שואלים את המורה והיא אומרת איך אפשר לתקן ולפתור, וכאן כשרציתי לשאול את המורה איך מוצאים את הפתרון ובאתי שוב ושוב, לא קיבלתי את התשובה. המורה ביקשה מאיתנו לחשוב...". מהראיונות עולה כי התרומה העיקרית של ההוראה היא פיתוח יכולות התלמידים לחשוב, ולהפעיל בקרה לפני בחירת האסטרטגיה לפתירת התרגיל.

לטענת התלמידים, המורים השרישו בהם את הגישה הפרוצדורלית הטכנית. כלומר לפתור רק בדרך אחת. "לימדו אותנו ראשית לפתוח סוגריים", "בשיעורים אתה לומד איך לפתור ומתרגל רק בדרך הזו".

ממצא זה עולה בקנה אחד עם טענתו של שונפלד (Schoenfeld, 1989), כי שיטת ההוראה במתמטיקה בנויה על שינון ותרגול נוסחאות ומשפטים. לימוד כזה מקנה לתלמידים ניסיון בפתרון בעיות מתמטיות מאותו סוג, ואולם לא בונה ידע המעודד יצירתיות, גילוי וחשיבה מעמיקה.

יחידת ההוראה שנבנתה במחקר זה באה להציג שינוי וסטייה מתוכנית הלימודים הסטנדרטית ועל פי ממצאי המחקר הוכיחה את תרומתה. ברגע שנחשפו למבנה התרגיל חשיפה מסודרת, חווייתית, המבוססת על דיונים והבנה, הרגישו התלמידים יותר בנוח להשתמש בחוש למבנה בתרגילים שדרשו זאת. התלמידים למדו לחשוב ולבצע בקרה במבנה התרגיל וכך למצוא את הדרך היעילה ביותר ורק אז לנסות לפותרו.

סיכום

המחקר מחדש כי הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים מביאה לשיפור הן בשימוש בחוש למבנה והן בהישגי התלמידים. מומלץ להכשיר מורים לעידוד פיתוח אסטרטגיות פתרון מבוססות הבנה. רצוי ללמד אסטרטגיה של חיפוש מאפיינים מיוחדים בשאלות נוסף על אלגוריתמים השגורים הנלמדים בשיעורי המתמטיקה. אסטרטגיה זו תעודד בקרה ושיקול דעת כבר בתחילת הפתרון, וכחלק מתוכנית הוראה שיטתית מומלץ להוסיף לכל פרק לימוד כמה שאלות מיוחדות כדי לפתח אצל התלמידים מיומנויות מתאימות.

מהמחקר עולה כי תלמידים מתקשים מאוד לראות בביטוי אלגברי יחידה. ממצא זה מחזק את הטענה כי בבית ספר היסודי לא מדגישים ראייה מבנית של ביטויים חשבוניים ולפיכך התלמידים מתקשים להתמודד עימם בלימודי האלגברה (Booth, 1989). כאן חוסר היכולת של תלמידים להבין את הדואליות תהליך-מבנה של סמלים אלגבריים הוא אחד ממקורות הקושי בלימודי האלגברה (Sfard, 1991). אם כן, מומלץ לשלב הוראת מבנים אלגבריים בתוכנית הלימודים.

מומלץ להמשיך ולחקור את הנושא גם בקרב אוכלוסיות של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה, ולבדוק עד כמה הם נוטים להשתמש בחוש למבנה. מחקרים אלו יאפשרו העלאתו של נושא חשוב זה והשפעותיו על מרכז הדיון הפדגוגי ועדכון תוכנית הלימודים כדי להתאימה לצורכי התלמידים ולפיתוח חשיבתם המתמטית.

רשימת מקורות

וינר, ש' (2000). סיפוקו של הצורך בוודאות – אינטואיציה. **על"ה, 26**, 17-22.

חכים, ג' וגזית, א' (2011). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל תלמידי ה-ז, בהשוואה למורי מתמטיקה בבית הספר היסודי, ולפרחי הוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק 2000, 20**, 40-48.

סוזן, ע' (2000). ניתוח גישות תלמידים, מהיחידה הקדם- אקדמית, בפתרון משוואות ואי-שוויונים. **על"ה, 25**, 27-41.

פרידלנדר, א' (2008). כיצד פותרים... תרגילים? הצעה לתרגול מיומנויות אלגבריות. **על"ה, 39**, 11-19.

Booth, L. R. (1981). Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 29-41. doi:10.1007/BF0038604

Booth, L. R. (1989). A question of structure. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 57-59). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics* (2nd ed.). Sausalito, Calif.: Math Solutions Publications.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

Ginat, D. (2007). Hasty design, futile patching and the elaboration of rigor. *In Proceedings of the 12th annual SIGCSE conference on innovation and technology in computer science education* (pp. 161-165). New York, NY: ACM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196. doi:10.1023/A:1003606308064

Markovits, Z., Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. (1989). Research into practice: Number sense and nonsense. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 53-55.

Markovits, Z., & Pang, J. (2007). The ability of sixth grade students in Korea and in Israel to cope with numbers sense tasks. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31th psychology of mathematics education conference* (Vol. 3, pp. 241-248). Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Resnick, L. B., Lesgold, S., & Bill, V. (1990). From protoquantities to number sense. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME conference: With the North American chapter twelfth PME-NA conference* (vol. 3, pp. 305-311). Mexico: Program Committee of the 14 PME Conference.

Schoenfeld, A. H. (1987). What is all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-216). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355. doi:10.2307/749440

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121. doi:10.2307/749588

נספחים

נספח א

1. פתור את המשוואה הבאה:

$$1-\frac{1}{x+2}-\left(1-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{132}$$

2. אם ידוע כי $x^3+3x=18$ מצא את ערכם של הביטויים האלה:

א. $x^3+3x+12$

ב. $6x+25+2x^3$

ג. $\frac{5x(x^2+3)}{3-x^3-3x}$

ד. $x^6+6x^4+9x^2$

3. פתור את המשוואה:

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4}{x^2+2x}$$

4. פתור את המשוואה:

$$\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$$

5. נתונה המשוואה: $\frac{1}{x-1}-\frac{2x+2}{x^2-1}=1$

א. פתור את המשוואה.

ב. ענת פתרה את המשוואה והגיעה למשוואה **השקולה**:

$1-2=x-1$ עבור $x\neq\pm1$

האם ענת צודקת? נמק

6. פתור את המשוואה:

$$\left(\frac{x^2+12}{x}\right)^2-15\left(x+\frac{12}{x}\right)+56=0$$

שיעור ראשון: שיעור פתיחה בנושא חוש למספרים במספרים טבעיים ורציונליים. המטרה להמחיש לתלמידים כיצד שימוש בחוש למספרים מאפשר פתרון יעיל ומהיר. לדוגמה:

$$3\frac{3}{4}+7.1-5.24+0.25+1\frac{9}{10}=?$$

בתרגילים, באמצעות זיהוי מוקדם של צמדי מספרים, קל לחשב בעל פה ואפשר להגיע לפתרון נכון ומהיר. ניתן דגש בשיח מתמטי על אודות חוש למספרים.

שיעור שני: עבור תלמידים רבים הדרך היחידה להסתכלות על משוואה היא באמצעות פעולות טכניות של פתיחת סוגריים, העברת אגפים וכדומה. מטרת השיעור הייתה להוביל לשימוש ביותר מאלגוריתם טכני אחד ולפתח גמישות ויעילות בפתרון, מתוך נתינת דגש בביטוי אלגברי כיחידה. הכיתה חולקה לקבוצות – כל קבוצה קיבלה משוואה שונה. חברי הקבוצה התבקשו לפתור בשתי דרכים לפחות, לפרט את היתרונות והחסרונות של כל דרך ולהציג מסקנות במליאה. לדוגמה: הסבירו (בשתי דרכים לפחות) מדוע למשוואה $(x+5)^2+5=0$ אין פתרון.

שיעור שלישי: המטרה לפתח מיומנות הפעלת שיקול לוגי טרם פנייה להפעלת אלגוריתם. הפעילות מפתחת הבנה איכותית של ביטויים אלגבריים ומחייבת הסתכלות שאינה טכנית. דף המשימה דרש מהתלמידים לענות על משימות שלא הורגלו בהן, אך הפתרון היה בהחלט בהישג ידם באמצעות שימוש בלוגיקה. חשיבות רבה הייתה להנחיה ולדיון המעמיק בתום המשימה.

דוגמה:

לפניכם מסגרת ובה ארבעה תנאים עבור המשתנים A, B, C:

$$A\times B\times C=0$$
$$A\times B<0$$
$$A\times C>B$$
$$A+B=C$$

א. מצאו הצבה של מספרים עבור A, B, C שבה מתקיימים כל ארבעת התנאים לעיל.

ב. נסו לאפיין את כל ההצבות שבהן מתקיימים כל ארבעת התנאים לעיל.

שיעור רביעי: המטרה לפתח יכולת זיהוי מבנים אלגבריים. המשימה, שימוש במבנים אלגבריים נתונים כדי להגיע לפתרון בדרך יעילה ובלי צורך במציאת פרמטרים ושימוש באלגוריתם מורכב.

לדוגמה: חשבו בדרך הנוחה ביותר את ערך הביטוי $9x^2+6x+1$ עבור מהמספרים $x=13$, $x=-3$. אין להיעזר במחשבון!

שיעור חמישי: השיעור התקיים בחדר מחשבים. מטרתו חשיפה למבנים אלגבריים בדרך חווייתית. הוצג שאלון רב ברירה העוסק בחוש למבנה באמצעות מצגת. השאלות הראשונות שימשו המשך ישיר לשיעור הקודם ובהן התלמידים ביצעו בקרה עצמית, ואילו בשאלות האחרונות הוצג ביטוי אלגברי והתלמידים נדרשו לזהות באמצעות מניפולציה אלגברית את המבנה השקול לו מבין כמה תשובות מתאימות. לדוגמה:

9. מצא את הביטוי השקול לביטוי -

$$\frac{x^2+4+2x^2-2y^2-(x^2+4)}{3x+3y}$$
$$x\neq -y$$

א. $\frac{2}{3}$

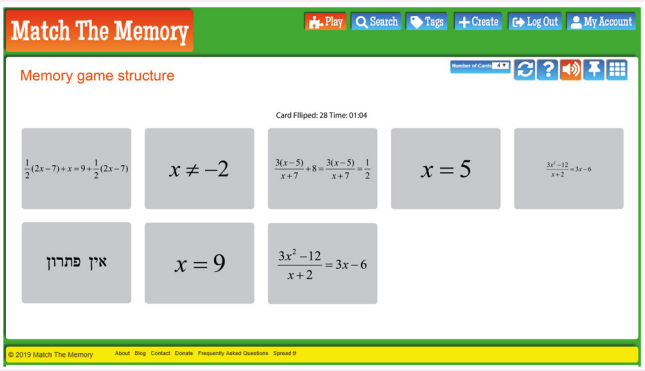
ב. $\frac{2x-2y}{3x+3y}$

ג. $\frac{x}{y}$

ד. $\frac{2(x-y)}{3}$

לחץ על התשובה הנכונה

שיעור שישי: משחק זיכרון ממוחשב. המטרה לחשוף חשיפה חווייתית למשוואות, כך ששימוש בחוש למבנה יאפשר פתרון יעיל ומהיר יותר. הכיתה חולקה לקבוצות וכל קבוצה בתורה ניסתה למצוא את הזוגות המתאימים, משוואה ופתרונה, במשחק הזיכרון. קבוצה שזכתה בזוג מתאים הסבירה את דרך הפתרון היעילה ביותר שמצאה.



שיעור שביעי: סיום ההוראה. המטרה לבסס ולהעמיק את ההבנה – יצירת מבנה אלגברי בידי התלמיד עצמו. השיעור התקיים בספרייה, התלמידים התבוננו בספרי הלימוד, חיברו בעצמם שאלות שיש בהן חוש למבנה. כל קבוצה בנתה חידון והעבירה אותו במליאת הכיתה.

יצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות בהוראת המתמטיקה והשימוש בהן אצל פרחי ההוראה

אסמעיל אלמחדי



אסמעיל אלמחדי
מורה למתמטיקה ומדריך פדגוגי למתמטיקה, מכללת קיי, באר-שבע.

תקציר

עניינו של מאמר זה הוא יצירת דוגמאות למושג מתמטי. אפשר ליצור דוגמאות משני סוגים עיקריים: דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. תכלית הדוגמאות הנגדיות להפריך טענות מתמטיות שגויות, ותכלית אי- הדוגמאות להבהיר מהי תכונה חיונית ומהי תכונה שאינה חיונית למושג מסוים. במאמר זה יוצגו ממצאי מחקר התערבות שבו נבדקה היכולת של פרחי ההוראה ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות לאחר חשיפה רלוונטית לנושא. ממצאי המחקר הראו שלמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות אינה משפרת בהכרח את היכולת של פרחי ההוראה ליצור דוגמאות נגדיות, ואילו חשיפה ללמידה באמצעות אי-דוגמאות משפרת את יכולתם ליצור אי-הדוגמאות.

מילות מפתח: הכשרת מורים; הוראת מתמטיקה; דוגמאות נגדיות; אי-דוגמאות.

מבוא

בעשור האחרון התמקדו מחקרים רבים בתחום הוראת המתמטיקה בשימושים האפשריים של דוגמאות ותרומתן (Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002; Ko & Kunth, 2013; Potari, Zachariades, & Zaslavsky, 2009; Leung, & Lew, 2013; Zodik & Zaslavsky, 2008), ונמצא שלדוגמאות תפקיד חשוב ומרכזי בהוראת המתמטיקה, הן בתהליכי ההצדקה וההנמקה והן בתהליכי ההסבר והשכנוע. אי-דוגמה היא דוגמה מסוג מסוים ותכליתה להקל על הלומדים ליצור מושג מתמטי (Tsamir & Tirosh & Levenson, 2008). על אף חשיבותו נושא השימוש באי-דוגמה בהוראת מתמטיקה נחקר מעט.

בהוראת מתמטיקה מומלץ לשלב דוגמאות ואי-דוגמאות בלמידה כדי להסב את תשומת הלב של הלומדים לתכונות הרלוונטיות של המושג המתמטי הנלמד (Bills et al., 2006). שילוב דוגמאות ואי-דוגמאות יכול לעזור ללומדים ליצור רעיונות או תובנות בתהליך בניית הוכחה מתמטית, ואכן נמצא ששילוב מערכות של דוגמאות ואי-דוגמאות בלמידה מעמיק אצל הלומדים את הבנת המושגים המתמטיים והגדרותיהם (Salam & Dost, 2016). זאת ועוד,

בהוראת מתמטיקה מורים צריכים להיות מסוגלים להפריך טענות מתמטיות שגויות שהתלמידים מעלים בשיעור. לעיתים התלמידים עושים הכללות בלתי תקפות ושגויות, ואחת דרכים להתמודד עם הכללות אלה היא לספק להם דוגמה נגדית (Yopp, 2015). ברם, נמצא שמורים רבים למתמטיקה אינם נותנים דעתם על הדוגמאות בדרך מפורשת מושכלת (Zadik & Zaslavsky, 2008), ולדעת חוקרים רבים, יצירת דוגמאות בכלל ודוגמאות נגדיות בפרט בהוראת המתמטיקה היא פעילות מורכבת בשביל מורים, מתכשרים להוראה ותלמידים (Ko & Kunth, 2009; Potari et al., 2009).

בשל חשיבות השימוש בדוגמאות בהוראת מתמטיקה, מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את היכולת של המתכשרים להוראה, לפני כניסתם להוראה בבתי הספר, ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. זאת ועוד, במחקר הזה תיבחן השאלה באיזו מידה מעוררת החשיפה של פרחי הוראה למתמטיקה ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות ובאי-דוגמאות את היכולת שלהם ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות.

רקע תאורטי

מהי דוגמה מתמטית?

דוגמה היא מקרה פרטי מתוך אוסף מקרים רחב וממנה אפשר להסיק מסקנות מתמטיות. על פי גולדנברג ומיסון (Goldenberg & Mason, 2008), דוגמה היא מקרה פרטי שבו משתקף דבר מה כללי. במתמטיקה המושג "דוגמה" הוא כל דבר המשמש אמצעי להכללה, להדגמת מושגים ועקרונות מתמטיים וליישום פרוצדורות (Watson & Mason, 2005).

> בשל חשיבות השימוש בדוגמאות בהוראת מתמטיקה, מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את היכולת של המתכשרים להוראה, לפני כניסתם להוראה בבתי הספר, ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות.

דוגמאות משמשות בכל סיטואציה שבה דבר ספציפי מוצע כמייצג משהו כללי ושאליו רוצים להפנות את תשומת הלב של הלומדים. למשל, הפונקציה $f(x)= x2+2x+1$ יכולה להיות:

א. דוגמה לפונקציה ריבועית שיש לה רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-X.

ב. אי-דוגמה לפונקציה זוגית.

ג. דוגמה נגדית לטענה: אם לפונקציה ריבועית יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-X, אז לפונקציה יש נקודת מקסימום.

לדוגמאות במתמטיקה יש חשיבות רבה בהבנה רעיונות מתמטיים, הערכתם ופתרון בעיות מתמטיות (Bills et al., 2006). כאשר מתמטיקאים נתקלים בטענה שאינם מסוגלים להפריך או להוכיח, בדרך כלל הם ישתמשו בדוגמה כדי לבדוק את הטענה. נוסף על כך, לדוגמאות תפקיד בניבוי השערות, כי השערה נוצרת באמצעות בחינת דוגמאות.

במתמטיקה יש דוגמאות מגוונות: דוגמה של מושג, למשל, מספר מושלם; דוגמה של יישום, למשל, מצא מספר המתחלק ב-6 (Bills et al., 2006). ברם, קיימת עוד הבחנה נוספת בין שני סוגי דוגמאות: דוגמה נגדית (counter example) ואי-דוגמה (non example). דוגמה נגדית היא דוגמה המראה שטענה מסוימת אינה נכונה (Antonini, 2003), ואילו אי-דוגמה מבהירה את גבול המושג (Bills et al., 2006). מבחינת המשמעות יש קרבה רבה בין דוגמה נגדית ובין אי-דוגמה, המתמטיקה אין הבדל מהותי בין דוגמה נגדית ובין אי-דוגמה (Rissland, 1991).

יגון ועמיתיו (Iannone, Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, & Weber, 2011) חקרו את ההשפעה של יצירת דוגמאות על היכולת לבנות הוכחה מתמטית בקרב סטודנטים לתואר ראשון במתמטיקה. הם הופתעו לגלות שליצירת דוגמאות לא הייתה השפעה חיובית על היכולת ליצירת הוכחה מתמטית. במחקרם הדגישו החוקרים את המורכבות הכרוכה ביצירת דוגמאות.

דוגמה נגדית

המושג דוגמה נגדית עוסק במבנה הטענה המתמטית. דוגמה נגדית מנוסחת כמשפט תנאי: אם A אז B. כאשר A ו-B הם פסוקים, A הוא תנאי הטענה ו-B הוא תוצאות הטענה. דוגמה נגדית היא דוגמה שעבורה מתקיים תנאי הטענה (A), אך תוצאת הטענה (B) אינה מתקיימת. מיצ'נר (Michener, 1978) הגדיר דוגמאות נגדיות מנקודת מבט תפקודי. לדידו, דוגמאות נגדיות הן כלים העוזרים להפריך הצהרת שווא. על פי ההגדרה של אנטוניני (Antonini, 2003), דוגמאות נגדיות הן דוגמאות הסותרות את הטענה המתמטית; הן אמצעי חשוב בתקשורת מתמטית ועוזרות בקבלת השערות ובהפרכתן, יש להן תפקיד חשוב בתחום המתמטיקה, כיוון שבאמצעותן אפשר להמחיש מדוע טענה מתמטית מסוימת שגויה. השימוש בדוגמאות הוא פעולה יסודית במתמטיקה מתקדמת (Ko & Knuth, 2009). מבחינה לוגית, די בדוגמה נגדית אחת המראה מצב שבו תנאי הטענה מתקיים והתוצאה אינה מתקיימת כדי להפריך את הטענה המתמטית. למשל, דוגמה נגדית לטענה: "כל ריבוע של מספר חיובי גדול מהמספר עצמו" יכולה להיות המספר 0.9, כי הריבוע שלו קטן מ-0.9, דבר הסותר את הטענה.

במחקר של קו וקנות' (Ko & Knuth, 2009) בדקו החוקרים את מידת יכולתם של 16 סטודנטים לתואר ראשון במתמטיקה, הלומדים קורסי אלגברה, אנליזה וגאומטרייה, לקבוע את תוקפן של טענות מתמטיות. ממצאי מחקרם הראו שלסטודנטים אין מספיק ידע כדי לקבוע את תוקפן של הטענות המתמטיות.

ווטסון ושיפמן (Watson & Shipman, 2008) ציינו יתרונות לימודיים של יצירת דוגמאות בידי התלמידים. הם טענו שיצירת דוגמאות היא פעילות קוגניטיבית מורכבת הדורשת הבנה של קשרים בין מושגים, לעיתים תהליך זה מלווה בזיהוי הבנות ומשמעויות חדשות. באמצעות בניית דוגמאות הלומדים מפתחים מודעות לממדים האחרים של הדוגמה, למשל ממדים הניתנים לשינוי, דבר העשוי לתרום להרחבת מרחב הדוגמאות האישי שלהם והעשרתו. עוד נמצא שתלמידים משקיעים זמן רב יותר בלמידה מדוגמאות, ולכן כשהם לומדים מדוגמאות קיים סיכוי טוב יותר ללמוד את המושגים המתמטיים היטב.

אי-דוגמה

אי-דוגמה היא דוגמה שאינה תומכת בטענה ואינה סותרת אותה. השימוש באי-דוגמה נועד להבהיר מהי תכונה חיונית ומהי תכונה שאינה חיונית למושג מסוים. למשל, המספר 6 הוא אי-דוגמה לטענה: "מספר ראשוני הוא מספר טבעי המתחלק ללא שארית

בדיוק בשני מספרים", כיוון שהמספר 6 מתחלק ביותר משני מספרים. זסקיס ולייקן (Zazkis & Leikin, 2007) סברו שאי-דוגמאות רלוונטיות להבנת מושגים והגדרות ותפקידן לבדוק אילוצים או תנאים להגדרה ולחקור אותם, ולדעת ווטסון ומייסון (Watson & Mason, 2002), השימוש באי-דוגמאות טוב במיוחד ללימוד מושגים קשים.

במחקרן של צמיר, תירוש ולוינסון (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008) השתתפו 65 תלמידים בני 6. הם התבקשו למיין צורות גאומטריות למשולשים וללא משולשים ולנמק את תשובותיהם. החוקרות דיווחו כי תלמידים זיהו אי-דוגמאות של משולשים במידה רבה יותר מדוגמאות למשולשים.

קשיים של לומדים ביצירת דוגמאות

אף על פי שאנשי חינוך והוראת מתמטיקה מעניקים חשיבות רבה לדוגמאות במתמטיקה, חוקרים רבים דיווחו על הקשיים של התלמידים, של המורים ושל המתכשרים להוראת מתמטיקה ביצירת דוגמאות ושימוש בהן (Bills et al., 2006; Peled & Zaslavsky, 1996 ; Ko & Kunth, 2009). לקשיים אלה כמה סיבות: קושי הנובע מהיבטים לוגיים של שימוש בדוגמאות, למשל דוגמה נגדית המפריכה טענה מתמטית; קושי הנובע מאי הבנת משמעות הדוגמה המוצגת; קושי הנובע משימוש בדוגמאות לצורך הוכחות (Iannone et al., 2011); קושי הנובע מתהליך יצירת הדוגמאות אצל התלמידים, ואי הבנת תנאים שצריכים לקיים דוגמה מסוימת או קושי ביצירת דוגמה, על אף שקיימת הבנת תנאים שהדוגמה צריכה לקיים. זאת ועוד, לפעמים הלומדים נוטים להיתפס למאפיינים ספציפיים של דוגמה מבלי לראות את הכלליות שבה. שימוש חוזר באותן דוגמאות ספציפיות עלול ליצור תפיסות מוטעות אצל הלומדים (Bills et al., 2006), ויותר מכך תלמידים יכולים להסיק הכללות שגויות מאוסף של דוגמאות, במיוחד כאשר ההכללות שהדוגמאות מייצגות אינן זוכות לעיון מפורש, או כשהדוגמאות אינן מספקות את התנאים הדרושים להבנת המושגים, או כשהדוגמאות לא מתאימות. אנטוניני (Antonini, 2011) ציין שרכיב חשוב המשפיע על ייצור דוגמאות הוא היכולת של התלמידים ליצור דוגמאות ואמונתם בקיום דוגמאות העונות על תנאים הנדרשים. חשוב להזכיר שתהליך יצירת דוגמאות הוא תהליך מורכב המביא בחשבון שיקולים מתמטיים ולוגיים כאחד. חשיבה לוגית דדוקטיבית או חשיבה אנלוגית אינן מתפתחות מעצמן ללא תמיכה יזומה של אנשי החינוך וההוראה (Bills et al., 2006).

מטרת המאמר הנוכחי לבדוק את יכולתם של פרחי הוראה ליצור דוגמאות נגדיות לטענות מתמטיות שגויות וליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות. פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר נחשפו ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות ובאי-דוגמאות במשך שלושה חודשים רצופים, פעם בשבוע, במשך כ-10 דקות מהשיעור, כדי לתת להם להתנסות ביצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. לאחר החשיפה הזו נבדקה היכולת של פרחי ההוראה ביצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. במחקר זה בדקתי האם לאחר החשיפה הזו יכולתם של פרחי ההוראה ביצירת דוגמאות ואי-דוגמאות השתפרה, ואם יכולתם השתפרה, מהו סוג הדוגמאות – דוגמה נגדית או אי-דוגמה – שבו ניכר השיפור הזה.

שאלות המחקר

1. באיזו מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות משפיעה על יכולתם להפריך טענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי דוגמאות נגדיות?
2. באיזה מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת באי-דוגמאות משפיעה על יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי אי-דוגמאות?

שיטה

נבדקים

במחקר השתתפו פרחי הוראה המתמחים בהוראת המתמטיקה בשלב החינוך העל-יסודי, הלומדים בשנים ב' ו-ג' באחת ממכללות החינוך בישראל. במחקר היו שתי קבוצות: קבוצת ניסוי שבה היו 16 סטודנטים וקבוצת ביקורת שבה היו 30 סטודנטים. סך הכול 46 סטודנטים השתתפו במחקר וענו על שאלון א שהועבר בתחילת המחקר ועל שאלון ב שהועבר בסוף המחקר. השוני במספר המשתתפים בשתי הקבוצות נובע מכך שרק 16 סטודנטים הסכימו להשתתף במחקר מיוזמתם במשך שלושה חודשים. למחקר הנוכחי נבחרו משתתפי המחקר האלה, משום שבמהלך לימודיהם הם נחשפים בכל מיני קורסים בתחום המתמטיקה לשיטות הוראה מגוונות ויש מקום להניח שהם מכירים את המושגים דוגמה נגדית ואי-דוגמה. בקבוצת הניסוי היו מתכשרים להוראה מהמגזר הערבי בלבד ושפת האם שלהם היא ערבית. בקבוצת הביקורת היו מתכשרים להוראה משני מגזרים: מגזר ערבי ומגזר יהודי. המתכשרים משני מגזרים אלה לומדים יחד את רוב הקורסים בהתמחות מתמטיקה, ושפת ההוראה הרשמית בקורסים אלה היא עברית.

כלי המחקר

לצורך המחקר השתמשתי בשלושה כלי מחקר עיקריים: יחידת לימוד, ראיונות מובנים למחצה ושאלונים. יחידת הלימוד כללה סדרת פעילויות בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. בכל שבוע סיפק החוקר דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות למשתתפי המחקר כדי לחשוף את משתתפי המחקר לחשיפה ממוקדת לשני סוגי הדוגמאות.

ראיונות מובנים למחצה נעשו עם חמישה סטודנטים מקבוצת הניסוי ועם חמישה סטודנטים מקבוצת הביקורת. החוקר בעצמו ראיין את כל הראיונות מקבוצת הניסוי ומקבוצת הביקורת. כל ריאיון נעשה בנפרד עם כל אחד מפרחי ההוראה ונמשך 30-35 דקות.

למחקר זה נוסחו שני שאלונים: שאלון מקדים (pre test) ושאלון מסכם (post test). השאלונים היו כתובים בעברית, כיוון שהשפה הרשמית שבה לומדים פרחי ההוראה את כל הקורסים בהתמחות היא עברית. השאלונים היו בעלי מבנה אחיד וכללו מספר זהה של שאלות לבדיקת כל קטגוריה. בשני השאלונים הופיעו שאלות שניסח החוקר ושאלות שנלקחו מספרות המחקר.

מטרת השאלון המקדים הייתה לראות אם יש הבדל או אין הבדל בין שתי הקבוצות – קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת – ובקבוצת הניסוי להשוות בין השאלון המקדים ובין השאלון המסכם, כדי לבדוק האם יחידת הלימוד בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות השפיעה על משתתפי המחקר.

בכל שאלון היו שני חלקים: חלק א כלל 10 טענות מתמטיות, 2 טענות נכונות ו-8 טענות שגויות. בחלק ב שתי טענות: לטענה הראשונה היו שלושה סעיפים ובכל סעיף נדרש המשתתף לסמן את התשובה הנכונה, ולטענה השנייה היו שני סעיפים שבהם נדרש המשתתף לתת דוגמה או דוגמה נגדית. משך זמן מילוי כל שאלון בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת היה כשעה אחת. להלן לוח 1 שבו מתוארים חלקי השאלון המקדים והשאלון המסכם.

לוח 1: מבנה שאלון המחקר וחלקיו

חלק	טענה	נתון	מטלה	המטרה
א	1 עד 10	10 טענות מתמטיות, מתוכן, 8 שגויות ו-2 נכונות	לסמן נכון או לא נכון להוכיח את הטענה או להפריך אותה באמצעות דוגמה נגדית	1. להעריך את מידת הצלחת פרחי הוראה בקביעת ערך האמת של טענה מתמטית 2. להעריך את מידת ההצלחה של פרחי הוראה ביצירת דוגמאות נגדיות 3. לזהות אם פרחי הוראה מספקים דוגמאות נכונות לטענה נכונה 4. לבדוק אם פרחי הוראה מספקים דוגמאות במקום דוגמאות נגדיות לטענות שגויות
ב	סעיפים 1, 2	טענה שבה יש צורך לבחור את התשובה הנכונה	1. בשאלה 1 צריך לסמן את התשובה הנכונה בשלושת הסעיפים 2. בשאלה 2 יש להדגים באמצעות דוגמה המקיימת את הטענה ובאמצעות דוגמה הסותרת את הטענה	1. לבדוק מה מידת הצלחת פרחי הוראה לספק אי-דוגמה לטענה 2. לבדוק מה מידת הצלחת פרחי הוראה לספק דוגמה המקיימת את הטענה ודוגמה הסותרת את הטענה

ניתוח נתונים

במחקר הזה נאספו נתונים באמצעות שאלונים (שאלון מקדים ושאלון מסכם) ובאמצעות ראיונות אישיים מובנים למחצה עם סטודנטים מקבוצת הניסוי ומקבוצת הביקורת. להלן אתאר כיצד נותחו הנתונים שנאספו באמצעות כלים אלה.

ניתוח השאלונים

בשני השאלונים היה צורך לקבוע "נכון" או "לא נכון" ולנמק וגם לסמן את התשובה הנכונה. מסיבה זו התוצאות שהתקבלו נותחו בשתי דרכים: ניתוח כמותני וניתוח איכותני. התשובות בחלק א מוינו לכמה קטגוריות המראות את מידת הצלחתם של משתתפי המחקר לספק דוגמאות נגדיות לפי השאלות האלה:

1. האם פרח ההוראה קבע שהטענה שגויה?
2. האם פרח ההוראה סיפק דוגמה נגדית?
3. האם הדוגמה הנגדית נכונה?

ניתוח כמותני

1. חישוב שכיחויות למספר התשובות הנכונות לקביעת נכונות כל טענה.
2. חישוב שכיחויות הנימוקים הנכונים לכל טענה אצל פרחי ההוראה.

מבחנים סטטיסטיים לבדיקת הפרש תוחלת מדגמים בלתי תלויים, לצורך בדיקת שינויים אצל קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת. כל ההשוואות הסטטיסטיות נבדקו ברמת מובהקות 5%.

ניתוח איכותני

במהלך הראיונות היה דיון על נימוקים ותשובות מתוך השאלונים שנאספו:

1. הנימוקים שנגעו לשאלות על מתן דוגמה נגדית נאספו מכל השאלונים.
2. נימוקים נגעו לשאלות על היכולת ליצור אי-דוגמאות לטענה.

