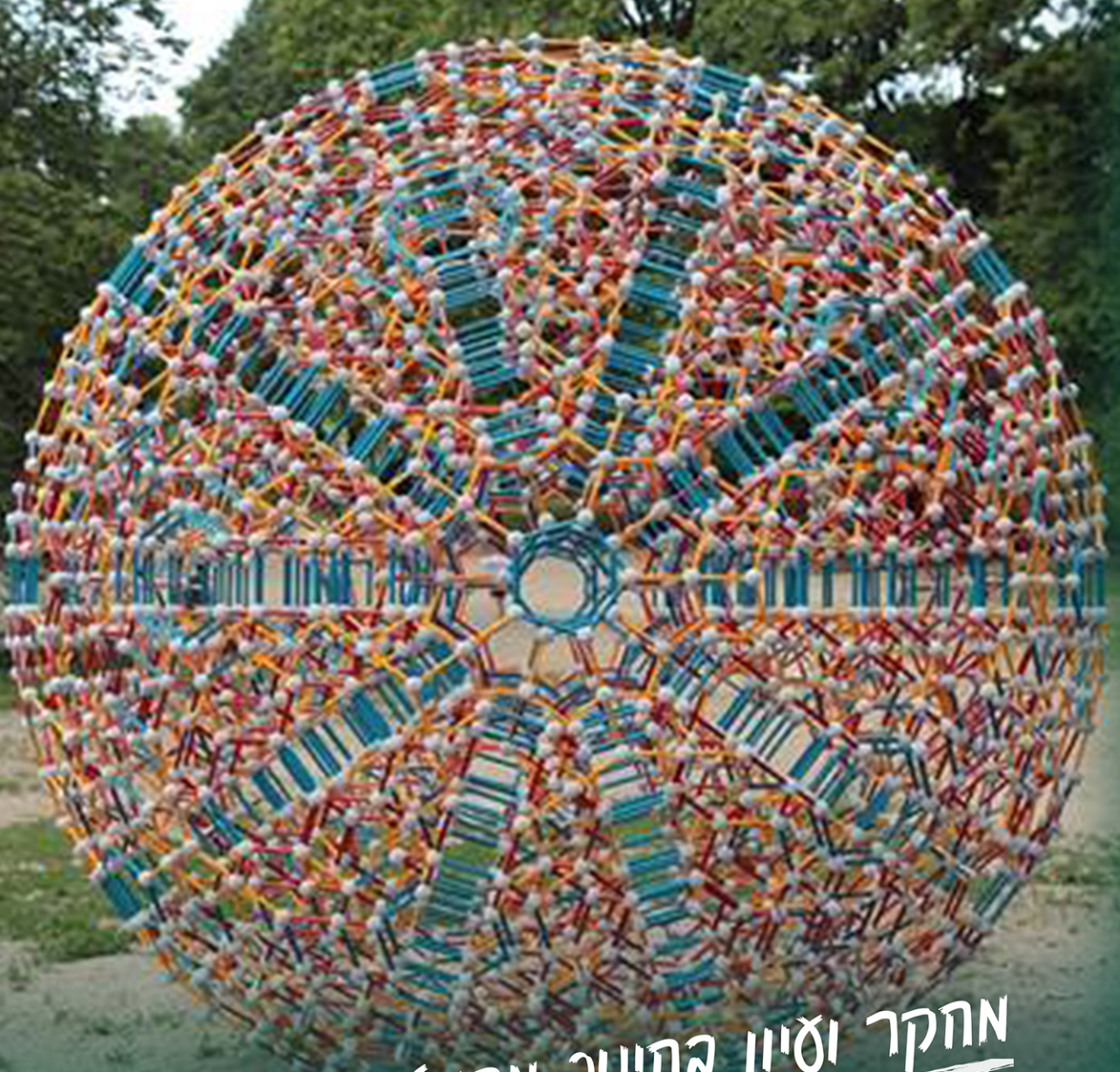




מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 1

ינואר 2014



מחקר ועיון החינוך מתמאי

גיליון 1

כתב-עת מחקר ועיון בחינוך מתמטי

תוכן העניינים

1	דבר העורכת.....
3	דבר המפמ"רית.....
	מדור חדשות מתמטיות
5	נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל.....
	האולפניאדה המתמטית: היבטים תוכניים, ערכיים ומגדריים
11	יצחק איזק, מכללה ירושלים זיוה דויטש, מכללה ירושלים.....
	תפיסת המושגים 'קושי' ו'אתגר' בבעיות מתמטיות שגרתיות ולא שגרתיות, בתנאים שונים של מעורבות עם הבעיות
39	מארק אפלבאום, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע.....
	מי לפני מי? רכישת עקרונות רצף קבוצות בקרב ילדי הגן
57	ניצה מרק-זגדון, לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך.....
	בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה
	משה סטופל, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
80	דוד בן-חיים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל; שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.....
	מדור חוויות מכנס
108	שלמה וינר, מכללת אחוה לחינוך והאוניברסיטה העברית.....
	מדור המלצה על ספר – שתי מדריכות לארץ הפלאות
111	איליה סיניצקי, גורדון – המכללה האקדמית לחינוך ושאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.....

עורכת:	ד"ר קרני שיר	שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך	עריכה לשונית:
חברי ועדת המערכת:	פרופ' דוד בן-חיים	מל"מ טכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך	יפעת פישר ואורית בן נון, מכללת שאנן
	פרופ' דינה תירוש	אוניברסיטת תל-אביב	עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:
	ד"ר מארק אפלבאום	מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך	תמי יהושע, מכללת שאנן
	ד"ר נגר גל	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך	
	ד"ר אילנה לבנברג	גורדון – המכללה האקדמית לחינוך	
	ד"ר טלי נחליאלי	לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך	
	ד"ר משה סטופל	שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך	
	ד"ר אלכס פרידלנדר	מכון ויצמן למדע	
	ד"ר אמאל רסלאן	המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל	
	ד"ר עטרה שריקי	אורנים – המכללה האקדמית לחינוך	
החברים שניאורו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.			



יספר לנו פרופ'
שלמה וינר
(ממכללת אחווה,
ומהאוניברסיטה
העברית) על
חוויותיו מכנס

ה-SEMT13 בפראג. המדור האחרון הוא המדור "המלצה על ספר". בגיליון הנוכחי ימליץ פרופ' איליה סיניצקי (ממכללת גורדון) על ספריהן של ד"ר עטרה שריקי ופרופ' נצה מובשוביץ-הדר 'לוגיקה בארץ הפלאות'. מדור זה יחתום את כתב-העת.

בכתב-העת מפורסמים מאמרים עיוניים, מחקריים ויישומיים. המאמרים המתפרסמים בגיליון זה כוללים קשת רחבה של מחקרים, החל ממחקרים שנעשו על ילדים בגיל הגן, דרך מחקרים על תלמידים בגילאי בית-הספר, וכלה במחקרים על פרחי הוראה, מתמטיקאים, וחוקרים בתחום החינוך המתמטי. סדר המאמרים בגיליון נקבע על-פי סדר אלפביתי של שמות הכותבים.

אני רוצה לנצל את ההזדמנות ולהודות לכל חברי המערכת על עבודתם המסורה, על רעיונותיהם, על עצותיהם ובעיקר – על תמיכתם. אין ספק כי כעורכת זכיתי בקבוצה נפלאה של חברי מערכת אשר ללא עזרתם גיליון זה לא היה יוצא לאור.

תודה לכל השופטים – חברי הקהיליה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי, שנרתמו למשימת השיפוט, והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו בשדרוג המאמרים המופיעים בגיליון.

דבר העורכת

בשעה טובה, שנה לאחר שיצאה ההודעה לחברי הקהילה של העוסקים במחקר בחינוך מתמטי בדבר הקמת כתב-העת, אני גאה לפתוח את הגיליון הראשון של כתב-העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי.

כתב-העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" הוא כתב-עת חדש המיועד לכל העוסקים בהכשרה ובהתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה, כמו גם לסטודנטים הלומדים לתארים מתקדמים. מטרת כתב-העת היא לעודד כתיבה אקדמית בעברית, לתרום לשיח שבין האקדמיה לשדה, ולהנגיש לחברי הקהילה מחקרים העוסקים בסוגיות שונות בתחום החינוך המתמטי בארץ.

על שער הגיליון הראשון בחרנו להציג את הפסל שהקים צוות ה-MoMath (המוזיאון המתמטי החדש בניו-יורק) בסנטרל פארק במנהטן. אין ספק שפסל מרהיב וצבעוני זה יכול ללמד אותנו על הגוונים הצבעוניים והמיוחדים אשר מאפיינים את המתמטיקה בכלל, ואת החינוך המתמטי בפרט. בנוסף, אנו יכולים ללמוד מפסל זה על החשיבות שבהנגשת המתמטיקה אל האנשים – אם זה מבקרים קבועים ואם זה עוברי אורח.

הגיליון הראשון של כתב-העת כולל שלושה מדורים וארבעה מאמרים. המדור הראשון, הפותח את כתב-העת, הוא המדור "חדשות מתמטיות" שעורכת פרופ' נצה מובשוביץ-הדר (מהטכניון). בכל גיליון נצה תעדכן אותנו בטעימות מן ההתפתחויות והתגליות המתמטיות המרכזיות של אותה השנה. המדור השני הוא המדור "חוויות מכנס". בגיליון זה

ברגעים לא קלים, והיה מוכן תמיד לתרום מניסיונו הרב.

אני רוצה לנצל את ההזדמנות ולהזמין אתכם להמשיך לשלוח אלינו מאמרים, תגובות ורעיונות לקראת הגיליון השני של כתב-העת.

קריאה נעימה ואוֹפִיָּה !

ד"ר קרני שיר

עורכת כתב-העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי

ktav.et.rme@gmail.com

תודה רבה לתמי יהושע ממכללת שאנן, אשר בעזרתה ובעזרת הצוות הנפלא שלה עברו כל המאמרים עריכה לשונית וגרפית, וכתב-העת כולו עוצב בצורה כל כך נפלאה.

תודה לד"ר יחיאל פריש – ראש מכללת שאנן, המכללה האקדמית הדתית לחינוך, על היוזמה והתמיכה הכספית של המכללה בכתב-העת.

תודה מיוחדת אחרונה לידידי היקר, פרופ' דוד בן-חיים, שהדריך אותי לאורך כל הדרך, תמך

השופטים של המאמרים בכתב-העת (בסדר אלפביתי) הם:

המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל	ד"ר מסארווה ח'ירייה
גורדון – המכללה האקדמית לחינוך	ד"ר לאה אסמן
בית ברל – המכללה האקדמית	פרופ' אביקם גזית
דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך	ד"ר הגר גל
מכללה ירושלים – מכללה אקדמית תורנית חינוכית	ד"ר זיוה דויטש
מכון וייצמן למדע	ד"ר נורית הדס
אוניברסיטת בן גוריון	פרופ' רון הוז
אוניברסיטת תל-אביב	ד"ר מיכל טבח
אורנים – המכללה האקדמית לחינוך	ד"ר תנה לב
גורדון – המכללה האקדמית לחינוך	ד"ר אילנה לכנברג
אוניברסיטת תל-אביב	ד"ר אסתר לוינסון
שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך	ד"ר משה טופל
מכון וייצמן למדע	ד"ר אלכס פרידלנדר
אוניברסיטת תל-אביב	ד"ר אנטולי קרפטוב
אורנים – המכללה האקדמית לחינוך	ד"ר רותי רייז



דבר הספס"רית

ניתנה לי הזכות לברך על פרסום הגיליון הראשון של כתב-העת החדש "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

כתב-העת מיועד לכלל העוסקים בחינוך מתמטי, לחוקרים, למורים למתמטיקה, לאלה האמונים על ההכשרה וההתפתחות מקצועית של מורי המתמטיקה, לסטודנטים, לפרחי ההוראה ובכלל לכל אדם שהחינוך המתמטי בארץ קרוב ללבו.

כתב-העת הוא פלטפורמה נוספת לקהיליית החינוך המתמטי בארץ, על כל גווניה, לדון ולחלוק יחד רעיונות חדשים, לשמוע ובעיקר לשתף. זו ההזדמנות לספק לקוראים סקירה של מחקרים עדכניים והתפתחויות חדשות בסוגיות שונות בתחום ההוראה והלמידה של מתמטיקה ויישומן במגוון רחב של נקודות מבט תאורטיות ומעשיות.

הגיליון הראשון של כתב-העת מתייחס לסוגיות מרכזיות המעסיקות את כולנו בהוראת המתמטיקה: השלכות על בניית תכניות לימודים על ההכשרה וההדרכה של העוסקים בחינוך מתמטי; היחס של תלמידים למתמטיקה והדימוי העצמי כאשר מזמנים לתלמידים אפשרויות ללמידה עצמאית במתמטיקה; הגורמים המשפיעים על תפיסות התלמידים לגבי קשיי משימות מתמטיות והאתגרים שעמם יכולים התלמידים להתמודד; ושימוש בבעיות אותנטיות לחקר להוראה ולמידה משמעותית במתמטיקה.

בהזדמנות זו ברצוני
לשתף אתכם
בשינויים שחלו
בתכניות הלימודים

במתמטיקה ובמגמות המרכזיות, שמוביל הפיקוח על הוראת המתמטיקה.

בתכניות הלימודים במתמטיקה מושם דגש בעיקרון הקישוריות בין נושאים והרלוונטיות לחיי היום יום. משנת תשע"א החל בחינוך היסודי תהליך של הטמעת פדגוגיה דיגיטלית בשיעורי מתמטיקה. פדגוגיה זו כוללת תהליכי הוראה – למידה והערכה חדשניים העושים שימוש מושכל בכלים ובספרים דיגיטליים, משלבת פיתוח חשיבה מסדר גבוה, נותנת מענה לשונות בין התלמידים, מאפשרת מרחב למידה שיתופי ומזמנת אינטראקציות למידה משמעותיות.

זו השנה החמישית שבחטיבות הביניים נלמדת תכנית לימודים חדשה במתמטיקה. התכנית מושתתת על הוראה ספירלית, קישוריות (בין נושאים מתמטיים שונים ובין תחומי דעת נוספים) ומשלבת אוריינות ומשימות רלוונטיות ואותנטיות.

גם בחטיבות העליונות החלה, החל משנת הלימודים תשע"א, הטמעתה של תכנית הבחנות חדשה. התכנית נשענת בין היתר על שילוב אוריינות בהוראת מתמטיקה ושילובן של משימות אינטגרטיביות המזמנות קישור בין נושאי הלימוד השונים וחשיבה.

לימודי המתמטיקה ואת השפעתם לאורך חייהם. אני רואה בכתב-העת הזדמנות לחבר בין המחקר והמעשה – בין התאוריה והפרקטיקה. רק חיבור מתמיד ואיתן בין האקדמיה לשדה יוכל למנף את לימודי המתמטיקה בארץ ולהובילם לשיאים חדשים. הוראת המתמטיקה היא שליחות חברתית לקהיליית החינוך המתמטי, על כל גווניה, יש תפקיד חשוב בעיצוב הוראת תחום המתמטיקה.

ד"ר אירמה ג'ן

מפמ"ר מתמטיקה

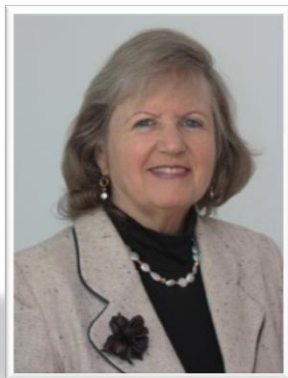
irmaja@education.gov.il

הפיקוח מוביל כיום שתי מגמות מרכזיות:

(1) למידה משמעותית וקידום הישגים תוך כדי שימוש בטכנולוגיה לשיפור הוראת המתמטיקה; (2) טיפול בתלמידי הקצוות לצורך סגירת הפערים. חינוך הוא תהליך ואת תוצאות המהלכים אנו מקוים לראות בעתיד.

הפיקוח על הוראת המתמטיקה מייחס חשיבות רבה לקידום, שיפור וצמצום פערים במתמטיקה בקרב תלמידים; קידום תהליכי למידה מעמיקים ורלוונטיים לתלמידים; מתן הזדמנות שווה לכל תלמיד; הפיכת ההוראה-למידה של המתמטיקה, בכל שכבות הגיל, לחווייתית ומהנה – נטולת מתחים ופחדים.

המורים והמורים העתידיים הם אלו שישפיעו על איכות הוראת המתמטיקה במערכת החינוך ועל האופן שבו יחו כל תלמיד ותלמידה את



מְדוּר חֲדָשׁוֹת מִתְמַטִּיּוֹת / נְצֵה מוֹבְשׁוֹבִיץ-הָדָר

מדור החדשות המתמטיות בעיתון זה אמור לתת לקהל קוראיו תמונה על הדברים המעסיקים את הקהילייה המתמטית בת זמננו. הוא נכתב כך שמורי-מורים יוכלו להשתמש בו כפי שהוא כחומר המופקד לקריאה ולימוד עצמי בידי פרחי-הוראה, או מורים משתלמים, במגמה לפתח את המודעות שלהם לכך שמתמטיקה היא מקצוע שיש בו הרבה מאוד שאלות בלתי פתורות והדרמה המתרחשת סביב החתירה לפתרונן היא מדהימה.

התגלה עוד מספר ראשוני ענק

ספרות יותר מהמספר הראשוני הקודם שהיה הכי גדול עד לגילוי זה.¹ למרבה הצער, נובק לא יכול היה לזכות בפרס בסך \$100,000 מאת הקרן Electronic Frontier Foundation שציפתה לראשון שיגלה מספר ראשוני בעל עשרה מיליון ספרות (לפחות).

ב-15 בדצמבר 2005 התבררנו על מספר מרסן ראשוני גדול עוד יותר: $2^{30} - 1$, $2^{40} - 1$. שמחתם של האנשים שגילו אותו – קרטיס קופר וסטיבן בון, שניהם פרופסורים באוניברסיטת המדינה של מיסורי, הייתה מהולה

ב-2.5.2013 רעשו הכותרות באמצעי המדיה התקשורתית – התגלה מספר ראשוני חדש, גדול יותר מכל מספר ראשוני ידוע עד כה.

אף כי כבר לפני אלפיים שנה הוכיח אוקלידס שאין סוף למספרים הראשוניים הטבעיים, הגילוי של מספרים ראשוניים גדולים מהווה אתגר בלתי פוסק למתמטיקאים ולחובבים. השימוש של מספרים ראשוניים גדולים להצפנה ולבחינת יעילותן של תוכנות המבצעות במהירות כפל של מספרי-ענק, מתחרה בהנאה הצרופה שמן הסתם טמונה בחיפוש ובגילוי.

באפריל 2005 התבררנו כי רופא מנתח מומחה לעיניים, מרטין נובק, שכתחביב משתתף בחיפוש הבלתי נלאה אחרי מספרי מרסן ראשוניים חדשים המתבצע בשיתוף פעולה בין-לאומי בין מחשבי ענק – GIMPS: The Great Mersenne Prime Search, גילה את מספר מרסן הראשוני ה-42, שהיה המספר הראשוני הכי גדול הידוע אז: $2^{25,964,951} - 1$. זהו מספר בעל 7,816,230 ספרות, מעל לחצי מיליון

1. מספר מרסן (על שם נזיר צרפתי בשם מארין מרסן 1588-1648) הוא מספר בעל הצורה $2^p - 1$ כאשר p הוא מספר ראשוני. לא כל ראשוני הוא מספר מרסן (למשל 5 איננו מספר מרסן) ולא כל מספר מרסן הוא ראשוני. למשל 2047 הוא מספר מרסן כי $2^{11} - 1 = 2047$, אבל הוא לא ראשוני כי $23 \times 89 = 2047$. אבל מספרי מרסן קלים יותר מהאחרים לזיהוי כמספרים ראשוניים. לכן, החיפוש אחר מספרי-ענק ראשוניים מתמקד במספרי מרסן. עד כה ידועים 48 מספרי מרסן ראשוניים.

ש"החמיץ את הפרס" בהיותו בעל 12,837,064 ספרות. הוא התגלה בשנת 2009 על-ידי הנורווגי אוד מגנר סטרינדמו.

המירוץ אחרי מספרי-ענק ראשוניים נמשך ועמו גם פרסים גדלים והולכים.

פרס בסך \$150,000 מחכה למי שיגלה מספר ראשוני בעל מאה מיליון ספרות או יותר ופרס בסך \$250,000 יוענק על גילוי של המספר הראשוני הראשון שמספר הספרות שלו הוא אלף מיליון (ביליון, או מיליארד 10^9).

ב-2.5.2013 חזר קרטיס קופר לראש שורת המגלים של מספרי מרסן ראשוניים בגילוי של המספר הראשוני $1 - 2^{57,885,161}$ שהוא בעל 17,425,170 ספרות. צאו וחשבו את אורכו אם מדפיסים את כל הספרות שלו ברווחים של 4 ספרות לכל סנטימטר.

<http://primes.utm.edu/largest.html>

באכזבה מסוימת. מספר מרסן זה, ה-43 הידוע עד אז, לא זיכה אותם בפרס כי יש לו "רק" 9,152,052 ספרות... צמד החוקרים המשיכו לחפש ואכן ב-11.9.2006 גילו עוד מספר מרסן ראשוני, אבל למרבה הצער גם מספר הספרות שלו לא עלה על 10 מיליון ספרות.

המרוץ אחרי מספר ראשוני בעל 10 מיליון ספרות נמשך – עד שב-23 באוגוסט 2008 אדסון סמית, מנהל המחשוב במחלקה למתמטיקה באוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס, זכה בפרס הגדול על הגילוי של מספר ראשוני כזה. למען האמת, המספר שגילה הוא בעל 13 מיליון ספרות!

ב-6.9.2008 שבועיים לאחר גילוי המספר $1 - 2^{43,112,609}$, בעל 13 מיליון ספרות, התגלה מספר מרסן ראשוני שיש לו 11 מיליון ספרות "בלבד" – $1 - 2^{37,156,667}$. זו הייתה החמצה בשבועיים בלבד של הפרס הגדול. גם $1 - 2^{42,643,801}$ הוא מספר מרסן ראשוני

25 שנה אחרי שהועלתה, זכתה (כפי הנראה) השערת ABC להוכחה

ולמחברים a , b יש גורמים ראשוניים בעלי מידת ריבוי גבוהה (כלומר, הם מתחלקים בחזקה גבוהה של מספר ראשוני אחד לפחות), אז לסכום c אין גורמים ראשוניים שמידת הריבוי שלהם גבוהה.

לדוגמה: $145 = 64 + 81$, 2^6 , מחלק את 64 , 3^4 מחלק את 81 . לשני אלה יש "הרבה" גורמים ראשוניים (שניים), ואילו 145 מתחלק רק בשני גורמים ראשוניים ב-5 וב-29 שמידת הריבוי שלהם היא 1.

בחודש מרץ 2013 פרסם שיניצ'י מוצ'יזוקי את התיקון האחרון בהוכחתו להשערה הנקראת השערת ABC.

מהי השערת ABC?

כמו השערות רבות בתורת המספרים, ההשערה עצמה היא די קלה להבנה. היא עוסקת במשוואה האריתמטית הכי בסיסית שניתן להעלות על הדעת $a + b = c$ באשר a, b, c הם מספרים שלמים. במילים פשוטות ההשערה טוענת שאם a , b , c הם שלושה מספרים שלמים שאין להם גורם משותף,

חיובית. כך למשל בעבור השלשה 5, 27, 32 המקיימת את תנאי הזרות והסכום, מתקיים שמכפלת שלושת רכיביה היא $4,320 = 5 \times 27 \times 32$, והרדיקל של המכפלה, גם כאן, הוא 30. אבל במקרה זה המספר השלישי, 32, יותר גדול מהרדיקל של המכפלה. שלשות מסוג זה הן די נדירות. רק 120 מבין כל השלשות שבהן $c < 10,000$ הן כאלו. ואף-על-פי-כן יש אינסוף שלשות כאלו.

נשאלת השאלה, עד כמה אפשר "למשוך את העניין", כלומר האם יש שלשות שבהן המספר השלישי הרבה יותר גדול מהרדיקל, אולי עד כדי כך שהוא גדול מריבוע הרדיקל? – עד היום לא נמצאה שלשה כזאת. קל למצוא דוגמה לשלשה שבה זה לא מתקיים. הנה למשל: בעבור $a = 3$, $b = 125$, השלישייה היא 3, 125, 128 ומתקיים

$$30^2 = [R(3 \times 125 \times 128)]^2 < 128. \text{ אם לא מגזימים עד כדי ריבוע הרדיקל של המכפלה ומסתפקים בשלשות שעבורן המספר השלישי יותר גדול מחזקה } \alpha \text{ גדולה מ-1 וקטנה מ-2 של הרדיקל של המכפלה, אפשר למצוא שלשה שבה הסכום } c \text{ עולה על הרדיקל של המכפלה באותה חזקה. למשל, השלשה } 2; 6,436,341; 6,436,343. \text{ במקרה זה } a = 2, b = 3^{10} \times 109, c = 23^5.$$

לפיכך

$$R(abc) = 2 \times 3 \times 23 \times 109 = 15,042$$

ולכל מעריך α , $\alpha < 1.6299$, מתקיים:

$$6,436,343 > 15,042^\alpha$$

במונחים יותר מדויקים נזדקק למושג: מספר שלם חופשי מריבוע (Square free). מספר כזה הוא מספר שלם שאינו מתחלק בריבוע של אף מספר שלם פרט ל-1. לדוגמה המספרים:

$$42 = 2 \times 3 \times 7, \quad 6 \times 1, \quad 1001 = 7 \times 11 \times 13$$

הם חופשיים מריבוע. לעומתם 54 ו-75 אינם חופשיים מריבוע כי 54 מתחלק ב- 3^2 ו-75 מתחלק ב- 5^2 . בפירוק לגורמים של מספרים חופשיים מריבוע, הגורמים הראשוניים מופיעים רק פעם אחת.