הליך המחקר

כדי לענות על שאלה מס' 1 (באיזו מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות משפיעה על יכולתם להפריך טענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי דוגמאות נגדיות?) חשפנו את קבוצת הניסוי להוראה ממוקדת בדוגמאות נגדיות, ואילו קבוצת הביקורת למדה שיעור רגיל ללא חשיפה ממוקדת לדוגמאות נגדיות. חשיפת קבוצת הניסוי נמשכה שלושה חודשים, פעם בשבוע במשך כ-10 דקות ניתנה טענה, והיא הופרכה באמצעות דוגמאות נגדיות. בתום תקופת החשיפה מילאו משתתפי המחקר, הן קבוצת הניסוי והן קבוצת הביקורת, שאלון מסכם שהותאם למבנה השאלון המקדים. לאחר מילוי השאלונים נותחו סטטיסטית הנתונים שנאספו כדי לבדוק האם קיימים הבדלים בין יכולות משתתפי קבוצת הניסוי ובין יכולות משתתפי קבוצת הביקורת. כמו כן בתום הניסוי (תקופת החשיפה שנמשכה שלושה חודשים) התקיימו ראיונות עם חמישה פרחי הוראה שהיו בקבוצת הניסוי כדי לדעת מהן עמדותיהם כלפי נושא דוגמאות נגדיות.

כדי לענות על שאלה מס' 2 (באיזה מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת באי-דוגמאות משפיעה על יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי אי-דוגמאות?) חשפנו את קבוצת הניסוי להוראה ממוקדת באי-דוגמאות, ואילו קבוצת הביקורת למדה שיעור רגיל ללא חשיפה ממוקדת לאי-דוגמאות. חשיפת קבוצת הניסוי נמשכה שלושה חודשים, פעם בשבוע במשך כ-10 דקות ניתנו למתכשרים בקבוצת הניסוי טענות והגדרות מתמטיות באמצעות דוגמאות תומכות ואי-דוגמאות. בתום תקופת החשיפה מילאו משתתפי המחקר, הן בקבוצת הניסוי והן בקבוצת הביקורת, שאלון מסכם. בשאלון המסכם, כפי שהדבר נעשה בשאלון המקדים, נתבקשו פרחי ההוראה לספק אי-דוגמאות. לאחר מילוי השאלונים נותחו סטטיסטית הנתונים שנאספו כדי לבדוק האם קיימים הבדלים בין יכולות משתתפי קבוצת הניסוי ובין יכולות משתתפי קבוצת הביקורת. כמו כן בתום הניסוי (תקופת החשיפה שנמשכה שלושה חודשים) התקיימו ראיונות עם חמישה פרחי הוראה שהיו בקבוצת הניסוי כדי לדעת מהן עמדותיהם כלפי נושא אי-דוגמאות.

ממצאים

להלן יוצגו תוצאות המחקר וממצאיו, כפי שהתקבלו מניתוח השאלונים והראיונות, מתוך שילוב בין הממצאים הכמותיים ובין הממצאים האיכותניים. הממצאים הכמותיים נותחו באמצעות מבחנים סטטיסטיים של מבחני הפרש תוחלת בין מדגמים בלתי תלויים שנערכו לצורך בדיקת ההבדלים בין קבוצת הניסוי לקבוצת הביקורת, וכן מבחנים סטטיסטיים שבדקו האם קיימים הבדלים בקבוצת הניסוי בין השאלון המקדים (pre) לשאלון המסכם (post). הממצאים האיכותניים נותחו באמצעות ניתוח תוכן.

נעשה מבחן סטטיסטי להשוואה בין קבוצת הניסוי בשאלון מקדים (pre test) לקבוצת ניסוי בשאלון המסכם (post test). מטרת המבחן היא לדעת אם בקבוצת הניסוי חל שינוי כלשהו אחרי העברת יחידת הלימוד אשר ליכולת המתכשרים ליצור דוגמאות נגדיות. להלן לוחות 2-3 שבהם מפורטות התפלגויות תשובות המשיבים מקבוצת הניסוי אשר לטענות שעניינן יצירת דוגמה נגדית. בלוח 2 מתוארות ההתפלגויות מהשאלון המקדים, ובלוח 3 מתוארות ההתפלגויות מהשאלון המסכם.

לוח 2: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לטענות העוסקות ביצירת דוגמה נגדית בשאלון המקדים

	שאלות העוסקות בנכון / לא נכון וביצירת דוגמה נגדית בשאלון מקדים															
קבוצת הניסוי מס' נבדק	Q1 f\t	Q1 Res	Q2 f\t	Q2 Res	Q4 f\t	Q4 Res	Q6 f\t	Q6 Res	Q7 f\t	Q7 Res	Q8 f\t	Q8 Res	Q9 f\t	Q9 Res	Q10 f\t	Q10 Res	Q15
סה"כ ענו נכון	15	10	12	9	12	12	13	9	6	3	7	0	3	3	6	4	0
סה"כ ענו לא נכון	1	5	4	6	4	3	3	5	8	8	8	9	11	10	10	8	3
סה"כ לא השיבו	0	1	0	1	0	1	0	2	2	5	1	7	2	3	0	4	13

לוח 3: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות בקטגוריה דוגמה נגדית בשאלון המסכם

	שאלות הנוגעות לנכון / לא נכון וליצירת דוגמה נגדית בשאלון המסכם																
קבוצת הניסוי מס' נבדק	Q1 f\t	Q1 Res	Q2 f\t	Q2 Res	Q3 f\t	Q3 Res	Q4 f\t	Q4 Res	Q6 f\t	Q6 Res	Q7 f\t	Q7 Res	Q8 f\t	Q8 Res	Q10 f\t	Q10 Res	Q15
סה"כ ענו נכון	15	14	12	11	9	5	9	9	1	0	8	7	5	1	13	10	14
סה"כ ענו לא נכון	1	2	4	5	7	9	7	5	15	12	8	6	11	12	3	4	2
סה"כ לא השיבו	0	0	0	0	0	2	0	1	0	4	0	3	0	3	0	2	0

תוצאת המבחן הסטטיסטי שבדק האם חל שינוי בקבוצת הניסוי אחרי העברת יחידת הלימוד ברמת מובהקות 5% היא 1.59, תוצאה זו קטנה מהקריטי (T=1.679), ולכן ברמת מובהקות של 5% אי אפשר לקבוע שחל שינוי בקבוצת הניסוי בתחום היכולת שלהם ליצור דוגמה נגדית. במילים אחרות, הוראת יחידת הלימוד הייחודית לא שיפרה את יכולות קבוצת הניסוי ליצור דוגמה נגדית. אבל אם נגדיל את רמת המובהקות מ-5% ל-10% מובהקות אזי הסטטיסטי שהוא 1.59 גדול מהקריטי (T=1.301), ולכן ברמת מובהקות זו נמצא שיפור ביכולות קבוצת הניסוי ליצור דוגמאות נגדיות.

קשיים ביצירת דוגמה נגדית

פרחי הוראה מתקשים ליצור דוגמה נגדית לטענות מתמטיות. לטענת הסטודנטית ר': "אני מאמינה שלכל טענה שקרית יש בדרך כלל יותר מדוגמה אחת, אף על פי שאני בטוחה שיש עוד דוגמאות נגדיות, אני לא מחפשת אותן כי זה קשה למצוא אותן, זה דורש יותר זמן ומחשבה."

קושי במציאת דוגמאות נגדיות ניכר היטב בטענה 6: "הפונקציה $f(x)=x4+12x+12$ אינה מקבלת ערכים שליליים". לטענה זו אף לא אחד מפרחי ההוראה בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת סיפק דוגמה נגדית. אומנם משיבים אחדים קבעו שהטענה הזו אינה נכונה, אבל הם לא נימקו את תשובתם ולא יצרו דוגמה נגדית שיכולה להוכיח מדוע הטענה אינה נכונה. רוב פרחי ההוראה (15 מתוך 16) סברו שהטענה נכונה, והיו משיבים שלא השיבו על טענה זו. מבדיקת תשובות המשיבים עולה שרוב פרחי ההוראה בדקו מקרים מעטים כמו הצבת מספרים, פעם שליליים ופעם חיוביים, ואז הסיקו בשוגג שהטענה נכונה, וכן ניכר שלפרחי ההוראה אין מספיק ידע תוכן מתמטי כדי לקבוע שטענה זו שגויה. זאת ועוד, רוב המספרים שהיו "חשודים" אצל המשיבים ושהציבו אותם, היו מספרים שלמים. המשיבים לא חשבו כלל על הצבת שבר עשרוני, למשל. משלא הצליחו למצוא דוגמה נגדית, הסיקו המשיבים שהטענה נכונה, מבלי לחשוב על כיוונים אחרים כמו שרטוט פונקציה שיש לה חיתוך עם ציר ה-X, כך עלה גם מהראיונות עם פרחי ההוראה.

אימות טענה מתמטית על סמך בדיקת מקרים בודדים

פרחי הוראה נוטים לקבוע אם הטענה אמיתית או שגויה על סמך בדיקת מעט דוגמאות, ואולם ידע מעמיק בתחום התוכן המתמטי משפיע על היכולת של פרחי הוראה לקבוע אם הטענה אמיתית או שגויה. מניתוח התוצאות העוסקות בקביעת נכונות או אי-נכונות הטענה המתמטית אפשר לראות שפרחי ההוראה התקשו לקבוע אם טענה מסוימת היא נכונה או לא נכונה. למשל, בטענה 7 ("לכל n שלם חיובי, המספר $n2+n+41$ הוא ראשוני") רק 11 משיבים (23.9%) קבעו שהטענה שגויה, מהם בדקו רק כמה מספרים טבעיים מעטים כדי לקבוע שהטענה נכונה. בריאיון עם מתכשרת בקבוצת הניסוי על טענה 7 היא סיפרה: "אני בדקתי כמה מספרים טבעיים וכל תוצאה שהתקבלה הייתה מספר ראשוני, לכן חשבתי שטענה זו נכונה." זאת ועוד, נראה שפרחי ההוראה נטו להתעלם ממספרים שליליים, מ-0 וממספרים רציונליים בקביעת ערך האמת של טענה מתמטית זו. ייתכן שהתעלמות זו מקורה בהיעדר ידע תוכן מתמטי מספק. לדברי אחד המרואיינים: "אם מסתכלים על הטענה רואים שהמספר 41 הוא ראשוני, והביטוי $n2+n$ כל הצבת מספר טבעי בביטוי תיתן מספר זוגי, וגם בדקתי שזה יוצא זוגי, לכן $+41$ מספר זוגי נקבל תוצאה מספר ראשוני." מכאן אפשר להסיק שחוסר ידע בתוכן מתמטי הוביל את המרואיין להסיק מסקנה שגויה. כדי

לספק דוגמאות נגדיות ולהשתמש בהן צריך להבין היטב הגדרות מתמטיות ומושגים מתמטיים וכן להבין הנמקה דדוקטיבית. נראה שהמתכשרים מתקשים בנושאים אלה, והדבר משפיע על יכולתם לבנות דוגמאות נגדיות, להבין אותן ולהשתמש בהן בהוראה (Zaslavsky & Peled, 1996).

אי-דוגמאות

לוח 4: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות באי-דוגמה בשאלון המקדים

מספר נבדקים	Q11	Q12
סה"כ ענו נכון	4	7
סה"כ ענו לא נכון	12	9
סה"כ לא השיבו	0	0

ממוצע: (0.68)
סטיית תקן: (SD=0.704)

לוח 5: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות באי-דוגמה בשאלון המסכם

מספר נבדקים	Q11	Q12
סה"כ ענו נכון	11	8
סה"כ ענו לא נכון	5	8
סה"כ לא השיבו	0	0

ממוצע: (1.18)
סטיית תקן: (SD=0.54)

ברמת מובהקות עד 5% התוצאה מובהקת, כלומר יש שיפור בתוצאות קבוצת הניסוי בשאלון המסכם. מכאן אפשר להסיק שחשיפת פרחי הוראה ללמידה ממוקדת באי-דוגמאות משפרת את יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות.

כאמור, לאחר הוראת יחידת הלימוד הייחודית בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות ערכתי ראיונות מובנים למחצה עם חמישה פרחי הוראה כדי להעמיק את ההבנה אשר לעמדותיהם כלפי אי-דוגמאות. מתוך הראיונות האלו חולצו הדפוסים שחזרו אצל חלק מפרחי הוראה, והם מוינו לשלוש קטגוריות, כפי שיופרטו להלן.

לא רגיל להשתמש באי-דוגמה

בדרך כלל פרחי הוראה אינם משתמשים במושג אי-דוגמה בלימודיהם, אף שתפקיד המושג הוא להבחין בין תכונה חיונית ובין תכונה שאינה חיונית של מושג מתמטי. מהראיונות עם המתכשרים עולה שרוב הזמן הם "רגילים" ליצור דוגמאות תומכות למושג או לטענה מתמטית, ושבהסברים שהם מקבלים ממרצים בקורסים למיניהם, לרוב הסברי המרצים מבוססים על דוגמאות תומכות המראות מדוע הטענה נכונה. בעבור מקצת המרואיינים המושג אי-דוגמה היה חדש או ששמעו עליו מעט מאוד בלימודיהם.

קטע א מתוך ריאיון עם מ':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: האם אתה זוכר ששמעת על המושג אי-דוגמה במהלך לימודיך במכללה. מ': לא זכור לי המושג אי-דוגמה. מורה: לאחר שלמדנו על אי-דוגמה תוכל להגדיר אותה מחדש?	המושג אי-דוגמה חדש יחסית בעבור פרחי הוראה, ברוב הפעמים הם ראו דוגמאות תומכות למושג ונחשפו אליו חשיפה ממוקדת בניסוי שנעשה במחקר הזה.
מ': כן, אני יכול?... זה דוגמה שהתפקיד שלה לא לתמוך בטענה וגם לא לסתור אותה... מורה: כלומר? מ': דוגמה שמחדדת מה שייך לטענה ומה שלא שייך לטענה. מורה: האם היו לך שימושים במושג זה בעבר? מ': לא זוכר.	

מעמיק ידע

מתן דוגמאות תומכות ואי-דוגמאות למושג או לטענה כלשהי מעמיק את הידע של הלומדים, כי הבנת מושג בשתי הגישות, בדוגמאות תומכות ואי-דוגמאות, יכול להקנות ללומדים מיומנות של חשיבה ביקורתית ולהעמיק את ההבנה שלהם למושג שלמדו.

קטע ב מתוך ריאיון עם פ':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: אבל אתה אמרת שאתה רגיל ליצור או לראות דוגמאות תומכות וזה עזר לך להבין את מה שלמדת טוב? פ': נכון... אבל אם היו מראים לי גם דוגמאות תומכות וגם אי-דוגמאות הייתי מבין ויודע יותר טוב. מורה: במה אי-דוגמאות עזרו לך? פ': אם אני יכול לספק דוגמאות וגם אי-דוגמאות... זה ברור שאני מבין את המשפט ומה ההגבלות שלו.	יצירת דוגמאות תומכות ואי-דוגמאות עזר למתכשרים להבין את המושג המתמטי ביעילות רבה יותר וגם להבחין אילו סוגי דוגמאות הלומדים מספקים למושג או להגדרה.

קל למצוא אי-דוגמה לטענה מתמטית

רוב פרחי הוראה לא השתמשו באי-דוגמאות בתדירות גבוהה. לאחר הוראת יחידת הלימוד שכללה דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות, ידעו המתכשרים מהו תפקידן של אי-דוגמאות, ולכן היה להם קל יותר ליצור למושגים ולהגדרות אי-דוגמאות. רוב המתכשרים דיווחו בראיונות שיצירת אי-דוגמאות למושגים היא שיטה קלה ואינה מסובכת כמו הדוגמה הנגדית. במילים אחרות, לפרחי הוראה היה יותר קל ליצור אי-דוגמאות מאשר ליצור דוגמאות נגדיות הסותרות את הטענה המתמטית.

קטע ג מתוך ריאיון עם א':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: למה אתה חושב שעכשיו אתה יכול ליצור אי-דוגמה? א': כי היא לא דורשת הרבה תנאים... כמו הדוגמה הנגדית שצריך לחפש אותה ואולי קשה לי למצוא אותה. מורה: זה יותר קל בהשוואה לדוגמה נגדית? א': זה בכללי יותר קל עבורי למצוא אי-דוגמה...	לאחר הבנת תפקידה של האי-דוגמה, למתכשרים קל יותר למצוא אי-דוגמאות. למתכשרים קשה יותר ליצור דוגמה נגדית, ויצירת אי-דוגמה נתפסת בעיניהם קלה יותר.

סיכום

למחקר הנוכחי היו שתי מטרות עיקריות: האחת, לחשוף את המתכשרים להוראת מתמטיקה במסלול העל-יסודי במכללה לחינוך לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות כדי להעריך את יכולתם להפריך טענות מתמטיות; והשנייה, לחשוף את המתכשרים האלה לסביבה למידה ממוקדת באי-דוגמאות כדי להעריך את יכולתם לספק אי-דוגמאות לטענות מתמטיות.

בעקבות ממצאי המחקר אי אפשר לקבוע ברמת מובהקות של 95% עם דרגת חופש של 5% שהחשיפה ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות שיפרה את יכולתם של פרחי הוראה לספק דוגמאות נגדיות. נמצא שבשאלון המסכם קבוצת הניסוי לא קיבלה תוצאות טובות יותר ומובהקות בהשוואה לקבוצת הביקורת. ממוצע קבוצת הניסוי (16 פרחי הוראה) בשאלון המקדים היה 7.75 (סטיית תקן 2.13), ואילו הממוצע של אותה הקבוצה בשאלון המסכם היה 9.0 (סטיית תקן 2.875). אומנם הממוצע לאחר החשיפה היה גבוה יותר, אך לא מובהק סטטיסטית.

אחת הסיבות לאי היכולת ליצור דוגמה נגדית היא תחושת הקושי. ייתכן שקושי זה נובע מחוסר ידע בתוכן מתמטי, דבר המונע מן המתכשרים לספק דוגמה נגדית. למשל, בטענה "הפונקציה $f(x)= x4+12x+12$ אינה מקבלת ערכים שליליים", מעט מאוד פרחי הוראה השתמשו בשיטת הניתוח כדי לספק את הדוגמה הנגדית. לדעת ינון ועמיתיו (Iannone et al., 2011), שימוש בניתוח עשוי להוביל את המתכשרים לספק דוגמה נגדית, מפני שהניתוח הוא תהליך מתוחכם מאוד המבוסס על ייצור רצף של מסקנות שהלומדים מסיקים כל הזמן.

לאחר חשיפת המתכשרים לדוגמאות נגדיות הם נהיו "חשדניים" יותר כלפי כל טענה ולא מיהרו לקבוע אם היא נכונה או שגויה. לדברי אחד המתכשרים: "בעבר חשבנו שכמעט כל הטענות נכונות. היום לאחר שלמדנו וראיתי כמה טענות שקריות, אני לא מאשר נכונות טענה עד שאני רואה את ההוכחה שלה." כמו כן המתכשרים נעשו זהירים יותר כלפי הטענות. ממצא זה עולה בקנה אחד עם ממצאיו של קלימשוק וקאצ'אפווה (Klymchuk & Kachapova, 2011) שלפיהם לאחר חשיפת הסטודנטים לדוגמאות נגדיות הם היו זהירים יותר ומחושבים כלפי התנאים של הטענות, והבנתם את המושגים הנלמדים השתפרה. זאת ועוד, החשיפה הזו עזרה לסטודנטים לצמצם טעויות נפוצות בלימודי מתמטיקה.

בעקבות חשיפת פרחי הוראה ללמידה ממוקדת באי-דוגמאות ניכר שיפור מובהק ביכולת של מתכשרים בקבוצת הניסוי ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות בהשוואה לקבוצת הביקורת. המושג אי-דוגמה מתמטית נוגע לדוגמאות שאינן תומכות בטענה או בהגדרה וגם אינן סותרות את הטענה. מטרת השימוש באי-דוגמה היא להבין את המושג המתמטי טוב יותר ובקלות. אוסף דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות נחוץ למורים ולתלמידים כדי להבין הגדרות מתמטיות במדויק (Wilson, 1990). ברם, מעט מאוד פרחי הוראה השתמשו באי-דוגמה, כיוון שהם הורגלו ליצור דוגמאות תומכות כדי לחזק את ההבנה שלהם להגדרה או לטענה כלשהי. לטענת אלקוק (Alcock, 2004), תלמידים אינם רגילים לחשוב על אובייקט שלא חל על ההצהרות או על הגדרות. טענתה זו מחזקת את הממצאים שלאחר החשיפה לאי-דוגמאות למדו פרחי ההוראה (בקבוצת הניסוי) ליצור אי-דוגמאות ולהשתמש בהן, והדבר ניכר במובהק בשאלון המסכם שמילאו. ממצא זה עולה בקנה אחד עם מחקרן של צמיר ועמיתותיה (Tsamir et al., 2008) שדיווחו שתלמידים בני 6 הצליחו לזהות אי-דוגמאות של משולשים.

לסיכום, ממצאי המחקר ומסקנותיו עולה שיש חשיבות רבה שפרחי הוראה ייחשפו לדוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות, משום שמימונויות אלה יסייעו להם במהלך הוראת המתמטיקה בכיתה, כשיצטרכו להתמודד עם טענות שגויות של תלמידים או עם אי הבנה של התלמידים בנושא מסוים. כיוון שאוכלוסיית הניסוי לא הייתה גדולה (16 פרחי הוראה בלבד) טוב ייעשה אם יתקיים מחקר חוזר נוסף, זאת כדי לבסס את תוצאות המחקר ומסקנותיו על קבוצת מחקר גדולה יותר.

רשימת מקורות

Alcock, L. (2004). Uses of example objects in proving. *Proceedings of the 28th Conference of the International group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 17-24). New Jersey, US: Rutgers University press.

Antonini, S. (2003). Non-examples and proof by contradiction. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 49-56.

Antonini, S. (2011). Generating examples: Focus on processes. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(2), 205-217. doi:10.1007/s11858-011-0317-6

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 57-64). Norwich: University of East Anglia.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 1-14. doi:10.1007/s10649-011-9299-0

Klymchuk, S., & Kachapova, F. (2011). Paradoxes and counterexamples in teaching and learning of probability at university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 803-811. doi:10.1080/0020739X.2011.633631

Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68-77. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.005

Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 20-35. doi:10.1016/j.jmathb.2012.09.003

Leung, I. K. C., & Lew, H.-C. (2013). The ability of students and teachers to use counter-examples to justify mathematical propositions: A pilot in South Korea and

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 97-109. doi:10.1007/s10649-008-9142-4

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Yopp, D. A. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 39,* 79-99. doi:10.1016/j.jmathb.2015.06.003

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78. doi:10.2307/749198.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15-21.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165-182. doi:10.1007/s10649-008-9140-6

Hong Kong. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(1), 91-105. doi:10.1007/s11858-012-0450-x

Michener, E. R. (1978). Understanding mathematics. *Cognitive Science, 2*(4), 361-383. doi:10.1207/s15516709cog0204_3

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2009). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *In Proceedings of CERME 6* (pp. 281-290). Lyon: INRP.

Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 187-208). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Saglam, Y., & Dost, Ş. (2016). A qualitative research on example generation capabilities of university students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(5), 979-996. doi:10.1007/s10763-015-9624-7

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 81-95. doi:10.1007/s10649-008-9133-5

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2*(2), 237-249. doi:10.1080/14926150209556516

נספחים

שאלון מחקר מקדים

סטודנטים יקרים,

שאלון זה מיועד לבחון את השימוש בדוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות בהוראת המתמטיקה.

השאלון הוא אנונימי, לכן אין זה חובה לרשום שם או כל פרט מזהה אחר. השאלון מיועד לצורכי מחקר בלבד.

בשאלון שני חלקים א ו-ב, נא לענות על כל החלקים.

חלק א

בחלק זה מוצגות 10 טענות. חלקן נכונות מתמטיות וחלקן שגויות, אם הטענה נכונה נא לרשום נכון ולהצדיק אותה. ואם שגויה נא לרשום לא נכון ולהביא דוגמה נגדית אחת.

טענה 1: לכל שני מספרים שלמים חיוביים, אם אף אחד מהם לא מתחלק ב-7 ללא שארית, אז גם סכומם לא מתחלק ב-7 ללא שארית.

טענה 2: לכל n שלם חיובי, אם n2 אי זוגי אז n ראשוני.

טענה 3: משולשים דומים ושווי שטח, הם חופפים.

טענה 4: האם (a + b) 2 = a2 +b2? נמק.

טענה 5: לכל מספר ממשי x, y אם |x+y|=|x|+|y| אז xy>0.

טענה 6: לכל n שלם חיובי, מתקיים n2< 2n.

טענה 7: לכל n שלם חיובי, המספר n2 +n+41 הוא ראשוני.

טענה 8: ההפרש בין שני מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.

טענה 9: אם הקטע KJ = KL אז K אמצע הקטע JL.

טענה 10: לכל מרובע ABCD אם CD= AB וגם AD||BC, אז המרובע ABCD מקבילית.

חלק ב

1. נתונה טענה: מספר "עודף" הוא מספר שסכום המחלקים שלו חוץ מהמספר עצמו, גדול מהמספר עצמו.
   1. סמן את התשובה הנכונה, המספר 220 הוא:
      א. דוגמה נגדית לטענה
      ב. אי-דוגמה לטענה
      ג. דוגמה מקיימת את הטענה.
   2. סמן את התשובה הנכונה, המספר 28 הוא:
      א. דוגמה נגדית לטענה
      ב. אי-דוגמה לטענה
      ג. דוגמה מקיימת את הטענה
   3. סמן את התשובה הנכונה, המספר 144 הוא:
      א. דוגמה נגדית לטענה
      ב. אי-דוגמה לטענה
      ג. דוגמה מקיימת את הטענה
2. נתונה הטענה : כל קבוצה A מקיימת $A\subseteq P(A)$.
   תן דוגמה שמקיימת את הטענה:_____
   תן דוגמה שסותרת את הטענה:_____

תודה על שיתוף הפעולה!

שאלון מחקר מסכם

סטודנטים יקרים,

שאלון זה מיועד לבחון את השימוש בדוגמאות נגדיות ואי דוגמאות בהוראת המתמטיקה.

השאלון הוא אנונימי, לכן אין זה חובה לרשום שם או כל פרט מזהה אחר. השאלון מיועד לצורכי מחקר בלבד.

בשאלון שני חלקים א ו-ב, נא לענות על כל החלקים.

חלק א

בחלק זה מוצגות 10 טענות חלקן נכונות מתמטיות וחלקן שגויות, אם הטענה נכונה נא לרשום נכון ולהצדיק אותה. ואם שגויה נא לרשום לא נכון ולהביא דוגמה נגדית אחת.

טענה 1: סכום כל 4 מספרים טבעיים עוקבים, מתחלק ב-4 ללא שארית.

טענה 2: לכל n טבעי $3n2+1>3n$

טענה 3: אם שתי צלעות וזווית של משלוש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות וזווית של משולש אחר, אז המשולשים חופפים.

טענה 4: אם הפונקציה יורדת עבור $x<0$ ועולה עבור $x>0$, אז $x=0$ היא נקודת מינימום.

טענה 5: הביטוי $n3-n$, מתחלק ב-6 ללא שארית, לכל n טבעי.

טענה 6: לפונקציה $f(x)= x4+12x+12$, אין פתרונות בתחום השלילי.

טענה 7: לכל n שלם חיובי, המספר $n2 - n 11+$ הוא ראשוני.

טענה 8: סכום שני מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.

טענה 9: למשוואה $y2-5x2=6$ אין פתרונות של מספרים שלמים.

טענה 10: אם סכום שתי זוויות הוא 1800, אז הזוויות הן צמודות.

חלק ב

1. נתונה טענה: פונקציה זוגית היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים, ומקיימת לכל x בתחום ההגדרה את השוויון: $f(-x)=f(x)$.
   1. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה: $f(x) = 4x^3 - \frac{5}{x}$
      א. דוגמה נגדית
      ב. אי-דוגמה
      ג. דוגמה מקיימת
   2. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה: $f(x)= \sin x$:
      א. דוגמה נגדית
      ב. אי-דוגמה
      ג. דוגמה מקיימת
   3. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה $f(x)= \ln(x2+1)$:
      א. דוגמה נגדית
      ב. אי-דוגמה
      ג. דוגמה מקיימת
2. נתונה הטענה : $|a2+b3+c4|= |a2|+|b3|+|c4|$
   תן דוגמה שמקיימת את הטענה:_____
   תן דוגמה שסותרת את הטענה:_____

תודה על שיתוף הפעולה!

מודל העמקת"י: הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית מותאמת דינמית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים

מירב צהר-רוזן

ניצה מרק-זגדון



ד"ר מירב צהר-רוזן

מרצה במכללת לוינסקי לחינוך ובאוניברסיטת תל-אביב בתחום החינוך המיוחד והוראה מותאמת במתמטיקה. לשעבר מדריכה ארצית במתמטיקה בחינוך המיוחד.

תחום מחקר עיקרי: פיתוח וחקר תוכניות התערבות במתמטיקה לתלמידים בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד, בדגש על הכוונה עצמית בלמידה.



ד"ר ניצה מרק-זגדון

מרצה וחוקרת במכללת לוינסקי לחינוך ובאוניברסיטת תל-אביב בתחום של התפתחות חשיבה מתמטית וקשיים במתמטיקה. עמדה בראש צוות כתיבת התאמות לתוכנית הלימודים במתמטיקה לחינוך המיוחד מטעם משרד החינוך.

תקציר

במאמר זה מוצג מודל ל**ה**כוונה **ע**צמית **מ**טה-קוגניטיבית מו**ת**אמת דינמית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים – מודל העמק"י. למודל העמק"י שתי מטרות מרכזיות: א. פיתוח מיומנויות של הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית לתלמידים עם צרכים מיוחדים, לצורך שיפור יכולת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה; ב. פיתוח דרך הוראה מפורשת להטמעת המודל ויישומו. המאמר מציג את הרקע התאורטי שעליו נשען המודל, את ההתאמות שנעשו בו לתלמידים עם צרכים מיוחדים ואת העקרונות להטמעתו בשדה. כמו כן מתוארות שתי דוגמאות ליישום ראשוני של המודל בעבודה עם שני תלמידים ברמות תפקוד שונות זו מזו.

מילות מפתח: הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית; בעיות מילוליות במתמטיקה; תלמידים עם צרכים מיוחדים; הוראה מפורשת.

רקע תאורטי

בעיות מילוליות הן אחד הנושאים החשובים בחינוך המתמטי. לידע בפתרון בעיות חשיבות רבה עבור הלומד בכלל, ועבור הלומד עם הצרכים המיוחדים בפרט. באמצעות בעיות מילוליות יכול הלומד "לזהות, להבין את המתמטיקה, להתנסות בה, לשפוט את התפקיד שהמתמטיקה ממלאת בחייו האישיים של הפרט בהווה ובעתיד וליישם מושגים וכלים מתמטיים לפתרון בעיות, כפי שנדרש מאזרח בחייו האישיים, בחייו המקצועיים, בחייו החברתיים וכאזרח בונה ורפלקטיבי" (OECD, 2003, p. 23). תיאור זה מדגיש את שימושן הנרחב והניכר של בעיות מילוליות, בכך שהוא משלב בין ההיבט המתמטי ובין ההיבט היישומי. לשילוב זה תפקיד חשוב עבור תלמידים עם צרכים מיוחדים: באופן זה הם יכולים ללמוד את התכנים המתמטיים ואת יישומם בחיי היום-יום. רכישת ידע כזה תאפשר להם חיים עצמאיים יותר בקהילה ובחברה.

עם זה מחקרים מראים שנושא זה הוא אחד הנושאים הקשים לתלמידי בית הספר היסודי (OECD, 2014). פתרון בעיות

מילוליות הוא תהליך מורכב הדורש התמודדות בשלושה תחומים: א. שליטה בתחומי ידע ומיומנויות מגוונים כגון ידע מתמטי וידע לשוני; ב. הפעלת תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים על תחומי הידע; ג. ביצוע אינטגרציה יעילה בין התחומים (Schoenfeld, 1992; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). תהליך מורכב זה קשה עוד יותר לתלמידים עם צרכים מיוחדים, שלכמה מהם יש קשיים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים מהותיים (Desoete & Roeyers, 2005; Geary, Hoard, Nugent, & Bailey 2012; Montague & Dietz, 2009) ובהם נדון במאמר זה. אחת הדרכים שנמצאה יעילה בהתמודדות עם קשיים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה היא הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית (Fernandez & Jamet, 2017; Gidalevich & Kramarski, 2019; Mevarech & Kramarski, 2014; Rosenzweig, Kravec, & Montague, 2011; Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014, 2017).

הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית (להלן: הכוונה מטה-קוגניטיבית) מוגדרת כתהליך שבו הלומד מציב מטרות, מתכנן, מפקח ומעריך את עבודתו מתוך התמקדות ישירה ומפורשת בתהליך (Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008). בתהליך זה מפעיל הלומד ידע על עצמו, על המשימה ועל האסטרטגיה בביצוע בקרה על תהליכים אלו. הכוונה מטה-קוגניטיבית מורכבת מארבעה שלבים עיקריים (Pintrich, 2000):

- תכנון (Planning): שלב זה כולל הצבת מטרה, הפעלה של ידע קודם והפעלת ידע מטה-קוגניטיבי על אודות המטלה והעצמי.
- ניטור (Monitoring): שלב זה מתמקד בהערכת מידת יעילות האסטרטגיות שנבחרו הן בעניין התוכן והן בעניין העצמי.
- בקרה (Control): שלב זה מתמקד בביצוע שינויים על פי תהליך הפתרון ודרך ההתמודדות עם המשימה באשר לתוכן, לאסטרטגיות ולעצמי.
- רפלקציה (Reflection): שלב זה מתמקד בהערכת הביצועים ובהנמקתם לפי המשימה עצמה ולפי תהליכי ההכוונה העצמית.

כאמור, תהליך ההכוונה המטה-קוגניטיבית נחקר רבות ופיתחו בעניינו תוכניות התערבות מגוונות לצורך התמודדות עם בעיות מילוליות במתמטיקה. פעמים רבות בתוכניות אלה נעשה שימוש באסטרטגיית שאילת שאלות עצמיות (Mevarech & Kramarski, 2014), שנמצאה משפרת את הישגי הלומד בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (Kramarski & Mevarech, 2003; Schoenfeld, 1992; Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014). כמו כן במרבית התוכניות, פיתוח מיומנויות הכוונה מטה-קוגניטיבית נעשה באמצעות הוראה מפורשת (Kistner et al., 2010; Kramarski, Weiss, & Sharon, 2013). בהוראה זו המורה חושף את התלמידים חשיפה ישירה לשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית, מתוך העמקה בחשיבותם ובתהליך יישומם (Veenman, 2007). הוראה מפורשת נמצאה יעילה ביותר להפנמת מיומנויות אלה, בעיקר לתלמידים עם קשיים במתמטיקה, שזקוקים להכוונה ממוקדת ומובנית בהפעלת תהליכים מטה-קוגניטיביים (Montague & Dietz, 2009).

מודל העמקת"י - הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית מותאמת דינמית

רציונל ובסיס תאורטי בפיתוח מודל העמקת"י

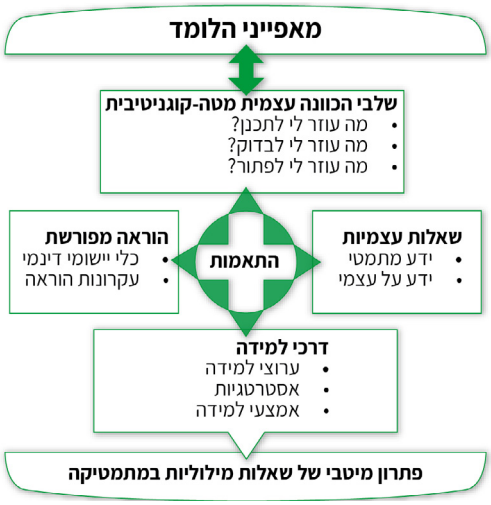
עד כה תוכניות ההתערבות להכוונה מטה-קוגניטיבית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה פיתחו מודלים שונים זה מזה, אך לכל תוכנית פותח מודל ששימש באותה דרך את **כל** התלמידים. מודלים אלה אינם מביאים בחשבון את מאפייניהם הייחודיים של התלמידים, אינם חושפים תלמידים למגוון דרכי למידה מותאמות והם מאופיינים בשאלות עצמיות במבנה רחב, כגון "באיזו אסטרטגיה אבחר?", "האם בדקתי את הפתרון?".

אחד העקרונות המרכזיים בהוראת תלמידים עם צרכים מיוחדים הוא לזהות מאפיינים ייחודיים של תלמידים אלה ולאפשר תהליכי הוראה ולמידה מותאמים (טל, 2017). עקרון זה קריטי בנושא הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית. בדרך כלל תלמידים אלה אינם מודעים לדרכי למידה המתאימות להם ומתקשים להתמודד עם שאלות עצמיות כלליות.

מתוך עקרון זה פותח מודל העמקת"י. בפיתוח המודל הושם דגש בהתאמה דינמית של תהליך ההכוונה המטה-קוגניטיבית במהלך פתרון בעיות מילוליות, מתוך התמקדות בשונות במאפייני תלמידים עם צרכים מיוחדים.

מתוך כך, אלה הן המטרות המרכזיות בפיתוח המודל: א. פיתוח מיומנויות של הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית לתלמידים עם צרכים מיוחדים, לצורך שיפור יכולת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה; ב. פיתוח דרך הוראה מפורשת להטמעת המודל ויישומו.

מודל העמקת"י נשען על המודל להכוונה מטה-קוגניטיבית של צהר-רוזן וקרמרסקי (Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014, 2017) שפותח עבור תלמידים בבית הספר היסודי בחינוך הרגיל. המודל של צהר-רוזן וקרמרסקי מבוסס על שלושה יסודות תאורטיים עיקריים: הראשון – ארבעת שלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית על פי פינטריך (Pintrich, 2000), שאוחדו לשלושה שלבים: תכנון, ניטור ובקרה ורפלקציה; השני – שאילת שאלות עצמיות על ידע המתמטי (לדוגמה: "האם הבנתי את המשימה?") ועל הידע על עצמי (לדוגמה: "האם האסטרטגיה שבחרתי עוזרת לי"?); והשלישי – הוראה מפורשת בהטמעתו. כדי להתאים אותו לתלמידים עם צרכים מיוחדים, בוצעו בו **התאמות** בארבעה מוקדים: א. שלבי ההכוונה העצמית המטה-קוגניטיבית; ב. שאלות עצמיות; ג. דרכי למידה; ד. הוראה מפורשת (להלן איור 1).



איור 1: מודל העמקת"י – הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית מותאמת דינמית

המודל המוצג הוא תוצר של תהליך שנמשך שנתיים בסדנה להוראה מותאמת במתמטיקה. במהלך הלימודים עברו המשתתפים תהליך הכשרה מובנה ליישום המודל בקרב תלמידים בכל מיני מסגרות של החינוך המיוחד. תהליך היישום לווה במפגשי הדרכה ומשוב, שבהם הוסקו תובנות ומסקנות שהובילו לתוצר הסופי.

ההתאמות במוקדים השונים של המודל

שלבי הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית: שמות השלבים של ההכוונה המטה-קוגניטיבית שונו כדי לאפשר לתלמיד הבנה והפנמה אינטואיטיבית של רצף התהליך. שם השלב: "תכנון" הוחלף ל"מה עוזר לי לתכנן?", שם השלב "ניטור ובקרה" הוחלף ל"מה עוזר לי לפתור?" ושם השלב "רפלקציה" הוחלף ל"מה עוזר לי לבדוק?"

שאלות עצמיות: כדי לפתח את יכולת שאילת השאלות העצמיות אצל התלמידים עם הצרכים המיוחדים בוצעו התאמות בשני היבטים: א. השאלות העצמיות הרחבות פורקו לשאלות משנה, המדורגות על פי תהליך הפתרון; ב. ניתנה הבחנה מפורשת בין שאלות עצמיות על הידע המתמטי ובין שאלות על ידע על עצמי (ראו טבלה 1). התאמות אלה מאפשרות ללומד לפתח מיומנויות של שאילת שאלות עצמיות מטה-קוגניטיביות בדרך מדורגת ומובחנת.

דרכי למידה: המודל מחדש ומציע דרכי למידה הנוגעות לערוצי למידה מגוונים. התאמה זו מאפשרת לתלמיד להיחשף למגוון דרכי למידה הכוללות אסטרטגיות, אמצעי למידה ובקרה ולבחור בדרך הלמידה המותאמת לו (ראו טבלה 1).

הוראה מפורשת: המודל כולל שני רכיבים בהטמעתו: א. כלי יישומי דינמי – טבלת העמקת"י; ב. עקרונות הוראה.

א. כלי יישומי דינמי – טבלת העמקת"י

כדי לאפשר את יישום המודל בכיתה, פותח בעבורו כלי יישומי דינמי המזכיר את כל שלביו ומשמש **תשתית** לתכנון תהליך הכוונה עצמית מותאם. כלי זה מוצג באמצעות "טבלת העמקת"י" המחולקת לשלושת שלבי ההכוונה העצמית (מה עוזר לי לתכנן? מה עוזר לי לפתור? מה עוזר לי לבדוק?). כל שלב כולל שני חלקים מרכזיים: חלק אחד כולל פירוט של שאלות עצמיות רחבות ושאלות משנה והחלק השני כולל מגוון דרכי למידה. השימוש בטבלה דינמי ונותן מענה לשונות בין התלמידים: כל תלמיד (במקרה הצורך בהכוונת המורה) יבחר את השלב או השלבים שבהם יתמקד בתהליך ההכוונה המטה-קוגניטיבית, את השאלות העצמיות ואת דרכי הלמידה המתאימות לצרכיו הייחודיים. אפשר להוסיף שאלות ודרכי למידה לפי הצורך.

טבלה 1: טבלת העמקת"י

שאלות עצמיות		דרכי למידה
על הידע המתמטי	**על עצמי**	**ערוצי למידה ואמצעים ללמידה ולבקרה**
מה עוזר לי לתכנן?		
האם הבנתי את הבעיה?		**שמיעתי** הקראה (על ידי עמית או מורה) האזנה (ממכשיר טכנולוגי) **חזותי** ציור השאלה, צביעת פרטים בעלי משמעות בשאלה, טבלה, תרשים זרימה, ישר המספרים, לוחות פעולה **מילולי** קריאה עצמית, תיאור מילולי כתוב או דבור של השאלה/התרגיל **סנסו-מוטורי** עזרים סביבתיים (קוביות, מקלות), עזרים מובנים: לבני דיג'י, לבני דיניס, המחזת השאלה **טכנולוגיה** מחשב, אייפד, תת"ח **אסטרטגיות חישוב** חישוב בעל פה, שימוש בחוקי פעולה (לדוג' חילוף, הפיכות), אסטרטגיות מנייה וספירה למיניהן, לוחות פעולה
האם הבנתי: - את המילים בשאלה? - על מה מסופר בשאלה? - על מה שואלים? - היכן ומהו משפט השאלה?	- מה יעזור לי להבין את השאלה?	
באיזו פעולה או פעולות עליי להשתמש?		
- אילו מספרים (נתונים) ואילו שמות (כינויים) יש בשאלה? - אילו נתונים יעזרו לי לפתור את השאלה? - האם יש נתונים מיותרים? - האם חסרים נתונים כדי לפתור את השאלה? - איך אפשר לגלות את הנתונים החסרים? - האם התוצאה תגדל או תקטן? מדוע? - איזו פעולה או פעולות מתאימות לפתרון השאלה או לכל שלב בשאלה? מדוע? - האם השאלה הזו דומה לשאלות אחרות שכבר פתרתי? במה?	- מה יעזור לי לזהות את השלבים והפעולות בשאלה?	
מהו התרגיל או התרגילים המתאימים לשאלה?		
- איזה תרגיל מתאים לשאלה? - מה תהיה התוצאה, בערך? מדוע? - באיזו דרך אפתור את התרגיל?	- מה יעזור לי להעריך את התוצאה? - איך הכי נוח לי לפתור?	

שאלות עצמיות		דרכי למידה
על הידע המתמטי	**על עצמי**	**ערוצי למידה ואמצעים ללמידה ולבקרה**
מה עוזר לי לפתור?		
האם אני נעזר במה שתכננתי לפתרון השאלה?	האם התכנון מתאים לי? האם עליי לשנות דבר מה?	שימוש בכלים בדומה לשלב "מה עוזר לי לתכנן את פתרון השאלה?"
- האם מה שתכננתי מתאים לפתרון השאלה?	- האם הכלי שבחרתי עוזר לי?	
- האם השלבים שבחרתי מתאימים לשאלה? - האם הפעולה שבחרתי מתאימה לשאלה? - האם תוצאות הביניים של הפתרון מתאימות לשלבים? - האם כדאי לבחור פעולה/שלבים אחרים לפתרון? אם כן, אילו?	- האם האסטרטגיה שבחרתי לפתרון התרגיל עוזרת לי? - האם הכלי או האסטרטגיה מבלבלים/מעכבים אותי - האם לוקח לי הרבה/מעט זמן לפתור? - האם אני מתעייף? מדוע? מה עליי לעשות? - האם אני פותר לבד או זקוק לעזרה? מה עליי לעשות כשאני זקוק לעזרה?	
מה עוזר לי לבדוק?		
מה למדתי על השאלה?	**מה למדתי על עצמי?**	**שימוש בידע מתמטי** - מיון בעיות מילוליות בטבלה - פעולה הפוכה - אומדן **שימוש בכלי עזר** - דף תשובות (מושמע או כתוב) - לוחות פעולה - מחשבון - "מסלול ההכוונה שלי"
- האם הפתרון הגיוני? מדוע? - מה למדתי על פתרון השאלה? - איזה סוג שאלה פתרתי?	- האם עבדתי לפי השלבים של תהליכי ההכוונה? - איזה נושאים מתמטיים קשים/קלים לי? - אילו תהליכי הכוונה עזרו לי? - מה קשה לי בתהליכי ההכוונה?	

ב. דרך הוראה (ח.ח.ח.ח.):

העקרונות לדרך הוראה מפורשת פותחו לצורך הטמעת הכלי בדרך מיטבית וכדי לאפשר מעקב של המורה והתלמיד אחר תהליך התקדמות התלמיד. עקרונות אלה כוללים ארבעה שלבים עיקריים: **ח**שיפה; **ח**קר עצמי מתווך; **ח**זרה ותרגול; **ח**שב מסלול מחדש (ח.ח.ח.ח.).

- שלב א: **ח**שיפה – תהליך החשיפה יתבצע בהכוונת המורה, בהצגת בעיה מילולית ויכלול שלושה רכיבים: א. חשיפה לשלבי ההכוונה במטה-קוגניטיבית – הובלת התלמידים לשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית וקיום דיון על חשיבותם בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה; ב. חשיפה לשאלות עצמיות – התלמידים יתבקשו לשאול שאלות עצמיות הקשורות לשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית הן בידע המתמטי והן בידע על עצמי. במידה שהתלמידים מתקשים, אפשר להדגים לפניהם את התהליך; ג. חשיפה לדרכי למידה מגוונות – דיון עם התלמידים על דרכי למידה למיניהן במהלך פתרון בעיה מילולית, ותיאור של התלמידים על דרכי למידה המועדפות עליהם.
- שלב ב: **ח**קר עצמי מתווך – שלב זה מתמקד באופיו הדינמי של המודל. בתהליך החקר העצמי יתקיים שיח בין התלמיד למורה. מומלץ לשתף גם עמיתים בשיח. בשיח זה ייחשף התלמיד לשאלות עצמיות ולדרכי הלמידה שבטבלת העמקת"י ויבחר את אלה המתאימות ליכולותיו ולצרכיו. אפשר להתמקד בכל שלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית או בכל שלב בנפרד. לאחר שנבחרו התהליכים המתאימים לתלמיד, יש לתכנן את "מסלול ההכוונה שלי" יחד עם התלמיד. כמו כן מומלץ למורה לעשות מודלינג לתלמיד בעניין שאילת השאלות העצמיות במהלך פתרון בעיות מילוליות ולהדגיש שאפשר לעבור בין השלבים למיניהם.
- שלב ג: **ח**זרה ותרגול – לאחר תכנון "מסלול ההכוונה שלי", יש לעודד שימוש עקיב בו. במידה שהתלמיד אינו משתמש במסלול זה, יש לשאול את התלמיד שאלות מכוונות על שלבי ההכוונה העצמית ("באיזה שלב אתה נמצא?"), שאלות על השאלות העצמיות ("באיזה שאלה תבחר כדי לבדוק את ההבנה?") ושאלות על דרכי הלמידה ("מדוע בחרת דווקא לצייר?"). בתום כל שיעור חשוב לפתח שיח עם התלמידים על אודות השימוש במיומנויות של הכוונה מטה-קוגניטיבית ובתרומתן לפתרון הבעיות המילוליות. מומלץ לצלם/להקליט את התלמידים במהלך הלמידה ולדון בכך.
- שלב ד: **ח**שב מסלול מחדש – מדי פעם יש לבחון עם התלמיד האם השאלות העצמיות שנבחרו ודרכי הלמידה יעילים בעבורו. כאשר ישנה התקדמות בתהליך, מומלץ לעודד את התלמיד להשתמש בשאלות עצמיות ובדרכי למידה ברמה גבוהה יותר, מתוך פיתוח מודעות להתקדמותו ("חשב מסלול מחדש"). מעקב זה יביא את התלמיד לידי תחושת מסוגלות, שכלול תהליך ההכוונה המטה-קוגניטיבית והתמודדות עם דרכי למידה ברמה גבוהה יותר. כל אלה עשויים להוביל את התלמיד לפתרון יעיל יותר של בעיות מילוליות.

דוגמאות לתכנון "מסלול ההכוונה שלי"

להלן שתי דוגמאות שבהן מוצגים תהליכי פיתוח "מסלול ההכוונה שלי". המסלולים תוכננו תכנון דינמי, כך שכל אחד מהם מותאם לתלמיד. שני התלמידים שהותאמו להם מסלולים הם בגילים אחרים ובעלי מאפייני תפקוד שונים זה מזה. שניהם לומדים במסגרות אחרות של החינוך המיוחד. הדוגמאות מתמקדות רק בתכנון "מסלול הכוונה שלי", ולא בתהליך ההוראה כולו. את תהליך ההוראה ביצעו שתי סטודנטיות שהשתתפו בסדנה להוראה מותאמת במתמטיקה. את הסדנה העבירו שתי המחברות של מאמר זה.

דוגמה א:

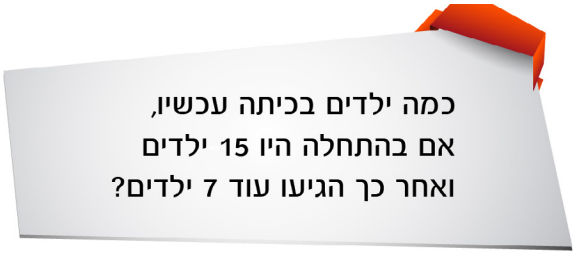
מסלול זה תוכנן בשיתוף עם י', תלמיד בכיתה ג' עם מוגבלות שכלית התפתחותית קלה, והוא לומד בבית ספר לחינוך מיוחד. י' שולט בקריאה ובכתיבת המספרים עד 100. הוא פותר תרגילים בתחום העשרת הראשונה, מדייק בקריאת הבעיה המילולית אך מתקשה

בזיהוי הפעולה החשבונית הנדרשת לפתרונה. לי' קשיים בהפעלת תהליכים מטה-קוגניטיביים, בהתמודדות עם עומס מידע ובביצוע של רצף תהליכים. בשל מאפיינים אלה בחרה הסטודנטית להתמקד בבעיות מסוג הוספה וגריעה. מבחינת ההכוונה המטה-קוגניטיבית, הסטודנטית התמקדה בשלב התכנון בלבד.

תיאור תהליך התכנון של "מסלול ההכוונה שלי":

הסטודנטית בחרה בשביל התלמיד בעיה שאינה מאפשרת פתרון אינטואיטיבי ומזמנת חשיפה לתהליכים מטה-קוגניטיביים. לפיכך היא בחרה בעיית חיבור מסוג הוספה שהתלמיד מתקשה בה ובתרגיל שמורכב לתלמיד (חיבור עם המרה). נוסף על כך, משפט השאלה מופיע בתחילת הבעיה.

להלן הבעיה שהסטודנטית הציגה לתלמיד:



התלמיד קרא את הבעיה היטב ואמר שאינו יודע לפתור אותה. הסטודנטית ציינה לפני התלמיד "נתכנן יחד 'מסלול הכוונה' בטבלה, וזה יעזור לך לפתור בעיה זו ובעיות דומות". הסטודנטית הציגה טבלה ריקה שבה מופיעות הכותרות: "מה אני שואל?" ו"מה אני עושה?" (ראו להלן טבלה 2).

הסטודנטית פעלה בשני שלבים:

שלב ראשון: שאלות עצמיות על הידע המתמטי

בשלב זה הסטודנטית כיוונה לשאלות העצמיות שבטבלת העמקת"י העוסקות בידע המתמטי. תחילה היא התמקדה בשאלה: "האם הבנתי את הבעיה?" כדי לאפשר לתלמיד להעמיק בשאלה ולהתמודד איתה בעצמו, דנה הסטודנטית עם התלמיד בשאלה, ובעת הדיון העלתה שאלות משנה הנגזרות מהשאלה, כגון כדי להבין היטב את השאלה חשוב לבדוק: האם הבנתי את המילים? האם הבנתי על מי מסופר בשאלה? היכן משפט השאלה?

מתוך השאלות שהוצגו, בחר התלמיד בשתי שאלות משנה והסביר את בחירותיו. את בחירתו בשאלה: "היכן משפט השאלה?" הסביר כך:

"לפעמים אני לא מוצא אותו. זה יעזור."

את בחירתו בשאלה:

"על מה מסופר בבעיה?"

הסביר כך:

"צריך להבין את מה שכתוב."

לאחר מכן עברה הסטודנטית לשאלה "באיזה פעולה אשתמש?". בדומה לתהליך שקיימה בשאלה הראשונה, היא דנה עם התלמיד בשאלה, ובעת הדיון הציגה לו מספר שאלות משנה הנגזרות מהשאלה, כגון כדי להחליט באיזו פעולה להשתמש צריך לגלות: אילו מספרים בבעיה? איזה שמות יש בבעיה? איזה נתונים יעזרו לפתור את הבעיה? האם התוצאה תגדל או תקטן? מתוך השאלות שהוצגו, בחר התלמיד בשתי שאלות והסביר את בחירותיו. את בחירתו בשאלה: "האם התוצאה תגדל או תקטן?" הסביר כך:

"ככה אדע מה צריך להיות בסוף."

ואת בחירתו בשאלה: "איזו פעולה מתאימה לפתור את הבעיה?" הסביר כך (ראו טבלה 2):

"כי זה חשוב לתשובה."

שלב שני: שאלות עצמיות על הידע על עצמי ודרכי למידה

בשלב זה התמקדה הסטודנטית בשאלות הנוגעות לידע על עצמי: "מה יעזור לי להבין את השאלה?" ו"מה יעזור לי לגלות את הפעולה?". כדי לאפשר לתלמיד לבחור את דרכי הלמידה המתאימות לו, הציעה הסטודנטית לכל שאלה עצמית מספר דרכי למידה, כגון שימוש באמצעים סביבתיים, שימוש בתמונות, ציור השאלה, סימון/מרקור נתונים. התלמיד בחר בדרכי הלמידה שלהלן והסביר את בחירותיו: סיפור הבעיה ("אני אוהב לספר בעצמי"), סימון משפט השאלה ("ככה אני אראה אותו") שימוש בתמונות ("נוח לי יותר עם תמונות, אני גדול").

בסיום התהליך נשאל התלמיד אם ירצה להכין את "מסלול ההכוונה שלי" בבריסטול, במחשב או באייפד. התלמיד בחר באייפד, והסביר שהעבודה באייפד מקלה עליו: "אני רגיל ללמוד עם אייפד".

המסלול שנבנה עם התלמיד מוצג בטבלה 2.

טבלה 2: מסלול שנבנה עם תלמיד עם מוגבלות שכלית התפתחותית קלה

✓	מה אני שואל? 	מה אני עושה? 
	האם הבנתי את הבעיה?	**מה יעזור לי להבין את הבעיה?**
☐	- היכן משפט השאלה?	- אסמן את משפט השאלה
☐	- על מה מסופר בבעיה?	- אספר את הבעיה בקול
	באיזה פעולה אשתמש?	**מה יעזור לי לגלות את הפעולה?**
☐	- האם התוצאה תגדל או תקטן?	- אשתמש בתמונות
☐	- איזו פעולה מתאימה לשאלה?	

לאחר הכנת "מסלול ההכוונה שלי", פתר התלמיד את הבעיה הנתונה בעזרת המסלול ובעזרת תיווך רב של הסטודנטית.

התלמיד קרא את השאלה ושאל את עצמו (בהכוונת הסטודנטית): "היכן משפט השאלה?". לאחר קריאה חוזרת הוא זיהה שמשפט השאלה נמצא בהתחלה. הסטודנטית "הזכירה" לו להביט במסלול ההכוונה. התלמיד סימן את משפט השאלה במרקר. אחר כך סיפר את הבעיה בקול רם. בסיפור הבעיה הוא העביר את משפט השאלה לסוף הבעיה: "היו 15 ילדים, ובאו עוד 7. כמה ילדים יש?" הוא הציג את הבעיה בעזרת תמונות של ילדים (לקח 15 תמונות של ילדים והוסיף עוד 7 תמונות של ילדים). הסטודנטית עודדה אותו להשתמש ב"מסלול ההכוונה שלי" ומיקדה אותו בשאלות העצמיות. לפיכך שאל התלמיד את עצמו שאלות עצמיות והשיב עליהן. לשאלה העצמית: "האם התוצאה תגדל או תקטן?" השיב:

"באו עוד, אז יהיו יותר."

לשאלה העצמית:

"איזו פעולה מתאימה לשאלה?"

השיב:

"ועוד כי באו עוד."

התלמיד מנה את התמונות באמצעות מניית המשך וענה:

"22 ילדים."

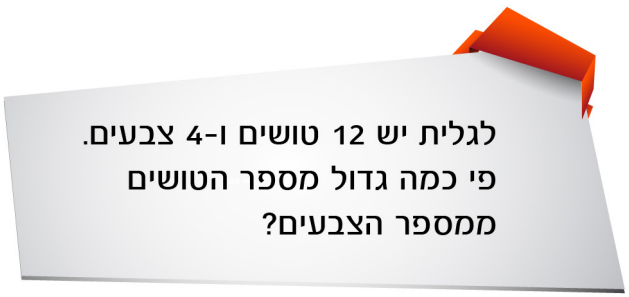
התלמיד כתב תרגיל מתאים. חשוב לציין שהפעילות הייתה צעד ראשוני בלבד, והתלמיד נזקק לתיווך רב ביישום תהליכי ההכוונה העצמית והשימוש במסלול.

דוגמה ב

מסלול זה תוכנן עם ש', תלמידה בכיתה ד' עם ליקוי למידה. ש' לומדת בכיתת חינוך מיוחד בבית ספר לחינוך רגיל. היא מבינה את המשמעות של פעולות הכפל והחילוק, אך מתקשה בפתרון בעיות השוואה, בכפל ובחילוק ובביצוע חישובים של תרגילי חיבור, חיסור וכפל שבהם מספרים רב-ספרתיים, כנראה על רקע התנהגות אימפולסיבית. לש' קשיים בתחום השפה הניכרים באוצר מילים דל ובקשיים בשליפה. כמו כן לש' קשיים בהפעלת תהליכים מטה-קוגניטיביים, בעיקר בתהליך ארגון ובקרה. בשל מאפיינים אלה, בחרה הסטודנטית להתמקד בבעיות השוואה בכפל ובחילוק ולפתח מיומנויות של הכוונה מטה-קוגניטיבית. בהיבט של ההכוונה המטה-קוגניטיבית, בחרה הסטודנטית לחשוף לפני התלמידה את תהליך ההכוונה העצמית על כל שלושת שלביו, בדרך של חקר עצמי.

תיאור תהליך התכנון של "מסלול ההכוונה שלי":

הסטודנטית בחרה להציג לתלמידה בעיה מאתגרת שאינה מאפשרת פתרון אינטואיטיבי: בעיית חילוק מסוג השוואה, שבה מושג "גדול" עשוי להקשות על הפותר.



התלמידה קראה את השאלה, ולאחר היסוס רב כתבה את התרגיל: 4x12. היא פתרה את התרגיל באמצעות מחשבון. כשהסטודנטית ביקשה ממנה להסביר את התשובה, היא ענתה:

"נראה לי, כי כתוב פי כמה גדול".

הסטודנטית ציינה לפני התלמידה שהיא שגתה ושהיא תלמד אותה דרך מיוחדת לפתרון בעיות במתמטיקה באמצעות "מסלול ההכוונה שלי", דרך שתסייע לה לפתור בעיה זו ובעיות דומות. תהליך תכנון "מסלול ההכוונה שלי" כלל שני שלבים עיקריים:

שלב ראשון: חשיפה וחקר של תהליך הכוונה עצמית

- **הצגת סרטון** – בסרטון מוצג תלמיד המתקשה בפתרון בעיה מילולית מסוג השוואה בחיבור (סימולציה). הבעיה בסרטון היא בתחום שבו התלמידה שולטת, זאת כדי שהיא תוכל לנתח בהמשך את שגיאותיו. בסרטון רואים שהתלמיד אינו קורא את הבעיה המילולית עד סופה, מתקשה בהבנת המילים, מרגיש שאינו מבין את הבעיה (מציין שהוא לא יודע מה שואלים), כותב תרגיל שגוי ומציג תשובה לא הגיונית בלי שבדק אותה.
- **ניתוח תהליך הפתרון של התלמיד בסרטון** – לאחר הצפייה בסרטון ניהלה הסטודנטית דיון עם התלמידה. הן דנו במאפייני הקושי של התלמיד. להלן דוגמאות מדברי התלמידה: "הוא בכלל לא קרא את השאלה עד הסוף", "הוא לא הבין אותה וכתב תרגיל לא נכון", "הוא לא חשב על מה שואלים", "הוא לא בדק כלום".
- **מיקוד בשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית** – מתוך דברי התלמידה, הסטודנטית התמקדה בשלבי הפתרון הרצויים בהלימה לשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית. להלן דוגמאות:

סטודנטית: "מה הייתה הבעיה הראשונה בתהליך הפתרון?"
תלמידה: "הוא לא קרא הכול".
סטודנטית: "ומספיק רק לקרוא? מה הייתה הבעיה הנוספת?"
תלמידה: "הוא לא הבין את המילים".
סטודנטית: "כלומר, מה חשוב לעשות קודם כול?"
תלמידה: "לקרוא הכול ולהבין."
סטודנטית: "זאת אומרת שלפני שפותרים, מה צריך לעשות?"
תלמידה: "להבין טוב".
סטודנטית: "נכון מאוד. התלמיד כתב תרגיל לא נכון. מה יכול לעזור לו?"
תלמידה: "לחשוב עוד".
סטודנטית: "אבל קשה לו. מה אפשר לעשות?"
תלמידה: "אולי לבקש עזרה?"
סטודנטית: "ואם אין לו אפשרות לקבל עזרה? מה יכול לעשות?"
תלמידה: "אולי לצייר?"
סטודנטית: "רעיון מצוין. ואם התלמיד מצייר וזה עדיין לא עוזר?"
תלמידה: "אז שינסה אולי משהו אחר"
סטודנטית: "יופי. כשמתחילים בפתרון חשוב לראות מה עוזר לנו לפתור את השאלה."
תלמידה: "ובסוף הוא בכלל לא בדק."
סטודנטית: "מצוין. חשוב לבדוק את התשובה בסוף. למה?"
תלמידה: "כי לפעמים טועים."

באמצעות הדיון הסטודנטית מיקדה את התלמידה בשלבי ההכוונה המטה-קוגניטיבית: תכנון, פתרון ובדיקה.

שלב שני: חקר תהליך ההכוונה המטה-קוגניטיבית האישי של התלמידה

הסטודנטית הציגה לפני התלמידה את טבלת העמקת"י, והן דנו במגוון השאלות העצמיות המופיעות בכל אחד מהשלבים ובדרכי הלמידה המגוונות (ראו לעיל טבלה 1).

- התלמידה בחרה מכל שלב שתיים או שלוש שאלות עצמיות ושתי דרכי למידה, והסבירה את בחירותיה. לדוגמה את בחירתה בשאלה העצמית "האם הבנתי את המילים בשאלה?" היא הסבירה כך:

"להבין את המילים זה חשוב כי אם לא מבינים, איך אפשר לפתור?"

את בחירתה בדרך הלמידה לשמוע את השאלה באייפד, היא הסבירה כך:

"אני לומדת עם אייפד, אם אשמע, זה יעזור לי להבין."

בתור הסבר לבחירתה בשאלה העצמית: "האם הבנתי על מה שואלים?" היא אמרה:

"זה הכי חשוב כי ככה יודעים בדיוק בדיוק מה צריך למצוא."

ההסבר שלה לבחירה בדרך ההוראה "לסמן במרקר את משפט השאלה" היה:

"זה יראה לי בדיוק ויזכיר לי על מה שואלים."

וכך הלאה.

- בסיום התהליך של תכנון המסלול, בחרה התלמידה להכינו במחשב ולהדפיסו, והסבירה:

"נוח לי שהכול מול העיניים."

המסלול שנבנה עם ש' מוצג בטבלה 3.