לכל מספר טבעי n אפשר להתאים את החלק החופשי-מריבוע שלו, שהוא מכפלת כל גורמיו הראשוניים כשכל אחד מהם מופיע בדיוק פעם אחת. למספר הזה מקובל לקרוא בשם הרדיקל של n . נסמן את המספר הזה ב- $R(n)$. לדוגמה:

$$R(360) = R(2^3 \times 3^2 \times 5) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

כאמור השערת ABC עוסקת בשלשות של מספרים שלמים זרים a, b, c שבהם מתקיים $a + b = c$, כגון $4 + 5 = 9$. מכפלת השלושה היא 180 והרדיקל של המכפלה הוא 30 (מדוע?). במקרה זה קל לראות שהמספר השלישי – 9 (שהוא סכום שני האחרים) קטן יותר מהרדיקל של מכפלת שלושת המספרים.

האם יכול לקרות ההפך? כלומר האם יש שלושה מספרים שלמים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים $(a + b)$ שבה הסכום (c) יותר גדול מהרדיקל של מכפלת השלושה? $c > R(abc)$ – התשובה היא

$\alpha > 1$. השערת ABC דנה בקיומם של מספר סופי של יוצאים מן הכלל לכל היותר (אם בכלל), כלומר בקיומן של מספר סופי של שלשות שבהן c גדול ממש מחזקה גדולה מ-1 (ולו במעט) $\varepsilon = 1 + \alpha$ של הרדיקל של המכפלה abc .

במילים אחרות אפשר לומר שההשערה קובעת כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים קבוע $K(\varepsilon)$ כך שלכל שלושה מספרים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים ($a + b$) מתקיים:

$$c < K(\varepsilon)[R(abc)]^{1+\varepsilon}$$

והנה לפני שנה, באוגוסט 2012, מתמטיקאי יפני מאוניברסיטת קיוטו, בשם שיניצ'י מוצ'יוקי, הכריז שפיצה את סוד ההשערה ופרסם את הוכחתה באינטרנט. מוצ'יוקי הוא מתמטיקאי בעל שם. הוא החל את לימודיו הגבוהים בפרינסטון בהיותו בן 16 והפך לפרופסור מן המניין בגיל 33. לזכותו מספר לא מבוטל של תוצאות מתמטיות מתקדמות, והוא ידוע בקפדנותו המתמטית. על כן הכרזתו התקבלה בקהילייה המתמטית ברצינות ועמיתיו המתמטיקאים הסתערו על ניתוחה, על מנת לאשש אותה או להפריך אותה, כמקובל.

נמצא כי גישתו כוללת "עקומים אליפטיים" (עקומים שמשוואתם היא מסוג $y^2 = x^3 + ax + b$) שהיוו גם את המפתח לפיצוחו של המשפט האחרון של פרמה. אבל

תובנות מסוג זה הן מעניינם של מתמטיקאים העוסקים בתורת המספרים, שאליה שייכת גם השערת ABC.

במונחים אלה השערת ABC אומרת שלכל $\varepsilon > 0$, קיים לכל היותר מספר סופי של שלשות של מספרים שלמים חיוביים זרים a, b, c , המקיימים $a + b = c$, שעבורם $c > [R(abc)]^{1+\varepsilon}$.

כלומר, למעט מספר סופי של שלשות, בדרך-כלל בעבור שלושה מספרים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים ($a + b$), המצב הוא ש- $c < [R(abc)]^a$ כאשר המעריך

כמה מילים על ההשערה וגלגוליה

השערת ABC הועלתה בשנת 1985 על-ידי המתמטיקאי הבריטי דייוויד מסר והמתמטיקאי הצרפתי ג'וזף אוסטרלה. למעלה מ-25 שנה חלפו ואף מתמטיקאי לא הצליח להוכיח אותה, אף כי רבים וטובים ניסו.

בשנת 2006 הוקם על-ידי המחלקה למתמטיקה של אוניברסיטת ליידן בהולנד פרויקט לאיתור שלשות של מספרים שלמים חיוביים זרים a, b, c המקיימים $a + b = c$, שעבורן מתקיימת השערת ABC, מתוך תקווה שישתמן רמז להוכחת ההשערה על-ידי תבנית כלשהי שתבצבץ מאוסף המקרים הפרטיים. למעלה מ-23 מיליון שלשות הצטברו ברשימה הודות לאלפי מתמטיקאים מלמעלה ממאה מדינות שונות שהשתתפו בפרויקט עד לשנת

2012. <http://abcathome.com/>

למקובל בקהילייה המתמטית, מסרב המתמטיקאי היפני המבריק לקבל הזמנות להרצאות ולהסביר את ממצאיו, שעליהם עבד כמעט בלי לשתף אחרים במשך כעשר שנים.

"חבר המושבעים" המתמטי אשר שופט את קבילותה של כל הוכחה חדשה, יודקק כנראה לעוד זמן מה כדי ללמוד את כל הפרטים הרבים לפני שההוכחה המתוקנת של מוצ'יזוקי תזכה ל"קונסנזוס" על נכונותה. המתמטיקאי דוריאן גולדפלד מאוניברסיטת קולומביה שבניו-יורק אמר ברציון שאם אכן ההוכחה נכונה, יהיה זה אחד ההישגים המרשימים של המתמטיקה במאה ה-21.

הראשוניים של שני מספרים לבין הגורמים הראשוניים של סכומם (!). הוכחתה מצביעה על כך שיש תכונות עמוקות של אבני הבניין הפשוטות הללו של מערכת המספרים השלמים, שעדיין לא ירדנו לסוף הבנתן.

מומלץ לצפות בסרטון:

<http://www.youtube.com/watch?v=RkBl7WKzzRw>

ולקרוא את הבלוג על המתמטיקאי הנמצא

בעין הסערה:

<http://projectwordsworth.com/the-paradox-of-the-proof/>

בכך הסתיים הדמיון. למרבה האכזבה לא רק שההוכחה השתרעה על פני מאות עמודים, אלא ששיטת ההוכחה הייתה חדשנית, קשה להבנה ונשענה על הבנת סדרה ארוכה של תוצאות שפורסמו אמנם בעבר, אבל לא משכו תשומת לב בקהילייה המתמטית.

באוקטובר 2012 התברר שיש שגיאה בהוכחה. מוצ'יזוקי מיהר לפרסם באתר שלו הודאה בטעות, אבל טען שהיא איננה משבשת את ההוכחה ומאז פרסם סדרת מהדורות מתוקנות של ההוכחה שהאחרונה שבהן פורסמה במרץ 2013 <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html> בניגוד

מה חשיבותה של השערת ABC?

עם העלאתה של השערת ABC בשנת 1985 היה ברור שלכשתוכח ההשערה, אפשר יהיה בנקל להוכיח בעקבותיה תוצאות רבות אחרות ובמיוחד המשפט האחרון של פרמה שטרם הוכח אז.²

המספרים הראשוניים הם ה"אטומים" של מערכת המספרים השלמים. כל מספר שלם ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים באופן אחד ויחיד (עד כדי סדר הגורמים). השערת ABC מאתגרת את השכל הישר מפני שהיא קובעת קשר מפתיע בין הגורמים

2. המשפט האחרון של פרמה אומר שרק בעבור $n = 2$ קיימים שלושה מספרים שלמים חיוביים a, b, c , כך ש $a^n + b^n = c^n$. באשר המעריך n הוא מספר שלם חיובי. הוא הועלה כהשערה על-ידי המתמטיקאי הצרפתי פייר דה פרמה בן המאה ה-19, אבל הוכח רק בשנת 1994 על-ידי המתמטיקאי הבריטי אנדרו ויילס.

פריצת דרך לקראת הוכחת השערת הראשונים התאומים

החדשות האחרונות הן, שבאפריל 2013, מתמטיקאי לגמרי לא מפורסם משם ייטאנג זאנג, מרצה באוניברסיטת ניו-המפשייר בארה"ב, הוכיח שקיים n טבעי קטן מ-70 מיליון שעבורו יש אינסוף ראשונים שהפרש ביניהם הוא לכל היותר n (הוא לא הצביע על גודלו – הוכחה לא קונסטרוקטיבית!). ההוכחה עמדה בהצלחה בכל הבדיקות והיא קבילה בקהיליה המתמטית. בעקבות זאת מתחולל בחודשים האחרונים מרוץ מטורף להקטנתו של n . במהלך הקיץ האחרון n הוקטן ל- $n = 5,414$. ב-25.11.2013 התבשרנו שג'יימס מיינרד, בתר-דוקטורנט מאוניברסיטת מונטריאול, שבקנדה, הצליח להקטין את הפער ל-600 בלבד. מי יודע אולי עד שהכתבה הזאת תראה אור יצליחו להוריד את החסם העליון הזה ל- $n=2$ ובכך תוכח השערת התאומים.

לעדכון שוטף:

http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Bounded_gaps_between_primes
<http://gilkalai.wordpress.com/2013/09/20/polymath/-8-a-success/>

פרופסור (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר, הקימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מופ"ל לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשרדים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה ע"י הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנער. בשנים האחרונות היא נהנית מסתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב.

הלוגיקן הגדול – קורט גיידל (1906-1978) – זיעזע את יסודות המתמטיקה כשהוכיח בשנות ה-30 של המאה ה-20 שטענות מתמטיות נחלקות לשלושה סוגים ולא לשניים כפי שהאמינו עד אז – כאלו שניתן להוכיח אותן, כאלו שניתן להפריך אותן וכאלו שלא ניתן להוכיחן ולא ניתן להפריכן. אלה האחרונות הן בהכרח טענות אמת כי אי אפשר להפריך אותן. לאיזה משלושת הסוגים שייכת השערת התאומים? – זו ההשערה שקיימים אינסוף זוגות של מספרים ראשונים שההפרש ביניהם הוא ההפרש המינימלי – 2, כמו למשל 41, 43 ועוד. שאלה זו עדיין לא הוכרעה. דורות של מתמטיקאים מנסים לשווא להוכיח אותה.

איש עוד לא הוכיח לא רק את זה, אלא אפילו לא משהו הרבה יותר "חלש" והוא שיש אינסוף ראשונים שההפרש ביניהם הוא מספר טבעי n כלשהו. קל להראות שקיימת שורה ארוכה כרצוננו של מספרים עוקבים שכולם פריקים. הנה כך (הוכחה קונסטרוקטיבית): בשורת המספרים הבאה יש n מספרים שלמים עוקבים.

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots,$$

$$(n+1)!+n, (n+1)!+(n+1)$$

וכל אחד מהם פריק (מדוע?).

הדבר היחיד שידוע בעניין הרווחים בין מספרים ראשונים הוא משפט המספרים הראשונים הקובע שההפרש הממוצע בין מספרים ראשונים קטנים מ- n שואף ל- $\log(n)$ כאשר n שואף לאינסוף.

האולפניאדה המתמטית: היבטים תוכניים, ערכיים ומגדריים

יצחק איזק, מכללה ירושלים

זיוה דויטש, מכללה ירושלים

תקציר

האולפניאדה המתמטית היא תחרות בפתרון בעיות בחשיבה מתמטית, המאורגנת על-ידי החוג למתמטיקה במכללה ירושלים, ומיועדת לבנות בגילאי תיכון.

בעקבות האולפניאדה הרביעית שהתקיימה בתש"ע, וכללה 2000 מתמודדות מרחבי הארץ והעולם נערך מחקר. המחקר בדק את טיב הקשר ההדדי בין רקע המעורבות בתחרות, התנהלותן המתמטית, עמדותיהן המגדריות, יחסן למתמטיקה, עמדותיהן כלפי התחרות, וציפיותיהן בדבר קריירה מתמטית עתידית. המידע התקבל באמצעות שאלונים שהופנו למתמודדות ולמוריהן.

המחקר העלה כי האולפניאדה היא פעילות מאתגרת חוץ-קוריקולרית, המקדמת את החשיבה המתמטית.

ממצאי המחקר מאפשרים להבחין בין סגנונות למידה שונים: הלומדת העצמאית והלומדת המסתייעת. סגנונות אלו משליכים על היחס למתמטיקה: הדימוי העצמי של הלומדת העצמאית כמו גם יחסה למתמטיקה, חיוביים יותר מאלה של הלומדת המסתייעת.

האולפניאדה זמנה גם דרך לבדוק את תפיסת המתמודדות בנושא מתמטיקה ומגדר. מניתוח תשובותיהן עולה כי הן סבורות כי לנשים יכולות מתמטיות שאינן נופלות מאלו של גברים.

ממצאי המחקר מצביעים על דרכים חדשות להעצמת הלומדים ביחסם למתמטיקה, ומעלים על נס את החשיבות של היצירתיות והחשיבה הלא שגרתית כגורמים בשינוי היחס לתחום. בפרט, מתווה המחקר דרכים לשינוי יחס הבת למתמטיקה והדימוי העצמי המגדרי שלה ביחס למקצוע זה – הן כלומדת והן כמלומדת. ממצאי המחקר תומכים בסברה שפעילויות מעין האולפניאדה עשויות לשפר את הנחיתות המגדרית של הנשים ביחס לגברים באשר לכישוריהם המתמטיים וכן לצמצם את המיתוסים השליליים האופפים את המקצוע והמתבטאים אפילו אצל המצטיינות בתחום.

מילות מפתח: תחרות; פערים בין-מגדריים; סטריאוטיפים מגדריים; העשרה מתמטית.

הרקע

תחרויות מתמטיות

תחרות היא סיטואציה שבה ישנם כמה מתמודדים, שכל אחד מהם נדרש לבצע אותן מטלות (או מטלות שקולות), ושכסופה הם מדורגים לפי הישגיהם (על-פי מילון Webster). תחרויות מתמטיות הן תחרויות שבהן המטלות הן מתחום המתמטיקה.

טיילור (Taylor, 2008) טוען כי המונח "תחרות" אינו משקף במדויק את אופיין של רוב התחרויות המתמטיות. יותר מהיותן תחרויות בין מתחרים שונים, נכון יותר להגדירן כתחרויות בין המתחרה לבין הבעיות האתגריות אותן עליו לפצח. שהרי בניגוד לרוב התחרויות הקבוצתיות או היחידניות שבהן יש אינטראקציה בין המתמודדים לבין יריביהם, בתחרות מתמטית המתחרה נאבק עם הבעיות המוצבות בפניו, ורק בסופו של התהליך מתבצעת ההשוואה בין הישגי המתחרים השונים.

- תחרויות מתמטיות מתקיימות ברחבי העולם זה עשרות שנים, ומתייחדות במאפיינים הבאים:¹
 - א. **התכנים:** תוכני התחרות אינם אחידים ועשויים לכלול (לפי סוג התחרות) חומר לימודי מוגדר, חומר יצירתי ולא שגרתי החורג מתכנית הלימודים, או נושאים מתקדמים במתמטיקה גבוהה.
 - ב. **סוג השאלות:** שאלון התחרות מורכב משאלות סגורות (שבהן הם מתבקשים לבחור את התשובה הנכונה מבין כמה תשובות מוצעות), ו/או שאלות פתוחות שבהן מתבקשים המתחרים לכתוב תשובות המורכבות מהוכחות מנומקות. התחרויות המתמטיות נערכות לרוב בכתב.
 - ג. **אוכלוסיית היעד של התחרות:** קיימות תחרויות רבות. חלקן בהיקף בין-לאומי, אחרות בהיקף אזורי (יבשת או חלק ממנה), ועוד מאות רבות בהיקף לאומי או סקטוריאלי.
 - ד. **גיל המתחרים:** חלק גדול מן התחרויות פתוח לכל הגילאים, אך ברוב התחרויות מוגדר טווח הגילים של המתחרים כגון: סטודנטים לתואר ראשון, תלמידי תיכון, תלמידי חטיבות הביניים.
 - ה. **אופי התחרות:** חלק מהתחרויות מיועדות למתחרים אינדיבידואליים, וחלקן לצוותים המתחרים ביניהם.
 - ו. **הגוף המארגן:** התחרויות מאורגנות בחלקן על-ידי איגודים מתמטיים מפורסמים, אחרות כהתארגנויות של גופים חינוכיים מקומיים, וחלקן על-ידי גופים אחרים למטרות פרסום.
 - ז. **ההכנות לתחרות:** ישנן תחרויות שהן כאולימפיאדה לכל דבר: המתחרים נבחרים בקפידה מתוך אוכלוסייה אקסקלוסיבית, והם לומדים קורסים המיועדים להכשירם לתחרות, ומוחזקים במחנות אימונים בסמוך לתחרות. בקצה השני ישנן תחרויות עממיות שפתוחות לכול, ואינן דורשות הכנה מוקדמת.
 - ח. **ההיבט המגדרי:** רובן הגדול של התחרויות המתמטיות פתוחות לגברים ולנשים כאחד. מתוך רשימה ארוכה של תחרויות מתמטיות בין-לאומיות המדווחות בויקיפדיה, רק אחת הנה תחרות

1. ראו לדוגמה: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematics_competitions

המיועדת לנשים בלבד: (CGMO) China Girls Math Olympiad. אף כי רוב התחרויות המתמטיות אינן מבחינות בין המגדרים, בפועל אחוז הבנות המשתתפות נמוך באופן מובהק מאחוז המשתתפים הבנים.²

בספרות המקצועית נדונו מהיבטים שונים יתרונותיהן וחסרונותיהן של תחרויות במערכת החינוך בכלל, ובתחום המתמטיקה בפרט.

בבואנו לדון בתחרויות לימודיות, יש להבחין בין למידה שיתופית ולמידה תחרותית. שני הסוגים מתארים למידה שיש בה תלות בין המעורבים. תלות זו שונה בשני המקרים, בהתאם למטרה הסופית: בלמידה שיתופית הצלחת היחיד תלויה ישירות בהצלחת העמיתים, ואילו בלמידה תחרותית מטרת היחיד מנוגדת למטרות יתר חברי הקבוצה, והצלחתו נמדדת בהשוואת הישגיו לאלו של עמיתיו (Pepitone, 1985).

לאור זאת השווה אדיגר (Ediger, 2001) בין למידה שיתופית ולמידה תחרותית והצביע על כך כי אמנם הלמידה השיתופית מדגישה את הפן הדמוקרטי, אולם העדפת השיתוף על פני התחרות גורמת לירידה במוטיבציה. כך קרה שתלמידי ארה"ב, למשל, מדשדשים מאחור, אחרי תלמידי גרמניה ויפן. אדיגר מציע, לפיכך, לעודד את היוזמה בכיתה, ומספק הנחיות לעידוד התחרות הבריאה, שעשויה לבוא לידי ביטוי הן תוך תהליך הלמידה והן כמיזם נלווה.

גוינגווישי (Gyöngyösi, 2002) מתמקדת בתחרויות מתמטיות, ומונה שורה של יתרונות כדלהלן:
א. תחרות מעצם טבעה מושכת לומדים מכל הסוגים, ומהווה גורם מגרה למידת התעניינותם במתמטיקה.

ב. לרוב, השאלות בתחרות באות מתוך העולם הממשי, שאליו הלומד יכול להתחבר, ולא מתוך סביבה מתמטית טהורה.

ג. השאלות בתחרות בוחנות פנים לא שגרתיות של המתמטיקה ובכך מעוררות עניין.

ד. תחרות מציגה את המתמטיקה באור חיובי.

ה. תחרות מספקת למורים משאבים באיכות גבוהה.

ו. תחרות ממלאת חסר בתכנית הלימודים, באשר היא מספקת הזדמנות ללומדים מוכשרים להכיר חלקים יפים נוספים של המתמטיקה.

ז. הניסיון שהמתחרה רוכש מהשתתפותו בתחרות עשוי לסייע בהכנתו לקראת לימודים גבוהים.

ח. הגיוון הרב של הבעיות המוצגות בפני המתחרים והדרכים השונות שבהן ניתן לפתור אותן מעידים על עושרה של המתמטיקה.

2. ראו לדוגמה טירי (Tirri, 2000) או כתבתו של ולמר (2012), וכן רשימת הזוכים באולימפיאדה ע"ש גיליס במכון ויצמן תשע"א <http://www.weizmann.ac.il/zemed/float.php?cat=2590>

בנוסף ליתרונות אלה של התחרות ללומדים ולמעמד המקצוע, מציינת גוינגווישי (Gyöngyösi, 2002) יתרונות נלווים:

- א. עצם המפגש בין מתחרים ממקומות ומבתי-ספר שונים מהווה גורם מפרה לפיתוח האישיות.
- ב. ארגון התחרות על מהלכה וכל חלקיה מהווה גורם חשוב לקידום המקצועי והפדגוגי של המעורבים.
- ג. התחרות יכולה להוות כלי מרכזי בהכשרת עובדי הוראה, והשתלמות מורים מן השדה.

לצד יתרונותיהן של תחרויות, גוינגווישי (Gyöngyösi, 2002) מונה גם שורה של חסרונות:

- א. התחרות מטילה לחץ נוסף ומיותר על הלומדים.
 - ב. התחרות נוגדת את עיקרון השוויון.
 - ג. הבעיות המוצגות לפני המתחרים מתייחסות בדרך-כלל לנושאים שוליים וקשים של המתמטיקה.
- גוינגווישי (Gyöngyösi, 2002) טוענת שאין ממש בחסרונות אלו, וטענותיה בתמצות הן כי התחרויות היום פתוחות לכל המעוניין, אינן נכפות, ואינן מהוות מרכיב בציון הבית-ספרי של התלמיד. מלבד זאת מרובות היום התחרויות הפופולריות הפונות גם לתלמיד הממוצע.

טירי (Tirri, 2000) ערך סקר בפינלנד בהשתתפות תלמידים מחוננים והוריהם. התלמידים, שהשתתפו בתחרויות בתחום המתמטיקה והמדעים בשנים 1965-1997 היו רובם בנים. מתוך ממצאיו עולה כי המתחרים ממשו את כישורונם המתמטי על-ידי בחירת קריירה במדעים ורובם נהיו חוקרים באקדמיה או מהנדסים בתחומים טכניים שונים. המתחרים הצליחו מאוד בלימודיהם המתקדמים, וחלקם אף פרסמו ספרים ומאמרים. חלק גדול מהמתחרים הפכו ללומדים בלתי תלויים שייחסו את הצלחתם האקדמית בעיקרה ליכולתם ולמאמץ שהושקע על-ידם. עם זאת הדגישו הנחקרים את חשיבותה של השתתפותם בעבר בתחרות כגורם שהגביר את ביטחונם העצמי, ואת בחירתם בקריירה המדעית.

בישופ וולטרס (Bishop & Walters, 2007) מדווחים על מחקר מעקב אחר תלמידי תיכון מחוננים, שגילו התעניינות במדעים דרך השתתפות בתחרות ארצית, מזמן לימודיהם בתיכון עד לכניסתם למכללה. ממצא מרכזי של סקר זה מראה כי הפעילות מחוץ לתכנית הלימודים הרשמית ובמקביל לה, מהווה גורם משמעותי יותר למחויבות ארוכת טווח לתחום המדעים מאשר הפעילות הבית-ספרית השגרתית, ומהווה גם כלי יעיל לגיוס סטודנטים לתחומי הדעת המדעיים.

מעניין לציין כי הרב שלמה וולבה (1996) סובר כי תחרות כשלעצמה ממריצה את הלימוד בשעת מעשה, אך לעתים הזוכים בתחרויות נחים על זרי הדפנה, וההישג הזמני נותר יתום:

כיום יש תחרויות רבות לילדים. חתן המשנה, חתן ההלכה וכיו"ב. בשעת מעשה התחרות אמנם ממריצה מאוד את הלימוד, אבל אם עוקבים אחר החתנים בהמשך דרכם, אז רואים שהעסק אינו משתלם. הם אינם ממשיכים באותה התמדה שבה התכוונו לתחרות. כנראה שהכבוד שהיה להם באותו זמן גרם להם לעיוורון, הם

משוכנעים שהם יודעים את כל התורה כולה, וכבר לא צריכים להתייגע... אין לפסול את התחרויות, אבל צריך להכיר גם את הצד השני של המטבע.

מרכיב חשוב של תחרויות בכלל ותחרויות מתמטיות בפרט, הוא עמדות המתחרים. בהקשר זה חקרה אקלוף (Eklöf, 2007) את עמדותיהם של המשתתפים במבחן הבין-לאומי TIMSS למדידת ההישגים במתמטיקה ובמדעים. מבחן ה-TIMSS הוא אומנם "מבחן בעל סיכון נמוך" (low-stake), כלומר פעילות שאיננה כרוכה בסיכון מצד המשתתף, מאחר והתוצאה של המבחן אינה משפיעה אישית על הנבחן או על מוריו, אך עם זאת ניתן לגזור מממצאיה של אקלוף למצב של תחרות. אקלוף חקרה קשרים בין נתוני הרקע שנאספו בשאלוני TIMSS (IEA, 2007) לבין עמדות הנבחנים בשלושה תחומים:

א. המוטיבציה להשתתף במבחן.

ב. התפיסה העצמית ביחס למתמטיקה.

ג. הערכת היחס למתמטיקה.

ממצא מרכזי של המחקר היה כי שלושת המשתנים הללו מסבירים 31% מן השונות של ההישגים במתמטיקה, כאשר התרומה המשמעותית ביותר לשונות נובעת מהתפיסה העצמית ביחס למתמטיקה, ואילו תרומתם של יתר המשתנים שולית.

באופן כללי יצוין כי קיימים כמה כלים להערכת עמדותיהם של לומדים כלפי המתמטיקה. לדוגמה, טפיא ומרשה (Tapia & Marsh II, 2004) הציעו כלי בעל ארבעה גורמים: הביטחון העצמי של הלומד, הערך שהוא מייחס לתחום המתמטיקה, האהדה שלו לתחום והמוטיבציה שלו ללמידת מתמטיקה. חוקרים אלו ציינו כלי זה כבעל מהימנות פנימית גבוהה.

סתמטיקה ומגדר

השתייכות מגדרית והשפעתה על תפקוד מתמטי בכלל ועל השתתפות בתחרויות מתמטיות בפרט, נדונה ונחקרת זה עשרות שנים. המחקרים מעידים על פער משמעותי בין המגדרים.