טבלה 3: מסלול שתוכנן עבור תלמידה לקוית למידה

תכנון	
האם הבנתי: - את המילים בבעיה? - על מה שואלים? - אילו מספרים (נתונים) ואילו שמות (כינויים) יש בשאלה? - האם התוצאה תגדל או תקטן? מדוע? - איזה תרגיל מתאים?	- להקשיב לבעיה באייפד - לסמן במרקר את משפט השאלה - להכין טבלה
פתרון	
- האם הטבלה עוזרת לי? - האם לבחור דרך אחרת? איזו?	- להכין תרשים זרימה או ציור
בדיקה	
- האם הפתרון הגיוני? מדוע? - האם עבדתי לפי שלבי ההכוונה?	- לוח הכפל - מסלול ההכוונה שלי

לאחר הכנת "מסלול ההכוונה שלי" פתרה התלמידה את הבעיה הנתונה בעזרת המסלול ובעזרת תיווך רב של הסטודנטית. התלמידה ביקשה שהסטודנטית תקליט את השאלה באייפד, כפי שמצוין במסלול ההכוונה. התלמידה הקשיבה לשאלה וסימנה בעצמה את משפט השאלה בדף. בשלב זה נעצרה התלמידה, והסטודנטית כיוונה אותה להביט במסלול ההכוונה ולראות מה עליה לעשות. התלמידה הקריאה את השאלות העצמיות: "אילו מספרים (נתונים) ואילו שמות (כינויים) יש בשאלה?" ו"האם התוצאה תגדל או תקטן? מדוע?". התלמידה התקשתה לענות על שאלות אלה, והסטודנטית כיוונה אותה לדרכי הלמידה, וסייעה לה בתכנון טבלה לארגון הנתונים. לאחר מכן עברה התלמידה לשלב הפתרון, הביטה במסלול והשיבה מייד:

"הטבלה עוזרת לי. אני רואה ששואלים על ההפרש.... לא... קוראים לזה מנה."

לאחר השיח עם הסטודנטית, כתבה התלמידה תרגיל חילוק ופתרה אותו בעצמה. לאחר מכן היא עיינה שוב ואמרה:

"זה תרגיל חילוק, ואני יודעת את הפתרון."

כדי לענות על השאלה העצמית האחרונה: "האם עבדתי לפי שלבי ההכוונה?", תיארו הסטודנטית והתלמידה את רצף התהליך בעזרת מסלול ההכוונה והדף שבו התלמידה כתבה את דרך הפתרון.

שתי דוגמאות אלו ממחישות את הדינמיות של מודל העמקת"י והתאמתו לתלמידים עם מאפיינים למיניהם. דרך הפיתוח והתוצר הסופי של "מסלול ההכוונה שלי" שונים מתלמיד לתלמיד, וכל מסלול תלוי הן ברמת הידע המתמטי של התלמיד, והן ביכולותיו הקוגניטיביות והמטה-קוגניטיביות. הדוגמה הראשונה ממחישה שעבור תלמיד עם מוגבלות שכלית קלה פותח מסלול הכוונה חלקי הנוגע רק לשלב התכנון. זאת ועוד, תהליך פיתוח המסלול היה ממוקד ונגע לבחירה ספציפית של שאלות עצמיות ושל דרכי למידה. לעומת זאת בדוגמה השנייה שבה המסלול שתוכנן נועד לתלמידה לקוית למידה, המסלול היה רחב יותר והיו בו שלושה שלבים של ההכוונה העצמית. תהליך הפיתוח של מסלול זה התבסס על תהליך של חקר הדורש רמה קוגניטיבית גבוהה יותר. כפי שאפשר לראות בתיאור הדוגמאות, שני התלמידים נענו לתהליך הכנת "מסלול ההכוונה שלי", אך היו זקוקים לתיווך רב של הסטודנטיות בשימוש בו במהלך פתרון הבעיה. בפתרון הראשון של הבעיה, התלמידים לא השתמשו במיומנויות מטה-קוגניטיביות ולא הצליחו לפתור את הבעיה. לאחר השימוש ב"מסלול ההכוונה שלי", התלמידים שאלו את עצמם שאלות עצמיות (בעזרת תיווך המורה) והצליחו לפתור את הבעיה.

סיכום והמלצות

המאמר מציג את מודל העמקת"י ומדגים **יישום ראשוני** של פיתוח תהליך הכוונה מטה-קוגניטיבית בקרב תלמידים עם צרכים מיוחדים. מתוך הדוגמאות שהוצגו עלו כמה תובנות הנוגעות לשימוש יישומי במודל.

המאפיין הדינמי של המודל מאפשר שימוש מותאם לתלמידים מסוימים לפי הידע המתמטי והמאפיינים שלהם. התאמות אישיות הן עיקרון מרכזי בעבודה עם תלמידים עם צרכים מיוחדים (טל, 2017). חשוב לציין שכדי לאפשר שימוש דינמי ומותאם במודל, על המורה לאסוף מידע על הידע של התלמיד ועל מאפייניו, וכן לדון עם התלמיד בהעדפותיו, ביכולותיו ובקשייו.

השימוש במודל מאפשר **פיתוח הכוונה מטה-קוגניטיבית** שחשובה ללמידה של תלמידים בכלל, ושל תלמידים עם צרכים מיוחדים בפרט, שכן נמצא שתלמידים אלה מתקשים לעיתים בתהליך זה (Desoete & Roeyers, 2002, 2005; Geary et al., 2012; Montague & Dietz, 2009).

פיתוח הכוונה מטה-קוגניטיבית בא לידי ביטוי הן בתהליך הכנת "מסלול ההכוונה שלי" והן בתהליך של פתרון הבעיה באמצעותו. בתהליך פיתוח המסלול, התלמידים **נחשפים** למגוון שאלות עצמיות שעשויות לסייע להם, **בוחרים** שאלות המתאימות להם **ומנמקים** את בחירתם. בתהליך פתרון הבעיה, התלמידים נעזרים ב"מסלול ההכוונה שלי", **שואלים** באמצעותו **שאלות עצמיות**, ומשתמשים **בדרכי הלמידה שבחרו**. כל אלה מובילים לפתרון נכון של הבעיה.

אם כן, **הכלי היישומי ועקרונות ההוראה המפורשת** שהוצעו עשויים לסייע למורה ולתלמיד בפיתוח הכוונה מטה-קוגניטיבית וביישומה בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. מחקרים מראים שמיומנויות מטה-קוגניטיביות אינן מולדות ולא מתפתחות דרך טבע, ויש לפתחן באמצעות הוראה מפורשת (Dignath & Büttner, 2008). כפי שהוצג בדוגמאות שהובאו במאמר זה, תהליך פיתוח "מסלול ההכוונה שלי" כולל שימוש מודע בשני העקרונות הראשונים של דרך ההוראה המפורשת: חשיפה וחקר עצמי מתווך. המודל חושף את התלמידים לשאילת שאלות עצמיות על הידע המתמטי ועל הידע על העצמי, וכן לדרכי הלמידה שלהם. במהלך הוראה מפורשת זו בחרו התלמידים את השאלות העצמיות ואת דרכי הלמידה, הכינו את "מסלול ההכוונה שלי" והשתמשו בו בתהליך הפתרון. בדומה לדוגמאות שהוצגו, מורים המבינים שעקרונות ההוראה המפורשת מספקים את התשתית להוראה, יכולים להפעיל שיקולי דעת ויצירתיות בהטמעה מותאמת. בשל המורכבות של תלמידים עם צרכים מיוחדים והשוני ביניהם, להבנה זו חשיבות רבה להצלחת השימוש במודל העמקת"י.

לסיכום, המאמר עוסק בהכוונה מטה-קוגניטיבית שהיא אחד מתפקודי הלומד במאה העשרים ואחת (משרד החינוך, 2014). עם זאת תחום זה אינו פשוט להוראה וללמידה. התובנות שהוצגו במאמר מראות ששימוש במודל העמקת"י עשוי לשמש כלי יעיל לפיתוח מיומנות זו. המאמר מתאר תהליך ראשוני וחלקי של הטמעת המודל, ומומלץ לפתח תוכנית התערבות ארוכת טווח, שתאפשר מעקב אחר תרומתו של מודל העמקת"י בפיתוח מיומנויות של הכוונה מטה-קוגניטיבית לשיפור יכולת פתרון בעיות מילוליות בקרב תלמידים עם צרכים מיוחדים. כמו כן חשוב לעקוב אחר התקדמות המורים בהוראת מיומנויות אלה.

רשימת מקורות

טל, ד' (2017). הכשרה ל"הוראה מכילה": מסע בשלושה נתיבים. בתוך ש' סיטון וי' גילת (עורכים), **כותבים חינוך: על הקשר שבין התיאוריה למעשה החינוכי בתהליך הכשרת מורים** (עמ' 225-247). חיפה: פרדס.

משרד החינוך. (2014). **משהו טוב קורה עכשיו: אבני דרך ללמידה משמעותית**. אוחזר מתוך http://cms.education.gov.il/NR/rdonlyres/126241AF-D044-42EA-BF7B-76607760C7263/193744/MashehuTovKoreAcshaiv.pdf

Desoete, A., & Roeyers, H. (2002). Off-line metacognition - A domain specific retardation in young children with learning disabilities? *Learning Disabilities Quarterly, 25*(2), 123-139. doi:10.2307/1511279

Desoete, A., & Roeyers, H. (2005). Cognitive skills in mathematical problem solving in grade 3. *British Journal of Educational Psychology, 75*(1), 119-138. doi:10.1348/000709904X22287

Dignath, C., & Büttner, G. (2008). Components of fostering self-regulated learning among students: A meta-analysis on intervention studies at primary and secondary school level. *Metacognition and Learning, 3*(3), 231-264. doi:10.1007/s11409-008-9029-x

Fernandez, J., & Jamet, E. (2017). Extending the testing effect of self-reguleted learning. *Metacognition & Learning, 12*(2), 131-156. doi:10.1007/s11409-016-9163-9

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology, 104*(1), 206-223. doi:10.1037/a0025398

Gidalevich, S., & Kramarski, B. (2019). The value of fixed versus faded self-regulatory scaffolds on fourth graders' mathematical problem solving. *Instructional Science, 47*(1), 39-68. doi:/10.1007/s11251-018-9475-z

Kistner, S., Rakoczy, K., Dignath, C., Otto, B., Buttner, G., & Klieme, E. (2010). Promotion of self-regulated learning in classroom: Investigating frequency, quality, and consequences for student performance. *Metacognition and Learning, 5*(2), 157-171. doi:10.1007/s11409-010-9055-3

Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal, 40*(1), 281-310.

Kramarski, B., Weiss, I., & Sharon, S. (2013). Generic versus context-specific prompts for supporting self-regulation in mathematical problem solving among students with low or high prior knowledge. *Journal of Cognitive Education and Psychology, 12*(2), 197-214. doi:10.1891/1945-8959.12.2.197

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of meta-cognitive pedagogies*. Paris: OECD. doi:10.1787/9789264223561-en

Montague, M., & Dietz, S. (2009). Evaluating the evidence base for cognitive strategy instruction and mathematical problem solving. *Exceptional Children, 75*(3), 285-302. doi:10.1177/001440290907500302

OECD [Organisation for Economic Cooperation and Development]. (2003). *Literacy skills for the world of tomorrow: Further results from PISA 2000*. Paris, France: Author & UNESCO Institute for Statistics.

OECD [Organisation for Economic Cooperation and Development]. (2014). *PISA 2012 results in focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Paris: Author.

Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation: Research and application* (pp. 451-529). San Diego, Calif.: Academic Press. doi:10.1016/B978-012109890-2/50043-3

Rosenzweig, C., Krawec, J., & Montague, M. (2011). Metacognitive strategy use of eighth-grade students with and without learning disabilities during mathematical problem solving. *Journal of Learning Disabilities, 44*(6), 508-520. doi:10.1177/0022219410378445

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to thinking mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Tzohar-Rozen, M., & Kramarski, B. (2014). Metacognition, motivation and emotions: Contribution of self-regulated learning to solving mathematical problems. *Global Education Review, 1*(4), 76-95.

Tzohar-Rozen, M., & Kramarski, B. (2017). Metacognitive and motivational-emotional engagement in mathematics instruction. In T. Michalsky & C. Schecter (Eds.), *Self-regulated learning: Conceptualization, contribution, and empirically based models for teaching and learning* (pp. 1-26). New York: Teachers College, Columbia University.

Veenman, M. V. J. (2007). The assessment of metacognition: A matter of multi-method designs. *EAPA Newsletter of the European Association of Psychological Assessment, 1*, 8-9.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183. doi:10.3102/0002831207312909

"דברים שרואים משם לא רואים מכאן"
שימוש בטכנולוגית AR כמקדמת תפיסה מרחבית של ההגדרה הקריטית של המושג מנסרה

יניב ביטון
תקוה עובדיה
אסנת פילוס
קארין אלוש



ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל-אביב.
בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.
מרצה לחינוך מתמטי בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.



ד"ר תקוה עובדיה

בוגרת הטכניון, מרצה להוראת מתמטיקה
במכללת אורנים, קריית טבעון ובמכללה ירושלים.



ד"ר אסנת פילוס

אוניברסיטת אוטווה, קנדה. תחומי מחקר עיקריים: זהות לומדים במתמטיקה, תאוריות למידה, שיח כיתה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה, מתמטיקה בקרב תלמידים מהגרים.



קארין אלוש

מסלול מצוינות, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

תקציר

במחקר הנוכחי יושמה טכנולוגיה רבודה (Augmented Reality ובקיצור AR) לצורכי למידה של תלמידי כיתה ו' בנושא מנסרות (גאומטרייה במרחב). לצורך זה נעשה שימוש באפליקציה ShapeApp שמסייעת בפיתוח חשיבה חזותית במרחב. האפליקציה מלווה את למידת נושא ה"גופים" בספר הלימוד ומסייעת בהמחשה תלת-ממדית של הגופים שנלמדים. האפליקציה מיישמת את טכנולוגית המציאות הרבודה AR (Augmented Reality), כך שכאשר מתבוננים במצג באמצעות מסך הסמארטפון נראה שכבות דיגיטליות למיניהן, כאילו הן קיימות במציאות. התלמיד או התלמידה יכולים להזיז את הגופים, לסובב, לפרוס אותם, למדוד, לחתוך גוף ולחבר מספר גופים יחד ובתוך כך לפתח תובנות על אודות תכונות הגוף וצורתו ובאמצעותן לפתור בעיות בנושא. האפליקציה מקילה גם על המורה בהמחשה ובהנגשה של הגופים כפריסות לסוגיהן, וכגופים המוצגים במנחים מגוונים. בסרטון המצורף נבחין בכל מיני אינטראקציות עם הגופים כפי שנעשו באפליקציה (קישור).

במאמר הנוכחי נציג חקר מקרה שבו השתתפו 13 תלמידי כיתה ו' שהתראיינו במהלך פתרון בעיות בנושא מנסרות כגופים במרחב. מתוך הראיונות ניסינו לבדוק את מאפייני פתרון הבעיות באמצעות האפליקציה, לעומת מאפייני תהליך פתרון הבעיות ללא האפליקציה. מתוך הממצאים עולה כי האפליקציה מרחיבה את מרחב השיקולים של פתרון הבעיה, כך שפעולת ההזזה של הגוף, הפיכתו לפריסה ולגוף בחזרה, בדרך דינמית ומהירה, המחישה לתלמידים את תכונות בסיסי הגוף בכל מצב, הקלה על זיהוי ההבדל בין בסיס למקצוע של מעטפת בכל פוזיציה, והרחיבה את היכולת לנתח צורות גאומטריות בכלל, ואת ההבנה של תכונות (כגון גובה של מנסרה) המוצגות כפריסה כחלק מגוף או כחלק מצורה גאומטרית בפרט.

מילות מפתח: מציאות רבודה; מתמטיקה לבית ספר יסודי; גופים הנדסיים; תפיסה מרחבית גאומטרית.

רקע תאורטי

בשנים האחרונות חוקרים רבים עומדים על הקשר בין הבנת הגאומטרייה ובין למידת מתמטיקה (Sinclair & Bruce, 2015). למעשה טהטה (Tahta, 1980) מסביר כיצד הגאומטרייה היא חלק בלתי נפרד מהבנה מתמטית וכיצד הפרדה מלאכותית בין לימודי המתמטיקה ללימודי הגאומטרייה מביאה לידי קשיים שאפשר למנוע אותם. כאן נמצא כי תלמידים רבים רואים בלמידת גאומטרייה מקצוע קשה (Clements, 1998; Mulligan, 2011; Verdine, Lucca, Golinkoff, Hirsh-Pasek, & Newcombe, 2016).

בתוך כך נמצא כי יש קשר הדוק בין שיפור מיומנויות בראייה מרחבית ובין הבנה טובה יותר של תפיסות וידע בגאומטרייה (Casey et al., 2008), וכי שימוש בטכנולוגיות דיגיטליות מאפשר חיזוק הקשר בין תנועה וראייה מרחבית מצד אחד ובין למידת הגאומטרייה מצד אחר (Battista, 2001). הקשר החזק בין שימוש בטכנולוגיות דיגיטליות ללימוד הגאומטרייה הביא לידי פיתוחים חדשניים המאפשרים ללומדים לחדד את הראייה המרחבית שלהם באמצעות למידה המערבת תנועה במהלך חקירת גופים גאומטריים. במאמר זה נתמקד בשימוש בטכנולוגיית המציאות הרבודה ללמידת מנסרות.

רקע היסטורי ליישומים של AR בחינוך מתמטי

הטבלה המופיעה למטה היא תרגום לעברית של טבלה שימושית שמוצעת בעבודתם של יאנג וסנטוסו (Young & Santoso, 2018, p. 221). היא מציגה שימושים, מגבלות ותוצאות של שימוש בטכנולוגיית AR. על פי טבלה זו (שאינה מתיימרת להיות מקיפה) אין עדיין מידע מדויק על אודות התפתחות תפיסה או הבנה של תהליך פתרון בעיה גאומטרית במרחב, כאשר הוא מבוצע באמצעות הטכנולוגיה הרבודה.

שם המאמר (תרגום מאנגלית)	ההקשר	מגבלות	ממצאים
מציאות רבודה שיתופית בחינוך Collaborative Augmented Reality in Education (Kaufmann, 2003)	שימוש ראשון בטכנולוגיית המציאות הרבודה בהוראת גאומטרייה	הביצועים, המידות והמשקל של החומרה בתחילת שנת 2000	תלמידים מעדיפים קסדות שקופות. ישנן כל מיני בעיות הכרוכות בשימוש בקסדות שקופות
פיתוח ספר לימוד אינטראקטיבי של מציאות רבודה להוראה וללמידה של צורות גאומטריות Development of an Interactive Book with Augmented Reality for Teaching and Learning Geometric Shapes (Kirner, Reis, & Kirner, 2012)	ספר לימוד אינטראקטיבי באמצעות הטכנולוגיה של מציאות רבודה לתמיכה בלמידת צורות גאומטריות	ההתמקדות היא אך ורק בראייה מרחבית	ספר לימוד באמצעות הטכנולוגיה של מציאות רבודה יכול לתרום במידה יעילה לפיתוח מערכת הוראה תומכת. ספר לימוד כזה הוא משאב מבטיח מאוד לעומת אמצעי הוראה אחרים שמשתמשים במציאות רבודה
שימוש במציאות רבודה ככלי ללמידת גאומטרייה בבית ספר יסודי Development of an Interactive Book with Augmented Reality for Teaching and Learning Geometric Shapes (Purnama, Andrew, & Galinium, 2014)	שימוש במציאות רבודה ליצירת מד זווית וירטואלי למדידת זוויות	הכלי מתמקד אך ורק בוויזואליזציה של צלע וזווית. ממשק המשתמש אינו מוגדר כראוי	השימוש במציאות הרבודה מעלה את המוטיבציה של התלמידים בלמידת גאומטרייה. טכנולוגיית המציאות הרבודה יכולה לזרז את תהליך הלמידה לעומת שיטות הוראה מסורתיות

שם המאמר (תרגום מאנגלית)	ההקשר	מגבלות	ממצאים
לפרוץ את גבולות הוראת הגאומטרייה באמצעות המציאות הרבודה Cyberchase Shape Quest: Pushing Geometry Education Boundaries with Augmented Reality (Radu, Doherty, DiQuollo, McCarthy, & Tiu, 2015)	משחק במציאות רבודה לילדים בבית ספר היסודי	יש להדפיס את לוח המשחק	הטכנולוגיה עשויה לגרום לבעיה מכנית במשחק. פיתוח משחקים כרוך בתהליך איטרטיבי. מפתחי המשחק צריכים לבדוק בדיקות מוקדמות ובתכיפות רבה, וכן גם לערב בתהליך מומחים מתחומי דעת מגוונים
יישום במציאות רבודה עם תנועות ידיים ללימוד גאומטרייה תלת-ממדית An Augmented Reality Application with Hand Gestures for Learning 3D Geometry (Le & Kim, 2017)	יישום ללמידת גאומטרייה באמצעות מציאות רבודה וטכנולוגיות לזיהוי תנועות ידיים	היישום דורש התקנים אחרים לזיהוי תנועות ידיים של המשתמש	טכנולוגיית המציאות הרבודה יכולה להיות משולבת בהצלחה עם טכנולוגיות אחרות. שילוב של טכנולוגיית המציאות הרבודה עם התקן לזיהוי תנועות ידיים יכול להעלות את רמת ההבנה ולמידת גאומטרייה בקרב התלמידים

אף שהמודעות לשילוב של טכנולוגיות של מציאות רבודה שמאפשרות ראייה מרחבית לשיפור הוראת ולמידת הגאומטרייה ניכרת בפיתוח תמידי ובשיפור החומרה של כלים מורכבים ויעילים יותר, עדיין רב הנסתר על הגלוי באשר לתהליכי הלמידה שהמציאות הרבודה מאפשרת. מטרת המאמר הנוכחי היא לתרום לידע העוסק בקידום למידת גאומטרייה באמצעות יישומון AR.

התפתחות היישומים של טכנולוגיית AR בהוראת הגאומטרייה

התפיסה המרחבית בגאומטרייה כוללת חמישה רכיבים: תפיסה מרחבית, ויזואליזציה מרחבית, סיבובים והנפשות, יחסים מרחביים ואוריינטציה מרחבית (Clements, 1998). המטרה העיקרית של הוראת הגאומטרייה היא פיתוח רכיבים אלה. מחקרים מציעים כי למידת גאומטרייה באמצעות מציאות וירטואלית מקדמת חשיבה ותפיסה מרחבית. לדוגמה קאופמן ושמלסטיג (Kaufmann & Schmalstieg, 2003) פיתחו סביבת למידה לגאומטרייה במרחב הכוללת טכניקה של AR. מטרתם הייתה להמחיש את הגופים ואת תכונותיהם הגאומטריות במרחב, וכך להקל על התלמידים ללמוד על הגופים לא רק ויזואלית, אלא גם על פי תכונותיהם הייחודיות.

קאופמן (Kaufmann, 2006) הציג מחקר המתאר יותר מ-300 משתמשים בסביבה של גאומטרייה דינמית תלת-ממדית המשלבת AR בלימודי גאומטרייה ברמות למיניהן, והוכיח כי ההזדמנות לסובב עצמים גאומטריים במרחב גם מסייעת למורים בהבנת הכשלים של החשיבה המרחבית, וגם מקדמת את התפיסה המרחבית באמצעות עיצוב בעיות מתאימות לסביבה וללומד. רדו ועמיתיו (Radu et al., 2015) פיתחו משחק לילדים צעירים הכולל רמות התפתחות של תפיסה גאומטרית במרחב. במהלך פיתוח המשחק הם שיפרו ביצועים בכלי המשתמש במציאות הרבודה וגם במשימות על פי תגובת המשתמשים בזמן הלמידה. במסקנותיהם הם כתבו כי כדי להכין יישום וירטואלי מסוג מציאות רבודה, יש לערוך הערכה מעצבת לכלי וגם למשימות במהלך יישום בפועל של שניהם בו בזמן. בכל איטרציה הם שיפרו את המשימות כדי להתאים את הרמות לתלמידים, וכדי להשיג את המטרות הלימודיות לתכנים הגאומטריים הרלוונטיים. מחקרם לימד אותנו כי יש לבחון במחקר זה פתרון של כל משימה בנפרד, עם האפליקציה ובלעדיה.

מטרת המחקר

מטרת המחקר הנוכחי היא לאפיין את תהליך פתרון הבעיות של תלמידי כיתה ו' בנושא מנסרות בעת השימוש באפליקציה (AR) לעומת אפיון התפיסה והראייה המרחבית של התלמידים בפתרון בעיות בנושא ללא יישום האפליקציה. מחקרים קודמים שנעשו באמצעות טכנולוגיה רבודה לא דנו ביתרון היחסי של האפליקציה על פי מדדים למיניהם.

שאלת המחקר

האם שילוב אפליקציית AR מקדם פתרון בעיות בנושא גופים במרחב בקרב תלמידי כיתה ו', ואם כן, כיצד? מה מאפיין תהליך פתרון בעיות המלווה באפליקציה לעומת תהליך פתרון בעיות שאינו מיישם אותה?

מהלך המחקר

כאמור, המחקר הנוכחי בדק את תרומת השימוש בטכנולוגית AR לפתרון בעיות בנושא גופים במרחב בקרב תלמידי כיתה ו'. להלן חמשת השלבים העיקריים במחקר:

שלב ראשון:

גיבוש קבוצת ניסוי: מטרת השלב הראשון הייתה לגבש קבוצת ניסוי שתתנסה בשימוש באפליקציית AR בלמידה. כדי לגבש קבוצה זו, בחנו את ידיעותיהם של 22 בנים ו-22 בנות הלומדים בכיתה ו' בבית ספר בצפון הארץ (בית הספר מחולק לכיתות בנים ובנות) על נושא המנסרה. התלמידים למדו את נושא המנסרות בכיתה ואף נבחנו מבחן מסכם בסיומו.

המבחן המסכם היה בנוי מארבע משימות בנושא גופים (ראו נספח מספר 1), שבהן במשימה הראשונה התלמידים נדרשו לזהות נפח ושטח פנים של תיבה כאשר התיבה עוברת ממצב נתון אחד למצב נתון אחר, הסרת קובייה ממקומות מסוימים בתיבה וההשפעה על הנפח. במהלך המשימה השנייה הוצגו לפני התלמידים פריסות למיניהן והיה עליהם לקבוע האם פריסות אלו יצרו מנסרה או לא. במשימה השלישית הוצגו לתלמידים גופים למיניהם כאשר היה עליהם לזהות מי מהם מנסרה ומהי צורת הבסיס, ולסיום הוצגו לתלמידים מנסרות חתוכות, ועל התלמידים היה לזהות האם שני הגופים שהתקבלו לאחר החיתוך הם מנסרות.

לפי המבדק נמצאו התוצאות האלה:

טבלה 1: מיפוי תוצאות מבחן מסכם לשתי הכיתות בנות–בנים

משימה		בנות			בנים			סך הכול		
מספר משימה	סעיף	ענו נכון	ענו לא נכון	לא ענו	ענו נכון	ענו לא נכון	לא ענו	ענו נכון	ענו לא נכון	לא ענו
1	א	2	15	5	13	2	7	15	17	12
1	ב	2	15	5	7	7	8	9	22	13
1	א1	11	6	5	14	1	7	25	7	12
1	ב1	1	16	5	6	9	7	7	25	12
1	א2	4	12	6	13	2	7	17	14	13
1	ב2	0	16	6	4	11	7	4	27	13
1	א3	7	9	6	13	2	7	20	11	13
1	ב3	0	16	6	2	13	7	2	29	13
1	א4	3	13	6	6	4	12	9	17	18
1	ב4	4	12	6	3	6	12	7	18	18
2	א	11	8	3	18	2	2	29	10	5
2	ב	16	3	3	15	5	2	31	8	5
2	ג	9	10	3	14	6	2	23	16	5
2	ד	18	1	3	17	2	3	35	3	5
2	ה	13	7	3	12	8	2	24	15	5
2	ו	6	15	1	12	8	2	18	23	3
2	ז	12	7	3	19	1	2	31	8	5
2	ח	14	4	4	17	3	2	31	7	6
2	ט	17	4	1	11	9	2	28	13	3
2	י	10	10	2	10	9	3	20	19	5
2	יא	20	0	2	20	0	2	40	0	4
2	יב	17	2	3	16	4	2	33	6	5
3	א	9	11	2	13	7	2	22	18	4
3	ב	17	2	3	16	3	3	33	5	6
3	ג	11	8	3	17	3	2	28	11	5
3	ד	17	3	2	20	0	2	37	3	4
3	ה	7	13	2	5	15	2	12	28	4
3	ו	14	6	2	20	0	2	34	6	4
3	ז	4	15	3	8	12	2	12	27	5
3	ח	11	9	2	3	17	2	14	26	4
4	א	9	9	4	11	8	3	20	17	7
4	ב	16	2	4	19	0	3	35	2	7
4	ג	14	4	4	16	2	4	30	6	8
4	ד	8	9	5	7	12	3	15	21	8
4	ה	13	3	6	19	0	3	32	3	9
4	ו	12	4	6	15	4	3	27	8	9

מתוך הטבלה עולה כי ברוב המשימות בנים הצליחו יותר מבנות.

שלב שני:

מיון ציוני התלמידים: לאחר בדיקת המבדקים, מוינו ציוני התלמידים לארבעה רבעים כאשר הרבע הראשון הכיל את הציונים הגבוהים ביותר (טווחים 0-9 שגיאות) והרבע האחרון הכיל את רשימת ההישגים הנמוכים ביותר (טווחים 27-36 שגיאות). לשלב הראיונות שבו רצינו לבחון את השימוש באפליקציית AR, נבחרו תלמידים משלושה רבעים מתוך ארבעה. מהרבעון התחתון לא נבחרו תלמידים כלל מפאת מיקוד המחקר הנוכחי בהמללה והסבר, מהרבעון השלישי נבחרו ארבעה תלמידים (1 בן, 3 בנות), מהרבעון השני נבחרו חמישה תלמידים (3 בנים, 2 בנות), מהרבעון הראשון נבחרו ארבעה תלמידים (2 בנים, 2 בנות).

שלב שלישי:

מאחר שיחידת הלימוד היא בשלב פיתוח, היה חשוב לנו לבצע ראיונות אישיים כדי להבין מקרוב את ההתנהגות של הלומדים במהלך פתרון הבעיות באמצעות הכלי ובלעדיו.

לפיכך החלק השלישי במחקר כלל 13 ראיונות אישיים. כל תלמיד עבר ריאיון אישי מתועד ומוסרט מתחילתו ועד סופו (כל ריאיון נמשך בממוצע כחצי שעה), והוא היה בנוי משני חלקים. בחלקו הראשון של הריאיון פתרו התלמידים מספר משימות בנושא

המנסרות ללא השימוש באפליקציית ה-AR. בחלקו השני של הריאיון התלמידים השתמשו באפליקציית AR. להלן דוגמאות נבחרות של המשימות שהובאו לפני התלמידים:

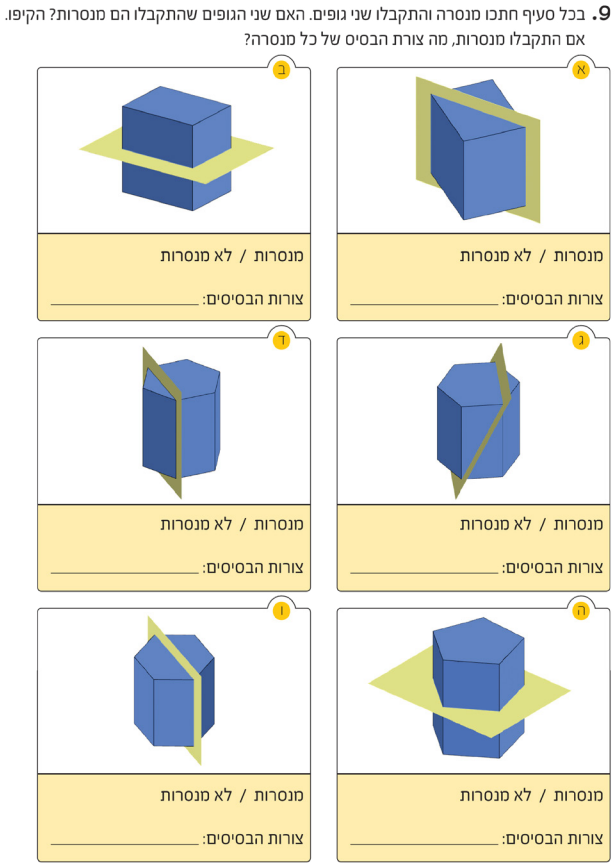
אוכלוסיית המחקר מתוארת בטבלה מס' 2 להלן:

טבלה מס' 2: פרופיל מרואיינים

זכר/נקבה	פרופיל
2 בנים 2 בנות	רבעון 1
3 בנים 2 בנות	רבעון 2
1 בן 3 בנות	רבעון 3

כלי המחקר:

להלן משימות מתוך הראיונות:



איור 1: חיתוך מנסרות

במשימות המוצגות באיור 1, נדרשו התלמידים לבחון האם שני הגופים שנוצרו מחיתוך המנסרה לאחר העברת מישור החיתוך המופיע באיור הם אכן מנסרות. כמו כן התלמידים התבקשו לציין מהי צורת הבסיס של כל מנסרה, במידה שבחרו שהגופים הם מנסרות. (ראוי לציין כי כבר בבית הספר היסודי אנו מכינים את התלמידים לחיתוך אורך, רוחב ואלכסון של גוף – תפיסות שבעבר היו מתחילים לפתח רק בבית הספר העל-יסודי בפתרון בעיות באינטגרלים, נפח של גוף סיבוב וכדומה.)