המחשה לפער הבין-מגדרי נמצאת, למשל, במחקרו של אנדרסון (Anderson, 1989) הטוען כי מבחנים שונים, הכוללים שאלות פתוחות וסגורות, שנעשו כדי לבדוק הבדלים ביכולות ובנטיות המתמטיות בין סטודנטים לסטודנטיות, הראו פערים לא מבוטלים לטובת הסטודנטים. בכך מאשש אנדרסון ממצאים קודמים של מבדקים שנעשו באוכלוסיות גיל וברמות שונות. פער משמעותי קיים גם בשיעור ההשתתפות בתחרויות. טירי (Tirri, 2000) ערך מחקר מעקב לאורך בשנים 1965-1997 אחר משתתפים מפינלנד באולימפיאדות מתמטיות ומדעיות. נתון מדהים הוא כי מקרב 158 המתחרים, רק שמונה מהם היו נשים (כ-5%).

בהמשך לאותה מגמה, מציגים פנג, קמבל וורנה (Feng, Cambell & Verna, 2002) תמונת מצב אי שוויונית בין המגדרים, ומנסים להתחקות אחרי סיבות סביבתיות הגורמות לפערים אלו.

שהי, פיטינסקי ואמבאדי (Shih, Pittinsky & Ambady, 1999) מציעים הסבר פסיכולוגי לפערים אלו: הם מצייגים תוצאות מחקר שערכו בקרב אוכלוסייה שמנתה קבוצות אחדות, המאופיינות באמצעות סטריאוטיפים שונים (חיוביים ושליליים). המחקר התבסס על הסטריאוטיפים, שלאנשים ממוצא אסייתי ישנה רמת חשיבה כמותית גבוהה מהממוצע, ולעומת זאת – לנשים יש רמת חשיבה כמותית נמוכה מהממוצע. החוקרים בדקו קבוצת נשים אסייתיות והתברר, שכאשר הנחקרות ידעו שהן מוגדרות כאסייתיות, תפקדו טוב יותר מכפי שתפקדו כאשר ציינו בפניהן שהן משויכות ל"קבוצת הנשים". בדומה, טוענים אמבאדי ועמיתיה (Ambady et al., 2004) כי תחת איום סטריאוטיפי, נשים אנשים לתפקד פחות טוב ממה שהם מסוגלים לתפקד כאשר הם חופשיים מאיום, כך תוצאות המבדקים אצל נשים ששויכו תחילה ל"קבוצת נשים" היו נמוכות מתוצאות מבדקים אינדיבידואליים.

מתוך ניתוח-על של מחקרים רבים לאורך שנים רבות בתחום הקשר בין מגדר והישגים במתמטיקה, עולים שלושה ממצאים עיקריים:

- א. ההישגים במתמטיקה של בנים גבוהים בדרך-כלל מאלה של בנות, ופערים אלו גדלים עם העלייה בכיתה הלימוד וברמת החומר הנלמד.
- ב. הבדלים בין המגדרים קיימים גם בהיבטים נוספים, כגון בעמדות ובתחום הריגושי.
- ג. סטריאוטיפים וגורמים תרבותיים/חברתיים עשויים להסביר את דפוס ההבדלים בהישגים במתמטיקה בין גברים לנשים.

בהמשך לממצא הסטריאוטיפי, מראים מרץ ועמיתיו במחקרם (Mertz et al, 2008) כי ההבדלים בהישגים במתמטיקה בין שני המינים הם תלויי מגדר (gender) (כלומר נובעים מרקע תרבותי) ולא תלויי מין (sex) (כלומר הבדלים שמקורם גנטי או ביולוגי).

הבדלים בין מגדרים מוזכרים ספציפית גם במחקרים על תחרויות מתמטיות. ליסון (Leeson, 1995) מדווח על תפקודם של תלמידי כיתה ו' בתחרויות אוסטרליות רבות-משתתפים, שהתקיימו בשנים 1990-1992, ושבהן בולטת הצלחתם הממוצעת של הבנים לעומת הצלחתן של הבנות. לדר (Leder, 1980) טוענת שהפער הקיים בין בנים לבנות בהצלחה בתחרויות, נובע בחלקו מכך שאצל בנות חזק יותר החשש מפני כישלון, והן מושפעות יותר מלחץ חברתי. במאמר נוסף של לדר וחוב' (Leder, 2006) (Forgasz & Taylor) הצביעו החוקרים על כך שבנים מוכנים לקחת סיכונים במידה רבה יותר מאשר בנות, וכתוצאה מכך גדלים סיכוייהם להצליח במבחנים רבי ברירה שבהם נקנסים על תשובות שגויות.

פרנזל, פיקרון וגואץ (Frenzel, Pekrun & Goetz, 2007) חקרו את ההבדלים בין תחושות ההישגיות במתמטיקה בין שני המגדרים. הנחת היסוד שלהם התבססה על מחקרים קודמים בדבר הבדלים בדימוי העצמי בתחום. על אף שלבנים ולבנות בקבוצת המחקר היו הישגים דומים במתמטיקה, דווחו הבנות – לעומת הבנים, על הנאה פחותה מצד אחד, וחרדה מוגברת מצד שני.

בדומה למחקר זה, מדווחות הרברט וסטיפק (Herbert & Stipek, 2005) במחקר קודם על פערים בהערכת היכולות המתמטיות בין המגדרים. פערים אלו מתגלים כבר בכיתות היסוד הנמוכות.

במחקרם נבדקו תלמידים ותלמידות בני 10. על אף שלפי דיווח המורים הישגי הבנות באותה שכבת גיל לא נפלו מאלו של הבנים, העריכו גם הבנות וגם הוריהן, שיכולותיהן המתמטיות נמוכות מאלו של הבנים.

מחקרים מהתקופה האחרונה בודקים את האפשרות שלימוד בכיתות נפרדות לבנים ולבנות עשוי להפחית את הדימוי העצמי הנמוך של הבנות ביחס להישגיהן במתמטיקה. סוליון (Sullivan, 2008) בחנה את הדימוי העצמי המתמטי בקרב קבוצת מבוגרים ילידי 1958, והגיעה למסקנה שהבנות שלמדו בכיתות נפרדות גדלו להיות בעלות דימוי עצמי מתמטי גבוה יותר.

הקשר המחקר - האולפניאדה המתמטית

בחוג למתמטיקה במכללה ירושלים פועלים כמה פרויקטים שמטרתם לשפר את הרמה, הידע והחשיבה המתמטית במערכת החינוך. בהקשר זה ראוי לצטט את דבריו של וויטקומב: "בניגוד לאמונה הרווחת, המקורות הבלתי נדלים של המתמטיקה הם יצירות, דמיון והערכה ליופייה, ולא התועלתיות והרלוונטיות שלה" (Whitcombe, 1988).

אחד מפרויקטים אלה הוא "האולפניאדה המתמטית" – נושא מחקר זה.

האולפניאדה המתמטית היא תחרות בפתרון בעיות בחשיבה מתמטית המיועדת לבנות בגילאים 15-20. התחרות התקיימה עד כה ארבע פעמים והיקפה הולך וגדל. בתחרות הרביעית (שהתקיימה בשנת תש"ע) השתתפו קרוב ל-2000 תלמידות מ-100 אולפנות ובתי-ספר תיכוניים לבנות מכל רחבי העולם ובנות בשירות לאומי.³ התחרות כללה שלושה שלבים. השניים הראשונים התקיימו בבתי-הספר ושלב הגמר, שהגיעו אליו כ-65 מתחרות (20 מתוכן מחו"ל), התקיים במכללה ירושלים. אופי השאלות היה כזה ששם דגש בחשיבה מתמטית, אך לא דרש ידע נצבר מתקדם.

כאמור, אולימפיאדות מתמטיות לא מעטות מתקיימות בארץ וברחבי העולם. ייחודה של האולפניאדה המתמטית הוא בכך, שהיא פונה לאוכלוסייה שכמעט אינה משתתפת בתחרויות מעין אלו. אולימפיאדות מתמטיות הן, כאמור, לרוב תחרויות אליטיסטיות, המיועדות ללומדים מצטיינים ביותר, ואחוז הבנות מקרב המשתתפים נמוך מאוד. לעומת זאת, האולפניאדה המתמטית מיועדת לציבור נרחב של בנות, לא רק המצטיינות ביותר. באופן זה יוצרת האולפניאדה אפקט של עידוד והגברת החשיבה וההשקעה אצל ציבור בנות האולפנות בארץ ובעולם.

- לאולפניאדה יעדים בתחום התכנים, בתחום הערכים ובתחום המגדרי. היעדים בתחום התכנים הם:
- עידוד החשיבה היצירתית – בגלל האופי המיוחד של השאלות, התחרות על כל שלביה עשויה לעודד אצל המתמודדות חשיבה יצירתית.

3. עם סיום המחקר, במהלך שנה"ל תשע"ב, התקיימה האולפניאדה החמישית בהשתתפות כ-4000 מתמודדות, מחמש יבשות.

- הדגשת החשיבה הלוגית על פני שימוש בנוסחאות – השאלות בתחרות חפות כמעט מנוסחאות מתמטיות, בוחנות את החשיבה הלוגית, ומבוססות על הגיון ולא רק על ידע מתמטי שנצבר במהלך התיכון. עובדה זו עשויה לחולל שינוי בתפיסה של המתמודדת כלפי מקצוע המתמטיקה.

היעדים בתחום הערכים הם:

- שבירת מחסומים וקידום החשיבה המתמטית – מתמטיקה היא תחום שמוצג בדרך-כלל כ"אימת התלמידים" (ראו למשל Biller, 1996). המיתוסים השונים שאופפים מקצוע זה, מונעים לעתים מהתלמיד לראות את היופי וההרמוניה המייחדים את התחום. האולפניאדה נועדה להאזיב, לקרב ולהציג מתמטיקה בדרך אחרת.
- הפיכת תחום המתמטיקה לנגיש ועממי – אולימפיאדות מתמטיות הן בדרך-כלל תחרויות אליטיסטיות, שבהן משתתף האחוזון הגבוה של מצטיינים במתמטיקה. האולפניאדה המתמטית, הבנויה בצורה מדורגת, נותנת הזדמנות לאוהדות מתמטיקה רבות להשתתף בה.
- טשטוש ההבדלים בין למידת חובה להנאה – הקדשת שעות הפנאי לפתירת שאלות יצירתיות וחידות, כהכנה לאולפניאדה, משלבת למידה עם הנאה ומטשטשת את ההפרדה הקיימת בין שני התחומים.

היעד בתחום המגדרי היה שבירת המחסום המגדרי: המתמטיקה, ובמיוחד המתמטיקה הגבוהה, נתפשת כתחום שמיועד בעיקר לגברים, ומועטות הבנות המשתתפות באולימפיאדות מתמטיות ברחבי העולם. האולפניאדה המתמטית נועדה לתת הזדמנות נאותה לבת להפגין את יכולותיה ולהוכיח לעצמה שמתמטיקה עשויה להיות אופציה גם בשבילה. האולפניאדה עשויה לעודד את הבת להאמין בכוחה ולבחור בתחום כאופציה מקצועית.

מטרת המחקר, שאלות המחקר והשערות המחקר

מטרת המחקר הייתה לבדוק את ההתנהלות המתמטית של המתמודדת באולפניאדה, את השפעת העשייה באולפניאדה על השגת היעדים בתחום התוכני, הערכי והמגדרי, וכן לבחון את הקשרים ההדדיים בין משתני המחקר.

במהלך המחקר נדונו השאלות הבאות:

- האם קיים קשר בין סגנון הלמידה של התלמידה לבין יחסה לתחום המתמטיקה?
- כיצד משפיע היחס לתחום על סגנון הלמידה של הלומדת?
- האם קיים קשר בין אהבת מקצוע המתמטיקה לבין הצלחה בו?
- באיזו מידה נתפסת האולפניאדה בעיני המתמודדות ומוריהן כפעילות אליטיסטית?

כמו כן נבחנו ההשערות הבאות:

- האולפניאדה תורמת לחינוך המתמטי בארץ, ולהגברת העניין בתחום בקרב הלומדות.
- ההשתתפות באולפניאדה תורמת לשינוי התפיסה העצמית והמגדרית של הבנות לגבי יכולותיהן וסיכויי ההצלחה שלהן במתמטיקה.

ג. האולפניאדה ממלאת חסר בתכנית הלימודים.

שיטות המחקר

המחקר מתבסס על סקר שנערך בקרב חלק מאוכלוסיית המעורבים באולפניאדה: המתמודדות שהעפילו לשלב השני של האולפניאדה והמורים שלהן למתמטיקה. הסקר היה ראשון מסוגו מטעם מארגני הפרויקט.

מערך המחקר הוא מערך מתאמי והוא בעיקרו כמותי, ומתבסס על נתונים שנאספו באמצעות שאלונים.

אוכלוסיית המחקר הורכבה משתי קבוצות:

א. קבוצת המתמודדות, שהעפילו לשלב השני של התחרות.

ב. קבוצת המורים של בתי-הספר שבהם לומדות מתמודדות אלו.

מדגם המחקר של הקבוצה הראשונה הוא קבוצת המשיבים לשאלוני המחקר שנשלחו לאוכלוסייה זו. גודל המדגם בפועל היה 92 מתחרות, והיווה 30% מקרב אוכלוסיית המחקר (שמנתה 310 משתתפות). מדגם המחקר של הקבוצה השנייה הוא קבוצת המורים מבתי-הספר שעלו לשלב השני ושהחזירו את השאלון. קבוצה זו מנתה 19 מורים.

בכלל משתני המחקר נמצאים נתוני רקע אחדים של הנחקרים, כפי שהתקבלו באמצעות שאלוני המחקר. משתנים אלה שימשו בעיקר לתיאור קבוצת המחקר, וכמשתני עזר לחלוקת קבוצת המחקר לקטגוריות או לתת-קבוצות לשם בחינת השערות המחקר ושאלותיו.

באמצעות שאלון המחקר נאספו נתונים על משתנים רלוונטיים לשאלות המחקר והשערותיו, כדלהלן:

משתנים בלתי תלויים

א. משתני רקע של המתמודדות בתחרות ושל המורים למתמטיקה (השכלת ההורים, הרגלי פנאי,

אבזור הבית אצל המתמודדות, ותק בהוראה, גיל, תפקיד ועוד אצל המורים).

ב. משתנים הקשורים ל"התנהלות המתמטית" של המתמודדות (בלי קשר לתחרות).

משתנים תלויים

א. משתנים הקשורים בעמדות על אודות התחרות (למשל, מידת השגת היעדים שהוצגו במבוא ועוד).

ב. משתנים הקשורים בעמדות כלליות על אודות תחום המתמטיקה, מגדר ומתמטיקה ולמידה והצלחה בלימודים בכלל.

ג. משתנים הקשורים בכוונות לעתיד של המתמודדות בזיקה לתחום המתמטיקה.

במונחים אופרטיביים כימות המשתנים הנ"ל נעשתה על-ידי ניתוח כמותי של מספר התשובות או רמת התשובות בשאלונים.

כלי המחקר

על מנת להשיב על שאלות המחקר ולבחון את השערותיו, נבנו על-ידי החוקרים שני שאלונים שנשלחו בדואר אל אוכלוסיות המחקר ומיועדים למילוי בעילום-שם.

- א. שאלון למתמודדות
- ב. שאלון למורי המתמודדות

השאלון למתמודדות

כאמור, השאלון לא כלל פרטים מזהים של המתמודדת, ואף לא את הישגיה בתחרות. הוא היה מורכב מארבעה חלקים, כדלהלן:

א. אף והמתמטיקה

החלק הראשון של השאלון כלל שאלות שמתייחסות למקצועות הלימוד המועדפים על המתמודדת ומקצועות הלימוד שבהם היא מצליחה, הרגלי הלמידה והפנאי שלה ויחסה לתחום המתמטיקה. חלק זה של השאלון התבסס בחלקו על שאלון TIMSS לתלמיד שנלווה למבחני TIMSS 2003 וכן על שאלון של דופקן, לווסקי ופדוואה (Doepken, Lawsky, Padwa, 2005).

ב. האולפניאדה והשפעתה

בחלק זה התבקשה המתמודדת לדרג את מידת הסכמתה לשורת היגדים הקשורים ליתרונות של האולפניאדה ולחסרונותיה, לאופי השאלות בתחרות ולמבנה. כמו כן הייתה התייחסות להשפעתה של האולפניאדה על עתיד המתמודדת ועל יחסה לתחום המתמטיקה. חלק זה של השאלון נבנה בחלקו על בסיס רעיונותיה של גוינגווישי (Gyöngyösi, 2002).

ג. מתמטיקה ומגדר

חלק זה כלל עשרה היגדים מתוך שאלון כללי של דופקן ועמיתותיה (Doepken et al, 2005) שהתייחסו לתפיסה ולדימוי העצמי-המגדרי של המתמודדת.

ד. הבית

השאלות בחלק זה התייחסו להשכלת ההורים, לאבזור הטכנולוגי של הבית וכדומה. שאלות אלו מבוססות ברובן על שאלון TIMSS לתלמיד שנלווה למבחני TIMSS 2003 (בתוך IEA, 2007).

נבדקה המהימנות הפנימית (על-ידי חישוב האלפא של קרונברך) של כל אחד משלושת החלקים א'-ג'. מקדמי המהימנות של שלושתם היו בטווח 0.72 עד 0.78. עקיבותו הפנימית של הסולם כולו הייתה $\alpha_k = .77$.

השאלון למורי המתמודדות

השאלון לקבוצה זו כלל את החלקים הבאים:

- א. נתוני רקע של המורה
- ב. האולפניאדה והשפעתה
- ג. מתמטיקה ומגדר

ד. ניסיון בהוראת מתמטיקה

ה. ההשכלה המתמטית של המורה והתפתחותו המקצועית

יש לציין כי החלקים הנוגעים לאולפניאדה והשפעתה ולמתמטיקה ומגדר היו כמעט זהים בשני השאלונים: של המתמודדות ושל המורים, עובדה שאפשרה השוואה במשתנים אלו בין שתי הקבוצות.

שני השאלונים כללו שאלות שבהן נתבקשו הנחקרים לסמן באיזו מידה היגדים מסוימים מתארים נכונה את עמדותיהם. התשובות סומנו בסולם בעל 5 דרגות: בכלל לא; במידה נמוכה; במידה בינונית; במידה רבה; במידה רבה מאוד.

הליך המחקר

שאלוני המחקר נשלחו לרכזי המתמטיקה שבכל בתי-הספר מהם העפילו מתמודדות לשלב השני של האולפניאדה. אוכלוסיית המחקר כללה 310 מתמודדות ומוריהן למתמטיקה. השאלון למתמודדות הוצג לפנייה עם תחילת השלב השני של התחרות, והיא התבקשה (אך לא אולצה) למלא את השאלון לפני שהיא ניגשת לפתרון השלב השני. השאלונים הממולאים נאספו על-ידי הרכזים, והוחזרו על-ידיהם במעטפות שצורפו לשאלוני השלב השני. נתקבלו חזרה 92 שאלונים מלאים. שיעור ההיענות היה אפוא 30%, שיעור היענות מקובל בסקרים מסוג זה (הורניק ומאיר, 1989; Hansen & Hurwitz, 1946; Scott, 1961). יש לציין שההיענות לשאלון הייתה תלויה ברכז לימודי המתמטיקה של בית-ספר ולא נעשתה על-פי שיקול דעתה של המתמודדת.

השאלון למורה הוצג לפניו על-ידי הרכז/ת, נאסף על-ידו/ה לאחר מילוי, וגם הוא הוחזר לעורכי המחקר. בסך הכול הוחזרו 19 שאלונים כאלה. לא ידוע כמה מורים לא השיבו על השאלון.

להלן נתייחס לקבוצת המשיבים כאל מדגם המחקר, על אף שאין בידי החוקרים את הכלים לבדוק באיזו מידה הוא מהווה מדגם מייצג של האוכלוסייה כולה.

הממצאים

למרות שהשאלון למתמודדת היה אנונימי לחלוטין, ללא בקשת נתוני רקע כלל, ידוע כי אוכלוסיית המחקר כללה מתחרות מכיתות ט'-י"ב מקשת רחבה של אולפנות ובתי-ספר תיכוניים לבנות בכל רחבי הארץ (מקריית שמונה בצפון ועד אילת בדרום).

המעבר לשלב השני של האולפניאדה נקבע בצורה מדורגת, כאשר מתחרות מכיתות ט' ו-י' העפילו לשלב השני אם השיבו נכונה על לפחות 13 מתוך 20 השאלות הסגורות שהוצגו בפניהן בשלב הראשון, ואילו מתחרות מכיתות י"א-י"ב העפילו לשלב השני רק אם השיבו נכונה על 15 שאלות או יותר. מנגנון זה היה אמור לאזן את ייצוג הכיתות השונות בשלב השני, וייתכן שהשפיע גם על מבנה המדגם.

באשר למדגם המורים, המדגם כלל, כאמור, 19 נחקרים, מתוכם 17 מורות ושני מורים שגילם הממוצע הוא 41 שנה (ס"ת 11.7). כל המורים הנם בעלי תואר אקדמי, 11 מתוכם בעלי תואר ראשון, והיתר בעלי תואר שני. 11 מתוכם בוגרי אוניברסיטה, והאחרים (לאו דווקא בהתאמה) הם בוגרי מכללות בדיסציפלינה אחת או יותר. תחומי ההתמחות שלהם מפולגים כמתואר בטבלה 1.

טבלה 1: תחומי ההתמחות למדגם המורים

שכיחות	תחום התמחות
17	מתמטיקה
5	מחשבים
4	מדעים
1	ייעוץ
2	סטטיסטיקה
2	תנ"ך
1	הנדסה

חמישה עשר מקרב המורים במדגם דיווחו כי בידם תעודת הוראה.

רוב הנחקרים במדגם המורים הם בעלי תפקידים: 10 מתוכם הם רכזי מקצוע בבית-ספרם. עובדה זו מצביעה על כך שהרכזים התייחסו בכובד ראש לשאלון, אך, מצד אחר, לא טרחו להפיצו בין יתר המורים. אולי בשל כך, הוותק בהוראת המתמטיקה של מדגם המורים מתפלג כמתואר בטבלה 2, דהיינו מדגם של מורים בעלי ותק רב-שנים. יצוין שמחציתם הביעו רצון לעסוק בפיתוח חומרים או במחקר.

טבלה 2: התפלגות מדגם המורים לפי ותק בשנים

שכיחות	ותק בשנים
3	4-0
4	9-5
2	14-10
2	19-15
1	24-20
7	+25

היחס למתמטיקה

החלק הראשון של השאלון למתמודדת, שכותרתו "אָתְּ והמתמטיקה", הורכב, כאמור, משאלות המתייחסות למקצועות הלימוד המועדפים על המתמודדת, ולמקצועות הלימוד שהיא מצליחה בהם. כצפוי, בקבוצת מדגם זו, המקצוע האהוב השכיח היה מתמטיקה עם שכיחות של 37.1%. מתוך המקצועות האהובים ביותר, מקצועות היהדות היו במקום השני (26.9%), ובמקום השלישי סומנו מדעי הטבע (טבלה 3). כל אחד מיתר המקצועות נבחר על-ידי בודדים בלבד. אולם, כאשר נשאלו המתמודדות מהו המקצוע שבו הן מצליחות ביותר, 54% מתוכן סימנו מתמטיקה, ואילו 17% בלבד סימנו את מקצועות היהדות כתחום שבו הן מצליחות ביותר (טבלה 4).

טבלה 3: התפלגות המקצוע האהוב ביותר

המקצוע	אחוזים
א. תנ"ך ומחשבת ישראל	26.9
ב. מתמטיקה ומחשבים	37.1
ג. מדעי הטבע (כימיה, ביולוגיה, פיזיקה)	13.4
ד. ספרות	4.5
ה. אנגלית	9.0
ו. היסטוריה, אזרחות וא"י	5.5
ז. ספורט	2.2
ח. ערבית	1.1

טבלה 4: התפלגות המקצוע שבו מצליחות ביותר

המקצוע	אחוזים
א. תנ"ך ומחשבת ישראל	17.1
ב. מתמטיקה ומחשבים	54.0
ג. מדעי הטבע (כימיה, ביולוגיה, פיזיקה)	12.5
ד. ספרות	4.6
ה. אנגלית	6.9
ו. היסטוריה, אזרחות וא"י	4.6

השוואת המשתנים "המקצוע שבו אָתְּ הכי מצליחה" ו"המקצוע האהוב ביותר" מראה כי שיעור המצליחות ביותר במתמטיקה הוא פי 1.5 משיעור אלו שמקצוע זה הוא האהוב עליהן ביותר, ולעומת

זאת, שיעור המציינות את לימודי היהדות כמקצוע האהוב ביותר הוא פי 1.5 משיעור אלו שציינו שזה המקצוע שבו הן מצליחות ביותר.

בהמשך השאלון נתבקשו המתמודדות לדרג את מידת ההסכמה שלהן עם 14 היגדים בנושא יחסן למתמטיקה. ניתוח הגורמים של התגובות נעשה בשיטת ה-varimax עם רוטציה אורתוגונלית, והעלה את קיומם של ארבעה גורמים ראשיים, שמשמעותם נותחה, ומפורטת להלן:

א. היחס האישי של המתמודדת למתמטיקה.

ב. התפיסה העצמית של המתמודדת כלומדת מתמטיקה.

ג. התועלת המעשית מלימודי המתמטיקה.

ד. סטיגמות בתחום המתמטיקה.

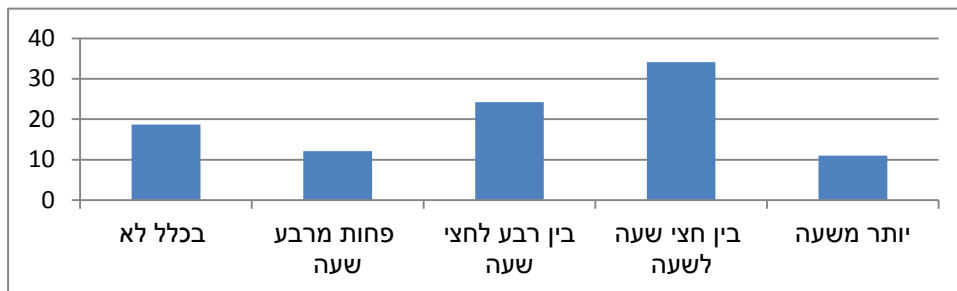
שניים מההיגדים בשאלון לא נכללו בשל טעינה נמוכה. בטבלה 5 מוצגים הטעינות והממוצעים של 12 ההיגדים הנותרים בארבעת הגורמים הראשיים הנ"ל.

טבלה 5: הממוצעים וסטיות התקן של כל אחד מההיגדים בנושא היחס למתמטיקה

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
היחס האישי למתמטיקה	כיף ללמוד מתמטיקה	.824	3.8
	משעמם ללמוד מתמטיקה	-.788	2.0
	אני אוהבת מתמטיקה	.785	3.9
	הייתי רוצה להרחיב את לימודי המתמטיקה מעבר לתכנית הנלמדת בבית-הספר	.748	3.3
התפיסה העצמית כלומדת	מתמטיקה היא הצד החזק שלי	.809	4.1
	אני קולטת מתמטיקה במהירות	.807	4.1
	בדרך-כלל אני מצליחה במתמטיקה	.726	4.3
התועלת המעשית מלימודי המתמטיקה	חשוב לי להצליח במתמטיקה כדי שאתקבל בעתיד ללימודים גבוהים לפי בחירתי	.877	3.9
	חשוב לי להצליח במתמטיקה כדי שאתקבל בעתיד למקום עבודה כרצוני	.823	3.7
	המתמטיקה עשויה לסייע לי בחיי היום יום	.591	3.0
	חשוב ללמוד מתמטיקה כדי להבין נושאים אחרים בבית-הספר	.499	2.7
סטיגמות בתחום המתמטיקה	מתמטיקה הוא מקצוע למרובעים	.905	1.8

התפלגות התגובות לשאלה "כמה זמן, בממוצע, את מקדישה ביום להכנת שיעורי בית במתמטיקה?" מוצגת באיור 1.

איור 1: ההתפלגות באחוזים של משך הזמן המוקדש לשיעורי בית



כמוצג באיור 1, עולה כי כ-40% מקרב הנחקרות מקדישות פחות מרבע שעה ליום להכנת שיעורי בית במתמטיקה. המתאם הליניארי בין משתנה זה לבין הגורם השני בשאלון היחס למקצוע המתמטיקה "תפיסת העצמי כלומד", מראה קיומו של מתאם שלילי ($r=-0.375$, $p\text{-value}<0.01$), כלומר ככל שהנחקרת בעלת תפיסה עצמית גבוהה יותר כלומדת, כך היא מקדישה פחות זמן לשיעורי הבית. כפי הנראה, תכנית הלימודים במתמטיקה בחטיבה העליונה אינה מהווה אתגר הולם לתלמידות (ולתלמידים) בעלי תפיסה עצמית גבוהה כלומד. פועל יוצא מזה הוא אי-הקדשת זמן משמעותי למטלות בתחום, ופגיעה בהרגלי הלמידה של התלמידים הכישרוניים ביותר.

לאחר השאלה הכללית על הכנת שיעורי הבית נתבקשו הנחקרות לאפיין את אופן התמודדותן עם בעיות מתמטיות קשות לפיצוח, ותגובותיהן מפורטות בטבלה 6:

טבלה 6: התפלגות התגובות לאופן ההתמודדות עם בעיות קשות לפיצוח

ההיגד	שכיחות	אחוזים
א. אני פונה למורתי ומבקשת את עזרתה	14	15.7
ב. אני מתייעצת עם חברות	26	29.2
ג. אני זונחת את הבעיה	2	2.2
ד. אני מסתייעת במקורות באינטרנט	3	3.4
ה. אני מתעקשת ומנסה לפתור את הבעיה בעצמי	39	43.8
ו. תגובות משולבות	5	5.6
ס"ה	89	100

- טבלה זאת מאפשרת להבחין בין שלוש קבוצות בלתי תלויות של מתמודדות לפי סגנון הלמידה שלהן:
- הלומדות המסתייעות – אלו שפונות לקבלת סיוע מגורמים שונים (הגיבו א, ב או ד).
 - הלומדות העצמאיות – אלו שמתעקשות לפתור את הבעיות בכוחות עצמן (הגיבו ה).
 - כל היתר (7 נחקרות)

להלן נתייחס לשתי הקבוצות הראשונות: הלומדות המסתייעות והלומדות העצמאיות. נבחנה ההשערה כי קיים הבדל בין שתי קבוצות אלו בארבעת הגורמים שהוצעו לעיל: היחס האישי למתמטיקה, תפיסת העצמי כלומד, התועלת מלימודי המתמטיקה וסטיגמטיזציה של המתמטיקה. נערך מבחן t מתאים, שהעלה כי הלומדות העצמאיות הן בעלות "תפיסה עצמית כלומד" גבוהה יותר מהלומדות המסתייעות ($p\text{-value} < 0.03$). גם בגורם "היחס למתמטיקה" נמצאו הבדלים מובהקים בין שתי הקבוצות ($p\text{-value} < 0.004$), כאשר העצמאיות הביעו יחס חיובי יותר לתחום מאשר המסתייעות. לעומת זאת, לא הובחנו הבדלים בין שתי הקבוצות ביחס לתפיסתן את התועלת מלימודי המתמטיקה ואת הסטיגמטיזציה של המתמטיקה.

בנוסף, נבחנה ההשערה של קיום תלות סטטיסטית בין המשתנה "סגנון הלמידה" לבין המשתנה "המקצוע האהוב ביותר" – מתמטיקה או אחר. בטבלה 7 מוצגת ההתפלגות המשותפת של שני המשתנים.

טבלה 7: הצלבת המשתנים סגנון למידה והמקצוע האהוב ביותר

סגנון למידה			
עצמאית	מסתייעת	סה"כ	המקצוע האהוב ביותר
19	8	27	
20	35	55	לא מתמטיקה
39	43	82	סה"כ

השערה זאת נבחנה בעזרת מבחן חי-בריבוע של פירסון (χ^2) והתקבלה באופן מובהק ($p\text{-value} = 0.004$), כלומר הלומדת העצמאית, לעומת הלומדת המסתייעת, אוהבת יותר מתמטיקה, ומאמינה יותר ביכולותיה.

הרגלי הפנאי

החלק הבא בשאלון עסק בהרגלי הפנאי של המתמודדות. הן נתבקשו להתייחס לשורה ארוכה של עיסוקים, ולציין לגבי כל אחד מהם באיזו מידה הן עוסקות בו. ניתוח הגורמים של התגובות נעשה

בשיטת ה-varimax עם רוטציה אורתוגונלית, והעלה את קיומם של ארבעה גורמים ראשיים, שמשמעותם נותחה, ומפורטת להלן (ראו טבלה 8):

א. התמודדות עם אתגרים לוגיים או מתמטיים

ב. העשרת הידע המתמטי

ג. בידור אלקטרוני

ד. בילוי קלסי

חושבו מתאמים ליניאריים של גורמים א ו-ב (הרלוונטיים לנושא המחקר) עם גורמי שאלון העמדות ביחס למתמטיקה (ראו טבלה 9). נמצאו שני מתאמים מובהקים בלבד:

א. בין הגורם "היחס האישי למתמטיקה" להרגלי פנאי בתחום אתגרים לוגיים או מתמטיים.

ב. בין הגורם "התועלת מלימודי המתמטיקה" להרגלי פנאי בתחום העשרת הידע המתמטי.

טבלה 8: הממוצעים והטענות של כל אחד מעיסוקי הפנאי

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
התמודדות עם אתגרים מתמטיים	פתירת חידות לוגיות	.835	2.1
	פתירת סודוקו (וריאציות שלו)	.801	2.6
	פתירת תשבצים	.657	2.2
	גלישה באתרי חידות	.645	1.6
	סיוע לאחרים בשיעורי בית במתמטיקה (תמורת תשלום או לחברות)	.536	2.4
	חיבור חידות והצגתן לסובבים	.534	1.3
העשרת הידע המתמטי בידור אלקטרוני	קריאת ספרים על אודות מתמטיקאים או מתמטיקה פופולרית	.758	1.4
	הצגת שאלות או תשובות באתרי עזרה במתמטיקה ברשת	.641	1.2
	משחקי מחשב	.738	1.9
	צפייה בטלוויזיה או בסרטי וידאו	.706	2.4
	גלישה באינטרנט	.627	2.4
בילוי קלסי	ספורט או פעילות גופנית אחרת	.732	2.8
	שיחות עם חברות	.647	1.5

טבלה 9 : מקדמי המתאם הליניאריים בין גורמי שאלון היחס למתמטיקה לגורמי שאלון הרגלי שעות פנאי

הגורמים	היחס האישי למתמטיקה	תפיסת העצמי כלומד	התועלת מלימודי המתמטיקה	סטיגמטיזציה של המתמטיקה
אתגרים	המתאם	.215*	.149	.033
מתמטיים	ערך ה-p	.020	.078	.379
העשרת הידע	המתאם	-.057	.119	.214*
המתמטי	ערך ה-p	.295	.128	.020
				.182
				.096
				.448
				-.014

היחס לאולפניאדה

החלק הבא בשאלון עסק ביחס המתמודדות לאולפניאדה המתמטית. הן נתבקשו להתייחס לשורה של 21 היגדים, ולציין לגבי כל אחד מהם באיזו מידה הן מסכימות איתו. ניתוח הגורמים של התגובות נעשה בשיטת ה-varimax עם רוטציה אורתוגונלית, והעלה את קיומם של ארבעה גורמים ראשיים, שמשמעותם נותחה, ומפורטת להלן:

- א. התועלת האישית מההשתתפות באולפניאדה
- ב. חשיבות האולפניאדה לחינוך המתמטי
- ג. ייחודיות התכנים של האולפניאדה
- ד. ההוגנות של האולפניאדה

הטעניות של כל אחד מן ההיגדים ומידת ההסכמה הממוצעת שלהם מוצגים בטבלה 10.

טבלה 10: הטעניות והממוצעים של גורמי האולפניאדה והשפעתה

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
התועלת האישית	הניסיון שאני רוכשת מהשתתפותי באולפניאדה עשוי לסייע לי בהכנתי לקראת לימודים גבוהים.	.750	2.7
	האולפניאדה מעודדת אותי לעסוק בעתיד במתמטיקה.	.669	2.4
מההשתתפות באולפניאדה	חשוב לי לעשות כמיטב יכולתי כדי להצליח באולפני אדה.	.599	2.1
	האולפניאדה מהווה גורם מגרה למידת ההתעניינות שלי במתמטיקה.	.550	3.5
	ההשתתפות באולפניאדה מגבירה את הביטחון העצמי שלי.	.668	2.9
חשיבות	אני מעוניינת להשתתף באולפניאדות שייערכו בעתיד.	.730	3.5

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
האולפניאדה לחינוך המתמטי	בית-הספר צריך לעודד השתתפות באולפניאדה.	.722	3.8
	האולפניאדה מקדמת חשיבה מתמטית.	.701	4.1
	הנלמד בכיתה מספק די שאלות אתגר ואין צורך באולפניאדה.	-.512	2.0
ייחודיות התכנים של האולפניאדה	השאלות באולפניאדה בוחנות פנים לא שגרתיים של המתמטיקה, ובכך הן מעוררות עניין.	.717	3.7
	האולפניאדה מציגה את תחום המתמטיקה באור חיובי.	.699	3.5
	השאלות באולפניאדה באות מתוך העולם הממשי, שאליו אני יכולה להתחבר בקלות.	.651	2.6
	האולפניאדה ממלאת חסר בנלמד בכיתה, כי היא מאפשרת לי להכיר חלקים יפים נוספים של המתמטיקה.	.491	3.3
ההוגנות של האולפניאדה	האולפניאדה אינה הוגנת.	.847	1.4
	האולפניאדה גורמת מתח הפוגע ברצף הלימודים.	.687	1.6
	האולפניאדה נועדה רק לגאונות.	.468	2.6
	האולפניאדה נוגדת את עיקרון השוויון.	.456	1.5

עיון בסיכום ממצאי שאלון האולפניאדה והשפעתה, מצביע על יחס חיובי למפעל האולפניאדה ולמטרותיו. האמירות שזכו להסכמה הגדולה ביותר היו "האולפניאדה מקדמת חשיבה מתמטית" (ממוצע 4.1) ו"בית-הספר צריך לעודד השתתפות באולפניאדה" (ממוצע 3.8), לעומת זאת האמירות שקיבלו את הניקוד הנמוך ביותר היו: "האולפניאדה אינה הוגנת" (ממוצע 1.4) ו"האולפניאדה נוגדת את עיקרון השוויון" (ממוצע 1.5).

חושבו המתאמים בין גורמי שאלון היחס לאולפניאדה המתמטית לבין גורמי שאלון היחס למקצוע המתמטיקה, ונמצאו מספר מתאמים חיוביים מובהקים:

א. בין התועלת האישית מהשתתפות באולפניאדה לבין היחס האישי למתמטיקה ($r=0.4$, $p\text{-value}<0.001$)

ב. בין התועלת האישית מהשתתפות באולפניאדה לבין התועלת המעשית מלימודי מתמטיקה ($r=0.4$, $p\text{-value}<0.001$)

ג. בין הערך המוסף של תכני האולפניאדה לבין היחס האישי למקצוע המתמטיקה ($r=0.3$, $p\text{-value}<0.005$)

הגורמים חשיבות האולפניאדה לחינוך המתמטי והוגנות האולפניאדה לא נמצאו מתואמים עם אף אחד מגורמי שאלון היחס למתמטיקה.

בהמשך נשאלו המתמודדות האם התכוונו לקראת השתתפותן באולפניאדה, ואם כן, באיזו דרך. יותר משליש (35%) השיבו בחיוב וציינו כי נסתייעו בשאלונים מאולפניאדות קודמות כפי שנתפרסמו באתר האולפניאדה. הועלתה ההשערה כי ניתן להבחין בין המתכונות לאלו שלא התכוונו לקראת השתתפותן באולפניאדה בחלק ממשתני המחקר. מבחן t העלה כי רק במשתנה "הוגנות האולפניאדה" (אחד מגורמי שאלון האולפניאדה והשפעתה) היה הפרש מובהק ($p < 0.01$). כאשר המתמודדות שציינו שהתכוונו לתחרות סברו בצורה פחות נחרצת כי האולפניאדה הוגנת מאשר אלה שלא התכוונו.

שאלה נוספת הייתה האם המתמודדת השתתפה באולפניאדות קודמות. כ-20% מתוך המתמודדות השיבו בחיוב, כאשר שליש מביניהן ציינו כי הצליחו בעבר להגיע לשלב הגמר.

מתמטיקה ומגדר

החלק הבא של השאלון התייחס למתמטיקה ומגדר, וכלל עשרה היגדים שלכל אחד מהם נדרשה המתמודדת להביע את מידת הסכמתה לו.

ניתוח גורמים של שאלון זה מעלה את קיומם של שלושה מרכיבים עיקריים:

- א. היכולת המתמטית של בנות לעומת בנים
- ב. אפיוני אישיות בזיקה ליכולת המתמטית
- ג. האמונה ביכולת המתמטית של בנות

טבלה 11: הטענות והמסוצעים של גורמי שאלון מתמטיקה ומגדר

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
היכולת המתמטית של בנות לעומת בנים	בדרך-כלל בנים מוכשרים יותר מבנות במתמטיקה.	-0.810	*4.3
	לימודי מתמטיקה מתאימים לנשים בדיוק כפי שהם מתאימים לגברים.	0.795	4.5
	קשה להאמין שבת יכולה להיות גאונית במתמטיקה.	-0.750	*4.9
	בנות מוצלחות במתמטיקה לא פחות מבנים.	0.622	4.3
	אני אסמוך על אישה בפתרון בעיות מתמטיות חשובות בדיוק כפי שאסמוך על גבר.	0.593	4.7
	בנות מוצלחות בראייה מרחבית בדיוק כמו בנים.	0.501	4.0
אפיוני אישיות בזיקה ליכולת המתמטית	אם בת צריכה לפתור בעיה מתמטית עדיף שתבקש עזרה מבן.	0.673	*4.8
	מתמטיקאית היא בדרך-כלל אישה בעלת אישיות חזקה.	0.666	2.6
	בנות שנהנות ממתמטיקה הן מעט מוזרות.	0.585	*4.3

הגורם	ההיגד	טעינה	ממוצע
האמונה ביכולת המתמטית של בנות	בנות חכמות דיין כדי להצליח במתמטיקה.	0.890	4.7

* בהיגדים שנוסחו בצורה שלילית, הומר הממוצע m ב-m-6

התגובות מצביעות על כך שהמתמודדות סבורות כי לנשים יכולות מתמטיות שאינן נופלות מאלו של הגברים. את עמדתן זו הביעו באופן נחרץ בהרבה מכפי שעשו ביתר השאלונים (כל הממוצעים נמצאים בטווח 4.2-4.9 מלבד ממוצע אחד).⁴

חושבו מתאמים בין גורמי שאלון היחס למתמטיקה לבין שלושת גורמי שאלון מתמטיקה ומגדר. לא נמצאו מתאמים משמעותיים.

כמו כן נבדקו מתאמים בין הגורמים השונים של שאלון יחס המתמודדת לאולפניאדה המתמטית, לבין שאלון מתמטיקה ומגדר. נמצא מתאם שלילי מובהק ($p=0.016$ $r=-0.225$) בין הגורם **התועלת האישית מדהשתתפות באולפניאדה** לבין הגורם המגדרי: **האמונה ביכולת המתמטית של בנות**. כלומר נחקרות שאמונתן ביכולת המתמטית של בנות פחותה יותר, רואות תועלת רבה יותר בתחרות המיועדת לבנות.

כמו כן נמצא מתאם שלילי מובהק ($p=0.035$ $r=-0.189$) בין הגורם **ההגינות של האולפניאדה** לבין הגורם המגדרי: **היכולת המתמטית של בנות לעומת בנים**. כלומר ככל שהמתמודדת מסכימה יותר עם ההיגד שהיכולת המתמטית של הבת אינה נופלת מזו של הבן, כך היא מסכימה יותר עם ההיגד שהאולפניאדה הוגנת.

הבית

בחלק הבא של השאלון נתבקשה המתמודדת למסור פרטים אחדים על ביתה והשכלת הוריה. מן התגובות עולה בבירור כי בבית המתמודדת השכיחה יש מחשב מחובר לרשת האינטרנט, ושני הוריה הם בעלי השכלה על-תיכונית. בבתים רבים מצויים ספרים שעוסקים במתמטיקה מחוץ לתכנית הלימודים הבית-ספרית. הממצאים מוצגים בטבלאות 12-14.

4. מסתבר שההיגד "מתמטיקאית היא בדרך כלל אישה בעלת אישיות חזקה" היה דו-משמעי והיה אפשר להבינו כהיגד חיובי כמו גם כהיגד שלילי.

טבלה 12: תגובות לשאלה "אלו מהפרטים הבאים קיימים בביתך?"

הפריט	שכיחות
מחשב ללא חיבור לאינטרנט	4
מחשב עם חיבור לאינטרנט	80
ספרי מתמטיקה שאינם מתכנית הלימודים	42
ספרים במתמטיקה פופולרית	18

טבלה 13: תגובות לשאלה "באלו סן המסגרות הבאות למד אביך?"

מסגרת	שכיחות
תיכון	34
ישיבה תיכונית	43
ישיבה גבוהה	28
אוניברסיטה או מוסד אחר להשכלה גבוהה	66

טבלה 14: תגובות לשאלה "באלו סן המסגרות הבאות למדה אמן?"

מסגרת	שכיחות
תיכון	46
אולפנא	31
מכללה או סמינר	24
אוניברסיטה או מוסד אחר להשכלה גבוהה	60

שאלות פתוחות

השאלון למתחרה כלל שתי שאלות פתוחות:

א. צייני היבטים הקשורים לאולפניאדה שמצאו חן בעיניך

ב. צייני נושאים שלדעתך טעונים שיפור באולפניאדה

להלן סיכום 48 ההיגדים של הנחקרות כתגובה לשאלה הראשונה [המספרים בסוגריים מציינים את מספרי ההיגדים בכל נושא]:

א. פיתוח חשיבה מתמטית והסתמכות פחותה על ידע נצבר [23]

ב. פן מאתגר ו"כיפי" [16]

ג. סגנון יצירתי ומקורי, ונגיעה בנושאים שמחוץ לתכנית הלימודים [9]

כדי להמחיש, יצוין כי בתוך 48 ההיגדים הפתוחים על היבטים שונים הקשורים לאולפניאדה שמצאו חן בעיני המתמודדות, הופיעו כ-50 פעמים המילים הבאות (או הטיותיהן): מפתח חשיבה, מאתגר, מעניין, מחבב, כיף, יצירתי.

להלן סיכום המלצות הנחקרות לשאלה השנייה "צייני נושאים שלדעתך טעונים שיפור באולפניאדה", סך הכול 46 היגדים [המספרים בסוגריים הם מספר ההיגדים בכל נושא]:

- א. יש לפשט ולהבהיר את הניסוחים [15]
- ב. נדרשים שיפורים שונים הקשורים בהתנהלות התחרות [11]
- ג. יש להנהיג רמה דיפרנציאלית בשאלון לפי גיל המתחרה [7]
- ד. יש לגוון את התכנים [6]
- ה. יש לקצר אורך הבחינה [5]
- ו. כדאי להמיר את הפרס לכזה שאינו תלוי במוסד או במלגה [2]

בניתוח הגורמים נלקחו בחשבון כל השאלות המשותפות לשתי הקבוצות. נמצאו שבעה מרכיבים, אולם מתוכם רק ארבעה זוהו, כדלהלן:

- א. הערך המוסף של תכני האולפניאדה
- ב. התועלת האישית מן ההשתתפות באולפניאדה
- ג. חשיבות מפעל האולפניאדה
- ד. הוגנות האולפניאדה

בכל שלושת הגורמים הראשונים נמצא פער משמעותי בין עמדות המורות לבין אלה של המתמודדות. הסבר אפשרי לכך הוא, ראייתן הרחבה יותר של המורות והבנתן כי להשתתפות באולפניאדה עשויה להיות השלכות לטווח רחוק, היבט שהמתמודדת אינה מסוגלת לראותו מהמקום שהיא בו עומדת.

דיון וסיכום

המחקר מבליט את השפעת המיתוסים השליליים האופפים את תחום המתמטיקה (Biller, 1996) על יחסן של המתמודדות לתחום זה. מסתבר שתופעת חוסר הפופולריות של המתמטיקה בקרב כלל הלומדים, חדרה גם לקבוצה המצליחה בלימודי מקצוע זה, והיא באה לידי ביטוי בפער משמעותי בין אלו שהמתמטיקה היא מקצוע ההצטיינות שלהן, לבין אלו שהמתמטיקה היא התחום האהוב עליהן ביותר. הקבוצה הראשונה גדולה פי 1.5 מהשנייה.

בהקשר לכך, מעניין לציין שבתחום מקצועות היהדות המגמה ממש הפוכה. הפער בין אהבת מקצועות היהדות לבין ההצלחה בהם (פי 1.5) נובע כפי הנראה מאופייה של קבוצת המחקר – תלמידות ובוגרות החינוך הדתי, אשר תופסות את לימודי היהדות כערכיים יותר מיתר תחומי הלימוד, ובכללם גם המתמטיקה.

היחס האמביוולנטי כלפי המתמטיקה בא לידי ביטוי גם במשך הזמן שהתלמידה מקדישה להכנת שיעורי בית במקצוע זה. הזמן המוקדש נמוך בהרבה מכפי שהיה ניתן לצפות. הסבר אפשרי לעובדה זו הוא, שתכנית הלימודים במתמטיקה בחטיבה העליונה אינה מהווה אתגר הולם לתלמידות (ולתלמידים) בעלי תפיסה עצמית גבוהה כלומד. פועל יוצא מזה הוא פגיעה בהרגלי הלמידה של התלמידים הכישרוניים ביותר, במובן זה, שכאשר יעמדו בעתיד באקדמיה בפני אתגרים הדורשים השקעת זמן, לא יהיו מורגלים לכך שיש להקדיש זמן רב כדי להצליח. טיעון זה מתיישב עם התרעות הנשמעות פעם אחר פעם מפיהם של ראשי האוניברסיטאות על מוכנות לא מספקת של המועמדים ללימודים גבוהים בתחום המתמטיקה והמדעים.⁵

הרגלי הלמידה של התלמידות באים לידי ביטוי גם בקיומם של שני סגנונות למידה, או שני סוגים של לומדות, הלומדת העצמאית והלומדת המסייעת. הלומדת העצמאית אוהבת יותר מתמטיקה, ומאמינה יותר ביכולותיה מאשר הלומדת המסייעת. קשר הגומלין בין תחום "היחס למתמטיקה" למשתנה "סגנון הלמידה" משפיע בשני הכיוונים:

1. הלומדת העצמאית מנסה לפתור בעיות בעצמה יותר מאשר חברתה הלומדת המסייעת, ודבר זה גופא מגביר את האמון שלה בעצמה ואת יחסה החיובי לתחום, ובכך מעודד אותה להתמיד בעצמאותה.

2. ניתן לומר, כי ככל שהלומדת מתעקשת יותר לפתור בעיות במתמטיקה בכוחות עצמה, ומשקיעה בכך יותר זמן, כך מתגברת חיבתה לתחום.

הבדלים מובהקים אלו בין שני טיפוסים הלומדות, המסייעת והעצמאית, מצביעים אולי על הכיוון לשיפור היחס לתחום ותפיסת העצמי כלומד: עידוד הלמידה ועידוד החשיבה העצמאית, עשויים לשפר את היחס למתמטיקה ואת תפיסת העצמי כלומד, וכתוצאה מכך גם את ההצלחה בתחום, כפי שמראים ממצאיה של אקלוף (Eklöf, 2007). היחס למתמטיקה משפיע גם על הרגלי הפנאי של הנחקרת: ככל שיחסה של המתמודדת לתחום המתמטיקה אוהד יותר, כך היא מקדישה חלק נכבד יותר משעות הפנאי שלה לאתגרים לוגיים ומתמטיים. כמו כן, ככל שהיא תופסת את לימודי המתמטיקה כתועלתיים יותר, כך היא מקדישה יותר מזמנה הפנוי לתחום העשרת הידע המתמטי. ממצאים אלו ניתן לפרש בכך שהפן התועלתני מתבטא יותר ברצון להעשיר ידע, לעומת אהבת המקצוע ההופכת את התחום למעין תחביב.