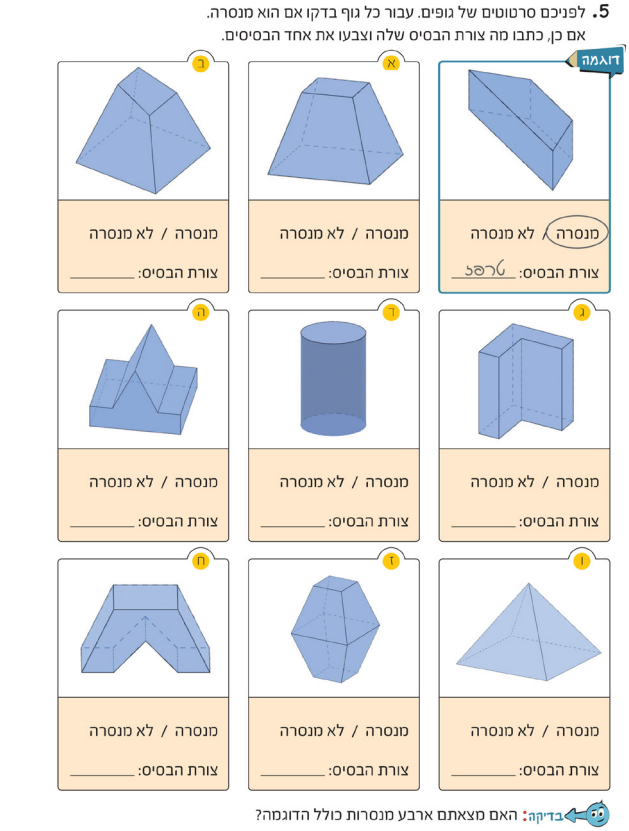
משימה אחרת שהתבקשו התלמידים לבצע הייתה זיהוי מנסרה מתוך ארבעה גופים (איור 2). כאן רצינו לבחון מה יהיו השיקולים שיגרמו להחלטה מי היא מנסרה? וכיצד התלמיד יעריך שהשיקול שלו נכון?

בשתי המשימות התבונן התלמיד בדף, ורק אם לא הצליח לפתור, הוא השתמש באפליקציה כדי לנתח את הגוף.



איור 2: בחירת מנסרה

במשימה זו התלמידים התבקשו לנמק את בחירתם בגוף שהוא מנסרה ולציין את צורת בסיסה של המנסרה. במשימה השלישית הובאו לתלמידם מגוון פאונים והיה עליהם לבחור האם הפאון מנסרה או לא ומהי צורת הבסיס במקרה של זיהוי הפאון כמנסרה. באיור 3 אפשר להבחין כי המנסרות אינן מונחות על בסיסן, אלא על אחת מפאות המנסרה. נוסף על כך, בסיסן אינו אחד מהמצולעים המוכרים לתלמידים, כמו מלבן, ריבוע, משולש. נתון שהעלה את דרגת הקושי של המשימה.



איור 3: זיהוי מנסרה ונימוק

כאמור, בחלקו השני של הריאיון התלמידים בחנו ובדקו את תשובותיהם בעזרת השימוש באפליקציה AR. התלמידים התבקשו לנמק את תשובתם במתן הסבר וחשיבה בקול בזמן הפעלת האפליקציה.

ממצאים

במחקר הנוכחי לא התמקדנו באפיון השגיאות וזיהוי תפיסות ראשוניות של גופים במרחב. המטרה הייתה לתקן שגיאות במהלך יישום האפליקציה. לפיכך הממצאים יתארו רק את התהליכים שבהם תלמידים פתרו בעיות בגופים הנדסיים באמצעות אפליקציית AR ובלעדיה. ממצאים אלה יוצגו בשתי דרכים: בדרך אחת נציג את כמות הפותרים נכונה לכל בעיה ובדרך השנייה נתמקד ברעיונות שהעלו התלמידים במהלך פתרון הבעיה באמצעות האפליקציה. הדגמת התשובות של כלל המרואיינים מציגה תמונה שלמה, שלכל מרואיין היה בה חלק אחר בהצגת תהליך התפיסה המרחבית של הגוף, כחלק מפתרון הבעיה.

הממצאים להלן יוצגו על פי שתי הקטגוריות העיקריות להלן ותת-הקטגוריות הנגזרות מהן:

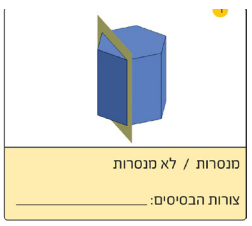
1. שיקולי שיפוט לפתרון הבעיה טרם יישום אפליקציית AR: שיפוט על פי זיהוי תכונות הבסיסים, שיפוט על פי תכונות המעטפת.
2. שיקולי שיפוט לפתרון הבעיה במהלך יישום אפליקציית AR: שיפוט על פי טרנספורמציות, שיפוט על פי ניתוח צורת פריסת הגוף, שיפוט על פי פריסה המתמקד בזיהוי תכונות הבסיסים, שיפוט על פי פריסה המתמקד בתכונות מצולעי המעטפת.

שיקולי שיפוט לפתרון הבעיה טרם יישום אפליקציית AR

שיפוט על פי זיהוי תכונות הבסיסים

משימה ד (עמ' 35)

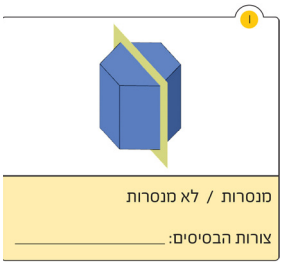
התלמידים נדרשו לזהות האם לאחר חיתוך המנסרה שני הגופים שהתקבלו הם גם מנסרות. **באיסוף הנתונים עלה כי מתוך שלושה עשר התלמידים, 8 תלמידים (5 בנות ו-3 בנים) הצליחו לזהות את המנסרות המתקבלות מהחיתוך ללא אפליקציה** (העונים נכון היו משלושת הרבעונים). שיפוט התלמידים התמקד בהשוואת תכונות הבסיסים. התלמידים שענו נכון, זיהו את הבסיס ה"חדש". התלמידים ששגו ראו בחלוקה הלא סימטרית של הבסיס משנה את הגוף ממנסרה לגוף אחר.



איור 4: משימה ד

משימה ו (עמ' 35)

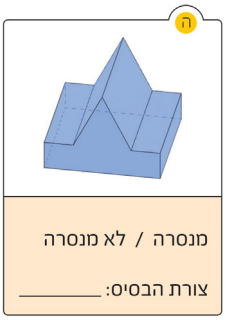
בדומה למשימה הקודמת, גם כאן נדרשו התלמידים לזהות האם לאחר חיתוך המנסרה שני הגופים שהתקבלו הם גם מנסרות. **בסעיף זה 10 תלמידים ענו נכון מתוך 13** (5 בנים ו-5 בנות), וכולם ראו בחיתוך הסימטרי של הבסיס סיבה להפיכת הגוף לשני חצאי גוף ששומרים על תכונתו כמנסרה, כי הבסיסים הם זהים. במהלך הריאיון היה ברור לנו שאנחנו מעוניינים בתפיסה רחבה יותר של שיקולים, כמו ניתוח תכונות הבסיסים וזיהוי הממצא שהתכונות שוות. לכן בהמשך הריאיון הצגנו בעיות מורכבות יותר.



איור 5: משימה ו

משימה ה (עמ' 32)

ארבעה תלמידים (שני בנים ושתי בנות מרבעונים 2 ו-3) מתוך ה-13 הצליחו לפתור את המשימה. הארבעה (שהצליחו) הזיזו בדמיונם (לדבריהם) את הגוף ומצאו "תנוחה" שבה יש שני בסיסים שווים ומקבילים, ולפי זה נימקו את בחירתם למנסרה כבנויה על שני בסיסים מקבילים ושווים.



איור 6: משימה ה

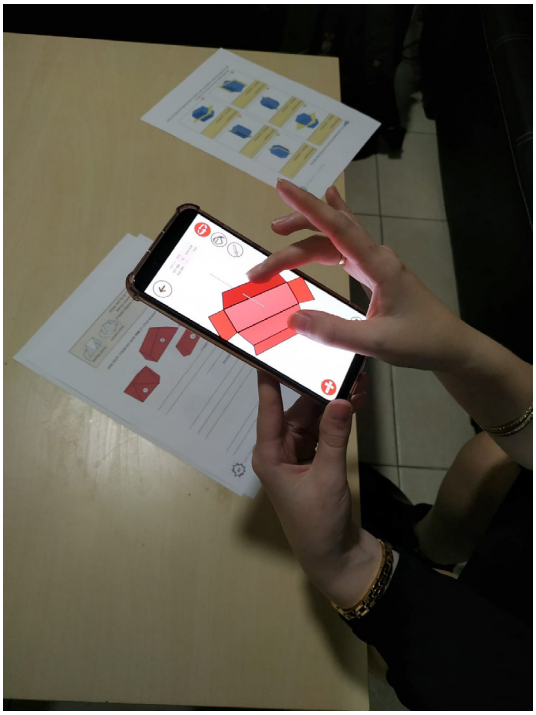
שיפוט על פי תכונות המעטפת

במשימה א (עמ' 31) התלמידים שפתרו נכון ללא האפליקציה, "הזיזו" את הגוף בדמיון וחיפשו את המעטפת כדי למצוא את הבסיסים השווים בתוך המעטפת. כאשר הם התבוננו במעטפת הם ניסו לזהות מקביליות או מצולעים אחרים, ואז מה שלא מקבילית, מבחינתם היה הבסיס ואז חיפשו בסיס חופף לו. כשהם מצאו שני מצולעים זהים וגם מקבילים זה לזה, הם נימקו שהצורה היא מנסרה. תלמידים ששגו אמרו:

"לא מנסרה, (למה?) כי זה לא חופף."

"לא מנסרה, (למה?) כי אין לו שני בסיסים שווים, יש לו מצד אחד אבל לא."

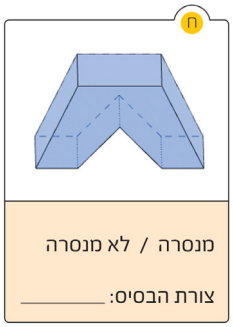
"זה גם לא מנסרה, (למה?) כי אין זה, זה לא אותו דבר מלמטה וגם אין לזה איך קוראים לזה" (מדגימה עם היד בסיס של מנסרה אחרת).



איור 7: זיהוי מנסרה מתוך קבוצת גופים

משימה ח (עמ' 32)

התלמידים שענו נכון (ארבעה, שלושה בנים ובת אחת מרבעונים 1 ו-2) יצרו לעצמם פריסה דמיונית של מעטפת ודנו בתכונות המצולעים הבסיסים לעומת המעטפת, כפי שציין אחד התלמידים שזו מנסרה "כי רק העמידו אותה שונה מהרגיל".

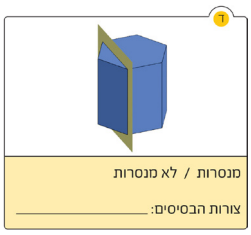


איור 8: משימה ח

שיקולי שיפוט לפתרון הבעיה במהלך יישום אפליקציית AR

שיפוט על פי טרנספורמציות

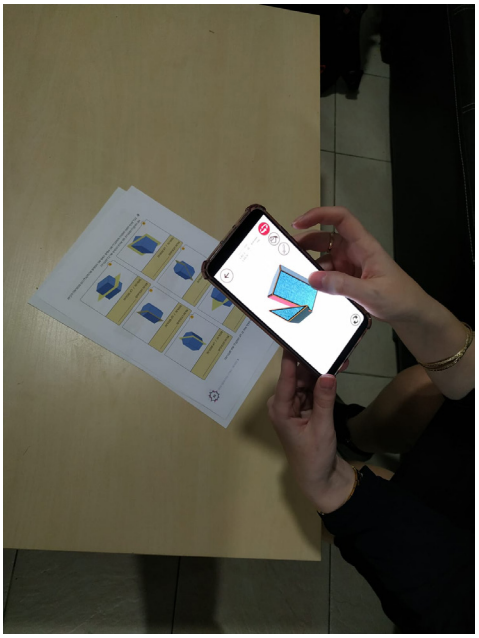
משימה ד (עמ' 35)



איור 9: משימה ד

התלמידים נדרשו להחליט האם לאחר חיתוך המנסרה שני הגופים שהתקבלו הם גם מנסרות. בין התלמידים שתיקנו את תשובתם באמצעות האפליקציה (שני בנים ובת מרבעון 1), היה תלמיד שסובב את חלקי המנסרה ובחן אותם מכמה כיוונים. היה אפשר לראות כי הוא התמקד בחיפוש אחר בסיסים והחליט "לא, אהה. כן. כל אחד בפני עצמו", כלומר החיתוך יוצר שתי מנסרות.

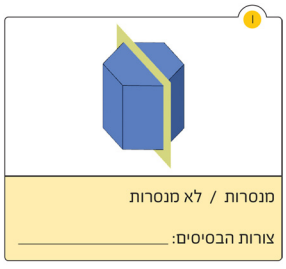
להלן תמונה של סיבוב כפי שהיא נראית באפליקציה:



איור 10: AR למשימה ד

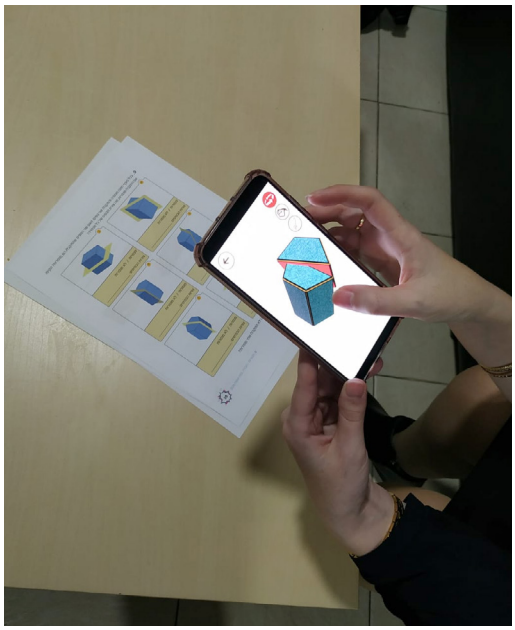
משימה ו (עמ' 35)

בין התלמידות ששגו הייתה תלמידה ש**פתחה את הפריסה** וניסתה לזהות היכן הבסיס נחתך. בשלב זה סברה התלמידה כי הגופים שנוצרו מהחיתוך אינם מנסרות בטענה: "בגלל שזה אלכסון ולא נקודה לנקודה". אך כאשר היא בדקה כל גוף בפני עצמו, היא זיהתה שלכל גוף ישנם שני בסיסים חופפים בלי שום קשר למקום החיתוך של בסיס המנסרה הנתונה. (במשימה זו תיקנו את תשובתם נכונה באמצעות האפליקציה בן אחד מרבעון 1 ושתי בנות מרבעון 2.)



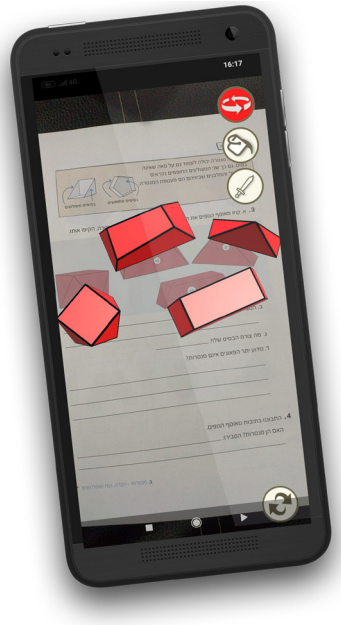
איור 11: משימה ו

להלן תמונה של הגוף כאשר מתבוננים בו באפליקציה:



איור 12: AR למשימה ו

משימה א (עמ' 31)

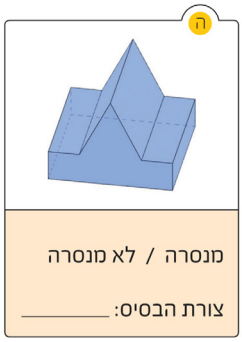


איור 13: משימה א

התלמידים הזיזו את כל הגופים ואז החליטו מהי מנסרה.

משימה ה (עמ' 32)

תשעת התלמידים שלא ענו נכון על השאלה, רבעון ראשון - 3 תלמידים, רבעון שני - חמש תלמידים, רבעון שלישי - תלמיד אחד, סובבו את הגוף באמצעות האפליקציה, ובמהלך הסיבוב החליטו



איור 14: משימה ה

אם הם מזהים שני בסיסים זהים מקבילים שעלו בעת סיבוב.

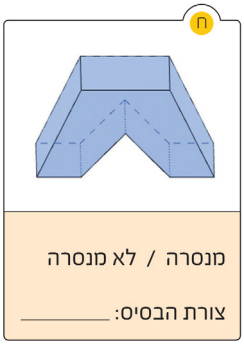
להלן דוגמאות של תמונות שאפשר לראות באפליקציה כפי שהם ראו:



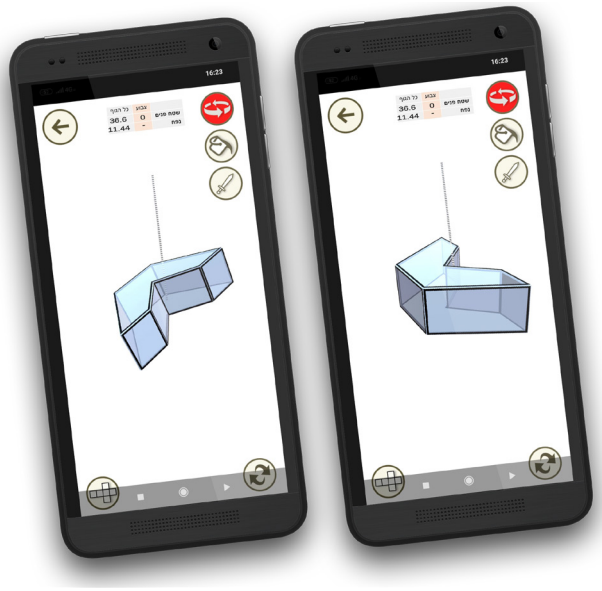
איור 15: AR של משימה ה

משימה ח (עמ' 32)

מקצת התלמידים שלא ענו נכון על השאלה, סובבו את הגוף כדי להתבונן במעטפת. רק לאחר סיבוב הם הזיזו אותה לכיוונים אחרים. ראו איור תמונות הזזה וסיבוב:



איור 16: משימה ח

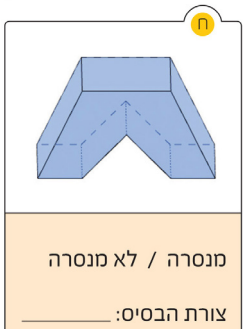


איור 17: AR למשימה ח

שיפוט על פי ניתוח פריסת הגוף

משימה ח (עמ' 32)

במשימה זו מקצת התלמידים שלא ענו נכון על השאלה ללא האפליקציה פרסו את הגוף בניסיון הראשון, והחליטו לפי הפריסה מי הם הבסיסים וקבעו שזו מנסרה. תלמידים אלה לא ביצעו סיבוב או טרנספורמציה וייתכן שהם עדיין בשלב הדו-ממדי.

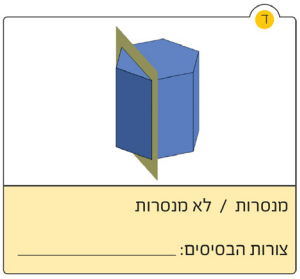


איור 18: משימה ח

שיפוט על פי פריסה המתמקד בזיהוי תכונות הבסיסים

משימה ד (עמ' 35)

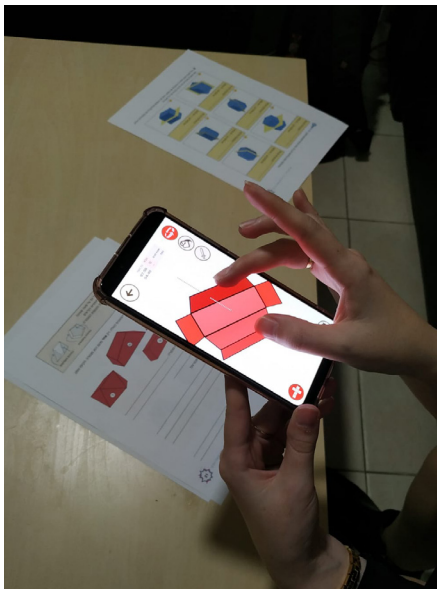
התלמידים נדרשו לזהות האם לאחר חיתוך המנסרה שני הגופים שהתקבלו הם גם מנסרות. אחד התלמידים ששגה תיקן את עצמו באמצעות האפליקציה ואמר: "אז זה כן כי זה משולש וזה מחומש". התלמיד הצביע על הבסיסים "החדשים" אחרי החיתוך.



איור 19: משימה ד

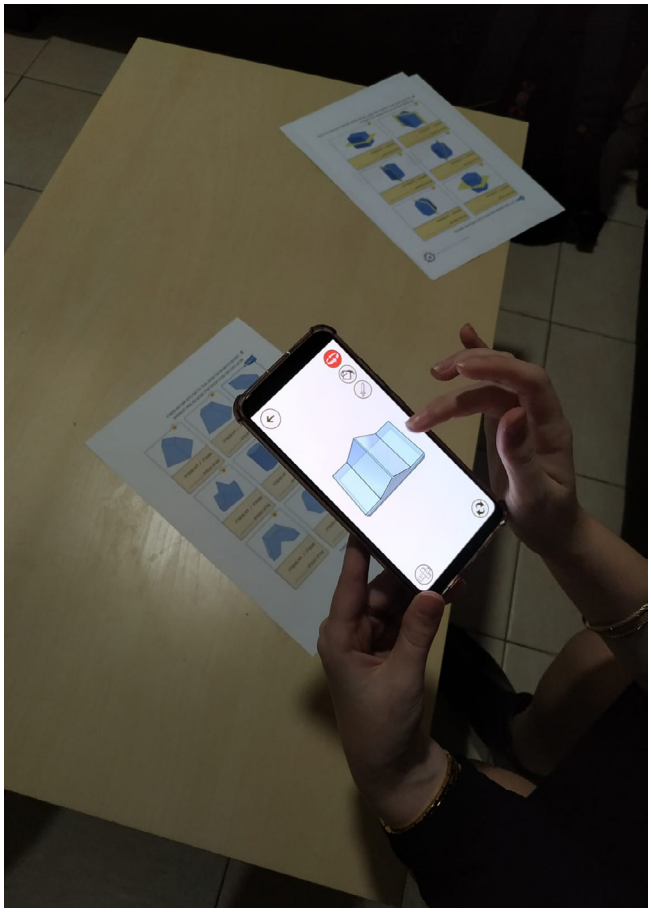
שיפוט על פי פריסה המתמקד בתכונות מצולעי המעטפת

תשובות שגויות אחרות היו מגוונות, כגון "כי זה לא יכול להיות מנסרה זה עקום, זו פירמידה, וזה עקום פה וגם פה (מצביע ומציג בפאון (ט) את הפאות הצדדיות שנראות באלכסון מהזווית הנתונה). וזה, לא יודע". גם תלמיד אחר הסביר על פי אותו עיקרון כי "(ט) זה לא הגיוני, כי הזה פה לא שווה לזה (התלמיד מנסה לזהות 'בסיסים'. התלמיד מצביע על פאות אך מגדיר אותן כ'בסיסים'), (יג) זה בכלל פרמידה, (טו) זה גם לא שווה, זה יותר גדול מזה ('בסיסים'), (ד) זה הדבר הזה זה הדבר היחיד ששווה". כמה מהתלמידים ששגו פתחו את הגוף כפריסה באפליקציה (איור 20), ואז חיפשו בסיסים זהים על פי תכונות משותפות ומעטפת מתאימה לבסיסים ותיקנו את תשובתם.

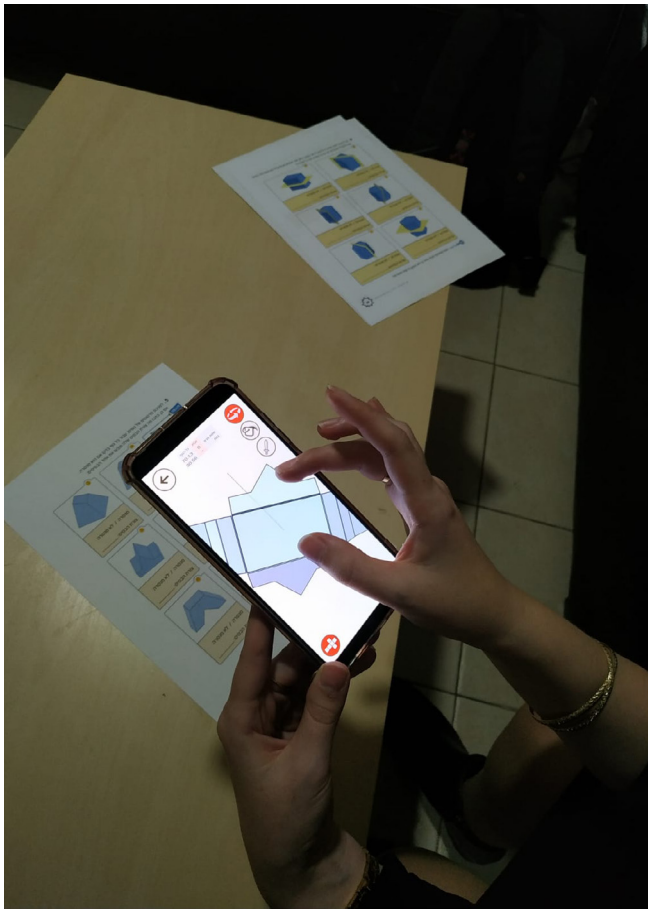


איור 20: פריסה של גוף

ארבעה תלמידים ענו נכון מההתחלה, חמישה ענו לא נכון ושיפרו בעזרת האפליקציה ועוד ארבעה לא תיקנו את תשובתם. התלמידים שתיקנו את תשובתם היו מרבעונים 2 ו-3. התלמידים ששינו את תשובתם לאחר השימוש באפליקציה הבחינו כי אכן פאון זה הוא מנסרה, וזיהו את שני הבסיסים.



איור 21: הזזות של גוף



איור 22: פריסה לצורך זיהוי בסיס

סיכום ממצאים

בטבלה 3 להלן מופיע סיכום ממצאי המחקר הממפה את התוצאות ומשמעותן.

טבלה מספר 3: תוצאות המחקר ופרשנותן הכללית

פתרון בעיה	ללא AR		באמצעות AR		
אופי פתרון הבעיה	שיפוט לפי זיהוי בסיסים	שיפוט לפי תכונות מעטפת	שיפוט באמצעות טרנספורמציות	שיפוט על פי פריסת הגוף	שיפוט על פי זיהוי בסיסים	שיפוט על פי תכונות מצולעי המעטפת
	שיפוט מועדף שהתבצע כפעולה ראשונה של כל 13 המרואיינים	שיפוט מועדף משני שהתבצע לאחר שהתלמיד לא זיהה את הבסיסים, ואז החליט לנסות לזהות מעטפת כדי להבין באמצעותה מהו הבסיס	הזזה והנחת הגוף על מה שנראה כ"בסיס" הפעולה האינטואיטיבית הראשונה שביצעו כל משתתפי המחקר כאשר הם היו צריכים להחליט על תשובה האם הגוף הוא מנסרה ומדוע	הפעולה השנייה שביצעו תלמידים שלא הצליחו לזהות את הבסיסים באמצעות הזזות	פעולה שלישית אחרי פריסת הגוף	פעולה אחרונה לפני שיפוט
פרשנות	התלמידים הבינו את התכונה הקריטית של ההגדרה של מנסרה כגוף בעל שני בסיסים מנוגדים	התלמידים הבינו שזיהוי המעטפת הוא בעל חשיבות משנית וכי המצולעים במעטפת קשורים לבסיס	התלמידים הבינו שהגופים שהם פגשו בתחילת הלימוד היו מונחים על בסיסם, ושהגופים שהם נדרשים לחקור כעת לא מונחים על בסיסם, לכן הם הזיזו את הגופים עד שקיבלו מנח שמתאים למנחים שהכירו מקודם	התלמידים הבינו שפריסת הגוף היא הפעולה המקדמת לזיהוי בסיסים. חקירת הגוף מזמנת בחינת תכונות המצולעים וזיהוי שניים זהים שיהיו גם מקבילים כשהפריסה תהפוך לגוף	התלמידים הבינו שזיהוי בסיסים הוא התכונה הקריטית	פעולה זו בוצעה רק כהשלמה לפעולות קודמות ולא כפעולה שעומדת בפני עצמה. אחרי שזוהו הבסיסים, תלמידים זהירים בחנו ואפיינו את שאר הצורות בפריסה כדי לוודא שהם זיהו נכון את הבסיסים והצורות האחרות נבנות על הבסיס

בסיכומו של תהליך המחקר זיהינו הבדלים בביצועי התלמידים ללא השימוש ביישומון AR לעומת ביצועיהם באמצעות היישומון AR. בטבלה 3 מוצגות הפעולות שביצעו התלמידים ופרשנות זהירה על פי הדיאלוג שהתנהל איתם במהלך הפעילות שלהם, מתוך ניסיון לא להפריע להלך החשיבה של התלמידים.

כאשר התלמידים פעלו ללא היישומון הם ביצעו שתי פעולות עיקריות: א) ניסו לזהות בסיסים; ב) ניסו לזהות את חלקי המעטפת כדי למפות מתוכה את הבסיסים. שתי פעולות אלה נעשו בעת התבוננות בגוף ושימוש במשפטים שמשקפים סוג של ניסיון "לפרוס" את הגוף בדמיון, כמו למשל משימה א (עמ' 31) ומשימה ח (עמ' 32).

כאשר התלמידים פעלו עם היישומון הם פעלו בסדר הזה: הזיזו את הגוף, ועל פי ההזזה ניסו לזהות בסיסים ומעטפת (ראו מצאים שהוצגו לעיל בתת-כותרת "שיפוט על פי טרנספורמציות"). תחילה ניסו לפרוס את הגוף באמצעות הזזה ואז לזהות בעת הפריסה בסיסים, ואם לא הצליחו לזהות בסיסים ניסו לזהות את מבנה המעטפת כשלם ומתוכו לזהות בסיסים. לפי הפעילות ביישומון, ראינו שפעולות הסיבוב והטרנספורמציה של גוף הן פעולות בעלות משמעות עבור הלומד כדי להבין את הגוף במרחב. נוסף על כך, באמצעות היישומון הבחנו כי התלמידים שואפים לשמור על הגוף כשלם, לנתח אותו כגוף מרחבי שלם, ורק אם לא מצליחים הם מנסים להבין אותו באמצעות פריסה. כלומר המוטיבציה של התלמידים היא להישאר במרחב התלת-ממדי, וללמוד ולהבין אותו טרם "נסיגה" למרחב הדו-ממדי של הפריסה כפי שרואים בדוגמאות המוצגות בתת-הפרק שיפוט על פי טרנספורמציות טרם הפריסה.

דיון

עבודות קודמות עם מציאות רבודה (Martín-Gutierrez, Trujillo, & Acosta-Gonzalez, 2013; Young & Santoso, 2018) נוגעות לפיתוח יכולת הראייה המרחבית בגאומטרייה ולאו דווקא זו העוסקת ביכולת תמרון בממד השלישי. עבודה זו מאירה שלושה חידושים עיקריים: החידוש הראשון הוא ההבנה כי המוטיבציה של התלמיד היא להבין גוף במרחב באמצעות המרחב ולכן הפעולות הראשונות של פתרון בעיה באמצעות היישומון, כוללות הזזה במרחב. החידוש השני נוגע לניסיון להבין את פעולות התלמידים, את התהליך ורצף הפעולות שמבצע תלמיד בזמן פתרון בעיה כדי לרכוש תפיסה של גוף במרחב (לפי פרק הממצאים אפשר לראות כי הפעולות כוללות סדרה קבועה של פעולות וסדר לוגי לביצוען). החידוש השלישי נוגע לממצא שמבחינת הלומדים סיבוב והזזה של גופים קודמים לפריסה של תלת-ממד. פעולה שמלמדת שהתלמידים ניסו קודם (איור 21) ורק כאשר לא הגיעו לפתרון, הפכו גוף לפריסה (איור 22).

ממד אחר של התובנות בעבודה הנוכחית נוגע לכלי וליכולת ההדגמה הוויזואלית באמצעותו. לפי ממד זה היה אפשר לטעון כי הכלי פותר את הבעיה ולא משאיר מקום לחשיבה של התלמיד על הבעיה. אך הבעיות נוסחו כך שאי אפשר לפתור את הדרישות באמצעות הכלי בלבד. כלומר הפותר צריך לבחור איזו פעולה לבצע באמצעות הכלי. הכלי מסייע למשתמש לבחור את דרכי ההתבוננות. פתרון בעיה הוא מפגש עם מרחב של אפשרויות לפתרון (Koichu, 2018), ותרומת המחקר הנוכחי היא להראות כי אחד הכלים במרחב האפשרויות הוא ההזדמנות והאפשרות לבחור בפעולות שמתאפשרות בכלי הריבוד.