אחת ממטרותיו המרכזיות של מחקר הערכה זה הייתה לבחון את תרומתה של האולפניאדה לחינוך המתמטי בארץ. הפן שזכה להסכמה הרבה ביותר היה מידת חשיבות האולפניאדה לחינוך המתמטי:

5. ראו למשל דברי נשיא הטכניון במאמרו של קשתי (2010).

המתמודדות סבורות כי האולפניאדה מקדמת את החשיבה המתמטית ומספקת אתגרים שאינם קיימים בתכנית הלימודים הבית-ספרית. בית-הספר, לפיכך, צריך לעודד את ההשתתפות באולפניאדה (או בפרויקטים דומים). על אף המרכיב התחרותי באולפניאדה, היא נתפסת בעיני המתמודדות כתהליך הוגן ושוויוני (עם זאת, המתמודדות שהתכוננו לתחרות הביעו ביחס להוגנות דעה פחות נחרצת מאשר אלה שלא התכוננו. הסבר אפשרי לכך הוא, שאלה שהשקיעו בהכנה, גילו חשש יותר גדול מפני אי-הצלחה מאשר אלה שלא התכוננו, ודבר זה מצא את ביטויו בתגובותיהן בנושא ההוגנות). ממצא זה מתיישב עם דעתו של אדיגר (Ediger, 2001) המצדד בלמידה תחרותית לעומת הלמידה השיתופית ומציע לעודד את התחרות הברירה.

לעומת זאת, קשה למתמודדות לראות תועלת אישית מההשתתפות שלהן באולפניאדה. מעניין לציין כי ראייה זו שונה במובהק מזו של מוריהן. לעומת המתמודדות, רואים המורים תועלת אישית גדולה יותר בהשתתפות באולפניאדה. הסבר אפשרי לכך, הוא ראייתם הרחבה יותר של המורים והבנתם, כי להשתתפות באולפניאדה עשויות להיות השלכות לטווח רחוק, היבט שהמתמודדות אינה מסוגלת לראותו מהמקום שבו היא עומדת. ראייתם זו של המורים תואמת את ממצאיו של טירי (Tirri, 2000) בדבר ההשפעה האפשרית של השתתפות בתחרות על עתידם המקצועי של המתחרים.

המורים, כמו גם התלמידות, סוברים כי לאולפניאדה תכנים ייחודיים: היא בוחנת פנים לא שגרתיים של המתמטיקה. בכך היא מוסיפה נדבך לנלמד בכיתה. דעה זו מאששת את השערת המחקר בדבר תרומתה של האולפניאדה לחינוך המתמטי, ותואמת את דעתה של גינגיווישי (Gyöngyösi, 2002) בדבר היתרונות שהיא מוצאת בתחרויות מתמטיות. כמו כן אוששה דעתה הנחרצת של גינגיווישי, החולקת על הימצאותם של חסרונות צפויים הנלווים להליך תחרותי: לפי דעת המתמודדות, האולפניאדה אינה נוגדת את עיקרון השוויון, ולא נתפסת בעיניהן כגורם יוצר לחץ.

כצפוי, היחס לאולפניאדה המתמטית נגזר מהיחס לתחום המתמטיקה בכלל. התועלת האישית מהשתתפות באולפניאדה מתואמת עם היחס האישי למתמטיקה ועם התועלת המעשית מלימודי המתמטיקה. כמו כן, הערך המוסף של תכני האולפניאדה מתואם עם היחס האישי למקצוע המתמטיקה.

לעומת זאת, היחס למתמטיקה לא משפיע על תפיסתן של המתמודדות לגבי חשיבות האולפניאדה לחינוך המתמטי או הוגנות האולפניאדה. עמדות אלו כלפי האולפניאדה, כנראה, אינן נגזרות מיחסה של המתמודדת לתחום המתמטיקה, אלא מתוך חווית ההתנסות בתחרות.

על אף המתח הנלווה באופן טבעי למצב של "תחרות", האולפניאדה נתפשת בעיני המתמודדת כפעילות מעודדת חשיבה במובן ה"כיפי" והמאתגר. בכך התחברו המתמודדות למטרות האולפניאדה כפי שהוצהרו על-ידי מארגני התחרות. דעה זו של המתמודדות, עולה בקנה אחד עם דבריו של וויטקומב (Whitcombe, 1988) על חוקר המתמטיקה המקבל השראה מיצירתיות, מדמיון ומהערכה ליופייה, ולא דווקא מהתועלתיות ומהרלוונטיות שלה.

מתמטיקה ומגדר

האולפניאדה היא תחרות המיועדת לבנות בלבד. עקב כך היא נטולת איום סטריאוטיפי, כמו זה שתואר על-ידי אמבאדי ועמיתיה (Ambady et al., 2002) כגורם המשפיע על ההישגים במתמטיקה. אינדיקציה להיעדר גורם סטריאוטיפי מגדרי מהווה הדעה הנחרצת בה מביעות המתמודדות את העמדה, כי לנשים יכולות מתמטיות שאינן נופלות מאלו של גברים. עמדה זו של המתמודדות מאששת את טענתה של סוליבן (Sullivan, 2008) בדבר הדימוי העצמי המתמטי החיובי בקרב בנות שלומדות בכיתות נפרדות לעומת בנות הלומדות בכיתות מעורבות. עמדת המתמודדות בולטת במיוחד לנוכח ממצאיהם של הרברט וסטיפק (Herbert & Stipek, 2005) שהצביעו על הערכה עצמית או דעה קדומה נחותה של בנות בנות 10 והוריהן: על אף שלפי דיווחי המורים, הישגי הבנות באותה שכבת גיל לא נפלו מאלו של הבנים, העריכו גם הבנות וגם הוריהן, שיכולותיהן המתמטיות נמוכות מאלו של הבנים.

מעניין לציין את השפעת התפיסה המגדרית על היחס לאולפניאדה המתמטית: נחקרות שאמונתן ביכולת המתמטית של בנות פחותה יותר, רואות תועלת רבה יותר בקיומה של תחרות המיועדת לבנות. מסקנה אפשרית ממצא זה היא, שהאולפניאדה המתמטית מאפשרת לבת לבטא את יכולותיה המתמטיות, ומגבירה את אמונת המתמודדת ביכולותיה.

המלצות ומסקנות

ממצאי המחקר מצביעים על דרכים חדשות להעצמת הלומדים ביחסם למתמטיקה, באשר הם מעלים על נס את החשיבות של היצירתיות והחשיבה הלא שגרתית כגורמים לשינוי היחס לתחום המתמטיקה. בפרט, המחקר מתווה דרכים לשינוי יחס הבת למתמטיקה והדימוי העצמי המגדרי שלה למקצוע זה – הן כלומדת והן כמלמדת: יש לעודד חשיבה עצמאית כדי לעצב לומדת בעלת ביטחון עצמי. הפיכתה של הלומדת לעצמאית ישליך על היחס לתחום ועל הדימוי העצמי. האולפניאדה תורמת לכך, משום שהיא מושתתת על חשיבה עצמאית, וכוללת שאלות בלתי שגרתיות ומפני שהיא מעודדת פעילות-רשות מחוץ למסגרת תכנית הלימודים המחייבת.

ממצאי המחקר תומכים בסברה שפעילויות מעין האולפניאדה עשויות לשפר את הנחיתות המגדרית של הנשים ביחס לגברים באשר לכישוריהם המתמטיים, וכן לצמצם את המיתוסים השליליים האופפים את המקצוע והבאים לידי ביטוי, אפילו אצל המצטיינות בתחום.

עורכי המחקר ממליצים על הכדאיות של הרחבת הפעילות למגזרים אחרים – כגון בנים, חרדים, ערבים – תוך אימוץ הצורה היצירתית והלא שגרתית של האולפניאדה.

רשימת מקורות

- הורניק, י' ומאיר, נ' (1989). ניתוח-על של אי-תגובה בסקרי דואר. *מגמות, לב*, 366-400.
- וולבה, ש' (1996). *זריעה ובנין בחינוך*. ירושלים: פלדהיים.
- ולמר, ת' (2012). נבחרת ישראל במתמטיקה – איפה הבנות? *ynet*. אוהור מתוך <http://www.ynet.co.il/articles/0,7340,L-4213991,00.html>
- קשת, א' (2010). נשיא הטכניון, פרופ' פרץ לביא: הוראת המדעים בישראל בקריסה. *הארץ*. אוהור מתוך <http://www.haaretz.co.il/news/education/1.1235129>
- Ambady, N., Paik, S. K., Steele, J., Owen-Smith, A., & Mitchell, J. P. (2004). Deflecting negative self-relevant stereotype activation: The effects of individuation. *Journal of Experimental Social Psychology, 40*(3), 401-408.
- Anderson, J. (1989). Sex-related differences on objective tests among undergraduates. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 165-177.
- Billar, J. (1996). *Reduction of mathematics anxiety*. Paper presented at the annual national conference on Liberal Arts and Education of Artists, 10th, New York, NY. Retrieved from ERIC database <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED406196.pdf>
- Bishop, K., & Walters, H. (2007). The national ocean sciences bowl: Extending the reach of a high school academic competition to college, careers, and a lifelong commitment to science. *American Secondary Education, 35*(3), 63-76.
- Doepken, D., Lawsky, E., & Padwa, L. (1993). *Modified Fennema-Sherman attitude scales*. Paper presented at the Woodrow Wilson Gender Equity in Mathematics and Science Congress (WW-GEMS), Princeton. Retrieved from <http://teacherleaders.files.wordpress.com/2013/07/modified-fennema-math-attitude.doc>
- Ediger, M. (2001). *Cooperative learning versus competition: Which is better? Opinion paper*. Retrieved from ERIC database <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED461894.pdf>
- Eklöf, H. (2007). Test-taking motivation and mathematics performance in TIMSS 2003. *International Journal of Testing, 7*(3), 311-326.
- Feng, A. X., Campbell, J. R., & Verna, M. (2002). Understanding gender inequity in America: Interviews with academic Olympians. *Journal of Research in Education, 12*(1), 93-100.
- Frenzel, A. C., Pekrun, R., & Goetz, T. (2007). Girls and mathematics – a "hopeless" issue? A control-value approach to gender differences in emotions towards mathematics. *European Journal of Psychology of Education, 22*(4), 497-514.
- Gyöngyösi, E. (2002). Mathematics competitions and their role in education. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae, 29*, 115-124.
- Hansen, M. H., & Hurwitz, W. N. (1946). The problem of non-response in sample surveys. *Journal of American Statistical Association, 41*(236), 517-529.
- Herbert, J., & Stipek, D. (2005). The emergence of gender differences in children's perceptions of their academic competence. *Journal of Applied Developmental Psychology, 26*(3), 276-295.
- Leder, G. (1980). Bright girls, mathematics and fear of success. *Educational Studies in Mathematics, 11*(4), 411-422.
- Leder, G., Forgasz, H. J., & Taylor, P. J. (2006). Mathematics, gender, and large scale data: New direction or more of the same? In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková, (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the international group for the*

- psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 33-40). Prague: PME. Retrieved from <http://www.emis.de/proceedings/PME30/4/33.pdf>
- Leeson, N. (1995). Performance of sixth-graders in the Australian primary schools mathematics competition: Gender and other factors. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 37-49.
- Mertz, J. E., Andreescu, T., Gallian, J. A., & Kane, J. (2008). *Cross-cultural analysis of females identified with exceptional mathematical talent*. Paper presented at the annual meeting of the Mathematical Association of America MathFest, TBA, Madison, Wisconsin. Retrieved from http://citation.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/2/7/4/4/1/p274410_index.html?phpsessid=578cca421a0decf7d32d5eff926ed208
- Pepitone, E. A. (1985). Children in co-operation and competition; Antecedents and consequences of self-orientation. In R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb, & R. Schmuck (Eds.), *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 17-31). New York: Plenum Press.
- Scott, C. (1961). Research on mail surveys. *Journal of the Royal Statistical Society*, 124, 143-205.
- Shih, M., Pittinsky, T. L., & Ambady, N. (1999). Stereotype susceptibility: Identity salience and shifts in quantitative performance. *Psychological Science*, 10(1), 80-83.
- Sullivan, A. (2008). Academic self-concept, gender and single-sex schooling. *British Educational Research Journal*, 35(2), 259-288.
- Tapia, M., & Marsh II, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, 8(2), 16-21.
- Taylor, P. (2008). *Australian mathematics trust*. Retrieved from <http://www.amt.edu.au/amcwhatist.html>
- IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) (2007). *TIMSS 2003 School questionnaire grade 8 (BCG)*. Retrieved from http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/T07_Questionnaires_G8.pdf
- Tirri, K. (2000). *Actualizing mathematical giftedness in adulthood*. Paper presented at the ECHA conference, Debrecen, Hungary.
- Whitcombe, A. (1988). Mathematics: Creativity, imagination, beauty. *Mathematics in School*, 17(2), 13-15.



זיוה זויטש, מכללה ירושלים

ד"ר זיוה זויטש היא ראש החוג למתמטיקה במכללה ירושלים ושותפה בהגייטם והתנעתם של פרויקטים מתמטיים המיועדים לכלל ציבור הלומדים: האולפניאדה המתמטית, אלף אפס ועזרשת.



יצחק איזק, מכללה ירושלים

הרב ד"ר יצחק איזק משמש כמרצה בבי"ס לתואר שני במכללה ירושלים וכראש מרכז הוראה בבי"ס גבוה לטכנולוגיה בירושלים. הוא מתמחה בהכשרת עו"ה ובהערכה ומדידה בתחום החינוך ועוסק במחקר בתחומים אלה ובהגות יהודית.

תפיסת המושגים 'קושי' ו'אתגר' בבעיות מתמטיות שגרתיות

ולא שגרתיות, בתנאים שונים של מעורבות עם הבעיות

מארק אפלבאום, הסכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע

תקציר

בשנים האחרונות התפרסמו מאמרים מחקריים רבים העוסקים בחשיבות האתגר בהוראה. לרוב דנים המאמרים האלה בשיטות ההוראה המתאימות לתלמידים, בהכשרה הנדרשת מהמורים ובתפיסות של המורים, ואינם מתמקדים בנקודת המבט של התלמידים. מחקר זה עוסק בנקודת מבט זו. מטרתו ללמוד באופן ראשוני מהם הגורמים המשפיעים על תפיסות התלמידים בעניין הקושי של משימה מתמטית והאתגר שהיא מציבה. במחקר תופעלו שני משתנים:

- א. שגרתיות הבעיה המתמטית – בעיות שגרתיות המתבססות על תכנית הלימודים של משרד החינוך ובעיות לא שגרתיות, בעלות גוון של חידות ואינן נגזרות מתכנית הלימודים.
- ב. מידת המעורבות של התלמיד בפתרון הבעיה – מצבים של מעורבות נמוכה (קריאת בעיות מתמטיות בלי ניסיון לפתור אותן ופתרון בהנחיית מורה) ומצב של מעורבות גבוהה (פתרון עצמאי של הבעיה).

במחקר נבדק אם וכיצד מידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה משפיעה על תפיסות הקושי והאתגר; אם וכיצד מידת השגרתיות של השאלות משפיעה על תפיסות אלו, ואם יש השפעה משולבת למעורבות עם פתרון הבעיה ולשגרתיות על הבעיות על תפיסות האתגר והקושי. שאלות אלו נבדקו על מדגם של תלמידים הלומדים בכיתות ז' בבתי-ספר דוברי ערבית בדרום הארץ. המחקר הוא מחקר "גישושי" באופיו.

ממחקר זה יהיה אפשר לגזור מסקנות ראשונות על הגורמים שעשויים להעלות את העניין של התלמידים בלימודי המתמטיקה ובכך לשמש בסיס למחקרי המשך ולשיפור הכשרת פרחי הוראה בנושא זה.

במחקר נמצא שכאשר מידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה הייתה גבוהה, הערכת הקושי והאתגר היו גבוהים יחסית למצבים שבהם מידת המעורבות הייתה נמוכה. כמו כן המחקר הראה שבשלב הפתרון העצמאי, הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות הרבה יותר מהבעיות השגרתיות. לעומת זאת, כאשר התלמידים התבקשו רק לקרוא את הבעיות מבלי לנסות לפתור אותן או שביצעו

פתרון מונחה על-ידי המורה, לא היה הבדל מובהק בין תפיסת הקושי של בעיות שגרתיות לבין תפיסת הקושי של בעיות לא שגרתיות.

המחקר מצביע על כך ששאלות לא שגרתיות בעלות גוון חידתי עשויות להעלות את העניין בלימודי המתמטיקה בקרב התלמידים. במובן זה תוצאות המחקר מרמזות על יתרון של שילוב משימות כאלה בשיעורי המתמטיקה בבית-הספר ובהכשרת פרחי הוראה לכך.

מילות מפתח: אתגר; קושי; בעיות לא שגרתיות.

1. הרקע למחקר

במסגרת הכשרת פרחי הוראה במתמטיקה נשאלתי לא פעם אילו שאלות מתמטיות מאתגרות תלמידים במיוחד, ואילו שאלות הופכות את ההוראה לשגרתית, ובכלל, אם תלמידים מבינים את ההבדל בין המושג "קושי" למושג "אתגר".

אתגר וקושי הם מושגים סובייקטיביים: פירושה של המילה "אתגר" לפי מילון אבן שושן הוא: "הזמנה להתמודדות, דבר או רעיון המגרים רצונו של אדם או של ציבור להתמודד אתם, להשיגם או להתגבר עליהם". האתגר מגרה אפוא להתמודדות.

"קושי", לפי אבן שושן, הוא "מכשול, מעצור, חומרה, דבר המכביד על פעולה". אך ייתכן שבתפיסתם של התלמידים יש קשר חזק בין שני המושגים האלה: אתגר מזמן קושי. אין ספק שלמשימות מתמטיות מאתגרות יש תפקיד חשוב מאוד בהפיכתו של מקצוע המתמטיקה למרתק ול"ידידותי" יותר לתלמידים.

באופן כללי ברור שהצבת אתגר לתלמידים בהוראה בכלל ובהוראת המתמטיקה בפרט היא גורם חשוב בפיתוח הידע שלהם. הספרות בנושא עוסקת בשנים האחרונות בהיבטים חשובים מזווית הראייה של המורה, של ההוראה ושל הכשרת המורים. אילו משימות וחומרים מאתגרים יותר מאחרים? כיצד לבנות משימות כאלה? כיצד להכשיר מורים לשלב משימות מאתגרות בשיעור? מהן תפיסות המורים כלפי סוגיית האתגר? ועוד (Leikin, 2004; Applebaum & Leikin, 2007; Barbeau & Taylor, 2009). תקצירים של הכנסים: ICME 11, ICMI-16, CMEG-5, CMEG-4, CMEG-3.

עד כה לא פורסמו מחקרים שעוסקים בנקודת המבט של התלמידים – כיצד הם תופסים את האתגר? מהם הגורמים שמשפיעים על תפיסת האתגר מנקודת מבטם? במחקר הזה ניסינו לפתוח צוהר אל השאלות האלה, ובזה מתבטאת חדשנותו.

חשיבות האתגר בהוראת המתמטיקה

ג'ורסקי (Jaworski, 1992, 1994) טוענת כי מרכיבי הליבה של ההוראה הם האתגר המתמטי, הרגישות כלפי התלמידים וניהול הלמידה. כדי לפתח הבנה מתמטית, המורה חייב ליצור מצבים שדורשים מאמץ מנטלי מן התלמידים. האיכות של הוראת המתמטיקה בכיתה נקבעת על-ידי המשימות

המתמטיות שהמורה בוחר להציג לתלמידים, ועל-ידי הדרכים שבהן הוא מציג את המשימות האלה (Steinbring, 1998; Simon, 1997). לפי ברוסאו (Brousseau, 1997) בעיה מתמטית טובה מזמנת בניית ידע מתמטי אצל התלמידים על-ידי התגברות על קשיים מתמטיים, חיפוש כלים מתמטיים מתאימים, יישום אפקטיבי של הכלים האלה, הערכה ביקורתית של הפתרונות ויצירת בעיות חדשות הקשורות לבעיה הנתונה.

ידוע כי מורים רבים בוחרים משימות קונבנציונליות לשיעורים שלהם ומנחים את התלמידים למצוא פתרונות סטנדרטיים (Leikin & Levav-Waynberg, 2007). קוני (Cooney, 2001) מציין שאי אפשר לפתח אצל הלומדים עניין במתמטיקה על-ידי שימוש במשימות הדורשות הפעלת אלגוריתמים בלבד. שימוש בפעילויות מתמטיות מאתגרות אינו תנאי מספיק להפקת התועלת המרבית מהן בכיתה. לשם כך על המורים להבין את היתרונות שבשימוש במשימות מאתגרות ולהשתכנע בחשיבות השימוש במשימות כאלה בהוראה ובלמידה המתמטיקה. עליהם "להרגיש בטוחים" מבחינה מתמטית ופדגוגית, כאשר מדובר בסוג זה של משימות במתמטיקה.

בחירה של משימות מתמטיות מאתגרות כשהיא לעצמה משימה לא פשוטה: בראש ובראשונה היא דורשת לדעת איזה סוג של משימות מאתגרות את התלמידים ובאיזה שלב של הלמידה נכון לתת אותן לתלמידים. ברור ש"משימה מאתגרת" היא מושג סובייקטיבי ויכול להשתנות מתלמיד לתלמיד. על המורה להכיר את השונות בין תלמידיו ולנהל את הלמידה כך שהאתגרים יותאמו לצרכים של כל תלמיד כדי שכל התלמידים יהיו מאתגרים בשיעור. ברור כי למרות השוני בין התלמידים, ייתכן שלכמה מהם תהיה תפיסה דומה ביחס לרמת האתגר של אותן המשימות המתמטיות. על המורה להכיר את הדפוסים האלה כדי שלימוד המתמטיקה יעניין את תלמידיו (Krainer, 2001).

נוסף על הכרת דפוסי החשיבה ומציאת הדפוסים הדומים אצל תלמידים חשוב לבדוק אם המושג "אתגר" מתקשר בתפישתו של התלמיד למושג "קושי", ואם כן – באיזו מידה. האם משימה קשה היא בהכרח מאתגרת? או שמא משימה קשה מרפה את ידיהם של התלמידים וגורמת להם שלא ירצו להתמודד עמה. מידע זה עשוי להשפיע על קבלת ההחלטות של המורים בבחירת המשימות להוראה.

אי אפשר לבנות את הוראת המתמטיקה רק על משימות לא שגרתיות. שילוב מושכל של המשימות האלה עם המשימות השגרתיות חייב להיות במינון המתאים לאוכלוסיית היעד ולתכנית הלימודים. האם שאלות לא שגרתיות מאתגרות את התלמידים יותר משאלות שגרתיות? זאת אחת השאלות שהמחקר הזה מבקש להשיב עליה.

התמודדות עם משימות מאתגרות עוזרת לתלמידים להכיר את כישוריהם, שהרי התלמיד אינו יודע אם יצליח במשימה מאתגרת לפני שימצא את פתרונה (ולרוב אין ברשותו אלוגריתם שעליו הוא יכול להישען). קזמי וסטילמן ועמיתיו (Kazemi, 1998; Stillman et al., 2009) טוענים שכאשר תלמידים עוסקים בפתרון בעיות מאתגרות הם נמצאים על הגבול שבין התחום שבו הם מרגישים נוח לבין התחום שבו הם 'מסתכנים'.

"אתגרים משפרים את יכולתם של התלמידים להתמודד עם בעיות לא צפויות בחיי היום-יום, והצלחתם בכך מכינה אותם לחיים האמיתיים" (Stillman et al., 2009, p. 246).

סטילמן ועמיתיו (Stillman et al., 2009) מוצאים יתרון נוסף במשימות מאתגרות: הן מאפשרות לתלמידים לפתח הבנה שלמה יותר של מושגים מתמטיים. יתרה מזו המשימות המאתגרות מזמנות, לטענתם של פאוול ועמיתיו (Powell et al., 2009), הבניית ידע חדש ולא רק הפעלת אלגוריתמים ידועים מראש.

יש אפוא הסכמה רחבה על הצורך לשלב משימות מאתגרות במתמטיקה, אך אין הוראות לדרך הבחירה של המשימות ולהתאמתן לאוכלוסיות התלמידים.

תפיסות של המורים

אם המורים ידעו איך תלמידים תופסים את המושג 'אתגר', הם יוכלו להפוך את ההוראה שלהם למאתגרת יותר ולמשמעותית יותר. בעקבות הסיווג של שולמן (Shulman, 1986) של סוגי הידע של המורים, אנו רואים שהתפיסות של המורים כוללות תפיסות מתמטיות, תפיסות פדגוגיות ותפיסות שיש להם על תכנית הלימודים. הדרך שבה הם תופסים את האתגר המתמטי היא מרכיב אינטגרלי בידע המטה-מתמטי שלהם ובידע המתמטי שבו הם משתמשים בהוראה (Ball, Hill & Bass, 2005). התפיסות הפדגוגיות של המורים את האתגר המתמטי משקפות את מודעותם לתפקידו של האתגר המתמטי בהוראת המתמטיקה ובלמידתה ובמערכת היחסים בין הידע המתמטי, הכישורים והמיומנויות של התלמידים מצד אחד לבין רמת הקושי המתאימה של בעיה מתמטית מצד שני. חשוב שהמושג 'אתגר מתמטי' יהיה מושרש בפעילות, בידע ובאמונות שלהם. תפיסות אלו משפיעות על האופי ועל המבנה של המשימות המתמטיות.

את העמדות של המורים כלפי המושג 'אתגר המתמטי' חקרו לאחרונה אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007), וגוברמן ולייקין (Guberman & Leikin, 2013). בעבודות אלה נמצא שאצל המורים יש כיסוי כמעט מלא של כל הסוגים של בעיות מאתגרות אשר הוגדרו בספרות מקצועית (Barbeau & Taylor, 2009).

במחקרם של אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007), נבדקו עמדות המורים כלפי מושג 'השאלה המאתגרת'. במחקר נמצא כי המורים השתמשו בתוכן המתמטי של הקורסים שלמדו ואותגרו בעצמם. השימוש של המורים בתוכן של הקורסים הפדגוגיים בלט בדיון על הקשיים של התלמידים ועל התפיסות המוטעות שלהם.