הממצאים של המחקר הנוכחי עולים בקנה אחד עם מחקרים אחרים (Ibáñez, Di-Serio, Villarán-Molina, & Delgado-Kloos, 2015) המעודדים להעריך ולעצב את תוכניות הלימוד באמצעות המציאות הרבודה במהלך ההוראה באמצעותם באופן שעונה על הבדלים תפיסתיים בין תלמידים.

אחת המסקנות של המחקר הנוכחי היא שבשלב הראשון של המחקר יש לכלול פתרון בעיות פשוטות כדי להצליח לזהות פעולות בסיסיות שתלמידים מבצעים באמצעות היישומון. ואכן נוכחנו כי הפעולות שהתלמידים ביצעו עם היישומון התחילו בהזזה, שזו פעולה שאפשר לבצע גם על גוף פיזי ולא וירטואלי. אך האפשרות של פריסה של גוף מתוך "נקודות מבט" מסוימות היא פעולה ייחודית ליישומון ה-AR. אפשרות הפריסה לימדה אותנו באיזה שלב תלמיד נסוג מהמרחב התלת-ממדי אל המרחב הדו-ממדי, אחרי שסיבוב לא הועיל לזיהוי בסיסים של מנסרה.

כפי שהוצג לעיל, החשיבה הגאומטרית כוללת חמישה היבטים: תפיסה מרחבית, ויזואליזציה מרחבית, סיבובים והנפשות, יחסים מרחביים ואוריינטציה מרחבית (Clements, 1998). באמצעות הלמידה בכלי המחקר הנוכחי, שכללו בעיות ויישומון ככלי עזר היה אפשר לבצע עם התלמידים פעולות עם כל חמשת ההיבטים: להתבונן במרחב ולנסות לתמרן אותו כאשר הוא מוצג בציור דו-ממדי, לסובב ולהזיז גופים במרחב באמצעות הטכנולוגיה, להתבונן ביחסים שבין המצולעים בפריסה ולהחליט מי הם הבסיסים, להפוך גופים ולשנות את כיוונם, להפוך פריסות ולזהות את חלקיהן.

השלב המתוכנן הבא של המחקר הנוכחי הוא לתת יכולת פתרון באמצעות היישומון AR, לעומת חקר גופים פיזיים באמצעות פתרון בעיות מורכבות יותר, שאינן דנות רק בהיבט ההגדרה של המושג, אלא גם ביחסים וקשרים של תכונות בין גופים.

קיימים מחקרים (Merrill, Yang, Roskos, & Steele, 2016; Yilmaz, 2009) הדנים ביתרונם של בנים על בנות בהבנת המרחב בגאומטרייה. במחקר זה נמצא ממצא דומה, אלא שלדעתנו יש לחקור את התפיסה המרחבית הייחודית, ונתון זה לא עלה במחקר הנוכחי. כמו כן חשבנו שיופיעו הבדלים בין הרמות של הרבעונים. לא מצאנו הבדלים בין הפרופילים כאשר התלמידים הפעילו את האפליקציה. ממצא זה עשוי להראות את תרומת השימוש בטכנולוגיה מתקדמת לטשטוש הבדלים בין תלמידים על בסיס מגדרי או הישגים קודמים ולמתן הזדמנויות שוות לכל הלומדים גם יחד. צריך בירור מעמיק נוסף, ואולי מדגם גדול יותר הכולל מחקר כמותי כדי לוודא שהאפליקציה היא זו המקדמת את פתרון הבעיה ואת תיקון התשובות.

תודות

אפליקציית ה-AR המתוארת במאמר הנוכחי אופיינה ופותחה במרכז לטכנולוגיה חינוכית.

המשימות המתוארת במאמר פותחו על ידי צוות הפיתוח למתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית במסגרת פיתוח ספר גיאומטריה לכיתה ו'.

רשימת מקורות

Battista, M. T. (2001). Shape makers: A computer environment that engenders students' construction of geometric ideas and reasoning. *Computers in the Schools, 17*(1-2), 105-120. doi:10.1300/J025v17n01_09

Casey, B. M., Andrews, N., Schindler, H., Kersh, J. E., Samper, A., & Copley, J. (2008). The development of spatial skills

Radu, I., Doherty, E., DiQuollo, K., McCarthy, B., & Tiu, M. (2015, June). Cyberchase shape quest: pushing geometry education boundaries with augmented reality. In *Proceedings of the 14th International Conference on Interaction Design and Children* (pp. 430-433). ACM. doi:10.1145/2771839.2771871

Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM, 47*(3), 319-329. doi:10.1007/s11858-015-0693-4

Tahta, D. (1980). About geometry. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 2-9.

Verdine, B. N., Lucca, K. R., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. S. (2016). The shape of things: The origin of young children's knowledge of the names and properties of geometric forms. *Journal of Cognition and Development, 17*(1), 142-161. doi:10.1080/15248372.2015.1016610

Yılmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education, 1*(2), 83-96.

Young, J. C., & Santoso, H. B. (2018). Preliminary study of JunoBlock: Marker-based augmented reality for geometry educational tool. In N. Abdullah, W. Wan Adnan, M. Foth (Eds.), *Communications in computer and information science: User Science and Engineering* (Vol. 886, pp. 219-230). Singapore: Springer. doi:10.1007/978-981-13-1628-9_20

through interventions involving block building activities. *Cognition and Instruction, 26*(3), 269-309. doi:10.1080/07370000802177177

Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Ibáñez, M. B., Di-Serio, Á., Villarán-Molina, D., & Delgado-Kloos, C. (2015). Augmented reality-based simulators as discovery learning tools: An empirical study. *IEEE Transactions on Education, 58*(3), 208-213. doi:10.1109/TE.2014.2379712

Kaufmann, H. (2003). Collaborative augmented reality in education. *In Proceeding of Imagina 2003 Conference* (pp. 1-4). Monte Carlo, Monaco.

Kaufmann, H. (2006, August). The potential of augmented reality in dynamic geometry education. *In 12th International Conference on Geometry and Graphics* (pp. 1-14). Salvador, Brazil: ISGG.

Kaufmann, H., & Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education with collaborative augmented reality. *Computers & Graphics, 27*(3), 339-345. doi:10.1016/S0097-8493(03)00028-1

Kirner, T. G., Reis, F. M. V., & Kirner, C. (2012, June). Development of an interactive book with augmented reality for teaching and learning geometric shapes. In *7th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI 2012)* (pp. 1-6). Madrid, Spain: IEEE.

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In G. Kaizer, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 307-324). Cham: Springer.

Le, H. Q., & Kim, J. I. (2017, February). An augmented reality application with hand gestures for learning 3D geometry. In *2017 IEEE International Conference on Big Data and Smart Computing (BigComp)* (pp. 34-41). Jeju, South Korea: IEEE. doi:10.1109/BIGCOMP.2017.7881712

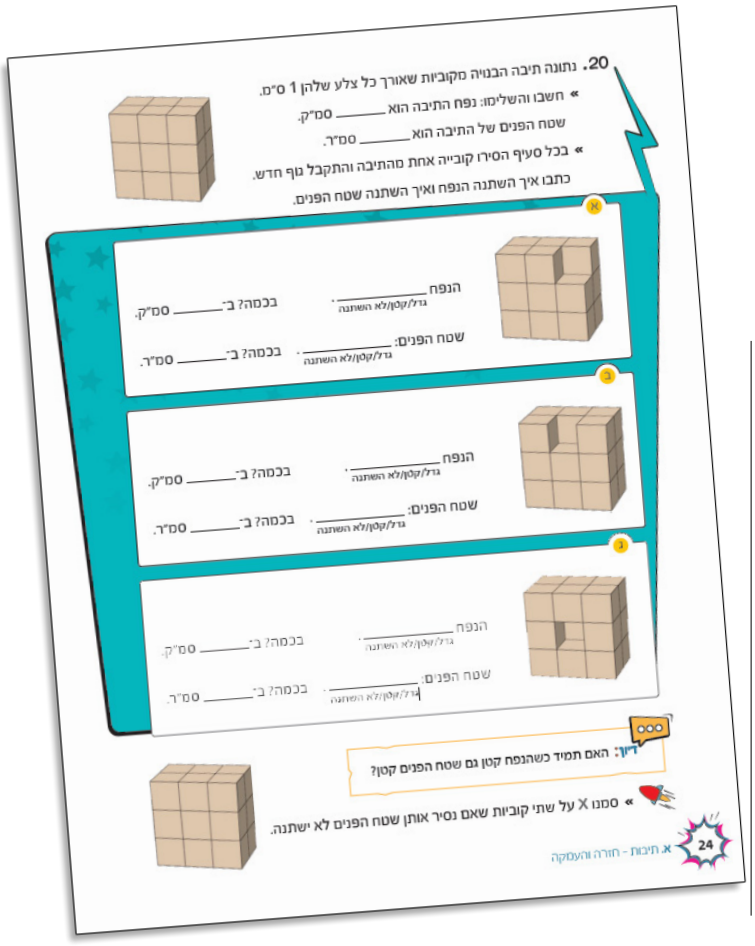
Martín-Gutierrez, J., Trujillo, R. E. N., & Acosta-Gonzalez, M. M. (2013). Augmented reality application assistant for spatial ability training. HMD vs computer screen use study. *Procedia, 93*, 49-53. doi:10.1016/j.sbspro.2013.09.150

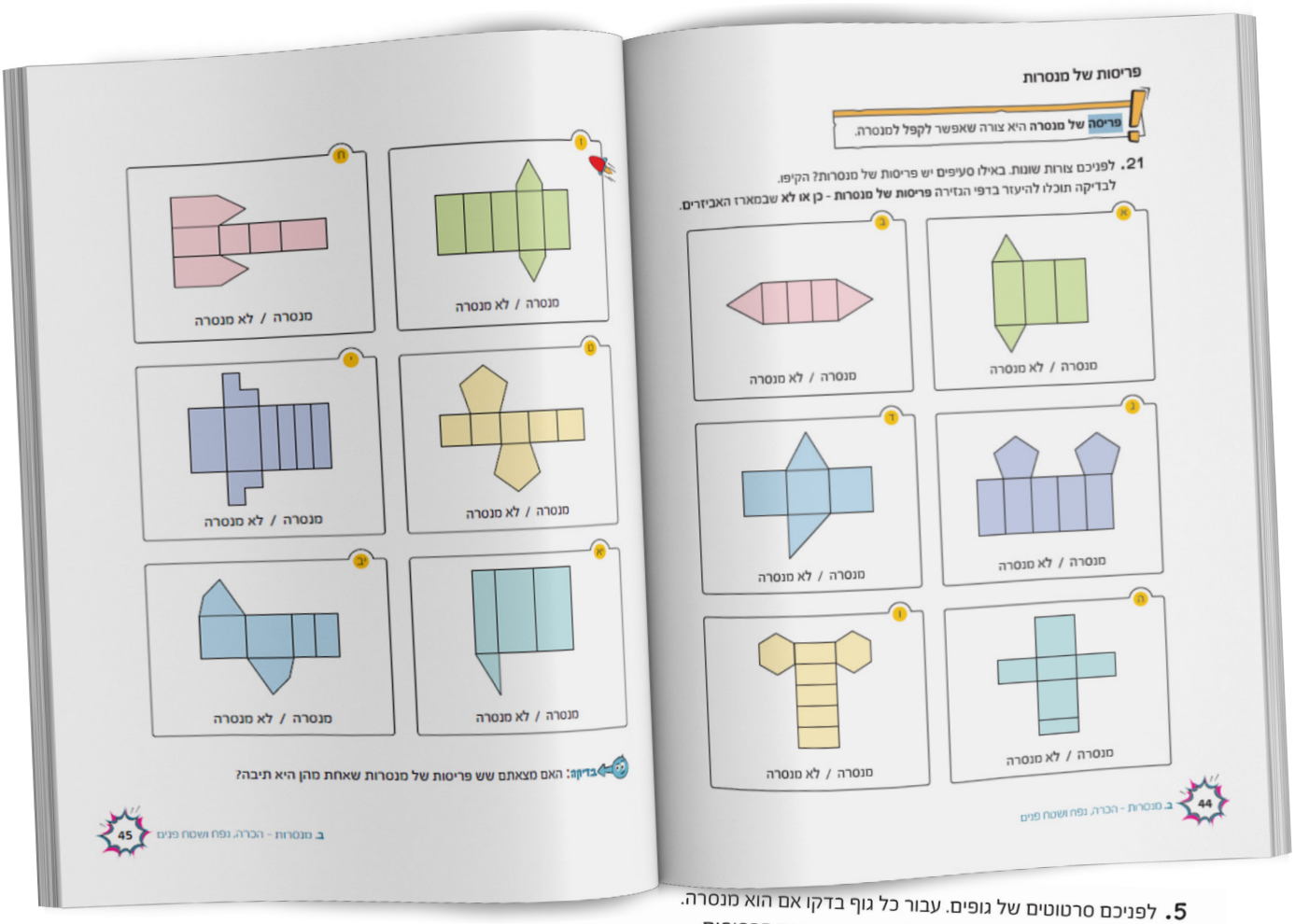
Merrill, E. C., Yang, Y., Roskos, B., & Steele, S. (2016). Sex differences in using spatial and verbal abilities influence route learning performance in a virtual environment: A comparison of 6- to 12-year old boys and girls. *Frontiers in Psychology, 7*(Article 258), 1-17. doi:10.3389/fpsyg.2016.00258. eCollection 2016

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties, 16*(1), 19-39. doi:10.1080/19404158.2011.563476

Purnama, J., Andrew, D., & Galinium, M. (2014, August). Geometry learning tool for elementary school using augmented reality. In *2014 International Conference on Industrial Automation, Information and Communications Technology* (pp. 145-148). Bali, Indonesia: IEEE. doi:10.1109/IAICT.2014.6922112

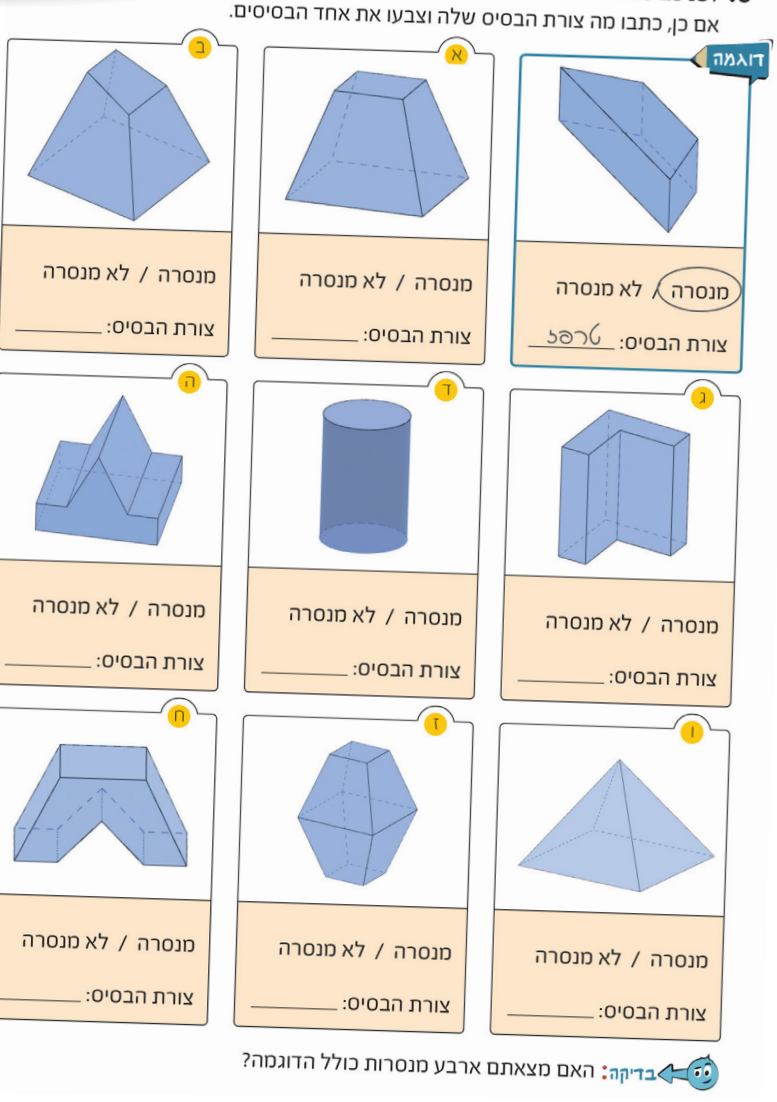
נספח 1: מבחן מסכם





5. לפניכם סרטוטים של גופים. עבור כל גוף בדקו אם הוא מנסרה.
אם כן, כתבו מה צורת הבסיס שלה וצבעו את אחד הבסיסים.

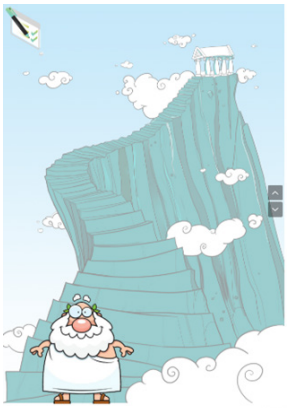
דוגמה



Mooc: לאתגר את החשיבה עם סרגל ומחוגה

מיכל פרנקל ויניב ביטון

נושא הבניות הגאומטריות האוקלידיות הוחזר לתוכנית הלימודים לאחר שלא היה בה במשך שנים רבות. לפיכך מורים רבים – וכמובן פרחי ההוראה – אינם מכירים את הנושא, ונוצר צורך לאפשר להם להשלים את הידע המתמטי הזה במסגרת גמישה. כך עלה הרעיון לבנות קורס mooc שילמד את הנושא מרחוק.



הקורס מדמה "מחנה אימונים" לבניות גאומטריות בהנחייתו של גאומיטרס (המציג את עצמו כמומחה הגדול ביותר לבניות גאומטריות אחרי אוקלידס...), ויש בו שני חלקים: החלק הראשון עוסק בבניות באמצעות סרגל ומחוגה מוחשיים על נייר; ואילו החלק השני עוסק ביישום אותן בניות בכלים דינמיים באמצעות תוכנת גאוגברה.

יש להדגיש שגם בחלק השני אנו עוסקים בבנייה בכלים המדמים סרגל ללא שנתות ומחוגה. כלים אחרים – שמקצרים את התהליכים – ניתנים רק אחרי שהלומדים יודעים כבר איך להסתדר בלעדיהם. לדוגמה, אחרי שלומדים לחצות קטע באמצעות כלים השקולים לסרגל ומחוגה – אנו מוסיפים לסרגל הכלים את הכלי "נקודת אמצע", שמאפשר להשתמש לצורך בניות מורכבות יותר בלי לחזור שוב ושוב על תהליך הבנייה שלה; בשום שלב איננו מאפשרים שימוש בכלי מדידה או כלים אחרים שאינם קיצור של בנייה "מותרת".

כל אחד מהחלקים מחולק לשני פרקים. כל פרק כולל כמה יחידות לימוד המכונות "מסלולים" (כיאה למחנה אימונים...), ולאחריהן תרגול עצמי בשלוש רמות קושי (אפשר לבחור ואפשר גם לנוע ביניהן או לתרגל בכולן), וכן מבדק.

ההקניה נעשית בכמה דרכים:

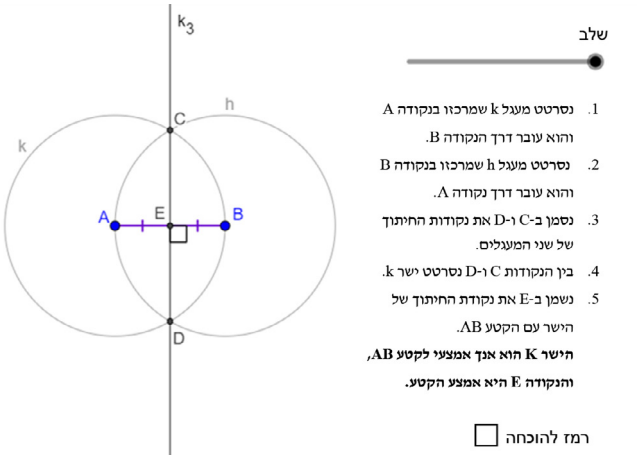
* סרטונים המציגים מורה ותלמיד בפעילות של תכנון וביצוע של בנייה; קישור לדוגמה https://www.youtube.com/watch?time_continue=265&v=yJDlwSXznH4.
* הדגמות באמצעות אנימציות או יישומונים.
* פעילות מודרכת ואחריה סיכום.



אבל צפייה פסיבית וחזרה על הפעולות המוצגות, או אפילו בנייה בעזרת הדרכה - עדיין אינן מזמנות **למידה משמעותית**. כדי להגיע ללמידה משמעותית יש צורך להפעיל את התלמידים בתכנון ובביצוע של בניות למיניהן, לגרום להם להתלבט, לעמת אותם עם תפיסות שגויות, ובמיוחד - לתת להם משוב על עבודתם. אך כיצד אפשר לבדוק את תהליכי הבנייה של התלמידים - ובפרט כשמדובר על בנייה בסרגל ומחוגה ממשיים על נייר?

לשם כך פיתחנו מגוון של שאלות שמנתחות את תהליך הבנייה, שעליהן התלמידים עונים אחרי שביצעו את הבנייה. השתדלנו לא להסתפק בכך שהשאלות האלה תהיינה מתאימות לבדיקה, ושאפנו לנצל אותן כדי להעמיק את הלמידה וההבנה של התלמידים. לדוגמה, בניית אנך אמצעי. לכל אורך הקורס אנו מדגישים שהוכחת הנכונות של בנייה היא חלק הכרחי של התהליך. כתיבת הוכחות היא משימה לא פשוטה, ואין לנו הכלים לבדוק את נכונות ההוכחה שהתלמידים כותבים. הינה דוגמה לטיפול בבעיה זו בקורס:

ההקניה של בניית אנך אמצעי לקטע מוצגת באמצעות יישומון, שמראה את הבנייה שלב אחרי שלב בליווי תיאור מילולי של שלבי הבנייה:



שלב

1. נסרטט מעגל k שמרכזו בנקודה A והוא עובר דרך הנקודה B.
2. נסרטט מעגל h שמרכזו בנקודה B והוא עובר דרך נקודה A.
3. נסמן ב-C ו-D את נקודות החיתוך של שני המעגלים.
4. בין הנקודות C ו-D נסרטט ישר k.
5. נשמן ב-E את נקודת החיתוך של הישר עם הקטע AB.

הישר K הוא אנך אמצעי לקטע AB, והנקודה E היא אמצע הקטע.

רמז להוכחה

אחרי היישומון מופיעה הצעה להוכחת הבנייה, והתלמידים נשאלים **אם** ההוכחה נכונה **ומדוע**. שימו לב: הם לא יכולים לנחש אם היא נכונה או לא! לכל אחת מהתשובות האפשריות האלה הם צריכים לבחור גם את הנימוק הנכון...

לפניכם הצעה להוכחת הבנייה. בדקו את ההוכחה וקבעו אם היא נכונה.

רדיוסים במעגל h - CB=DB

רדיוסים במעגל k - CA=DA

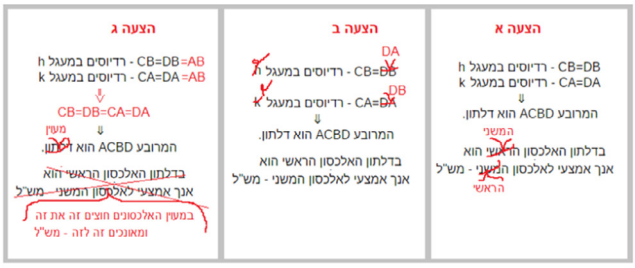
המרובע ACBD הוא דלתון - נובע מהשורות הקודמות

בדלתון האלכסון הראשי הוא אנך אמצעי לאלכסון המשני - מש"ל

תשובה:

ההוכחה נכונה כי כל הטיעונים נכונים
ההוכחה נכונה כי כל שלב בה מנומק היטב
ההוכחה לא נכונה כי המרובע ACBD הוא מעוין
ההוכחה לא נכונה כי בהתאם לשורות הראשונות האלכסון הראשי של הדלתון הוא AB ולא CD

יתר על כן, בשלב הבא מוצגות לתלמידים שלוש הצעות לתיקון ההוכחה, והם נשאלים איזו מההצעות נכונה – אם בכלל:



מה דעתכם על ההצעות?

כולן נכונות.
רק הצעה א נכונה.
רק הצעה ב נכונה.
רק הצעה ג נכונה
כל השינויים מיותרים - ההוכחה המקורית נכונה.

הקורס פותח בשיתוף פעולה של מט"ח, מכללת שאנן ומכללת לוינסקי במימון ישראל דיגיטלית (https://www.youtube.com/watch?v=f6-UOpz7iMA)

זהו, כעת מה שנשאר לכם הוא להירשם לקורס ולהתחיל להתנסות בעצמכם.



צוות הפיתוח והפקה:

אילאיל אלכסנדר	אסף לוינגר
יניב ביטון	ישי מור
רז הראל	רותי סגל
שרה הרשקוביץ	מיכל פרנקל
רז וידריך	אנטולי קורופטוב
אנפה כהן	שיר שוורץ

לחברי קהילת המחקר בחינוך המתמטי שלום רב,
אנו מתכבדים להזמינכם להגיש הצעות לכנס ירושלים השמיני למחקר בחינוך המתמטי.

Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education
8 JCRME
כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

הכנס יתקיים בימים שני ושלישי
ט"ו-ט"ז בשבט תש"פ | 10-11 בפברואר 2020,
במרכז האקדמי לב, ירושלים.

קישורים שימושיים:
קול קורא להגשת הצעות
תבנית אחידה להגשת הצעות להצגה בכנס
הגשת הצעות - שמו של קובץ ההצעה חייב להיות באנגלית
אתר הכנס

אנא הפיצו לכל המתעניינים במחקר בחינוך מתמטי.

בברכה,
ועדת התוכנית (לפי סדר א"ב):

יושבות הראש:
ד"ר רונית בסן צינצינטוס | סמינר הקיבוצים - המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות
ד"ר רותי סגל | אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, "שאנן" - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

ד"ר יניב ביטון | מט"ח - המרכז לטכנולוגיה חינוכית, "שאנן" - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר בועז זילברמן | הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר תקוה עובדיה | אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, מכללת ירושלים
פרופ' ברכה קרמרסקי | אוניברסיטת בר-אילן

טיפוח הכוונה עצמית בלמידה להעלאת ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב תלמידי כיתות ג'[1]

ענבל קולושי-מינסקר



ד"ר ענבל קולושי-מנסקר
בוגרת תואר שלישי באוניברסיטת בר-אילן ומאבחנת דידקטית מוסמכת.
מרצה בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך.
מרצה בהשתלמויות מורים ומדריכת מתמטיקה בבתי ספר בחינוך יסודי.

תקציר

מחקר זה בוחן באיזו מידה אימון להכוונה עצמית בלמידה הממוקד בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, משפר את היכולת לפתור בעיות חד-שלביות (רמת רכישה) ולבצע העברה להפקת בעיות חד-שלביות (העברה קרובה) ולפתרון בעיות מורכבות יותר (העברה רחוקה).

במחקר השתתפו 140 תלמידי כיתות ג', 72 בנים ו-68 בנות במגזר היהודי הממלכתי. קבוצת הניסוי (69 נבדקים) למדה לפתור בעיות בשיטת הוראה המטפחת הכוונה עצמית בלמידה, הכוללת הוראה באמצעות סכמות מארגנות ידע ואימון של שאלות מטה-קוגניטיביות. לעומתה קבוצת הביקורת (71 נבדקים) למדה לפתור בעיות בהוראה רגילה. התלמידים סווגו לשתי רמות הישגים (גבוהים ונמוכים) על פי תוצאות מבחן מקדים.

ממצאי המחקר הראו כי לאחר תוכנית ההתערבות, בקבוצת הניסוי חל שיפור ניכר **בהישגי התלמידים בפתרון בעיות מילוליות מתמטיקה** בכל סוגי הבעיות שנבדקו. התלמידים בעלי ההישגים הנמוכים השתפרו במידה רבה יותר מהתלמידים בעלי ההישגים הגבוהים.

מילות מפתח: הכוונה עצמית בלמידה; פתרון בעיות מילוליות; שימוש במיומנויות מטה-קוגניטיביות; הישגים במתמטיקה.

רקע תאורטי

הכוונה עצמית בלמידה

הכוונה עצמית בלמידה – Self-Regulation Learning) SRL) – מוגדרת כתהליך פעיל ומובנה, שבאמצעותו תלמידים מציבים מטרות ללמידה, מבקרים, מווסתים ושולטים במערכת הקוגניטיבית שלהם ומייצרים מוטיבציה והתנהגות להשגת המטרות שהציבו לעצמם (Schunk & Zimmerman, 1998; Winne & Perry, 2000). על כן מודלים של הכוונה עצמית בלמידה צריכים להקנות לתלמידים מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות לצד מיומנויות מוטיבציוניות ללמידה (Pintrich, 2002), והעלאת ההישגים הלימודיים (קרמרסקי, 2000; Azevedo & Cromley, 2004).

1. מאמר זה הוא תוצר מתוך עבודת התזה שבוצעה באוניברסיטת בר-אילן, בהנחייתם של פרופ' ברכה קרמרסקי וד"ר יצחק וייס.

מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות בתהליך ההכוונה העצמית בלמידה

בספרות קיימת הבחנה בין מיומנות קוגניטיבית למיומנות מטה-קוגניטיבית. רכישת מיומנות קוגניטיבית מתרחשת בשלושה שלבים הנמצאים על פני רצף בהתפתחות המיומנויות הקוגניטיביות של הלומד בתחום ידע ספציפי (Anderson, 1993): בשלב הראשון, הלומד רוכש ידע דקלרטיבי-עובדתי (declarative or factual knowledge), בשלב השני הלומד רוכש ידע פרוצדורלי (knowledge procedural) או ידע אסטרטגי (knowledge strategic), ובשלב השלישי, הוא השלב האוטונומי, שבו הלומד הופך למומחה והפרוצדורות שרכש הופכות להיות מהירות, אוטומטיות ומדויקות יותר ככל שהאימון מתמשך.

לעומת שלבים אלו, הכוונה מודעת ומבוקרת בתהליכים אלו מתבצעות ברמה המטה-קוגניטיבית הכוללת את תחומי המטה-קוגניציה (Flavell, 1976): ידע מטה-קוגניטיבי (metacognitive knowledge) והתנסויות ובקרה מטה-קוגניטיביים (metacognitive experiences or regulation). הידע המטה-קוגניטיבי עוסק בעניינים הכרתיים ופסיכולוגיים ובידע עולם שהאדם רוכש. הוא מורכב מידע על אודות עצמנו (personal variables), ידע על אודות המשימה (task variables) העומדת לפנינו וידע על אודות האסטרטגיה (strategy variables) שהאדם מפעיל כדי לבצעה.

ידע מטה-קוגניטיבי מביא לחוויה מטה-קוגניטיבית (metacognitive experience), הכרתית וריגושית. בקרה מטה-קוגניטיבית (metacognitive regulation) מופעלת באמצעות התנסויות שבהן נעשה שימוש באסטרטגיות מטה-קוגניטיביות לצורך בקרה על הפעילות הקוגניטיבית ולצורך בדיקה שאכן המטרה הקוגניטיבית (כמו פתרון בעיה במתמטיקה) מתממשת.

הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

בגישה ללימוד מתמטיקה המדגישה הבנה, תלמידים צריכים לקבל משימות הדורשות מהם לנתח מצבים, להחליט על דרכי פעולה, לבחור במספרים המתאימים, לבצע את הפעולות המתאימות ולהעריך את התוצאות. תרגול של תרגילים המבודדים ממצבי בעיות אינו מכיל את כל האלמנטים האלה (Burns, 2000, pp. 139-160). **מודל תוכנית ההתערבות** שהועברה במחקר הנוכחי, "הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה", מתבסס על ארבעה מודלים מרכזיים של הכוונה עצמית של תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים:

1. **TIMSS (Mullis, Martin, & Foy, 2008) – הכוונה עצמית של תהליכים קוגניטיביים בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה:** על פי מבחני ה-TIMSS (Mullis et al., 2008), המיומנויות הקוגניטיביות החיוניות לפתרון בעיות ושאלות מתמקדות בשלושה תחומים: ידיעה (Knowing), יישום (Applying) והנמקה (Reasoning).
2. **מודל או"ל – אחת ולתלמיד (סגל, 2002):** מודל זה תומך בשימוש בסכמות מארגנות ידע שיוצרות למידת אשכולות באמצעות קישור כל המקרים הפרטיים המתאימים להכללה מסוימת, ולהשוואות בין מצבים מתמטיים למיניהם. בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה יש לזהות את הסכמה שביסוד כל סוג של בעיה. נמצא כי סכמות הן אמצעי להבנה טובה יותר של מערכת היחסים בין השלם וחלקיו בבעיות מילוליות, כיוון ש"מצגת גרפית טובה יכולה להראות במבט אחד את החלקים העיקריים של השלם והקשר ביניהם, ובכך מאפשרת הבנה הוליסטית שמילים לבד לא יכולות לבטא (או להעביר את המסר)" (Jones, Pierce, & Hunter, 1989, p. 21). המטרה של התמיכה הגרפית היא שהתלמידים יהיו עצמאיים, בעלי חשיבה עצמית ובקרה עצמית, העומדים ברשות עצמם ופחות תלויים במורה (Hartman, 2001).
3. **הכוונה עצמית של תהליכים מטה-קוגניטיביים בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (נשר, תשמ"ג):** במודל זה מודגשת המורכבות של מבנה הבעיה המתמטית, הכוללת שישה מרכיבים הפועלים בו בזמן בעת פתרון הבעיה: סכמטי, לוגי-מתמטי, לשוני, פרגמטי, אסטרטגי ורגשי.

3.1 מרכיב סכמטי – מרכיב זה נוגע לסוג הבעיה (Mayer, 1992). משפטי הבעיה נתונים בתוך מבנה מתאים של סכמות שבהן הלומד מארגן את נתוני הבעיה. נמצא כי המרכיב הסכמטי הוא בעל משמעות בחיזוי קושי של בעיות (Hershkovitz & Nesher, 2003). הבעיות החד-שלביות נחלקות לשלושה סוגים של מרכיבים סכמטיים:

א. בעיות השוואתיות (compare problems) ויחס בין שתי כמויות נתונות: בטקסטים של השוואה מופיעים ביטויים, כגון "בכמה יותר" או "בכמה פחות", "גדול פי..." או "קטן פי...".

ב. בעיות החלפה (change problems) - בעיות רצף – פעולה – דינמיות: בעיות אלה מתארות שינויים המתחוללים באירוע בטקסט. בטקסט מתוארת התפתחות כלשהי בזמן, המבוטאת בדרך כלל באמצעות פעלים.

ג. בעיות צירוף (combine problems) - בעיות תיאור של קבוצות – הכללה – סטטיות: בבעיות אלו אין מתוארת פעולה ממשית והמבנה הלוגי נגזר מיחסי הכללה שונים זה מזה המצוינים באמצעים לשוניים בלבד. אפשר לתאר אותן בעזרת סכמה של השלם וחלקיו, שבה מתוארות שתי קבוצות חלקיות זרות והקבוצה והכוללת שלהן (=קבוצת איחוד).

3.2 מרכיב לוגי-מתמטי – מרכיב זה נוגע לפעולת החשבון הנדרשת למציאת פתרון לבעיה, שאינה נגזרת מהנתונים המספריים המובאים בנוסח הבעיה, אלא דווקא מהיחס שבין המרכיבים השונים זה מזה שמופיעים בטקסט.

3.3 מרכיב לשוני – מרכיב זה נוגע לשפה שבבעיה המילולית. השפה היא שילוב בין "שפת האם" (הוראות והצגת תכנים), לשפת המקצוע (סמלים) ויחסים (משוואות, חוקים, משפטים, עקרונות ותהליכים). שימוש בשפה נדרש לחישוב מספרי בבעיות מילוליות, כדי לארגן בשיטתיות את השימוש בצעדים הרבים בחוקים ובעובדות המתמטיות.

3.4 מרכיב פרגמטי – מרכיב זה נוגע לסיטואציית הבעיה, כלומר למצבים ואירועים אותנטיים הנכללים בבעיות. נמצא כי בעיות מילוליות קלות יותר כאשר סיטואציית הבעיה מוכרת לילד (PISA, 2013-OECD). עוד נמצא כי אופיו של הטקסט, אם הוא דינמי, סטטי, או השוואתי – משפיע במובהק על תהליכי הפתרון.

3.5 מרכיב אסטרטגי – מרכיב זה נוגע לשימוש באסטרטגיות חשיבה שמסייעת לפתרון בעיות. ידע על אסטרטגיות לוויסות ובקרה כלול בתוך "ידע מטה-קוגניטיבי". המהפך ביכולת ניתוח התהליכים הקוגניטיביים אצל פותר בעיות מילוליות מתמטיות חל עם הופעת ספרו של פוליה (Polya, 1945), שהציג לראשונה שיטה להתערבות ולהוראת אסטרטגיות חשיבה שמסייעת לפתרון בעיות. ידע על אסטרטגיות לוויסות ובקרה כלול בתוך "ידע מטה-מתמטי". נמצא כי קיים קשר חזק בין ידע זה להישגים במתמטיקה, לרבות פתרון בעיות מילוליות בחשבון (Mevarech, 1995).

3.6 מרכיב רגשי – הכוונה עצמית בתוך ההיבטים האלו של תהליך הלמידה ותהליך פתרון הבעיות כרוכה ביכולתו של האדם לנטור ולשלוט בתהליכי הבחירה של עצמו (Pintrich,

(2000a, 2000b), מתוך קשר לידע וליכולת ליצור ולתמוך בכוונה מסוימת עד להשגת היעד.

4. **מודל ה.ש.ב.ח.ה (IMPROVE) (Mevarech & Kramarski, 1997):** נבנה לפיתוח חשיבה מתמטית ומדגיש את העקרונות האלה בהוראת המתמטיקה: הצגת סיכום, שאילת שאלות מטה-קוגניטיביות, ביסוס ובקרה, חיזוק מיומנויות של חשיבה מתמטית, העמקה והעשרה. בפרק השיטה מוצג מודל לפיתוח החשיבה המטה-קוגניטיבית בעת פתרון בעיה מילולית במתמטיקה, המבוסס על שאילת שאלות עצמיות מטה-קוגניטיביות במהלך פתרון הבעיה:

שאלות הבנה: מה הבעיה? – שאלות אלו מכוונות את התלמיד להבין את הבעיה.

שאלות הקשר: מה דומה ומה שונה? – שאלות אלו מכוונות לאופרציה של השוואה בין הבעיה הנוכחית ובין הבעיה הקודמת, כלומר עוסקות בדמיון ובשוני שבין הבעיה הנוכחית לבעיות שנפתרו בעבר.

שאלות אסטרטגיה: מהי האסטרטגיה? – שאלות אלו מכוונות לחיפוש חוקים, כללים ועקרונות שיובילו לפתרון הבעיה. הן נוגעות למיפוי אסטרטגיות המתאימות לפתרון הבעיה, כמו שימוש בדיאגרמה, טבלאות, שרטוטים.

שאלות רפלקציה: שאלות אלו מכוונות את התלמיד לבקר את תהליך הפתרון שלו – מטרת שאלות אלו היא לעזור לתלמידים להיות מודעים לשלבי הפתרון ולפקח על התהליך.

מחקרים רבים עסקו בהערכה של יעילות שיטת ההשבח"ה (בהם המחקר של קרמרסקי ורווח [Kramarski & Revach, 2009]). לדוגמה נמצא כי אימון הלומד בשאלות מסוג זה מסייע בהתמודדות עם קשיים לשוניים וקשיים בהבנת בעיות וביכולת לפתור אותן (קרמרסקי ומברך, 2000). כאמור, במחקר הנוכחי ההישגים בפתרון בעיות מילוליות נבחנו בפתרון בעיות חד-שלביות (רמת רכישה), בהפקת בעיות חד-שלביות (העברה קרובה) ובפתרון בעיות מורכבות (העברה רחוקה).

העברה (Transfer) בבעיות מילוליות במתמטיקה

העברה היא דרך חשיבה גבוהה של הפשטה של ידע ממצב מסוים, המאפשרת ליצור זיקה למצב אחר (Salomon & Perkins, 1989). לפיכך העברה צפויה להיות מיומנות מודעת יותר מיישום רפלקסיבי של מיומנויות שגרתיות. העברה היא מרכיב חשוב בלמידה (קניאל, 2003) והיא משקפת תהליך מעגלי הכולל שלושה מרכיבים:

א. רכישה, שבה הלומד מבצע את המשימה שאומן ותורגל בה.

ב. העברה, שהיא ביצוע של התנהגות שנרכשה בלי עזרה בתנאים מסוימים מאלה שבהם נעשתה הרכישה.

ג. שמירת הרכישה וההעברה זמן רב לאחר האימון (פעילות של זיכרון). פתרון בעיות מתמטיות הוא אתגר של העברה הדורש מתלמידים לפתח סכמות לזיהוי בעיות חדשות כשייכות לסוגי בעיות מוכרות, ובעבורן הם יודעים את הפתרונות.

לפי תאוריית בניית הסכמה, אתגר מרכזי בהשפעה על פתרון בעיות מתמטיות הוא ההתפתחות של סכמות לקיבוץ בעיות לסוגים הדורשים אותו פתרון. ככל שהסכמה רחבה יותר, כך גדולה יותר הסבירות שתלמידים יזהו קשרים בין בעיות מוכרות לחדשות, וידעו מתי ליישם את שיטות הפתרון שהם למדו (Fuch, Fuch, Finelli, Courey, & Hamlett, 2004).

העברה באמצעות הפקה (כתיבה)

כתיבה של בעיות מילוליות היא תהליך משלים של פתרון בעיות, מעין מנגנון אחד הנתמך בשני תהליכים. בעת כתיבת הבעיות המילוליות במתמטיקה, המחברים משתמשים בשני סוגי ידע: ידע על סכמות של בעיות מילוליות – **ידע על המשימה**, וידע על סכמות מתמטיות מופשטות – **ידע על התוכן**. ידע על המשימה הוא ידע על מבנים של טקסטים מתמטיים מסוג של בעיות מילוליות. כותבי בעיות מילוליות צריכים לארגן מסר מילולי ולדחוס מסר פנימי, כך שהוא יובן לפותר בתוך מבנה משמעות מקשר בין ידע קיים לידע החדש (Vygotsky, 1987). ידע על התוכן כולל מעבר מסכמה מתמטית אל ייצוג מילולי בטקסטים של בעיות מילוליות. כותבי בעיות צריכים להשתמש בתהליך של שקילה לוגית והנמקה (reasoning), כדי לוודא שנשמרים התנאים של מבנים מתמטיים במגוון בעיות המופקות לנושאים מתמטיים למיניהם (Silver & Stein, 1996). נוסף על פיתוח החשיבה המתמטית, הכתיבה היא תהליך פתוח וגמיש, המגשר ומביא לידי ביטוי עולם חוץ-מתמטי מוכר בתוך פעילות מתמטית פורמלית. קישורים כאלה מאפשרים לתלמידים לראות את החשיבות והרלוונטיות של הפעילויות המתמטיות הנלמדות בכיתה (Silver & Cai, 1996).

הכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידים בעלי הישגים גבוהים ונמוכים

למיומנויות מטה-קוגניטיביות תרומה ניכרת לשיפור חשיבה מסדר גבוה בקרב כלל התלמידים ובקרב תלמידים בעלי הישגים נמוכים בפרט, זאת כיוון שהן מספקות דרכי הוראה יעילות למורים המלמדים תלמידים בעלי הישגים נמוכים. תלמידים אלה מתקשים להתמודד בעצמם עם פתרון בעיות בשל חוסר שימוש במרכיבים של ידע מטה-קוגניטיבי, ולכן הוראה מכוונת של מטה-קוגניציה ממקדת אותם בשלבי הפתרון (Zohar & Peled, 2008).

לפיכך במחקר הנוכחי הושם דגש בטיפוח הכוונה עצמית בלמידה תוך בחינת ההשפעה על רמות הישגים שונות של תלמידים, גבוהים ונמוכים.

ה-**NCTM** (The National Council of Teachers of Mathematics, 2006) בדוח תקציר המחקרים (Research Clips and Briefs) הציג את האסטרטגיות היעילות ביותר להוראת **תלמידים בעלי קשיים במתמטיקה.** נמצא כי האסטרטגיה היעילה ביותר היא **הוראה מפורשת ומובנית** שבה המורה מדגים תוכנית ספציפית (אסטרטגיה) לפתרון בעיות לסוגיהן, והתלמידים משתמשים בתוכנית זו כדי לחשוב על דרך העבודה שלהם במהלך הפתרון מתוך הדגשת מתן מודלים מפורשים של צעדים ופרוצדורות, או שאלות שיש לשאול בעת פתרון הבעיות, כדוגמת כרטיסי ניווט. אסטרטגיה שנייה היא **המללה** ואסטרטגיה שלישית היא **שימוש במארגנים ויזואליים וגרפיים**.

תוכנית ההתערבות במחקר הנוכחי הושתתה על שלוש האסטרטגיות הללו.

מטרת המחקר והשערותיו

מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון באיזו מידה אימון קוגניטיבי ומטה-קוגניטיבי במסגרת תוכנית התערבות להכוונה עצמית בלמידה, משפר את היכולת לפתור בעיות מילוליות חד-שלביות (ברמת רכישה) ומקדם את היכולת לבצע העברה להפקת בעיות חד-שלביות (העברה קרובה) ולפתרון בעיות מורכבות (העברה רחוקה), בקרב תלמידים צעירים בעלי רמות הישגים גבוהים ונמוכים. אלה השערות המחקר:

1. ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה של תלמידים בעלי הישגים גבוהים ונמוכים כאחד בקבוצת הניסוי יעלו לאחר ההתערבות; בקבוצת הביקורת לא יחול שינוי דומה (ראו פירוט בהליך המחקר).
2. בקבוצת הניסוי, לאחר ההתערבות תחול עלייה גדולה יותר בהישגים בקרב התלמידים החלשים בהשוואה לתלמידים החזקים. באמצעות האימון הקוגניטיבי והמטה-קוגניטיבי יוכלו

התלמידים החלשים להנחות את ביצועם בכל שלבי פתרון הבעיה, וכך לשפר במידה ניכרת את הישגיהם בפתרון בעיות, זאת לעומת התלמידים החזקים שטרם האימון פתרו את הבעיות פתרון אינטואיטיבי, אך בכל זאת הגיעו להישגים גבוהים.

שיטה

אוכלוסיית המחקר והמשתתפים

אוכלוסיית המחקר היא תלמידי כיתות ג' בבתי ספר יסודיים במגזר היהודי הממלכתי. במחקר השתתפו 140 תלמידים (72 בנים ו-68 בנות), בגילים שמונה-תשע בכיתות ג' הלומדים בשני בתי ספר יסודיים. הבחירה בשני בתי ספר אלה בוצעה בדגימה בלתי הסתברותית מסוג דגימה מכוונת (purposive sample), כלומר בתי הספר נבחרו על פי אפיוניהם המשותפים: בתי הספר במגזר היהודי הממלכתי, נמצאים ביישוב בצפון הארץ וגם הטרוגניים וזהים ברמתם הסוציו-אקונומית. טרם המחקר התלמידים בשני בתי הספר למדו באותה שיטת לימוד על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה (משרד החינוך, 2006).

הנבדקים חולקו לשתי קבוצות אקראיות בעלות מספר דומה של בנים ובנות: קבוצת הניסוי (68 נבדקים) למדה לפתור בעיות בשיטת הוראה המטפחת הכוונה עצמית בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, השמה דגש במיון לפי סוגי הבעיות באמצעות סכמות מארגנות ידע (סגל, 2002) ושאילת שאלות עצמיות בכל שלבי הפתרון (ה.ש.ב.ח.ה). קבוצת הביקורת (72 נבדקים) למדה לפתור בעיות בהוראה רגילה ללא מיון הבעיות לסוגיהן (ראו הרחבה בהליך המחקר). התלמידים סווגו לשתי רמות הישגים (גבוהים ונמוכים) על פי תוצאות המבחן שלפני ההתערבות. בקבוצת התלמידים החזקים נכללו תלמידים שציונם היה מעל הציון החציוני של קבוצתם (ניסוי לחוד וביקורת לחוד).

כלי המחקר

לבחינת מטרת המחקר – שיפור היכולת לפתור בעיות מילוליות במתמטיקה, הועברו מבחני הישגים:

א. **מבחן ברמת רכישה (הבעיות שנלמדו בתוכנית ההתערבות) הבודק את היכולת לפתור בעיות מילוליות חד-שלביות במתמטיקה לפני ההתערבות ולאחריה:** המבחן כלל עשר בעיות מילוליות חד-שלביות במתמטיקה לפי הנדרש בתוכנית הלימודים במתמטיקה בשכבת הגיל (משרד החינוך, 2006). אלה סוגי הבעיות במבחן הנדרשים בתוכנית הלימודים תשס"ה לכיתה ג': ארבע בעיות חיבור וחיסור מהסוגים שנלמדו בכיתות הקודמות; שתי בעיות השוואה – חיבור וחיסור; שתי בעיות בסיסיות בכפל וחילוק; שתי בעיות השוואה – כפל וחילוק. טווח הציונים נע בין 0 ל-100. ציון גבוה העיד על יכולת גבוהה בפתרון בעיות חד-שלביות (רמת רכישה). מבחן דומה מבחינת מספר השאלות, סוג השאלות, תוכן והמיומנויות הנדרשות לפתרונן, הועבר לאחר ההתערבות (ראו הרחבה בהליך המחקר). בתרשים 1 מוצגת דוגמה לבעיה חד-שלבית ברמת רכישה שניתנה במבחני ההישגים, לפני ההתערבות ולאחריה.

לאחר התערבות - בעיות השוואה חיסור - חד שלבית (רמת רכישה)
(הניקוד ל**תרגיל** 5 נק' ול**תשובה במילים** נק' 5 = 10 נק').

בקיבוץ "עובד" ישנם 2087 תושבים.
בקיבוץ "עובד" ישנם 234 תושבים פחות מאשר בקיבוץ "טבע".
כמה תושבים יש בקיבוץ "עובד"?

תרגיל: _____

תשובה במילים: _____

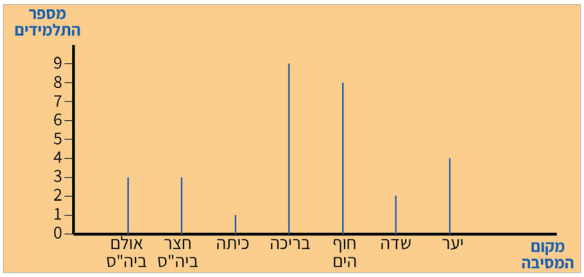
תרשים 1: דוגמה לבעיה חד-שלבית (רמת רכישה) שניתנה במבחני הישגים, לפני ההתערבות ולאחריה

ב. **מבחן ברמת העברה קרובה הבודק את היכולת להפיק בעיות מילוליות חד-שלביות בשלושה חלקים:** חלק א – שתי מטלות שבהן התלמיד מתבקש לכתוב את משפט השאלה לבעיה נתונה; חלק ב – שלוש מטלות שבהן התלמיד מתבקש להפיק בעיות מילוליות חד-שלביות על פי הנחיות ניתנות; חלק ג – שלוש מטלות שבהן התלמיד מתבקש להפיק שאלות חשבוניות לדיאגרמה המתארת מצב מחיי היום-יום. טווח הציונים נע בין 0 ל-100. מבחן דומה מבחינת מספר השאלות, סוג השאלות, תוכן והמיומנויות הנדרשות לפתרונן, הועבר לאחר ההתערבות (ראו דוגמה בתרשים 2).

לאחר התערבות - הפקת בעיות חד-שלביות - העברה קרובה

מסיבת סוף שנה

לפניכם דיאגרמה המתארת מִשְׂאָל שנערך בקרב תלמידי כיתות ג' לגבי השאלה היכן לערוך את מסיבת סוף השנה.



שאלו שלוש שאלות שאת התשובות להן אפשר למצוא בדיאגרמה

(הניקוד לכל הפקת **שאלה כמותית** ומענה נכון הוא 10 נק' ולכל **שאלה תיאורית** ומענה נכון 5 נק').

תרשים 2: דוגמה להפקת בעיה חד-שלבית (העברה קרובה), לפני ההתערבות ולאחריה

ג. **מבחן ברמת העברה רחוקה הבודק את היכולת לפתרון בעיות מורכבות:** מבחן זה כולל שלוש בעיות מורכבות השונות מהבעיות ברמת הרכישה מבחינות אלה: האופנות, הפורמט, סדר הנתונים, אוצר המילים והמידע הנתון. כמו כן הן מורכבות מצירוף של סוגי בעיות ברמת הרכישה. חלק א – כפל; חלק ב – השוואה; חלק ג – חוקיות. טווח הציונים נע בין 0 ל-100. מבחן דומה מבחינת מספר השאלות, סוג השאלות, תוכן והמיומנויות הנדרשות לפתרונן, הועבר לאחר ההתערבות (ראו דוגמה בתרשים 3).

לאחר התערבות - פתרון בעיות מורכבות - העברה רחוקה
בעיית חוקיות

דניאל בונה לבבות בכמה שלבים



(כל תשובה המבוססת על חוקיות של כפל 10 נק' וכל תשובה המבוססת על תרגיל חיבור 5 נק')

א. כמה משולשים יהיו בשלב ה-4?
ב. כמה משולשים יהיו בשלב ה-6?
ג. כמה משולשים יהיו בשלב ה-23?

בכל שאלה התלמידים מתבקשים לכתוב:

דרך חישוב: _____

תשובה במילים: _____

הסבר/י כיצד חישבת: _____

תרשים 3: דוגמה לפתרון בעיה מורכבת (העברה רחוקה) לפני ההתערבות ולאחריה

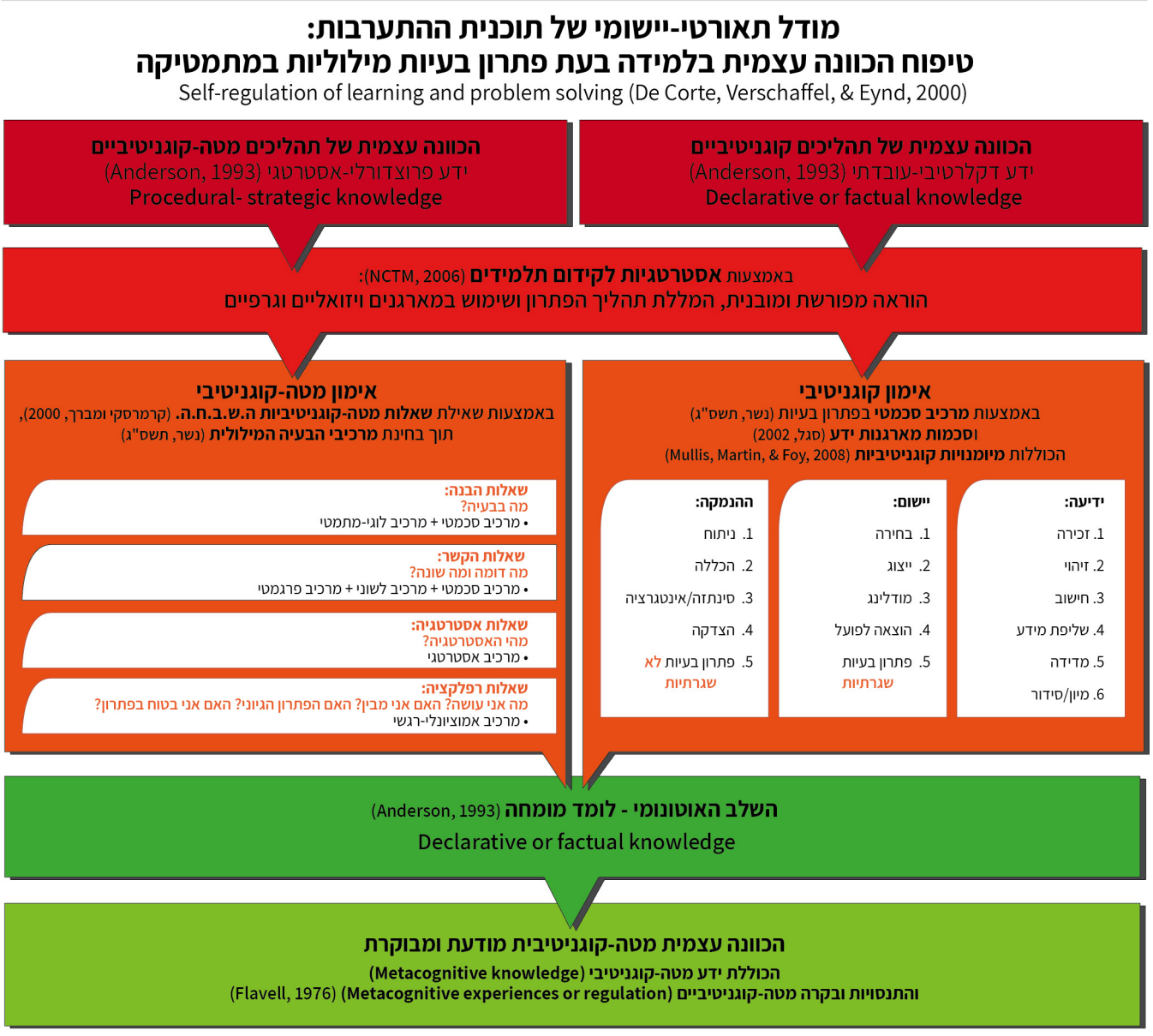
צוות מומחים בהוראת המתמטיקה חיבר ותיקף את מבחני ההישגים במתמטיקה. בין אנשי הצוות נמצאת מורה להוראה מתקנת במתמטיקה המתמחה בשיטת או"ל (סגל, 2002) ומחברת שיטת השבח"ה (קרמרסקי ומברך, 2000). בדיקות תוקף התוכן והמבנה כללו התייעצות עם מורים ותיקים המתמחים בהוראת מתמטיקה

בבתי ספר נוסף על התייעצות עם מומחית להוראת המתמטיקה באוניברסיטה. השופטים המומחים התבקשו לבדוק את תוכן המבחנים (האם המבחן מוציא ומצה, כלומר אינו כולל שאלות ותרגילים ברמה שאינה מתאימה לכיתה ג' וכי המבחן כולל את כל פריטי הידע, המיומנויות והתרגילים שנכללים בתוכנית הלימודים לכיתה ג'). בעת התיקוף נבדקה גם התאמת המבחנים לשכבת הגיל (תוקף נראה) באמצעות התייעצות עם מורות לכיתות ג'. כמו כן ארבעה תלמידים שלמדו בשיטה זאת מתמטיקה התבקשו לפתור את הבחינות בנוכחות עורכת המחקר, ועל סמך ביצועם הוכנסו שינויים במבחנים (כגון ניסוח מחדש של השאלות, ארגון השאלות בדף, מיפוי רמת הקושי וכדומה).

תוכנית ההתערבות

עורכת המחקר העבירה את תוכנית ההתערבות בקבוצת הניסוי. התוכנית נבנתה על בסיס ספרות המחקר ובהתאמה למודלים קוגניטיביים ומטה-עורכת המחקר העבירה את תוכנית ההתערבות בקבוצת הניסוי (ראו בהליך המחקר). בתרשים 4 מוצג מודל תאורטי-יישומי של תוכנית ההתערבות – הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, שנבנה לצורך המחקר. בקבוצת הביקורת התלמידים למדו על פי תוכנית הלימודים עם מורת המתמטיקה.

מודל זה משלב רכישת מיומנות קוגניטיבית הנעשית בשלושה שלבים הנמצאים על פני רצף בהתפתחות המיומנויות הקוגניטיביות של הלומד בתחום ידע ספציפי (Anderson, 1993): בשלב הראשון, הלומד רוכש ידע דקלרטיבי-עובדתי; בשלב השני, הלומד רוכש ידע פרוצדורלי או ידע אסטרטגי; בשלב השלישי, השלב האוטונומי – הלומד הופך למומחה בפתרון המשימה באמצעות יישום שלוש האסטרטגיות היעילות ביותר לקידום תלמידים מתקשים (NCTM, 2006): הוראה מפורשת ומובנית, המללת תהליך הפתרון ושימוש במארגנים ויזואליים וגרפיים; זאת באמצעות אימון קוגניטיבי לזיהוי וניתוח סוגי הבעיות והמאפיינים הייחודיים של כל בעיה (נשר, תשמ"ג; סגל, 2002) באמצעות שימוש במיומנויות קוגניטיביות (Mullis et al., 2008), והאימון המטה-קוגניטיבי בשאילת שאלות עצמיות בכל שלבי הפתרון של הבעיות (נשר, תשמ"ג; Mevarech & Kramarski, 1997). בתרשים 4 מוצג המודל התאורטי-יישומי שפותח במחקר זה לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.



תרשים 4: מודל תאורטי-יישומי – טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

בתרשים 5 להלן מוצגת דוגמה לפתרון בעיה דינמית חד-שלבית שהציג התלמיד ברמת רכישה בהתערבות:

דוגמה לניתוח ולפתרון בעיה מילולית במתמטיקה בתוכנית ההתערבות
באמצעות שאלות מטה-קוגניטיביות לטיפוח הכוונה עצמית
על פי המודל תאורטי-יישומי שפותח למחקר

דוגמה לניתוח בעיית רצף (פעולה-דינמית) חד-שלבית:
כמה תלמידים היו בכיתה, אם יצאו ממנה 11 תלמידים, ונשארו בה 19 תלמידים?

מרכיבי המודל: ידע ומיומנויות הנדרשות בשלבי הפתרון		שלבי פתרון והשאלות העצמיות המטה-קוגניטיביות ה.ש.ב.ח.ה (קרמרסקי ומברך, 2000) מרכיבי הבעיה המילולית (נשר, תשס"ג)		תשובות שהתלמיד עונה לעצמו, בסיוע המורה
הכוונה עצמית של תהליכים קוגניטיביים ידע דקלרטיבי-עובדתי (Anderson, 1993)	**ידיעה:** זכירה זיהוי שליפת מידע מיון סידור (Mullis et al., 2008)	**שלב א** **הבנת סיפור הבעיה ומהו הנעלם** מרכיב סכמטי + מרכיב לוגי-מתמטי	**מה בבעיה?** - מה מסופר בבעיה? - מהו הנעלם?	בבעיה מסופר על תלמידים בכיתה. לאחר שיצאו ממנה תלמידים, שואלים כמה תלמידים נשארו בכיתה.
	יישום: בחירה ייצוג מודלינג חישוב הוצאה לפועל פתרון בעיות שגרתיות (Mullis et al., 2008)	**שלב ב** **ניתוח סוג הבעיה** מרכיב סכמטי + מרכיב לוגי-מתמטי + מרכיב לשוני + מרכיב פרגמטי	**מהו סוג הבעיה?** - האם הקבוצות שוות (בעיית כפל-חילוק)? - האם יש קבוצה כוללת וקבוצות חלקיות (מצב סטטי)? - **האם יש התחלה, פעולה וסוף (מצב דינמי)?** - האם יש קבוצה גדולה, קבוצה קטנה וקבוצת הפרש (מצב של השוואה חיבור-חיסור)? - האם יש קבוצת יחס (השוואה כפל-חילוק)?	בעיה זו היא בעיה דינמית,כיוון שיש בה רצף אירועים: בהתחלה היו תלמידים בכיתה, אחר כך יצאו ממנה תלמידים ובסוף נשארו תלמידים בכיתה. הכמות ההתחלתית משתנה בעקבות פעולה.
הכוונה עצמית של תהליכים מטה-קוגניטיביים ידע פרוצדורלי-אסטרטגי (Anderson, 1993)		**שלב ג** **האסטרטגיה לפתרון** מרכיב אסטרטגי	**מהי האסטרטגיה?** - מהן מילות המפתח? - מהו משפט השאלה? - מהי הסכמה/ התרשים? - מהו התרגיל למציאת הנעלם? - מהי התשובה במילים בהתאם למשפט השאלה?	
השלב האוטונומי לומד מומחה (Anderson, 1993)	**הנמקה:** ניתוח הכללה סינתזה הצדקה פועל פתרון בעיות לא שגרתיות (Mullis et al., 2008)	**שלב ד** **בדיקה ובקרה** מרכיב אמוציונלי-רגשי + מרכיב סכמטי + מרכיב לוגי-מתמטי	**האם פתרתי נכון?** - האם כל שלב בפתרון נכון? - האם התוצאה שלי הגיונית? **מה דומה ומה שונה?** - במה הבעיה דומה ובמה היא שונה מבעיות קודמות?	בעת הבדיקה והבקרה התלמידים מסמנים ✓ על כל שלב שבדקו. אם מצאו שגיאה או שלא היו בטוחים בתשובתם, הם פנו לעזרה למורה. **בעיה זו היא בעיה דינמית חד-שלבית שהנעלם בה הוא בהתחלה והפעולה למציאת הנעלם היא חיבור.** **בבעיות קודמות פתרתי בעיה דינמית חד-שלבית שהנעלם בה בסוף והפעולה למציאת הנעלם הייתה גם חיבור.**

תרשים 5: דוגמה לפתרון בעיה דינמית חד-שלבית שהציג התלמיד ברמת רכישה בהתערבות

הליך המחקר

בלוח 1 להלן מוצג הליך המחקר, שלביו והפעולות שבוצעו בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת:

לוח 1: הליך המחקר, שלביו והפעולות שבוצעו בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת

<table>
<tr><td>שלב א</td><td colspan="3">בשלב הראשון הועבר לכל התלמידים מבחנים לצורך בדיקת ההישגים ברמת רכישה
(פתרון בעיות חד-שלביות) וברמות העברה (הפקת בעיות חד-שלביות ופתרון בעיות מורכבות)</td></tr>
<tr><td rowspan="11">שלב ב
שיטת ההוראה</td><td colspan="2">קבוצת ניסוי
שיטת הוראה על פי מודל טיפוח הכוונה העצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה באמצעות מודלים לניתוח סוגי הבעיות והצגת הקשר בין הנתונים המילוליים ובין הנתונים המספריים</td><td>קבוצת ביקורת
שיטת הוראה ללא טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה</td></tr>
<tr><td colspan="3">בשתי הקבוצות עסקו באותן הבעיות</td></tr>
<tr><td rowspan="3">חיבור וחיסור</td><td>פתרון בעיית הכללה (סטטית – קבוצות) ברמת רכישה
בעיית הכללה - תיאור קבוצות
קבוצה חלקית | קבוצה חלקית | קבוצה כוללת | ביטויי העל
מילים
מספרים
שני שיעורים</td><td rowspan="3">פתרון בעיות חיבור וחיסור
ללא חלוקת בעיות לסוגיהן

שישה שיעורים</td></tr>
<tr><td>פתרון בעיית פעולה (דינמית – רצף) ברמת רכישה
בעיית רצף - פעולה
בסוף | פעולה | בהתחלה | ביטויי העל
מילים
מספרים
שני שיעורים</td></tr>
<tr><td>פתרון בעיית השוואה חיבור וחיסור ברמת רכישה
בעיית השוואה - חיבור וחיסור
קבוצה קטנה | קבוצה גדולה | קבוצה הפרש | ביטויי העל
מילים
מספרים
שני שיעורים</td></tr>
<tr><td rowspan="3">כפל וחילוק</td><td>פתרון בעיית כפל וחילוק
בעיית כפל וחילוק
פריטים בסך הכל | פריטים בכל קבוצה | הקבוצות | ביטויי העל
מילים
מספרים
שני שיעורים</td><td rowspan="3">פתרון בעיות כפל וחילוק
ללא חלוקת בעיות לסוגיהן

ארבעה שיעורים</td></tr>
<tr><td>פתרון בעיית השוואה כפל וחילוק ברמת רכישה
בעיית השוואה - כפל וחילוק
קבוצה קטנה | קבוצה גדולה | קבוצת יחס | ביטויי העל
מילים
מספרים
שני שיעורים</td></tr>
<tr><td colspan="2">תרגול אינטגרטיבי של פתרון כל סוגי הבעיות באמצעות אימון בשאלות מטה-קוגניטיביות – שישה שיעורים</td><td>תרגול אינטגרטיבי של בעיות חיבור-חיסור וכפל-חילוק – שישה שיעורים</td></tr>
<tr><td colspan="2">סך הכול 16 שעות ללימוד בעיות מילוליות חד-שלביות ברמת רכישה</td><td>סך הכול 16 שעות ללימוד בעיות מילוליות חד-שלביות ברמת רכישה</td></tr>
<tr><td>שלב ג</td><td colspan="3">בשלב השלישי נבדקה השפעת שיטות ההוראה לסוגיהן על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות חד-שלביות ברמת רכישה
וברמות ההעברה (הפקת בעיות חד-שלביות ופתרון בעיות מורכבות)</td></tr>
</table>

ניתוח הנתונים

לבדיקת ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה ברמת רכישה וברמות העברה להפקת בעיות חד-שלביות (העברה קרובה) ולפתרון בעיות מורכבות (העברה רחוקה), נערכו ניתוחי שונות דו-כיווניים על ציוני שלושת המבחנים במתמטיקה שהועברו לאחר ההתערבות, באמצעות פיקוח סטטיסטי על ציוני המבחנים שהועברו לפני ההתערבות (ANCOVA). כמו כן בוצעו ניתוחי שונות דו-כיווניים ותלת-כיווניים עם מדידות חוזרות (Analysis of variance with repeated measures – קבוצת מחקר, מועד מבחן ורמת הישגים) וחושב גודל האפקט (ε2).