המורים טענו כי כדי להציג לתלמידים משימות מתמטיות מאתגרות הם עצמם חייבים להרגיש בטוחים מבחינה מתמטית עם המשימות. המתאם החיובי שנמצא בין הצלחת המורים בפתרון הבעיות לבין הדרך שבה הם העריכו את האתגר המתמטי שהוצב בהן, מדגיש את חשיבותו של הידע המתמטי ושל מומחיות המורים בפתרון בעיות לאתגור מתמטי של התלמידים בכיתות.

במחקר זה התבקשו מורים לאפיין ולדרג בעיות מתמטיות (על סולם הנע בין 1 ל-12), אשר לדעתם אמורות לאתגר תלמידים בחטיבות הביניים. בנספח 3 להלן מוצג הדירוג הממוצע (כאשר ככל שהערך נמוך יותר, כך רמת האתגר גבוהה יותר) והאפיון של המשימות. אפשר לראות בממצאים כי המורים דירגו את השאלות האינטגרטיביות בדירוג הגבוה ביותר. הדירוגים הבאים היו (בסדר יורד): (1) בעיות הדורשות חשיבה לוגית; (2) בעיות שאפשר לפתור בדרכים אחדות; (3) בעיות חקר וגילוי; (4) בעיות לא סטנדרטיות; (5) בעיות שמזמנות הכללה מתמטית; (6) הוכחת טענות מתמטיות חדשות; (7) בעיות שדורשות בניות עזר; (8) מציאת טעויות בפתרון; (9) פרדוקסים; (10) נושאים שמחוץ לתכנית הלימודים; (11) בעיות ובהן פרמטרים.

הממצאים האלה חשובים, אך חשוב לבדוק גם את עמדות התלמידים כלפי המושג 'אתגר' כיוון שהנושא טרם נבדק באופן אמפירי. ייתכן שיימצאו הבדלים בין תפיסות המורים לתפיסות התלמידים ביחס למושג המשימה המתגרת.

בהסתמך על עבודות של צ'רלס ולסטר (Charles & Lester, 1982), לייקין (Leikin, 2004), שונפלד (Schoenfeld, 1985) ופוליה (Polya, 1973) אפשר לסכם ולומר כי משימה מאתגרת היא כזו המעוררת מוטיבציה להתמודד אתה; שאין לה פתרון מידי; שדורשת ניסוי; שיש כמה דרכים לפתרונה. עם זאת, לייקין (Leikin, 2004) ציינה כי אין לקריטריונים אלה אופי אוניברסלי: בעיה יכולה לאתגר תלמיד אחד ולא לעניין תלמיד אחר:

"Obviously, these criteria are relative and subjective with respect to a person's problem-solving expertise in a particular field, i.e. the task that is cognitively demanding for one person may be trivial (or vice versa) for another" (Leikin, 2004, p. 209).

משימות מתמטיות במחקר

בבחירת הבעיות למחקר הנוכחי הסתמכתי על ממצאי המחקר של אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007) תוך התאמת המשימות לתלמידים בכיתה ז' (שהיוו את המדגם במחקר זה). שש הבעיות המתמטיות שנבחרו למחקר (ראו נספח 2) הן מתחומים שמורים סברו שהם מאתגרים ביותר לפי הדירוג שצוין למעלה: (1), (2), (3), (4), (5) ו-(6). לחלק מהבעיות שנבחרו יש יותר מאפיון אחד. לדוגמה, שאלה מתמטית מס' 1 במחקר מאופיינת כך: (2), (4), (5), (11); ושאלה מס' 3 מאופיינת כך: (1), (3), (4), (6).

באופן כללי, הבעיות 1, 2 ו-4 נחשבו למשימות לא שגרתיות, אשר אינן נכללות בתכנית הלימודים, בעלות גוון חידתי ודורשות מיומנויות חשיבה מסדר גבוה. משימות כאלה יכולות להתאים לתלמידים הלומדים בכיתה ז'. הבעיות 3, 5 ו-6 היו שאלות שיש להן הלימה עם תכנית הלימודים והן דומות לאלה שבספרי הלימוד העדכניים. כל שש הבעיות היו חדשות לתלמידים.

השערות המחקר:

מטרת המחקר הייתה לבחון את תפיסות התלמידים כלפי אתגר וקושי בהקשר של גורמים אחדים העשויים להשפיע על תפיסתם. שני הגורמים שבחנו לעסוק בהם הם מידת המעורבות של התלמיד בפתרון הבעיות ומידת השגרתיות של הבעיה (שגרתית או לא). שיערנו כי תלמידים שייתקלו בבעיה הקשה להם יותר, יעריכו שהיא גם מאתגרת יותר. עם זה קיוונו שהתלמידים יבחינו בין שני הגורמים ולא יכרכו אותם זה בזה (כלומר קיוונו שלא לקבל מתאם קרוב ל-1 בין הערכת קושי הבעיה להערכת מידת האתגור שבה).

עוד שיערנו כי בעיות לא שגרתיות ייתפסו מאתגרות יותר וגם קשות יותר, וכי מידת המעורבות של התלמידים בבעיה אף היא תשפיע באותו הכיוון הן על תפיסת הקושי והן על תפיסת האתגר. כלומר ככל שהתלמידים יהיו מעורבים יותר בפתרון הבעיה באופן אקטיבי ועצמאי, כך היא גם תהיה להם קשה יותר וגם מאתגרת יותר.

מאחר שהיה סביר להניח שבעיות לא שגרתיות ייתפסו כקשות יותר ולכן גם מאתגרות יותר מבעיות לא שגרתיות, שיערנו כי יתקבלו אינטראקציות מובהקות בין מידת המעורבות ומידת השגרתיות של הבעיה, בהשפעתן על תפיסת הקושי והן על תפיסת האתגר.

2. שיטה

2.1 המדגם

במדגם השתתפו 73 תלמידים, 45 בנות ו-26 בנים (שני תלמידים לא ציינו את מינם) – משלוש כיתות ז' הלומדים בבתי-ספר דוברי ערבית בדרום הארץ. כל כיתה לומדת בבית-ספר אחר.

2.2 סהלך המחקר

המחקר התנהל בשלושה שלבים שנבדלו האחד מהשני במידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה. שלושת השלבים נערכו באותו יום.

לפני השלב הראשון של המחקר התבקשו התלמידים למלא שאלון עמדות כלפי לימודי המתמטיקה ולדווח על הציון שלהם בתעודה. שאלון זה (נספח 1) נועד לאפיין את משתתפי המחקר מבחינת הישגיהם בלימודי המתמטיקה והעמדות שלהם כלפי המקצוע.

לפני תחילת המניפולציה הניסויית הוסבר לתלמידים ש"בעיה מאתגרת" היא שאלה מעניינת אשר מעוררת רצון להתמודד איתה.

השלב הראשון של המשימה נמשך 15-20 דקות ובו ניתן לתלמידים שאלון שכלל שש בעיות מתמטיות (ראו נספח 2). התלמידים התבקשו לקרוא את הבעיות בלי לנסות לפתור אותן, לדרג את מידת הקושי של כל בעיה על-פי תפיסתם ולציין עד כמה היא מאתגרת אותם ("מידת האתגר"). הדירוג נעשה

בסולם של 4 דרגות: 1 פירושו "בעיה לא קשה" או "לא מאתגרת" ו-4 פירושו "בעיה קשה מאוד" או "מאתגרת מאוד". לאחר שהתלמידים סיימו למלא את השאלון הוא נלקח מהם. בשלב זה המעורבות של התלמידים בפתרון השאלות היה נמוך שהרי הם לא ניסו כלל לפתור אותן אלא רק קראו אותן.

בשלב השני קיבלו התלמידים שוב את אותו השאלון, ובמשך 45 דקות ניסו לפתור את הבעיות. לאחר מכן הם התבקשו לדרג שוב, על-פי תפיסתם, את מידת הקושי ואת מידת האתגר של אותן הבעיות. לאחר שהתלמידים השלימו את המשימה, נלקחו מהם השאלונים. בשלב זה התלמידים התמודדו באופן פעיל עם הבעיות, והמעורבות שלהם הייתה גבוהה.

בשלב השלישי הציגו המורים לתלמידים את פתרון הבעיות. דרך הפתרון הוצגה באותו אופן בכל אחת מהכיתות שהשתתפו במחקר. לאחר מכן חולק אותו שאלון לתלמידים בפעם השלישית, והם התבקשו לדרג שוב את מידת הקושי והאתגר של אותן הבעיות כפי שתפסו אותן הפעם. בשלב זה שבו הוצג הפתרון המודרך המעורבות האקטיבית של התלמידים בפעילות הייתה נמוכה מאשר בשלב השני.

2.3 סבנה המשימות

מתוך שש הבעיות שבשאלון שלוש משימות (משימות 3, 5, 6 – ראו נספח 2) היו "שגרתיות" במובן זה שהן עסקו בנושאים שנלמדו לפי תכנית הלימודים. לעומתן, שלוש האחרות היו "לא שגרתיות" (משימות 1, 2, 4 – ראו נספח 2) ועסקו בנושאים שאינם נכללים בתכנית הלימודים. לבעיות הלא שגרתיות היה גוון חידתי, וכדי להתמודד אתן נדרשה חשיבה לוגית והבנה מספרית.

3. תוצאות

3.1 ההישגים הבית-ספריים והעמדות כלפי לימודי המתמטיקה

58 תלמידים דיווחו על הציון שלהם במקצוע המתמטיקה בבית-הספר, והתקבל ממוצע של 80.60 עם סטיית תקן 22.78. כל התלמידים שהשתתפו במחקר מילאו שאלון עמדות (ראו נספח 1) על מקצוע המתמטיקה. בשאלון היו 9 פריטים, 3 מהם נוסחו הפוך משאר הפריטים. ממוצע התלמידים בשאלון היה 79.15 עם סטיית תקן 16.38. הן הציון של התלמידים במקצוע המתמטיקה והן הציון של התלמידים בשאלון העמדות התפלגו באופן א-סימטרי שלילי, וכך רוב התלמידים קיבלו ציונים גבוהים בשני המדדים (ראו לוח 1).

לוח 1: ממוצעים וסטיות תקן של הציונים הבית-ספריים שדווחו על-ידי התלמידים והעמדות שלהם כלפי לימודי המתמטיקה

Descriptive Statistics					
מספר התלמידים		הממוצע	סטיית התקן	הציון המינמלי	הציון המקסימלי
הציון במתמטיקה		58	22.78	.00	100.00
העמדות כלפי המתמטיקה		73	16.38	36.11	100.00

3.2 אתגר וקושי

תחילה נתאר את הנתונים שקיבלנו על כל אחת מן הבעיות לחד. לוח 2 מציג את מידת הקושי והאתגר שעליהן דיווחו התלמידים בכל אחת מן הבעיות. כמו כן מוצגים המתאמים בין מידת הקושי לאתגר שדווחו בכל משימה לפי שלב ההתערבות (קריאה בלבד, פתרון עצמאי, פתרון מודרך).

לוח 2: ממוצעים וסטיות תקן של רמות הקושי ושל רמות האתגר ברמות שונות של מעורבות במשימה (ממוצע/סטיות תקן) ומתאמים בין מידת הקושי למידת האתגר (לפי שאלה)

	מידת הקושי			מידת האתגר			מתאמים בין מידת הקושי למידת האתגר (r)		
	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך
שאלה 1	1.77 (0.89)	2.74 (1.09)	1.93 (1.07)	2.32 (1.17)	2.89 (1.13)	2.44 (1.16)	0.54**	0.61**	0.61**
שאלה 2	2.66 (0.92)	3.04 (1.03)	2.48 (1.02)	2.77 (1.01)	2.77 (1.17)	2.60 (1.05)	0.30**	0.66**	0.60**
שאלה 3	1.86 (0.96)	1.96 (0.99)	1.77 (0.89)	2.11 (1.13)	2.07 (1.03)	1.85 (1.05)	0.45**	0.38**	0.45**
שאלה 4	2.18 (1.02)	2.48 (1.19)	2.11 (1.16)	2.25 (1.09)	2.48 (1.24)	2.22 (1.15)	0.52**	0.66**	0.46**
שאלה 5	2.05 (1.04)	2.25 (1.18)	2.19 (1.07)	1.96 (0.99)	2.23 (1.17)	2.11 (0.98)	0.37**	0.46**	0.42**
שאלה 6	2.23 (1.05)	2.42 (1.20)	2.21 (1.15)	2.11 (1.17)	2.38 (1.14)	2.15 (1.05)	0.36**	0.54**	0.54**

** $P < 0.01$

N=73

הנתונים שבלוח 2 מראים את התוצאות האלה: שאלה מס' 1 (לא שגרתית) נחשבה לקלה ביותר בשלב הקריאה בלבד ולמאתגרת ביותר בשלב הפתרון העצמאי; שאלה מס' 2 (לא שגרתית) נחשבה לשאלה הקשה ביותר בכל שלושת השלבים של המחקר, ולמאתגרת ביותר בשלב הקריאה בלבד ובשלב הפתרון המודרך; שאלה מס' 3 (שגרתית) נחשבה לשאלה הקלה ביותר בכל שלושת השלבים וגם לשאלה המאתגרת פחות מכולן בשלב הפתרון העצמאי ובשלב הפתרון המודרך; השאלה המאתגרת פחות מכולן בשלב הקריאה בלבד הייתה שאלה מס' 5 (שגרתית).

אם כן, מתברר שגם במידת הקושי וגם במידת האתגר נמצא אותו דפוס: עלייה במעבר משלב הקריאה בלבד לשלב הפתרון העצמאי וירידה במעבר משלב הפתרון העצמאי לשלב הפתרון המודרך. לדוגמה, בדיווח על רמת הקושי בשאלה מס' 1 התקבלו הממוצעים האלה: 1.77, 2.74, 1.93. הממצא היחיד שחרג מהדפוס הנזכר לעיל היה בדיווח על מידת האתגר בשאלה מס' 3 (שאלה שגרתית): הממוצעים ירדו בה בעקביות: 2.11, 2.07, 1.85. יש להניח שתלמידים הצליחו לפתור את הבעיה וכי הפתרון המודרך הוריד את מידת האתגר.

העלייה של מידת הקושי במעבר משלב הקריאה בלבד לשלב הפתרון העצמאי הייתה גדולה יותר בבעיות הלא שגרתיות מאשר בבעיות השגרתיות, ונעה בין 0.30 ל-0.97, ואילו בבעיות שגרתיות טווח העלייה היה רק בין 0.1 ל-0.2. תמונה דומה נמצאה בדיווח על מידת הקושי במעבר משלב הפתרון העצמאי לשלב הפתרון המודרך: בזמן שהטווח בבעיות הלא שגרתיות היה בין 0.37 ל-0.81, הטווח בבעיות שגרתיות היה בין 0.06 ל-0.21.

כדי לבצע ניתוח סטטיסטי יצרנו את המשתנים האלה: מידת האתגר המדווחת ומידת הקושי המדווחת. לכל תלמיד חישבנו את הממוצע של דירוגי הקושי והאתגר בכל בעיה לחוד, ולאחר מכן חישבנו את הממוצע מעבר לשלוש הבעיות השגרתיות. את הממוצע הזה חישבנו גם לחוד בכל אחד משלושת השלבים בניסוי. באותה דרך חישבנו גם את הממוצעים של דירוגי הקושי והאתגר בבעיות הלא שגרתיות.

בלוחות 3 ו-4 מוצגים הממוצעים וסטיות התקן של משתנים אלו.

לוח 3: ממוצעים וסטיות תקן של רמות הקושי בבעיות השגרתיות ולא שגרתיות וברמות שונות של מעורבות עם המשימה (ממוצע/סטיות תקן) (N=73)

סך הכול (מעבר לשלבים)	פתרון מודרך	פתרון עצמאי	קריאה בלבד	
2.11 (0.59)	2.05 0.75	2.21 (0.80)	2.05 (0.68)	בעיות שגרתיות
2.38 (0.52)	2.18 (0.75)	2.75 (0.76)	2.21 (0.67)	בעיות לא שגרתיות
2.24 (0.51)	2.12 (0.66)	2.48 (0.67)	2.13 (0.57)	סך הכול (מעבר לכל הבעיות)

לוח 4: ממוצעים וסטיות תקן של רמות האתגר בבעיות השגרתיות והלא שגרתיות וברמות שונות של מעורבות עם המשימה (ממוצע/סטיות תקן) (N=73)

סך הכול (מעבר לשלבים)	פתרון מודרך	פתרון עצמאי	קריאה בלבד	
2.11 (0.55)	2.04 (0.69)	2.23 (0.80)	2.06 (0.79)	בעיות שגרתיות
2.53 (0.53)	2.42 (0.78)	2.71 (0.81)	2.45 (0.67)	בעיות לא שגרתיות
2.32 (0.44)	2.23 (0.62)	2.47 (0.65)	2.25 (0.57)	סך הכול (מעבר לכל הבעיות)

מהלוחות האלה עולים כמה ממצאים שנמצאים בהלימה עם מה ששיערנו. אפשר לראות כי הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות יותר ומאתגרות יותר מהבעיות השגרתיות. עוד בולט כי הערכות הקושי והאתגר היו גבוהות יותר בשלב הפתרון העצמאי, משהיו בשלבים האחרים. בשלב הזה מעורבות התלמידים בפתרון הייתה הגבוהה ביותר. נוסף על כך נראה כי הדפוסים שהתקבלו דומים זה לזה בבעיות השגרתיות ובבעיות הלא שגרתיות, גם ברמת הקושי וגם ברמת האתגר.

כדי לוודא שהתלמידים הבדילו בין "רמת הקושי" ל"רמת האתגר", בדקנו את המתאמים בין דירוגי רמות הקושי לדירוגי רמות האתגר. המתאמים אינם גבוהים יותר מהמצופה ונעים בין 0.5 ל-0.7.

לאחר מכן עשינו ניתוח רב-משתנים (repeated measures MANOVA) ובו המשתנים "שגרתיות המשימה" (שגרתית, לא שגרתית) ו"שלב הניסוי" (קריאה בלבד, פתרון עצמאי, פתרון מודרך) היו המשתנים הבלתי-תלויים. המשתנים התלויים היו אלה שיצרנו לדירוגי רמות הקושי והאתגר. התוצאות מוצגות בלוח 5.

לוח 5: ניתוח רב-משתנים לבדיקת ההשפעה של מוכרות המשימה ועיתוי ההערכה על דירוגי רמת הקושי והאתגר יחד

Multivariate Tests ^a								
Effect			Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.	Partial Eta Squared
Between Subjects	Intercept	Pillai's Trace	.969	1108.942 ^b	2.000	71.000	.000	.969
Within Subjects	time	Pillai's Trace	.310	7.748 ^b	4.000	69.000	.000	.310
	novelty	Pillai's Trace	.358	19.771 ^b	2.000	71.000	.000	.358
	time * novelty	Pillai's Trace	.218	4.819 ^b	4.000	69.000	.002	.218

a. Design: Intercept ; Within Subjects Design: time + novelty + time * novelty

b. Exact statistic

כפי שאפשר לראות, בניתוח רב-משתנים נמצאו אפקטים עיקריים מובהקים ואינטראקציה מובהקת.

בניתוחי השונות שבצענו לאחר מכן נמצאו הבדלים בדירוגי הקושי בין הבעיות השגרתיות לבעיות הלא שגרתיות: הערכת הקושי הייתה גבוהה יותר בבעיות הלא שגרתיות. אותו הדפוס התקבל גם בדירוג האתגר – האתגר דורג גבוה יותר בבעיות הלא שגרתיות (קושי: $F_{(1, 72)} = 26.39, p < 0.01$;

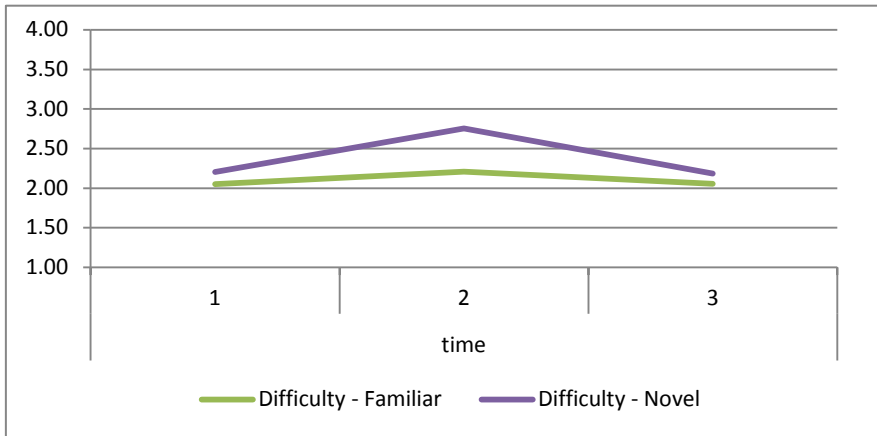
אתגר: $F_{(1, 72)} = 34.49, p < 0.01$).

גם שלב הניסוי (מידת המעורבות) השפיע על דירוגי הקושי והאתגר של הבעיות:

קושי: $F_{(2, 144)} = 14.23, p < 0.01$; אתגר: $F_{(2, 144)} = 4.72, p < 0.05$. התלמידים דירגו את רמת הקושי והאתגר כגבוהים באופן משמעותי בשלב הניסוי השני, שבו הם התבקשו לפתור את המשימה בכוחות עצמם – לעומת השלב הראשון, שבו הם רק קראו את המשימה ($p < 0.01$ לכל השוואה) או לעומת שלב השלישי, שבו ההערכה נעשתה אחרי שהוצג להם הפתרון על-ידי המורה ($n.s$ לכל השוואה).

האינטראקציה בין שגרתיות הבעיה לשלב הניסוי נמצאה מובהקת רק כשהמשתנה התלוי היה רמת הקושי, קושי: $F_{(2, 144)} = 7.42, p < 0.01$; אתגר: $F_{(2, 144)} < 1, n.s$. השאלות נחשבו קשות יותר בשלב הניסוי השני, שבו המעורבות של התלמידים בפתרון הייתה הגבוהה ביותר ($p < 0.05$) ולא היה הבדל בין שלב 1 לשלב 3 שבהם מידת המעורבות שלהם הייתה נמוכה יותר ($n.s$). דפוס זה מתבטא באופן בולט יותר בבעיות הלא שגרתיות (ראו תרשים 1). כלומר, אם הבעיה אינה שגרתית ובעלת גוון חידתי, היא קשה ביותר כאשר התלמידים מתבקשים להתמודד עמה בעצמם.

תרשים 1: דירוג רמות הקושי בשלושת שלבי הניסוי
(שנבדלו ברמת המעורבות בפתרון הבעיה) לפי שגרתיות הבעיה



סיכום

מחקר זה בחן בפעם הראשונה את נקודת מבטם של תלמידים בסוגיית האתגר והקושי הנתפס של בעיות מתמטיות הנבדלות זו מזו במידת השגרתיות שלהן. בדרך כלל נמצאו ממצאי המחקר בהלימה עם השערותינו.

מצאנו כי בעיות מתמטיות לא שגרתיות, שיש להן אופי חידתי, נתפסו קשות יותר וגם מאתגרות יותר בעיני התלמידים מבעיות שגרתיות. עוד ראינו כי כאשר מידת המעורבות של התלמידים במשימה רבה ביותר (בשלב השני שבו הפתרון היה עצמאי), הערכת הקושי והאתגר היו גבוהים יותר יחסית למצבים שבהם רמת המעורבות הייתה נמוכה יותר (קריאה בלבד או פתרון מודרך על-ידי המורה).

נוסף על כך, ראינו כי רק בהקשר של תפיסת הקושי – הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות מהבעיות השגרתיות בשלב הפתרון העצמאי. לעומת זאת, בשני שלבי הניסוי האחרים לא היה הבדל מובהק בין תפיסת הקושי של הבעיות השגרתיות ללא שגרתיות. ממצא זה לא התקבל בעבור משתנה האתגר, ויש לשוב ולבחון זאת בעתיד.

המחקר מרמז על כך (ויש להעמיק בכך במחקרים נוספים) ששאלות לא שגרתיות בעלות גוון חידתי עשויות להעלות את עניין התלמידים בלימודי המתמטיקה. יש הלימה של הממצא הזה עם הטענות של קוני (Cooney, 2001) שלפיהן אי אפשר לפתח אצל התלמידים עניין במתמטיקה רק בעזרת משימות שגרתיות. במובן זה תוצאות המחקר מרמזות על החשיבות שבשילוב משימות לא שגרתיות בשיעורי המתמטיקה בבית-הספר ובהכשרת פרחי הוראה, וזה בניגוד למה שמעדיפים מורים למתמטיקה בשדה (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

עם זאת יש לזכור כי המחקר נבדק בקרב אוכלוסייה ממוקדת (דוברי ערבית בדרום הארץ) ובמדגם קטן (שלוש כיתות בלבד). במובן זה המחקר הזה גישושי בלבד, והממצאים ההולמים את השערותינו מחזקים את הצורך לבחון את הדברים בקרב אוכלוסייה רחבה יותר ובמדגם גדול בהרבה.

רשימת מקורות

- Applebaum, M., & Leikin, R. (2007). Teachers' conceptions of mathematical challenge in school mathematics. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-16). Seoul: PME.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.
- Barbeau, E., & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study*. Boston, MA: Springer-Verlag.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.
- Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 33-56.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer Press.
- Kazemi, E. (1998). Discourse that promotes conceptual understanding. *Teaching Children Mathematics*, 4(7), 410-414.
- Krainer, K. (2001). Teachers' growth is more than the growth of individual teachers: The case of Gisela. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 271-293). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216). Bergen: Bergen University College. Retrieved from http://www.emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR243_Leikin.pdf
- Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 349-371.

- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Powell, A. B., Borge, I. C., Fioriti, G. I., Kondratieva, M., Koublanova, E., & Sukthankar, N. (2009). Challenging tasks and mathematics learning. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom* (pp. 133-170). Boston, MA: Springer.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowing growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simon, A. M. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 157-189.
- Stillman, G., Cheung, K., Mason, R., Sheffield, L., Shiraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom* (pp. 243-283). Boston, MA: מארק



מארק אפלבאום, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע

ד"ר מארק אפלבאום שימש כראש התמחות מתמטיקה במכללת קיי, וכראש הלימודים של כל ההתמחויות במכללה. מתמחה בתחומים הבאים: פיתוח חשיבה מתמטית, הוראת המתמטיקה בעזרת בעיות חקר וגילוי, איתגור תלמידים בעלי יכולות גבוהות במתמטיקה, שילוב משחקים בהוראת המתמטיקה. ד"ר אפלבאום הוציא לאור מספר ספרים ומאמרים רבים.