ממצאים

בלוח 2 מוצגים ממוצעי הציונים הכוללים של שלושת המבחנים לפני ההתערבות ואחריה בקבוצות הניסוי והביקורת לפי רמות התלמידים, וכן גודל האפקט (ES).

לוח 2: ממוצעים, סטיות תקן, גודל מדגם לציון הכולל במבחן רכישה ובמבחני העברה קרובה ורחוקה, לפני ההתערבות ואחריה, לפי שתי רמות תלמידים ושתי קבוצות המחקר

			ציון כולל במבחן רכישה – פתרון בעיות חד-שלביות			ציון כולל במבחן העברה קרובה הפקת בעיות חד-שלביות			ציון כולל במבחן העברה רחוקה פתרון בעיות מורכבות		
קבוצות מחקר	רמת הישגים	מועד מבחן	לפני	אחרי	גודל אפקט	לפני	אחרי	גודל אפקט	לפני	אחרי	גודל אפקט
ניסוי	**נמוכים** N=43	ממוצע	45.93	74.34	1.53	38.16	70.29	1.31	43.74	63.37	.73
		ממוצע מתוקנן		75.11			70.68			64.81	
		ס"ת	18.49	18.36		24.43	19.76		26.64	26.00	
	גבוהים N=26	ממוצע	73.07	91.00	1.88	62.61	84.63	1.26	66.14	81.75	.58
		ממוצע מתוקנן		86.00			79.96			76.36	
		ס"ת	9.49	7.35		17.48	10.55		26.65	12.96	
ביקורת	**נמוכים** N=30	ממוצע	49.16	40.26	-.29	50.06	49.26	-.03	37.34	28.13	-.35
		ממוצע מתוקנן		49.04			59.45			38.79	
		ס"ת	19.78	21.62		23.55	31.89		25.69	28.06	
	גבוהים N=40	ממוצע	81.82	75.38	-.49	62.79	69.12	.28	68.13	51.48	-.75
		ממוצע מתוקנן		71.46			64.81			47.01	
		ס"ת	13.12	15.67		22.39	17.67		22.03	31.82	

טווח הציונים: 0-100

בכל שלושת המבחנים שבדקו הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, ציוניהם של התלמידים בקבוצת הניסוי, בעלי הישגים גבוהים ונמוכים כאחד, היו גבוהים יותר ברמה סטטיסטית מובהקת (פירוט להלן) לאחר ההתערבות. ממצאים אלה מאששים את השערת המחקר הראשונה.

כמו כן ההבדלים בין רמות הישגים למיניהן של התלמידים בקבוצות המחקר נשמרו בכל שלושת המבחנים; ציוניהם של התלמידים בעלי הישגים גבוהים נמצאו גבוהים יותר בכל המבחנים משל התלמידים בעלי ההישגים הנמוכים.

האינטראקציה בין רמה לקבוצה נמצאה מובהקת בציוני הרכישה; התלמידים עם ההישגים הנמוכים בקבוצת הניסוי התחזקו במובהק (M=74.34; SD=18.36) בהשוואה לביקורת (M=40.26; SD=21.62). בקרב התלמידים עם ההישגים הגבוהים הפער בין קבוצות הניסוי (M=91.00; SD=7.35) והביקורת (M=75.38; SD=15.67) – היה קטן יותר. ממצא זה מאשש את השערת המחקר השנייה.

להלן פירוט הממצאים בכל אחד משלושת המבחנים:

במבחן רכישה – פתרון בעיות חד-שלביות – נמצאה תרומה מהותית להתערבות שהביאה לשיפור מובהק בציונים בקבוצת הניסוי בהשוואה לביקורת (F(1,126)=61.1; p<.001); בקבוצת הניסוי, לאחר ההתערבות השתפרו ציוניהם של התלמידים החזקים (כ-18 נקודות בממוצע) ושל החלשים (כ-27 נקודות בממוצע) כאחד; לעומת זאת בקבוצת הביקורת נצפתה ירידה בציוני התלמידים החזקים והחלשים; האינטראקציה בין מועד המבחן לרמת ההישגים נמצאה מובהקת סטטיסטית (F(2,126)=37.0; p<.001).

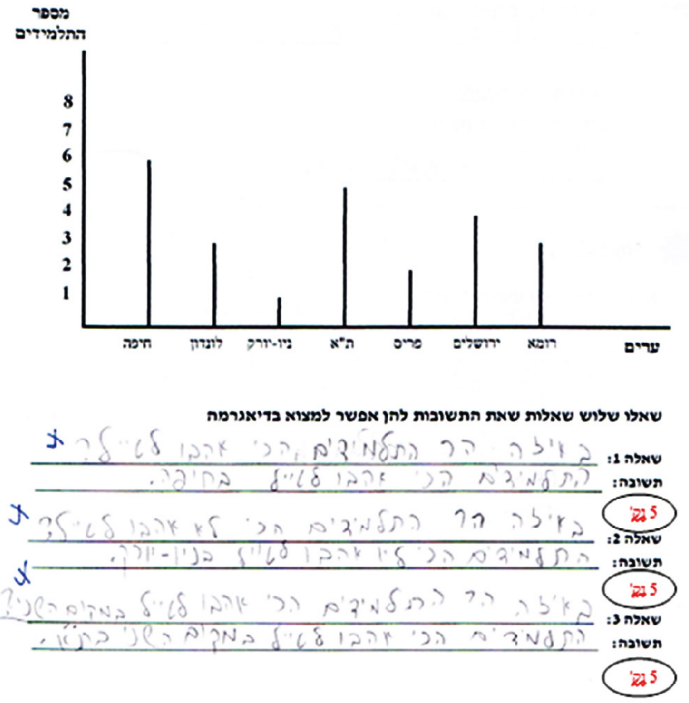
במבחן העברה – הפקת בעיות חד-שלביות – נמצא שיפור בציוני התלמידים בקבוצת הניסוי ובקרב התלמידים החזקים בקבוצת הביקורת, בעוד שבקרב התלמידים החלשים בקבוצת הביקורת לא נמצא שינוי ניכר בציונים. השיפור הניכר ביותר (ES=1.31, עלייה של כ-32 נקודות) נמצא בקרב התלמידים החלשים בקבוצת הניסוי, בעוד שבקרב התלמידים החזקים השיפור היה קטן יותר (כ-22 נקודות בממוצע).

במבחן העברה – פתרון בעיות מורכבות – נמצא שיפור מובהק בציונים בקבוצת הניסוי בהשוואה לביקורת (F(1,126)=30.56; p<.001); בקבוצת הניסוי, כל התלמידים שיפרו את ציוניהם לאחר ההתערבות (תלמידים חזקים – כ-20 נקודות בממוצע; חלשים – כ-15 נקודות בממוצע); לעומת זאת בקבוצת הביקורת חלה ירידה בציוני התלמידים החזקים והחלשים; אינטראקציה זאת נמצאה מובהקת סטטיסטית (F(2,126)=4.31; p<.05).

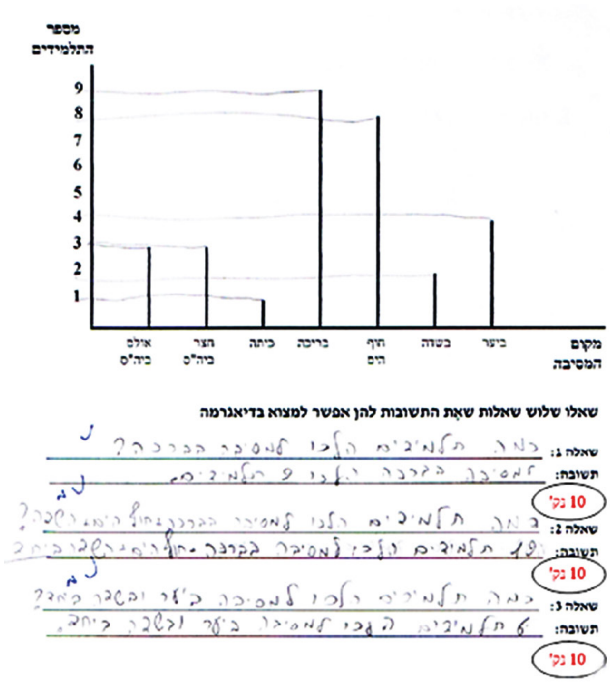
בתרשים 6 מוצגת דוגמה של ביצוע העברה להפקת בעיות של תלמידה מקבוצת התלמידים החלשים:

תלמידה מקבוצת הניסוי **מקבוצת החלשים** -
רמת העברה לפתרון בעיות מורכבות

לפני התערבות



לאחר התערבות



הבעיות שהתלמידה הפיקה **לפני** ההתערבות	הבעיות שהתלמידה הפיקה **לאחר** התערבות
באיזה הר התלמידים הכי אהבו לטייל?	**כמה** תלמידים הלכו למסיבה בבריכה?
באיזה הר התלמידים הכי לא אהבו לטייל?	**כמה** תלמידים הלכו למסיבה בבריכה + בחוף הים + בשדה?
באיזה הר התלמידים הכי אהבו לטייל במקום השני?	**כמה** תלמידים הלכו למסיבה ביער ובשדה ביחד?
נראה כי הבעיות הן בעיות תיאוריות ולא כמותיות. נוסף על כך, התלמידה התקשתה לכלול בבעיות את **הנתונים המילוליים** של הדיאגרמה.	נראה כי הבעיה הראשונה היא בעיה **כמותית** חד-שלבית וכי השתיים הנוספות הן בעיות **כמותיות דו-שלביות**. זאת על אף שלמדה בתוכנית ההתערבות רק בעיות חד-שלביות. נוסף על כך, התלמידה כללה בבעיות את **הנתונים המילוליים** של הדיאגרמה.

תרשים 6: דוגמה של ביצוע העברה להפקת בעיות של תלמידה מקבוצת התלמידים החלשים

סיכום השינויים המהותיים ביותר על פי גודל אפקט:

א. גודל האפקט הגבוה ביותר נמצא בקבוצת הניסוי **בציונים הכוללים במבחן הרכישה (פתרון בעיות חד-שלביות)** בקרב התלמידים החזקים (ES=1.88) ולאחר מכן בקרב התלמידים החלשים (ES=1.53).

ב. במבחן העברה – **הפקת בעיות חד-שלביות**, השיפור בקבוצת הניסוי בקרב התלמידים החלשים (ES=1.31) היה גבוה יותר בהשוואה לחזקים (ES=1.26).

ג. במבחן העברה – **פתרון בעיות מורכבות**, השיפור בקבוצת הניסוי היה נמוך בהשוואה למבחן הרכישה ולמבחן ההעברה הפקת בעיות, כאשר השיפור בקרב התלמידים החלשים (ES=0.73) היה גבוה יותר בהשוואה לחזקים (ES=0.58).

מסקנות ודיון

תלמידי קבוצת הניסוי שלמדו באמצעות מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה (SRL) בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, השיגו ציונים גבוהים יותר ברמה סטטיסטית מובהקת, בהשוואה לתלמידי הביקורת שלמדו ללא הכוונה עצמית. המסקנה הנובעת ממצאי המחקר היא שהכוונה עצמית בלמידה, הכוללת הקניית מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות, מקנה לתלמיד יכולת לפקח בעצמו על חשיבתו ודרך התמודדותו בעת פתרון בעיה מילולית במתמטיקה. יכולת זו מאפשרת לתלמיד לבצע סוגי העברה: הפקת בעיות חד-שלביות ברמת רכישה (העברה קרובה) ופתרון בעיות מורכבות (העברה רחוקה), תוך בחינת דרישות הבעיות ומאפייניהן (קולושי-מינסקר, Kramarski, Weisse, & Kololshi-Minsker, 2008; 2010).

ממצאי המחקר מחזקים מחקרים אחרים (למשל קרמרסקי, 2000) שהראו כי תוכנית התערבות המושתתת על אימון קוגניטיבי בשילוב עם אימון מטה-קוגניטיבי, מובילה את התלמידים לרכוש ידע בנושא פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, על פי שלבי החשיבה של

אנדרסון (Anderson, 1993): במחקר הנוכחי התלמידים תחילה רכשו ידע דקלרטיבי-עובדתי על אודות סוגי הבעיות המילוליות ומאפייניהם הייחודיים (מבנה הבעיות והמאפיינים הייחודיים של כל סוג בעיה), זאת באמצעות סכמות מארגנות ידע (נשר, תשמ"ג; סגל, 2000; Mullis et al., 2008). על בסיס הידע הדקלרטיבי-עובדתי הם רכשו ידע פרוצדורלי-אסטרטגי באמצעות שאילת שאלות מטה-קוגניטיביות בכל שלבי הפתרון ובסיום הפתרון ערכו בקרה ובדיקה (Mevarech & Kramarski, 1997). לבסוף הם יישמו את שלבי האסטרטגיה בטבעיות, במהירות וביעילות. אפשר לומר, על סמך הישגיהם, כי הם הגיעו לשלב האוטונומי של לומד מומחה, כפי שהמשיג אנדרסון (Anderson, 1993). במילים אחרות, בסיום ההתערבות התלמידים בקבוצת הניסוי הגיעו להכוונה עצמית מודעת בלמידה ברמה מטה-קוגניטיבית גבוהה, הכוללת גם ידע מטה-קוגניטיבי וגם התנסויות ובקרה מטה-קוגניטיביים (Flavell, 1976). לפיכך ההכוונה העצמית שירתה את הלמידה בהפיכתה לתהליך אקטיבי-קונסטרוקטיבי (Pintrich, 2000a). לעומתם תלמידי קבוצת הביקורת, אף שעסקו בתוכנית ההתערבות באותן הבעיות, לא הצליחו לרכוש ידע דקלרטיבי-עובדתי מבוסס דיו על אודות ניתוח הבעיות, לצורך פיתוח ידע פרוצדורלי-אסטרטגי בעת פתרון בעיות חד-שלביות מגוונות ולצורך ביצוע העברה להפקת בעיות ולפתרון בעיות מורכבות.

ממצאים אלו עולים בקנה אחד עם ספרות המחקר בתחום (De Corte, Verschaffel, & Eynde, 2000) שבה מודגש כי הכוונה עצמית בלמידה, כיעד עיקרי בחינוך המתמטי, מקדמת למידה מתמטית אפקטיבית. כלומר ההכוונה העצמית בלמידת מתמטיקה משמשת מטרה ואמצעי כאחד; פעילויות ההכוונה של פתרון בעיות נמצאו מקדמות התנהגות אסטרטגית שמכוונת לקראת הבנת הבעיה, זאת באמצעות הבניה של ייצוג טוב של מהות הבעיה. לאחר מכן נבנית תוכנית לפתרון הבעיה המערבת אסטרטגיות קוגניטיביות. המטרה הסופית היא כי ההכוונה החיצונית של המורה תצטמצם בהדרגה ובד בבד תגבר יכולת ההכוונה העצמית של התלמידים.

עוד עלה במחקר כי בציון הכולל של מבחני ההעברה להפקת בעיות חד-שלביות ולפתרון בעיות מורכבות, התלמידים שלמדו באמצעות מודל הכוונה עצמית השיגו ציונים גבוהים יותר ברמה סטטיסטית מובהקת, בהשוואה לתלמידים שלמדו ללא הכוונה עצמית. במיוחד התלמידים שלמדו באמצעות מודל הכוונה עצמית השתפרו במידה ניכרת במדד "כתיבת בעיות", אך גם במדד "בניית משפטי שאלה לבעיה נתונה". אפשר להסביר זאת בכך שבבעיות הדורשות "העברה קרובה" קיימת חפיפה רבה בין הגירויים במשימה ובין הגירויים הקיימים בזמן השלמת המשימה. מצב זה קיים לדוגמה כאשר השאלות במבחן דומות וקרובות בתוכנן לשאלות ולתכנים שנלמדו בזמן השיעור (וייס, 2000).

ניתוח המדדים במבחן העברה לפתרון בעיות מורכבות (העברה רחוקה) העלה כי השיפור הניכר ביותר מבין מדדי המבחן נמצא במדד בעיית השוואה, הנחשבת כמצב קשה יותר להבנה לפתרון באמצעות התלמידים (נשר, תשמ"ג). כמו כן נמצא כי בבעיית כפל ובבעיית חוקיות, חלה עלייה בהישגים בקבוצת הניסוי לעומת ירידה בקבוצת הביקורת. "העברה רחוקה" היא מצב שבו משימת המקור שונה בתוכן שלה ממשימת היעד, אך הפרוצדורה לפתרון דומה. למשל השאלות במבחן שונות משאלות שנלמדו בשיעור, אך נדרשת יכולת יישום עקרונות דומים שנלמדו, ולמרות הריחוק רמת ההפשטה הנדרשת היא מינימלית (וייס, 2000). תוצאות דומות נמצאו אצל קרמרסקי (2000), כאשר נמצאה אינטראקציה בינונית עד חזקה בקשר שבין סוג האימון ליכולת העברה; תלמידים שנחשפו להכוונה מטה-קוגניטיבית שיפרו את יכולתם לקרוא ולבנות גרפים המוצגים בסיטואציה מופשטת יותר מתלמידים שלא נחשפו להכוונה זו.

ממצאי המחקר מחזקים את ההבנה כי הצלחה של העברה היא במידה רבה פונקציה של למידה תחילית; אם לימוד תחילי הוא ברמה עמוקה ומסתיים בהבנה תפיסתית ומקושרת, אזי אפשר לצפות כי תלמידים יהיו מסוגלים לבצע העברה של החומר שלמדו. נוסף על כך, אם הלמידה מכוונת כלפי רעיונות עיקריים ומודגשת למידה לשם העברה, אזי אפשר לצפות להצלחת תהליך ההעברה (Bergin & Pugh, 2006).

באשר להישגים של תלמידים בעלי רמות הישגים למיניהן, ההצלחה בקרב התלמידים בעלי הישגים נמוכים חלה לאחר הקנייתן של מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות בתוכנית ההתערבות. כאמור, אחד האמצעים הקוגניטיביים להקניית המיומנויות הקוגניטיביות היו מארגנים ויזואליים וגרפיים (סכמות מארגנות הידע של הבעיות [NCTM, 2006]). נראה כי מידת הספציפיות של הייצוג הוויזואלי (המיפוי לסוגי הבעיות ושיום המאפיינים הייחודיים של כל בעיה) קבעה בתוצאות המחקרים את מידת ההשפעה של ההתערבות. נוסף על כך, אחד האמצעים המטה-קוגניטיביים ליישום אסטרטגיית פתרון הבעיות שהוקנה במחקר הנוכחי היה כרטיסי ניווט של שלבי פתרון הבעיות עם שאלות הנשאלות בכל שלב. כאמור, גם ה-NCTM (2006) ציין כי אסטרטגיית ההוראה המפורשת והמובנית המספקת מודלים מפורשים של צעדים ופרוצדורות, או שאלות שיש לשאול בעת פתרון הבעיות, כדוגמת כרטיסי ניווט – היא האסטרטגיה היעילה ביותר לקידום תלמידים מתקשים. גם זוהר ופלד (Zohar & Peled, 2008), שבחנו את השפעתה של תוכנית התערבות המתמקדת בהוראה מפורשת של ידע מטה-אסטרטגי על יכולתם של תלמידים לבודד משתנים של בעיה במתמטיקה מצאו שהישגיהם של התלמידים בעלי ההישגים הנמוכים בקבוצת הניסוי, השתפרו במידה ניכרת. עם זה לתלמידים בעלי הישגים נמוכים במתמטיקה נדרש פרק זמן ארוך יותר להגיע לרמת ההישגים הגבוהה ביותר בהשוואה לתלמידים בעלי הישגים גבוהים במתמטיקה.

לסיכום, במחקר הנוכחי נבחנה התרומה של תוכנית התערבות לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידים צעירים בעלי רמות הישגים למיניהן. נראה כי הקניה מפורשת של המודל הקוגניטיבי והמטה-קוגניטיבי היא שסיפקה את הבסיס להצלחה במבחן הרכישה – פתרון בעיות חד-שלביות, וכן את ההצלחה במבחני ההעברה שבהם התלמידים כבר הטמיעו את המודל ויכלו ליישם אותו בגמישות על פי צורכיהם, כדי להתמודד עם הפקת הבעיות החד-שלביות (העברה קרובה) ועם פתרון הבעיות המורכבות שבהן טרם נתקלו (העברה רחוקה). כמו כן מהממצאים עולה כי הכוונה עצמית בלמידה משפיעה במידה ניכרת יותר על הישגיהם של תלמידים חלשים בעלי הישגים נמוכים.

מגבלות המחקר והצעות למחקרי המשך

במחקר הנוכחי נכלל מספר משתתפים קטן יחסית, בסביבת לימודים הומוגנית. לפיכך מוצע לבצע מחקר דומה בקרב קבוצות תלמידים גדולות יותר. ראוי לבצע מחקר דומה בקרב תלמידים משכבות גיל אחרות, הן בבית הספר היסודי הן בעל-יסודי.

כמו כן חשוב לחקור מרכיבים של הכוונה עצמית בלמידה בדרכים אחרות מגוונות: תצפיות, ראיונות וטכניקות ל"חשיבה בקול רם" (Veenman, 2005) שיכולות הן לחזק את ממצאים על אודות ההשפעות של מרכיבי ההכוונה העצמית על תלמידים בעלי הישגים גבוהים ונמוכים במתמטיקה והן להציע מגוון כיווני מחקר חדשים.

במחקרים אלו מן הראוי גם לבדוק לאחר זמן מה את מידת השימור לטווח הארוך של המיומנויות הנלמדות בקרב התלמידים, ובאיזו מידה הם מסוגלים ליישם את כישורי ההכוונה העצמית בלמידה בפתרון בעיות במתמטיקה.

ייחודיות המחקר ותרומתו לשדה החינוך המתמטי

ממסקנות המחקר וממודל תוכנית ההתערבות שהועברה בו לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, אפשר לגזור תרומה חינוכית לשדה. למורים למתמטיקה מוצעת תוכנית אופרטיבית לעבודתם עם תלמידים הלכה למעשה, במיוחד בקרב תלמידים בעלי הישגים נמוכים בכיתות היסוד, כאשר העקרונות החינוכיים הבונים אותה נלקחו ממחקרים וממודלים ללימוד מתמטיקה.

רשימת מקורות

וייס, י' (2000). **האומנם מיומנויות קוגניטיביות תלויות תוכן? ראיות מאימון בפתרון משימות אנלוגיה ויצירת העברה חיובית** (עבודת מוסמך). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.

משרד החינוך, התרבות והספורט. (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: המחבר.

נשר, פ' (תשמ"ג). תהליכים קוגניטיביים בפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. בתוך מ' ניסן וא' לסט (עורכים), **בין חינוך לפסיכולוגיה** (עמ' 407-425). ירושלים: מאגנס.

סגל, ד' (2002). **אחת ולתלמיד**. ירושלים: אלמוג.

קולושי-מינסקר, ע' (2008). **פתרון בעיות מילוליות בחשבון ברמת רכישה ובסוגי העברה (קרובה ורחוקה) תוך פיתוח יכולות להכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידי כתות ג' בעלי רמות הישגים שונות** (עבודת מוסמך). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.

קניאל, ש' (2003). **פעולות התודעה, היסודות לחינוך לחשיבה**. תל-אביב: רמות.

קרמרסקי, ב' (2000). מטה-קוגניציה ופיתוח היכולת לפתור בעיות מתמטיות המוצגות בסיטואציה מוחשית ובסיטואציה מופשטת. **מגמות, מ**(4), 660-685.

קרמרסקי, ב' ומברך, ז' (2000). **הוראת מתמטיקה בכיתה ההטרוגנית בשיטת השבח"ה**. רמת-גן: אוניברסיטת בר-אילן, המכון לקידום האינטגרציה החברתית.

Anderson, J. R. (1993). Problem solving and learning. *American Psychologist, 48*(1), 35-44. doi:10.1037/0003-066X.48.1.35

Azevedo, R., & Cromley, J. G. (2004). Does training of self-regulated facilitate student's learning with hypermedia? *Journal of Educational Psychology, 96*(3), 523-535. doi:10.1037/0022-0663.96.3.523

Bergin, A. D., & Pugh, J. K. (2006). Motivational influences on transfer. *Educational psychologist, 41*(3), 147-160. doi:10.1207/s15326985ep4103_2

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics: A K-8 resource* (2nd ed.). Sausalito, Calif.: Math Solutions Publications.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Eynde, P. O. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). San Diego, Calif.: Academic Press.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231-235). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Fuch, L. S., Fuch, D., Finelli, R., Courey, S. J., & Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solving real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal, 41*(2), 419-445. doi:10.3102/00028312041002419

Hartman, H. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. In H. J. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction: Theory, research and practice* (pp. 33-68). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.

Jones, B. F., Pierce, J., & Hunter, B. (1989). Teaching children to construct graphic representations. *Educational Leadership, 46*(4), 20-25.

Kramarski, B., & Revach, T. (2009). The challenge of self-regulated learning in mathematics teachers' professional training. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 379-399. doi:10.1007/s10649-009-9204-2

Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 42*(2), 179-193. doi:10.1007/s11858-009-0202-8

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed). New York: Freeman.

Mevarech, Z. R. (1995). Metacognition, general ability and mathematical understanding. *Early Education and Development, 6*(2), 155-168. doi:10.1207/s15566935eed0602_4

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal, 34*(2), 365-394.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.

OECD-PISA. (2013). *PISA 2015 draft collaborative problem solving assessment framework*. Retrieved from https://www.oecd.org/callsfortenders/Annex%20ID_PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

Pintrich, P. R. (2000a). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of Educational Psychology, 92*(3), 544-555. doi:10.1037/0022-0663.92.3.544

Pintrich, P. R. (2000b). The role of goal orientation in Self-Regulated Learning. In M. Boekarets, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation: Theory, research, and applications* (pp. 451-502). San Diego, Calif.: Academic Press.

Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multi-method designs? In C. Artelt & B. Moschner (Eds.), *Learn strategies and metacognition: Implication for torching and praxis* (pp. 77-99). Münster: Waxmann.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1., pp. 39-285). New York: Plenum.

Winne, P. H. (2000). Measuring self-regulated learning. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeider, *Handbook of self-regulation* (pp. 531-566). San Diego, Calif.: Academic Press.

Zohar, A., & Peled, B. (2008). The effects of explicit teaching of metastrategic knowledge on low and high-achieving students. *Learning and Instruction, 18*(4), 337-353. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.07.001

Pintrich, P. R. (2002). The role of metacognitive knowledge in learning, teaching and assessing. *Theory into Practice, 41*(4), 219-225. doi:10.1207/s15430421tip4104_3

Polya, G. (1945). How to solve it. Prineceton, N. J.: Princeton University press.

Salomon, G., & Perkins, D. N. (1989). Rocky roads to transfer: Rethinking mechanisms of a neglected phenomenon. *Educational Psychologist, 24*(2), 113-142. doi:10.1207/s15326985ep2402_1

Schunk, D. H., & Zimmerman, B. J. (1998). *Self-regulated learning: From teaching to self-reflective practice*. New York: Guilford.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539. doi:10.2307/749846

Silver, E. A., & Stein, M. K. (1996). The Quasar project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education, 30*(4), 476-521 doi:10.1177/0042085996030004006



קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" 3

דבר העורך - יניב ביטון 7

מדור חדשות מתמטיות - נצה מובשוביץ-הדר 9

פיתוח תחושת המסוגלות בלימודי החשבון בבית הספר היסודי התאמת הלימוד ליכולת ולקצב של כל תלמיד אישית לוחצת עם פרופסור פרלה נשר -
קרני שיר ויניב ביטון 12

חוויות מכנס:
Bridges - Stockholm 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, ;
Education, Culture - ליאורה נוטוב 16

המלצה לספרן של אילנה לבנברג ודורית פטקין "גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה" - שלמה וינר 19

תכונות גאומטריות מפתיעות - החקר, ההוכחה והכללה שלהן -
משה סטופל, אבי סיגלר ועידן טל 22

היבטים גאומטריים באתרים יהודיים: חקירה באמצעות סביבה גאומטרית אינטראקטיבית -
שרה הרשקוביץ ונח דנא-פיקארד 28

"כאשר מביטים, נפתור באמצעות 'תרגיל פשוט'...." תלמידי כיתות ה'-ו' מסבירים פעולת חילוק שברים באמצעות ייצוגים באקסל - ענת קלמר וחנה לב-זמיר 34

תלמידי תיכון צופים בסרטונים לימודיים בדרכים מגוונות, בעת הכנת שיעורי בית במתמטיקה - מהא מנסור ואליק פלטניק 50

ייצוגי כמות וגמישותם: הכוח המניע תהליכי חישוב והבנה המתמטית -
רחל שי ואמאל שריף-רסלאן 60

השפעה של הוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות ומבנים-אלגבריים על יכולת פתרון משוואות - רוית פלדמן ורונית בסן צינצינטוס 75

יצירת דוגמאות נגדיות ואי־דוגמאות בהוראת המתמטיקה והשימוש בהן אצל פרחי ההוראה -
אסמעיל אלמחדי 86

מודל העמקת": הכוונה עצמית מטה-קוגניטיבית מותאמת דינמית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים - מירב צהר-רוזן וניצה מרק-זגדון 95

"דברים שרואים משם לא רואים מכאן" שימוש בטכנולוגית AR כמקדמת תפיסה מרחבית של ההגדרה הקריטית של המושג מנסרה -
יניב ביטון, תקוה עובדיה, אסנת פלוס וקארין אלוש 103

Mooc: לאתגר את החשיבה עם סרגל ומחוגה
מיכל פרנקל ויניב ביטון 115

טיפוח הכוונה עצמית בלמידה להעלאת ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב תלמידי כיתות ג' - ענבל קולושי-מינסקר 117

המכללה האקדמית הדתית לחינוך
קרית שמואל - חיפה