נספח 1: שאלון לתלמידים

א. פרטים אישיים

השם שלי: _____

אני בן / בת _____

לומד/ת בכיתה _____

הציון שלי במתמטיקה: _____

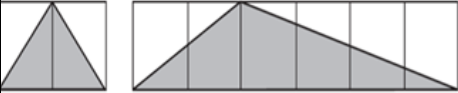
ב. באיזו מידה אתה מסכים עם כל אחד מן המשפטים האלה ?

מספר	היגדים	מסכים מאוד	מסכים	לא כל כך מסכים	בכלל לא מסכים
1.	אני מצליח במקצוע המתמטיקה				
2.	אני מתעניין במקצוע המתמטיקה				
3.	אני סובל מחרדת מבחנים במתמטיקה				
4.	אני אוהב לפתור תרגילים במתמטיקה				
5.	אני מרגיש הנאה בשיעורי המתמטיקה				
6.	אני פוחד ממקצוע המתמטיקה				
7.	אני תמיד מכין את שיעורי הבית במתמטיקה				
8.	אני מתקשה במקצוע המתמטיקה				
9.	אני פעיל בשיעורי המתמטיקה				

נספח 2: שאלון לתלמידים

סמנו ב-X

רמת הקושי				רמת האתגור				שאלות												
קשה מאוד	קשה	די קשה	לא קשה	מאתגר מאוד	מאתגר	מאתגר מעט	לא מאתגר													
								דרך 9 נקודות שלפניכם העבירו 4 קטעים בלבד. יש לעשות זאת בלי להרים את עפרונכם.												
								ילדים רצו לעבור גשר כאשר בו זמנית על הגשר היו יכולים ללכת לא יותר מ-2 ילדים. היה חשוך מאוד והיה להם פנס אחד בלבד (אין לנוע בלי פנס). הילדים היו בכושר גופני שונה ויכלו לעבור את הגשר בזמנים שונים: ילד A ב-1 דקה, ילד B ב-2 דקות, ילד C ב-5 דקות וילד D ב-10 דקות. יש להעביר את כל הילדים לצד שני של הגשר ב-17 דקות בלבד. כיצד תעשו זאת?												
								1 2 3 תתבוננו בסדרה שלפניכם והשלימו את הטבלה: מספר הנקודות בצורה שמופיעה במקום: <table><tr><th>הראשון</th><th>השני</th><th>השלישי</th><th>הרביעי</th><th>ה-50</th><th>ה-N</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	הראשון	השני	השלישי	הרביעי	ה-50	ה-N						
הראשון	השני	השלישי	הרביעי	ה-50	ה-N															
								איך אפשר לטגן 3 חתיכות "שניצל" בדקה וחצי כך שנפח המחבת 2 חתיכות לכל היותר וכל צד צריך חצי דקה לטיגון?												

								בחנות מסוימת יש ארבעה סוגים של קופסאות קפה: 2 ק"ג ב-78 ₪. 1 ק"ג ב-38 ₪. 500 גר' ב-21 ₪. 250 גר' ב-10 ₪. מהו המחיר הזול ביותר בקניית $2\frac{1}{2}$ ק"ג קפה?
								לפניך 2 משולשים:  מצא פי כמה גדול שטח המשולש האחד מהאחר.

נספח 3

הממוצע	אפיון של משימה מאתגרת במתמטיקה (של המורים) N=41
6	בעיות אינטגרטיביות
6.15	בעיות הדורשות חשיבה לוגית
6.44	פתרון בעיות בדרכים אחדות
6.59	בעיות חקר וגילוי
7.66	בעיות לא שגרתיות
8.20	בעיות הדורשות הכללה
8.29	הוכחת טענות חדשות
9.90	בעיות הדורשות בניות עזר
10.15	מציאת טעויות
10.29	פרדוקסים
10.56	בעיות הדורשות ידע שאינו נכלל בתכנית הלימודים
10.78	בעיות ובהן פרמטרים

נספח 4

מתאמים בין רמות הקושי לרמות האתגור

		Total_CH1	Total_CH2	Total_CH3	Total_DF1	Total_DF2	Total_DF3
Total_CH1	Pearson Correlation	1	.396	.248	.458	.216	.188
	Sig. (2-tailed)		.001	.035	.000	.066	.111
	N	73	73	73	73	73	73
Total_CH2	Pearson Correlation	.396	1	.210	.320	.677	.220
	Sig. (2-tailed)	.001		.075	.006	.000	.061
	N	73	73	73	73	73	73
Total_CH3	Pearson Correlation	.248	.210	1	.081	.086	.566
	Sig. (2-tailed)	.035	.075		.496	.468	.000
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF1	Pearson Correlation	.458	.320	.081	1	.592	.412
	Sig. (2-tailed)	.000	.006	.496		.000	.000
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF2	Pearson Correlation	.216	.677	.086	.592	1	.382
	Sig. (2-tailed)	.066	.000	.468	.000		.001
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF3	Pearson Correlation	.188	.220	.566	.412	.382	1
	Sig. (2-tailed)	.111	.061	.000	.000	.001	
	N	73	73	73	73	73	73

מי לפני מי? רכישת עקרונות רצף קבוצות בקרב ילדי הגן

ניצה מרק-גזון, מכללת לוינסקי

תקציר

מספרים טבעיים מהווים את אחד הנושאים המרכזיים בתכנית הלימודים בגן ובבית-הספר היסודי. המספר הטבעי משמש כמספר מונה ובכך מאפשר להגדיר גודלה של קבוצה וכמספר סודר, המאפשר להגדיר את מקומם היחסי של אובייקטים שונים, כמו גם של מספרים. חוקרים שונים התמודדו עם הניסיון להבין את תהליך התפתחות הידע של ילדים על ההיבטים השונים של המספר ועל הקשר שביניהם. מטרת המחקר הנוכחי הייתה לענות על השאלה: מה יודעים ילדים בגן, המזהים גודל של קבוצות – "ידעני העיקרון הקרדינלי" על יחס הסדר של קבוצות? המחקר כלל 56 ילדים בגילאים 4-6, אשר נבחנו במבדק, שנבנה לצורך מחקר זה. ידע הילדים נבדק ברמת זיהוי וברמת הפקה. הממצאים שהתקבלו מצביעים על כך שתהליך התפתחות הידע של ילדים, על יחס הסדר של קבוצות, מתפתח בהדרגה: תחילה לומדים ילדים לזהות גודל קבוצות. לאחר מכן, ילדים יודעים מי הקבוצה הגדולה/הקטנה מבין שתי קבוצות עוקבות ויודעים לסדר קבוצות ברצף על-פי גודלן. בהמשך, ילדים לומדים להשוות גודל של שתי קבוצות עוקבות על-ידי הוספה והורדת כמות של אחד ובהמשך לומדים כי ההפרש בין גודל קבוצות עוקבות הוא אחד. כמו כן, נמצא שילדים תחילה מזהים עקרונות אלה ולאחר מכן מבטאים ומפיקים את הידע בעצמם. בנוסף, הממצאים שהתקבלו מצביעים על כך שרכישת העיקרון הקרדינלי, המבטאת הבנה של המספר הטבעי כמגדיר גודל קבוצה, מתפתחת תחילה, אך לא כוללת באופן מבני הבנה של עקרונות יחס הסדר של הקבוצות. ידע זה מתפתח מאוחר יותר בהדרגה במהלך שנות הגן, אך אינו מסתיים בו. לממצאים אלה השלכות על בניית תכניות לימודים בנושאים אלה בגן כמו גם השלכות על ההכשרה וההדרכה של העוסקים בחינוך מתמטי בגן ובמסגרות חינוך מיוחד.

מילות מפתח: עקרון קרדינלי; היבט כמותי של המספר; היבט סידורי של המספר; מטלת "תן לי"; מטלת "אמור כמה יש".

חבוא

במסגרת לימודי המתמטיקה בגן ובבית-הספר היסודי תלמידים לומדים על קבוצת מספרים המכונה מספרים טבעיים. המספרים הטבעיים הנם מספרים שלמים חיוביים (1, 2, 3 וכדומה) שאליהם מצטרף גם המספר אפס. מספרים אלה משמשים למנייה ולסידור (קופרמן, 2011). השימוש במספר הטבעי לצורכי מנייה מאפשר תיאור של כמות נתונה, הגדרה של גודל קבוצה ועונה, באמצעות שמות המספר המונה, על השאלה כמה אובייקטים יש בקבוצה (לדוגמה, חמש סוכריות בקופסה). במטרה לתאר סדר, המספר מספק מידע סידורי, מקודד את מקומו היחסי של האובייקט בקבוצה סדורה של אובייקטים ועונה על השאלה "מי" או "איזה" (לדוגמה, הילד השלישי בשורה). ברצף המספרים כל מספר מציין על-ידי מונח אחד ואחד בלבד, איזו שהיא התקדמות (לדוגמה, מספר 4 לפני מספר 5 ומספר 5 לפני מספר 6). את רצף המספרים אפשר לתאר באמצעות המספרים הסודרים, שהם מספרים שנועדו לציין מיקום של איבר בסדרה: ראשון, שני, שלישי וכן הלאה. בעיקרון, מידע סידורי אינו מוגבל לסדרת המספרים והוא משותף לסדרות לא מספריות, כגון חודשי השנה או אותיות האלף-בית, אלא שבסדרות מסוג זה יכולה להיות הפרדה בין כמות לסדר (כך לדוגמה בגימטריה אין חשיבות למקום כתיבת האות במילה אלא לערכה המספרי). לעומת זאת, בהקשר של המספרים הטבעיים משמעויות אלה מקושרות אחת בשנייה: ככל שהכמות שאליה מתייחס המספר גדלה, מיקומו ברצף המספרים רחוק יותר. כך מתקבל רצף מספרים, המאופיין בהפרש קבוע של אחד בין המספרים העוקבים (Ben, 2003). מבחינה מתמטית, האריתמטיקה נשענת על המשמעות הסודרת והמשמעות המונה של המספר, והמספר הסודר יכול לשמש כמגדיר של המספר המונה ולהפך. לכן, למרות ששניהם הכרחיים לאריתמטיקה אין שום הסבר לוגי מבוסס להעדפה של אחת המשמעויות על השנייה (ראסל, 1903, בתוך Brainerd, 1974).

אולם, מנקודת מבט התפתחותית על תהליכי חשיבה והבנה מספרית יש לבחון כיצד נרכש ומתפתח הידע על המספר המונה ועל המספר הסודר. האם תובנות על היבטים אלה של המספר מתפתחות ונרכשות בו זמנית או שהאחת מקדימה את השנייה? האם היכולת להכיר בגודל של קבוצה כוללת, באופן מבני, גם הבנה של יחס הסדר של גודל קבוצות. כלומר האם היכולת לציין גודלה של קבוצה והיכולת לציין כי שתי קבוצות (או יותר) שונות בגודלן מעידה, בהכרח, על קיומה של ההבנה שבקבוצה אחת יש יותר עצמים מאשר בקבוצה האחרת, על יחס סדר הגודל בין קבוצות ועל החוקיות המאפיינת את יחס הסדר (זאת בקשר של החוקיות המאפיינת את סדרת המספרים הטבעיים). במחקר הנוכחי נעסוק בשאלות אלה.

תובנה על גודל קבוצות ומספרים - כיצד היא מתפתחת?

מחקרים שונים שהתבצעו בעשורים האחרונים מצביעים על כך שלילודים, בדומה לבעלי חיים אחרים, קיים כושר מולד, שאינו נשען על יכולות שפה, לעיבוד כמויות וזיהוי סדר (Butterworth, 1999, Henik et al., 2012; Dehaene et al., 2004; 2000). נמצא כי ילודים בני מספר חודשים מזהים ומבחינים בגדלים שונים של קבוצות, באופן אוטומטי, זאת כאשר ההבדל בין הקבוצות הוא לפחות ביחס של 1:2. כך לדוגמה תינוקות מצליחים להבחין בין כמות של 4 עצמים לבין כמות של 8 עצמים

אך לא בין כמות של 4 עצמים ובין 6 עצמים (Izard et al., 2009; Brannon, 2002). כמו כן, תינוקות מזהים שינויים מסוג של הוספה והפחתה של כמויות על אוסף עצמים נתון (Wynn, 1990, 1992). במהלך תקופת הילדות, ידע זה מתרחב, תוך הישענות על יכולות שפה, באופן שנוצר קשר בין גודל קבוצות ליחס סדר של גודל קבוצות ומספרים. בין גיל שנתיים לשלוש שנים ילדים לומדים שמות של המספר המונה (אחד, שניים, שלוש וכדומה), רצפים שלהם (Fuson, 1988, 1992) ובהמשך רוכשים ידע על שמות המספר הסודר (ראשון, שני, שלישי וכדומה) (Miller et al., 2000).

בעקבות התנסויות במנייה, ילדים מגלים עקרונות שונים, העומדים בבסיס פעולת המנייה. הילדים חושפים את עקרון הסדר הקבוע של שמות המספרים, את עקרון החד-ערכיות בין שם המספר לכמות העצמים הנמנים, את העדר החשיבות של סדר מניית העצמים ואת העיקרון הקרדינלי. כלומר, הגילוי כי לקבוצת האיברים שמונים יש שם כולל וכי שם המספר האחרון הנאמר במניית האיברים הוא השם הכולל והוא מייצג את גודל הקבוצה (Gelman & Gallistel, 1978). גלמן וגלסטל (Gelman & Gallistel, 1978) טוענים כי עקרונות אלה קיימים אצל ילדים באופן אינטואיטיבי מובנה, וכי השימוש בהם מוביל להבנת הקשר שבין שמות המספרים וערכם הכמותי. לטענתם, ביטוי לתובנה זו אפשר למצוא בתשובה לשאלה: "כמה יש" (The how many task), הנשאלת בתום פעולת המנייה (לדוגמה, הילד מונה שורה של קוביות והבוחן שואל "כמה קוביות יש בשורה?"). אופן התשובה לשאלה זו משקף, לדעתם, את התפתחותה או היעדר התפתחותה של התובנה על העיקרון הקרדינלי. ילדים שלא הגיעו לתובנה זו לא יקשרו בין שם המספר האחרון ובין הגודל הכולל של קבוצה וימנו שוב את האיברים שבאוסף, ואילו ילדים, אשר רכשו את העיקרון הקרדינלי, יצינו את גודל הקבוצה (Gelman, 1993). לעומתם, יש חוקרים (Briars & Siegler, 1984; Condry & Spelke, 2008; Kamawar et al., 2010; Sarnecka & Carey, 2008; Wynn, 1990) העיקרון הקרדינלי נבנית בהדרגה לאורך הילדות וכי אפשר למדוד ולהעריך תהליך זה באמצעות משימה מהסוג של "תן לי" (The Give-N task) (לדוגמה, הבוחן מבקש מהילד "תן לבובה 2 כדורים"). בעקבות מחקרים שהתבססו על משימה זו, נמצא כי תהליך רכישת העיקרון הקרדינלי מתרחש בהדרגה, מהרמה שבה ילדים אינם מבחינים כלל בין כמויות וכאשר מתבקשים לתת כל כמות הם נותנים חופן של עצמים. ילדים הנמצאים ברמה זו מכונים "ידעני קדם-מספר" (pre-number-knower). בהמשך יימצאו ילדים, אשר טרם רכשו את המספר הקרדינלי, אך נמצאים בתהליך רכישתו. אלה מכונים "ידעני תת-קבוצות" (subsets knowers). כאן נמצא לדוגמה, את "ידעני האחד" (one-knower level), כאלה שייתנו חפץ אחד כאשר יתבקשו לתת "אחד", אך ייתנו יותר משני חפצים כאשר יתבקשו לתת "שניים". כך בהדרגה יתפתחו "ידעני השניים", "ידעני השלוש" ו"ידעני הארבע". בסופו של תהליך, מהכמות "חמש", מתרחש שינוי איכותי בהבנה, במובן שהילד מכיל את הרעיון של המספר הקרדינלי ומסוגל להתאים כמות לכל מספר המבוקש. ילדים הנמצאים בשלב זה מכונים ידעני "העיקרון הקרדינלי" (Cardinal-Principle-Knower, CP-Knower) (Hurewitz et al., 2006, Le Corre et al., 2006, Le Corre & Carey, 2007; Lipton & Spelke, 2006).

קונדרי וספלך (Condry & Spelke, 2008), מצאו כי רק ילדים, אשר הגיעו לשלב של הבנת העיקרון הקרדינלי יודעים כי הוספה של עצם לאוסף, פירושה גם התקדמות ברשימת שמות המספרים וכי הורדה של עצם מהקבוצה, פירושה נסיגה ברשימת שמות המספרים. סרנקה, קרוטי וקרי (Sarnecka, Cerutti & Carey, 2005) מצאו כי חלק מהילדים, אשר הגיעו להבנת המספר הקרדינלי הבינו גם את הרעיון של התקדמות בסדר המספרים. למיטב הידע טרם נערך מחקר, אשר בדק את הקשר שבין הבנת העיקרון הקרדינלי והבנת יחס הסדר של גודל קבוצות. בנושא זה עניינו של המחקר הנוכחי.

כיצד מתארנן הידע על יחס הסדר של גודל קבוצות?

המחקר והידע על היבטים קוגניטיביים וההתפתחותיים, הקשורים בידע על יחס סדר של גודל קבוצות מצומצם. מבחינה מבנית, קיימת טענה כי במח האנושי קיים אזור ייחודי לעיבוד מידע הקשור ברצפים של קבוצות ומספרים (Turconi & Seron, 2002; Turconi, et al., 2006) מבחינה התפתחותית, מחקרים בילודים מצביעים על כך שהיכולת להבחין בסדר של קבוצות מופיעה בתקופה שבין גיל של שבעה חודשים לאחד עשר חודשים. זאת במובן של יכולת הבחנה של ילודים בין גדלים שונים של קבוצות הנתונות ברצף (Picozzi et al., 2010; Suanda, Tompson & Brannon, 2008). בשלב מתקדם יותר מתפתחת תפיסה פנימית של סדר, הקשורה בהתפתחותם של יכולת ההבחנה, כישורים לשוניים ויכולת הדמיה. באופן כללי, הרגישות לסדר נשענת על ניסיון תפיסתי של "סדר נראה וגלוי לעין". כלומר, בעקבות התנסות יום יומית, קונקרטית של יחסים טרנזיטיביים א-סימטריים, כגון מצבים של גבוה מ... ארוך מ... וכדומה. באופן ספציפי, ההבנה לגבי סדר של קבוצות מתפתחת בעקבות טרנספורמציות שמתרחשות על כמויות בסביבתם של הילדים, כגון במצבים של הוספה או הפחתה של כמויות. בעקבות התנסויות כאלה ילדים מפתחים הערכה ותובנה לגבי ההשלכות של השינויים הללו על גודל הכמות (הוספה יותר/הפחתה פחות). תובנות אלה אינן תלויות בשימוש בשפה, בשליטה בסמלי המספרים או בידיעת המנייה (Cooper, 1984; Dehaene & Changeux, 1993; Brannon, 2002; Colome & Noel, 2012). על-פי פיאז'ה (Piaget, 1965), הבנה של סדר המספרים מתאפשרת הודות להתפתחותה של יכולת הסדירה והחשיבה הטרנזיטיבית. יכולות אלה מתפתחות, כאשר ילדים נמצאים בשלב האופרציות הקונקרטיות (גיל 7-12). בשלב זה ילדים מסוגלים לסדר אובייקטים לפי סדר מסוים, לדוגמה כאשר ילדים מתבקשים לסדר מספר מקלות באורכים שונים מהקטן לגדול. בעוד שילדים בשלב האופרציות הקונקרטיות מסוגלים לשלוף את המקל הקצר ביותר ואז את הקצר ביותר מבין הנותרים וכן הלאה, ילדים בשלב הקדם-אופרציונלי אינם מסוגלים לבצע משימה זו. על-פי פיאז'ה (Piaget, 1965), יכולת הסדירה מאפשרת גם חשיבה טרנזיטיבית, כלומר יכולת לזהות יחס בין שני אובייקטים לפי היחס הקיים בין כל אחד מהם לבין אובייקט שלישי. לדוגמה, אם 5 קטן מ-6 וגם 6 קטן מ-7 אז מכאן ש-5 קטן מ-7. בעוד שבשלב הקדם-אופרציונלי ילדים מנסים להתאים סדר לערך מספרי, אך לא מסוגלים לחשוב על שניהם בו זמנית, הרי שבשלב האופרציות הקונקרטיות מתקיימת התאמה והפיכות בין סדירה ומנייה וילדים מבינים את הקשר שבין הערך המספרי והסדר. מושג המספר, על-פי פיאז'ה (Piaget, 1965), נבנה על בסיס סנתזה בין שני סוגים של

יחסים מנטליים: הכללה היררכית וסדר. במסגרת המחקר הנוכחי, נעשה ניסיון לבחון את תהליך התפתחות של יחסים אלה בתקופה הקדם-אופרציונלית – בגן.

על-פי טול (Tall, 2001), כדי להבין את הרעיון של סדר המספרים, באופן פורמלי, יש להכיר מספר עקרונות: (1) יש להתחיל לספור מהמספר 1 – שהוא אינו מספר עוקב; (2) לכל מספר צריך להיות "המספר הבא" – מספר עוקב; (3) ההתקדמות באחד יוצרת את קבוצת המספרים הטבעיים – הפרש של 1 בין מספרים עוקבים; (4) אפשר להגיע לכל המספרים מנקודת ההתחלה; (5) ישנו יחס סדר, שבו אפשר להשוות שני מספרים טבעיים ולקבוע מי מהם גדול יותר.

במחקר הנוכחי נבחן ידע של ילדים בגן על עקרונות אלה.

המידע המוצג כאן מצביע על קשר שבין התפתחות הידע וההבנה של גודל קבוצה ובין התפתחות הידע על יחס סדר של גודל קבוצות. אך מעט ידוע על האופן שבו מתפתח הידע על יחס סדר זה, כבסיס להבנת סדר המספרים ועל הקשר שבין התפתחות הידע על גודל קבוצות ובין הידע על יחס הסדר של גודל קבוצות. במחקר הנוכחי נעשה ניסיון להרחיב את יריעת הידע בנושאים אלה.

בחינת הידע הנדרש התבצעה בקרב ילדים בגן, בשתי קבוצות גיל: צעירים ובוגרים, בהקשר של ארבעה נושאים הקשורים ביחס הסדר של גודל קבוצות: (1) השוואה בין קבוצות על-פי גודל; (2) סידור קבוצות על-פי גודל, בסדר עולה; (3) יצירת שוויון בין שתי קבוצות עוקבות; (4) הוספה והורדה של אחד; (5) מציאת הפרש בין קבוצות עוקבות. נושאים אלה נבדקו ברמת זיהוי וברמת הפקה. המחקר בחן את השפעתם של שלושה גורמים על רמת הביצוע: גיל, סוג משימה וסוג מטלה.¹ ההשערה לגבי הגיל טענה שרמת הביצוע של הבוגרים תהיה גבוהה יותר מרמת הביצוע של הצעירים. ההשערות לגבי סוג המשימה וסוג המטלה טענו שרמת הביצוע הגבוהה ביותר תהיה במשימה 1 והנמוכה ביותר תהיה במשימה 5 ושמטלות זיהוי קלות ממטלות הפקה.

שיטה

נבדקים

במחקר השתתפו בסך הכול 56 נבדקים משתי קבוצות גיל: צעירים ובוגרים. קבוצת הצעירים – עד גיל חמש, מנתה 27 נבדקים (גיל ממוצע 47.2 חודשים וסטיית תקן 2.5) וקבוצת הבוגרים – עד גיל שש, מנתה 29 נבדקים (גיל ממוצע 59.7 חודשים וסטיית התקן 2.2). הנבדקים היו משלושה גנים עירוניים, שנדגמו באופן אקראי, ממרכז הארץ, מהחינוך הרגיל מהזרם הממלכתי. התלמידים דוברי עברית ברמת שפת אם, משכבה סוציו-אקונומית בינונית. בגנים אלה היו עוד חמישה ילדים, אשר

1. לצורך הבחנה בין בדיקת ידע **בנושאים השונים** לבין בדיקת ידע **ברמות הביצוע** השונות (זיהוי לעומת הפקה), נעשה במאמר שימוש בשני מונחים: **משימות** – מתייחסות לבדיקת ידע בנושאים השונים; **מטלות** – מתייחסות לבדיקת ידע ברמות הביצוע השונות.

הוצאו מן המדגם מאחר והם ילדים שנשארו שנה נוספת בגן והיו מעל טווח הגילאים שנקבע במחקר. שלושה ילדים נוספים הוצאו מן המדגם מאחר והוגדרו כילדי החינוך המיוחד.

כלי המחקר

כלי המחקר מורכב משלושה חלקים:

חלק א' – משימות קדם: מטרתו לבדוק ידע נדרש, כתנאי לביצוע המטלות המרכזיות של המבדק. חלק זה כלל שלש משימות: ידע על ספירה עד 10, ידע לבצע התאמה חד-חד-ערכית בין כמות עצמים ובין שמות המספרים עד לכמות של 7 עצמים, לפחות והכרת מושגי גודל, כמות ומרחב. המשימות נבדקו ברמת הפקה.

חלק ב' – העיקרון הקרדינלי: מטרתו לבדוק האם הילדים רכשו את העיקרון הקרדינלי. בדיקת ידע זה נעשתה באמצעות שתי משימות: משימת ה"אמור כמה יש" (Gelman & Gallistel, 1978), משימת ה"תן לי" (Sarnecka & Carey, 2008). המשימות כפי שהן מופיעות אצל חוקרים אלה התבצעו ברמת הפקה בלבד ואילו במחקר זה הן נבחנו ברמת זיהוי וברמת הפקה.

חלק ג' – מבדק ידע על סדר קבוצות ויחס הגודל ביניהן. המשימות במבדק זה נבנו במיוחד לצורך המחקר, ברוח העקרונות שציין טול (Tall, 2001) והמשימות שפיתחו סרנקה וקארי (Sarnecka & Carey, 2008), בהקשר של בדיקת ידע על עקרונות סדר מספרים. כתשתית להבנת עקרונות סדר המספרים כללו המשימות במבדק בדיקת ידע בארבע נושאים רלוונטיים להבנת יחס סדר של גודל קבוצות: (1) השוואה בין קבוצות על-פי גודל; (2) סידור קבוצות על-פי גודל, בסדר עולה; (3) יצירת שוויון בין שתי קבוצות עוקבות; (4) הוספה והורדה של אחד; (5) מציאת הפרש בין קבוצות עוקבות. משימות אלה נבדקו ברמת זיהוי וברמת הפקה. במשימות ברמות זיהוי התבקשו הנבדקים להחליט האם התשובה שהוצגה בפניהם מתאימה או לא מתאימה, ואילו במשימות ברמת הפקה התבקשו הנבדקים לציין (להפיק) בעצמם את התשובה. ראו טבלה 1.

ההבחנה בין רמות הידע, זיהוי לעומת הפקה, במשימות השונות, נבדקה באמצעות הערכה בין שופטים המוגדרים כמומחים בתחום הנחקר. שני מרצים במכללה להכשרת מורים, המלמדים נושאים שונים בהוראת המתמטיקה בגיל הרך ובית-הספר היסודי, התבקשו לציין לגבי כל משימה, האם היא בודקת ידע של ילדים ברמת זיהוי או ברמת הפקה. ההסכמה בין השופטים הייתה ברמה של 96%.

טבלה 1: פירוט משימות המבדק ומטרתם

נושאי המבדק	המשימה	המטלה	מטרה
חלק א: משימות לבדיקת ידע קודם נדרש	ספירה לפנים	הפקה	לבדוק זכירה של רצף המספרים.
	התאמה חד-חד-ערכית בין כמות ובין שם המספר.	הפקה	לבדוק יכולת התאמה חד-חד-ערכית בין כמות העצמים לבין שם המספר.
	מונחי גודל, סדר ומרחב	הפקה	הכרת מונחים נדרשים לביצוע משימות המבדק.
חלק ב: משימות לבדיקת ידע של העיקרון הקרדינלי	"תן לי"	זיהוי הפקה	זיהוי רמת הידע של העיקרון הקרדינלי.
	"אמור כמה יש"	זיהוי הפקה	זיהוי ידע של העיקרון הקרדינלי.
חלק ג: משימות לבדיקת ידע על יחס סדר של גודל קבוצות	השוואה בין קבוצות על-פי גודל	זיהוי הפקה	הבחנה בין גודל של שתי קבוצות: איזה קבוצה גדולה/קטנה.
	סידור קבוצות	זיהוי הפקה	בדיקת ידע על סידור קבוצות על-פי גודלן בסדר עולה.
	שוויון בין קבוצות	זיהוי הפקה	בדיקת ההבנה שהשוואת גודל בין שתי קבוצות עוקבות מתבצעת על-ידי הוספה או הורדה של כמות של אחד.
	הוספה והורדה של 1	זיהוי הפקה	הבנה שהתקדמות ברשימת המספרים מייצגת הוספה של פריטים לקבוצה ונסיגה ברשימת המספרים מייצגת הפחתה של פריטים מהקבוצה. הבנת כיווניות. יצירת קבוצה חדשה. מצב דינמי.
	הפרש בין קבוצות עוקבות	זיהוי הפקה	הבנת עקרון ההפרש של אחד בין קבוצות עוקבות.

ציינו: כל משימה נבדקה באמצעות שלוש חזרות, כדי למנוע אפשרות של תשובת "ניחוש". על כל משימה נקבע ציון דיכוטומי של ידע (1) / לא ידע (0). אי ידיעה נקבעה בעקבות שני כישלונות רצופים. הציון הסופי למשימה חושב על-ידי אחוז ההצלחה שבה.

ההחלטה לגבי הצלחה או אי-הצלחה במשימה נקבעה על-ידי שני עוזרי מחקר, סטודנטים שנה ג' במכללה להכשרת מורים. עוזרי המחקר קיבלו הסבר מקיף על מטרות המחקר ועל הליך הביצוע של המטלות, קיבלו הדרכה אישית וצפו בביצוע המבדק על-ידי עורך המחקר על חמישה נבדקים.

עזרים במבדק

קוביות: בכל אחת מהמשימות שנעשה בהן שימוש בקוביות, נבחרו קוביות בצבע אחד ושונה, זאת כדי להימנע מהאפשרות שילדים יצמידו ערכים מספרים לצבעים מסוימים. כל הקוביות היו בגודל של 1x1 ס"מ. **כרטיסיות:** הכרטיסיות היו בגודל של 10x8 ס"מ. התמונות בכל כרטיסיה היו שונות והכילו תכנים של ירקות או פירות (חסה, בצל, גזר, תפוח אדמה). **בובות:** בובות דובי בגודל של כ-10x20 ס"מ. **קופסאות:** קופסאות פלסטיק לבנות אטומות בגודל של כ-10x5x5 ס"מ (ראו נספח 2).

הליך המחקר

לפני ביצוע המחקר התקבלו האישורים הנדרשים מכל הגורמים המעורבים: התקבל אישור מן המדען הראשי במשרד החינוך, ניתן אישור ממפקחת המחוז והתקבלה הסכמה בכתב, מהורי הילדים על השתתפותם במחקר. כל אחד מהנבדקים נבחן באופן פרטני בחדר נפרד. המבדקים נערכו בשני מפגשים, כל מפגש ארך 20 דקות בערך. סדר הגשת המטלות התבצע באופן הבא: כל הנבדקים התחילו את המבדק עם מטלות הקדם בסדר קבוע: בדיקת ידע בספירה, בהתאמה חד-חד-ערכית בין שם המספר והכמות המתאימה ובדיקת ידע על מונחים. בהמשך כל הנבדקים ביצעו את המשימות הבודקות ידע על העיקרון הקרדינלי. כדי למנוע הטיה של סדר הגשת המשימות על רמת הביצוע, נשמר איזון מבוקר של סדר הגשת המשימות כך שהן הוגשו לנבדקים בסדר מתחלף. באשר למשימות, המבדק העיקרי (ידע על יחס סדר גודל קבוצות), סדר העברתם נקבע באופן אקראי ונשמר קבוע בעבור מחצית מקבוצת הנבדקים, בכל אחת מהקבוצות בקבוצות הגיל השונות. בתום העברת המבדק למחצית מהנבדקים בקבוצה, נבחר באופן אקראי סדר העברה שונה, אשר נשמר קבוע בעבור המחצית השנייה של הקבוצה.

בכל מטלה, הבוחן הבהיר לנבדק את המשימה. הפעילות הראשונה היוותה "משימת חימום". במידה והנבדק לא הבין את הנדרש הבוחן הסביר שוב והגיש שוב את אותה משימה. רק לאחר שהובהרה ההוראה, המשיך הבוחן במשימות של אותה מטלה.

ממצאים

מבדק חלק א – מבדק קדם: נמצא שכל הילדים ביצעו נכון את משימות הקדם למעט משימות שבדקו ידע על מונחי סדר (שני ושלישי). במשימות אלה נמצא ש-67% מן הילדים (72% מן הבוגרים ו-62% מהצעירים) ענו נכון על משימות אלה. 21% מן הילדים (15% מן הבוגרים ו-27% מהצעירים) נכשלו בהן ו-12% מן הילדים (13% מן הבוגרים ו-11% מהצעירים) ידעו לענות באופן חלקי. בבדיקת הקשר בין גיל הילדים לבין רמת הידע של מונחי הסדר, לא נמצא הבדל מובהק בין קבוצות הגיל. מאחר והשימוש במושגי הסדר (שני ושלישי) לא נדרשו באופן ישיר בהנחיות ולא היו מושגים הכרחיים בתשובות, גם ילדים שלא הצליחו במשימות אלה נכללו בין נבדקי המחקר. לפיכך לצורך סיכום הממצאים של חלק זה אפשר לומר שלכל הילדים שהשתתפו בניסוי הייתה תשתית ידע, הדרושה לצורך השתתפות בבדיקת המשימות הבודקות את הבנת העיקרון הקרדינלי ואת משימות הסדר.

מבדק חלק ב – מבדק ידע של העיקרון הקרדינלי: ידע זה נבדק באמצעות שתי משימות: משימת ה"אמור כמה יש" ומשימת ה"תן לי". הממצאים שהתקבלו הצביעו על כך שבשתי המשימות 100% מהילדים, בשתי קבוצות הגיל, הצליחו בשתי המשימות, ברמת זיהוי וברמת הפקה. הממצאים אלה מעידים על הבנת העיקרון הקרדינלי בקרב כל הנבדקים.

מבדק חלק ג – מבדק ידע של יחס סדר של גודל קבוצות:

בדיקת הידע על יחס סדר של גודל קבוצות נעשתה בזיקה לשלשה גורמים: סוג המטלה (זיהוי והפקה), סוג המשימה (השוואה בין קבוצות על-פי גודל, סידור קבוצות, שוויון בין קבוצות, הוספה של אחד, הורדה של 1 והפרש בין קבוצות עוקבות) וקבוצת גיל (צעירים ובוגרים).

1.1. השפעת סוג המטלה (זיהוי לעומת הפקה) והשפעת קבוצת גיל על רמת הביצוע

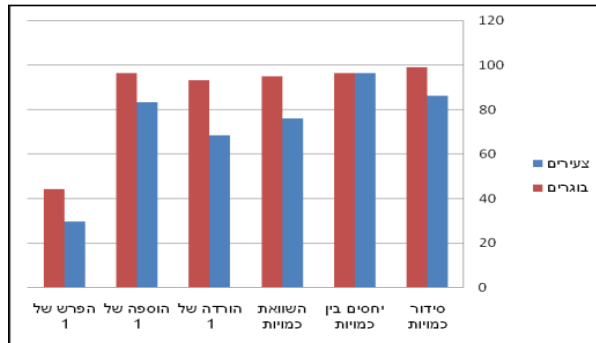
לצורך בדיקת השפעת סוג המטלה והשפעת הגיל על רמת הביצוע במשימות השונות שנבחנו במחקר נערכו ניתוחי שונות דו-כיווניים (Two-way ANOVA) עם מדידות חוזרות: קבוצת גיל (צעירים/בוגרים), X סוג מטלה (זיהוי/הפקה), כאשר בסוג המטלה היו מדידות חוזרות. המשתנה התלוי היה רמת הביצוע כפי שנמדד באחוזים. הממצאים שהתקבלו יוצגו בשני לוחות נפרדים: טבלה 2 מציגה את הממוצעים וסטיות התקן בכל משימה על-פי קבוצת גיל, סוג מטלה וקבוצת גיל X סוג מטלה וטבלה 3 מציגה את התוצאות שהתקבלו בניתוחי השונות. הממוצעים מוצגים גם בתרשים מספר 1.

טבלה 2:

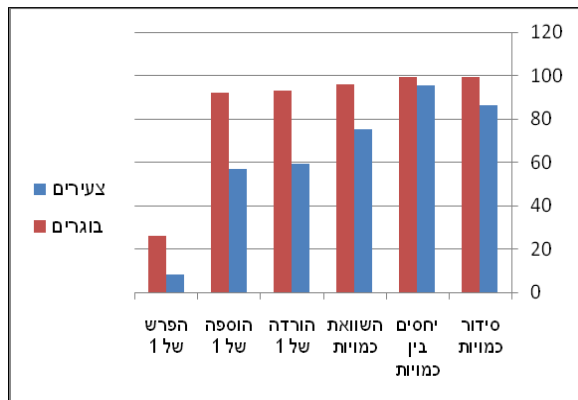
ממוצעים וסטיות התקן בכל משימה על-פי קבוצת גיל, סוג מטלה וקבוצת גיל X סוג מטלה

משימות	סה"כ גיל		סה"כ מטלה		סה"כ גיל		סה"כ גיל		
	צעירים (N=27)	בוגרים (N=29)	זיהוי	הפקה	צעירים	בוגרים	זיהוי	הפקה	
השוואה בין קבוצות	95.83	97.84	96.29	97.22	96.29	97.35	95.37	99.07	ממוצע ס.ת.
	13.42	9.48	19.06	14.29	16.24	18.56	19.65	4.81	
סידור קבוצות	86.11	99.13	93.44	92.85	86.11	99.15	86.11	99.15	ממוצע ס.ת.
	29.68	4.64	20.86	21.96	29.68	4.64	29.68	4.64	
שוויון קבוצות	75.64	93.53	85.71	93.75	75.92	94.82	75.37	95.24	ממוצע ס.ת.
	21.84	14.41	32.28	22.98	41.87	15.49	19.35	25.90	
הורדה של 1	63.81	93.10	81.25	76.78	68.51	93.10	59.25	93.10	ממוצע ס.ת.
	38.81	22.05	37.61	41.15	44.17	25.78	47.44	25.28	
הוספה של 1	70.06	94.25	90.17	75.10	83.33	96.55	56.79	91.95	ממוצע ס.ת.
	30.37	16.64	24.62	41.13	32.52	11.02	46.97	26.20	
הפרש של 1	18.98	35.05	37.20	25.86	29.62	44.25	8.37	25.86	ממוצע ס.ת.
	30.53	40.48	46.49	43.54	43.44	48.85	25.00	43.54	

תרשים 1:
מטלות זיהוי



מטלות הפקה



ממוצעים של רמת ביצוע לפי קבוצת גיל וסוג מטלה

באופן כללי, הממוצעים וסטיות התקן שהוצגו בטבלה 1 ובתרשים 1 מצביעים על כך שרמת הביצוע בקבוצת הבוגרים גבוהה מאוד בכל המשימות, למעט במשימה של הפרש של 1, הן ברמת הביצוע והן ברמת ההפקה וקרובה ל-100%. לעומתם, רמת הביצוע של הצעירים נמוכה יותר ונעה בין 55% ל-85% וגבוהה יותר במטלות זיהוי לעומת מטלות הפקה. זאת למעט משימת השוואת קבוצות שבהן רמת הביצוע הייתה גבוהה מאוד הן ברמת הזיהוי והן ברמת ההפקה (97% בערך). המטלה של הפרש של 1 נמצאה כקשה ביותר בשתי קבוצות הגיל – רמת ההצלחה לא עלתה בשתי קבוצות הגיל על 45%. הממצאים שהתקבלו בניתוחי השוונות בנוגע להשפעת הגיל ולהשפעת סוג המטלה על רמת הביצוע מוצגים בטבלה 3.

טבלה 3:

תוצאות ניתוחי שונות: ערכי F של גיל, סוג מטלה וגיל X מטלה על רמת הביצוע במשימות המבדק

משימה	F של גיל ד"ח 1.54	F של מטלה ד"ח 1.54	F של גיל X מטלה ד"ח 1.54
סידור	3.21*	—	—
השוואה	0.33	0.08	0.31
שוויון	4.09*	2.39	2.57
הורדה	12.20***	0.79	0.79
הוספה	13.91***	8.32**	4.13*
הפרש	2.78	13.22***	0.07

$P < .05$ * $p < .01$ ** $p < .001$ ***

- לא ניתן לבצע ניתוח שונות כיוון שהממוצעים היו זהים במטלות הזיהוי וההפקה

עיון בטבלה 2 ובטבלה 3 מלמד על הממצאים הבאים:

מטלת סידור קבוצות: התקבל אפקט מובהק של גיל, אשר נובע מכך שרמת הביצוע של קבוצת הבוגרים גבוהה מזו של קבוצת הצעירים. לא התקבל אפקט מובהק של מטלה ולא של אינטראקציה בין גיל וסוג מטלה. **מטלת השוואת גודל קבוצות:** לא התקבלו אפקטים מובהקים של גיל, סוג מטלה, ולא של אינטראקציה בין גיל וסוג מטלה. **שוויון בין קבוצות:** התקבל אפקט מובהק של גיל, אשר נובע מכך שרמת הביצוע של קבוצת הבוגרים גבוהה מזו של קבוצת הצעירים. לא התקבל אפקט מובהק של מטלה ולא של אינטראקציה בין גיל וסוג מטלה. **הורדה של 1:** התקבל אפקט עיקרי מובהק של גיל אשר נובע מכך שרמת הביצוע של קבוצת הבוגרים גבוהה מזו של קבוצת הצעירים. לא התקבל אפקט מובהק של מטלה ולא של אינטראקציה בין גיל וסוג מטלה. **הוספה של 1:** התקבל אפקט עיקרי מובהק של גיל אשר נובע מכך שרמת הביצוע של קבוצת הבוגרים גבוהה מזו של קבוצת הצעירים. כמו כן, התקבל אפקט מובהק של מטלה שנובע מרמת ביצוע גבוהה יותר במטלות הזיהוי מזו של הפקה, בנוסף התקבל אפקט מובהק של אינטראקציה בין גיל וסוג מטלה. לצורך פירוש האינטראקציה נעשו קונטרסטים שהשוו את רמת הביצוע בין שתי קבוצות הגיל בכל סוג מטלה. במטלה הזיהוי, רמת הביצוע של הבוגרים (ממוצע=96.55 וס.ת. 11.02) הייתה גבוהה יותר מזו של הצעירים (ממוצע=83.33 וס.ת. 32.52) כאשר ההבדל היה כמעט מובהק ($t(54)=2.06$, $P<0.06$) במטלות ההפקה רמת הביצוע של הבוגרים (ממוצע=91.95 וס.ת. 26.20) הייתה גבוהה מזו של הצעירים (ממוצע=56.79 וס.ת. 46.97), ($t(54)=3.49$, $P<0.001$).

ממצאים אלה מראים כי ההבדל בין הקבוצות בולט יותר במטלות ההפקה לעומת מטלות הזיהוי אשר באופן יחסי קלות יותר. **הפרש של 1:** התקבל אפקט עיקרי מובהק של מטלה אשר נובע מכך שרמת

הביצוע במטלת זיהוי קלה יותר לעומת מטלת ההפקה. לא התקבל אפקט מובהק של גיל ושל אינטראקציה בין גיל ובין מטלה. היעדר אפקט גיל נובע מרמת הקושי הגבוהה במטלה זו בשתי קבוצות הגיל.

2.2. השפעת סוג המשימה וקבוצת גיל על רמת הביצוע

לצורך בדיקת השפעת סוג המשימה והגיל על רמת הביצוע בשני סוגי המטלות נערכו ניתוחי שונות דו-כיווניים עם מדידות חוזרות קבוצת גיל (צעירים / בוגרים), X סוג משימה (סידור, השוואה, שוויון, הורדה, הוספה, הפרש) כאשר בסוג המשימה היו מדידות חוזרות. המשתנה התלוי היה רמת הביצוע כפי שנמדד באחוזים. הממוצעים וסטיות התקן מוצגים בטבלה 4. טבלה 5 מציגה את התוצאות שהתקבלו בניתוחי השונות.

טבלה 4:

תוצאות ניתוחי שונות: ערכי F של גיל, סוג משימה וגיל X משימה על רמת הביצוע במטלות זיהוי והפקה

מטלה	F של גיל ד"ח 1.54	F של מטלה ד"ח 1,270	F של גיל X מטלה ד"ח 1,270
זיהוי	8.30***	35.5 ***	1.21
הפקה	12.72***	85.87***	4.17***

במטלות הזיהוי וההפקה נמצא אפקט עיקרי של סוג משימה ולא נמצאה אינטראקציה מובהקת בין משימה לבין גיל. כדי לבחון את מקורות ההבדלים בין שש המשימות ברמות הביצוע השונות, נערך מבחן בונפרוני (השוואות מרובות) ברמת מובהקות של 0.05. התוצאות שנמצאו בניתוח זה מסוכמות בטבלה 4.

טבלה 5:

דירוג רמת הקושי של המשימות על-פי המטלות, בקבוצות הגיל השונות²

מטלה	צעירים	בוגרים
זיהוי	הפרש > מכל השאר	הפרש > מכל השאר
הפקה	הפרש > הוספה, הורדה > השוואה, סידור ושוויון	הפרש > מכל השאר

לסיכום, נמצא כי במטלת זיהוי משימת ההפרש קשה יותר מכל המשימות האחרות בשתי קבוצות הגיל. במטלת ההפקה, משימת ההפרש קשה יותר מכל המשימות האחרות רק אצל הבוגרים. לעומת

2. הסימן > משמש כאן במשמעות של קשה מ... באופן מובהק.

זאת, אצל הצעירים נמצאו שלוש רמות קושי: (1) הפרש – קשה ביותר; (2) הוספה והורדה; (3) שוויון, השוואה וסידור – קלות יותר.

דיון

מטרתו של המחקר הנוכחי הייתה לבחון את השאלה מה ילדים בגן, אשר הגיעו לרמה של "ידעני העיקרון הקרדינלי" (cardinal-principle-knowers), יודעים על רצף קבוצות ועל יחס הגודל ביניהן. העניין בשאלה זו נובע מן ההנחה כי ידע על תכונות רצף קבוצות מהווה תשתית להבנת תכונות סדר המספרים שהוא אחד הנושאים החשובים ללימוד נושאים מתמטיים שונים בגן ובבית-הספר היסודי.

הממצאים שהתקבלו במחקר הנוכחי תומכים במחקרים אחרים (Colome & Noel, 2012; Le Corre & Carey, 2007; Sarnecka, & Carey, 2008) המצביעים על כך שילדים בגיל 4 הנם "ידעני העיקרון הקרדינלי", כלומר כאלה היודעים להגדיר גודל קבוצות. אולם בנוסף, המחקר הנוכחי מצביע על כך שילדים אלה יודעים גם להשוות בין גודל קבוצות באופן מדויק, לציין מי מבין שתי קבוצות נתונות ברצף, גדולה או קטנה יותר ורובם יודעים לסדר את הקבוצות בסדר עולה. עם זאת, נמצא ש"ידעני העיקרון הקרדינלי" בקבוצה הצעירה (עד גיל חמש) נמצאים בשלב של רכישת ידע הקשור במאפיין של יחס הסדר בין הקבוצות. כך לדוגמה, רק כ-80% מהם ידעו מה אפשר לעשות כדי שקבוצה של ארבע אובייקטים תהיה כמו קבוצה של חמישה אובייקטים ולהפך. זאת לעומת קבוצת הבוגרים (עד גיל 6), יודעים להשוות בין שתי קבוצות עוקבות. באשר למציאת ההפרש הקבוע בין שתי קבוצות ברצף, הממצאים שהתקבלו תומכים במחקר המצביע על כך שידע זה מתפתח מאוחר יותר, לקראת גיל 7 (כיתה ב'), אך יחד עם זאת, הממצאים מצביעים על כך שבעוד שעד גיל 5 רוב הילדים אינם יודעים עיקרון זה, הרי בין גיל 5 לגיל 6 כ-25% מהילדים כבר רכשו ידע זה. ממצא זה מצביע על כך שראשית התפתחות הידע על ההפרש הקבוע בין קבוצות עוקבות בא לידי ביטוי בתקופת גיל זו. נוסף על כך, מחקר זה חושף תהליך הדרגתי של רצף התפתחותי בהקשר של רכישת ידע על יחס סדר קבוצות. רצף התפתחותי זה מצביע על קיומם של שלושה שלבים: תחילה ילדים שיוודעים לזהות גודל קבוצות יודעים גם לזהות מי מבין שתי קבוצות עוקבות גדולה או קטנה יותר, יודעים לסדר את הקבוצות בסדר עולה ויודעים כי אפשר להשוות בין שתי קבוצות עוקבות על-ידי הוספה או הורדה של יחידה אחת. בשלב מתקדם יותר, מתפתחת הבנה של השפעת פעולת ההוספה וההורדה של כמות של אחד, על כמות נתונה. ילדים מבינים כי פעולות אלה גורמות להגדלה או הקטנה של הקבוצה ולהתקדמות או נסיגה ברצף המספרים. רמת הקושי הגדולה ביותר התקבלה במשימות שבהן הילדים התבקשו למצוא את ההפרש בין קבוצות עוקבות. מצב זה מבטא את השלב המאוחר יותר בהבנה של יחס הסדר בין קבוצות עוקבות וככל הנראה גם בהבנה של יחס הסדר בין מספרים. הרצף ההתפתחותי שהתקבל במחקר הנוכחי מציע למעשה, תיאור של התפתחות הידע הפורמלי, על יחס הסדר של מספרים, שמציג טול (Tall, 2001). אמנם, במחקר הנוכחי, המשימות השונות נערכו באמצעות כמויות המייצגות גודל קבוצות. אולם, ברוב המשימות הילדים לא ראו את הכמויות וגודל הקבוצה תואר באמצעות שם המספר. לפיכך, אפשר להסיק כי ביצוע נכון של המשימות מעיד על היכולת של הילד

לקשר בין שם המספר לגודל שהוא מייצג. ומכאן, אפשר להניח כי מצב זה מהווה למעשה חוליה לקראת הבנת עקרונות חוקיות ביחס הסדר בין מספרים. חוליה זו מציגה את המעבר והקשר בין התובנות המתפתחות, אצל ילדים, על יחס הסדר של קבוצות עוקבות לבין התובנות שלהם על יחס הסדר של מספרים המייצגים קבוצות אלה. ברמה התאורטית, המידע שהתקבל כאן מחזק את הטענה על כך שהידע על ההיבט הכמותי של הקבוצה אינו מתפתח באופן סימולטני עם הידע על סדר הקבוצות, אלא מוקדם לו. התפתחות ההבנה של עקרונות יחס הסדר הנה מאוחרת וממושכת יותר, מעבר לגיל בגן. מאחר והמחקר הנוכחי התבצע על קבוצות גיל שבהן מצד אחד, אחוז ההצלחה במשימות רבות היה גבוה, ולכן לא היה אפשר לעקוב באופן מעודן יותר אחר ראשית התפתחותם של התהליכים הקשורים בידע על סדר קבוצות ומספרים. מצד אחר נמצא כי רכישת הידע בנושאים שנחקרו לא מסתיימת בתקופת גיל הגן, נדרש מחקר המשך כדי לבחון את ראשית התפתחותו של ידע זה בגילאים צעירים יותר ואת המשכו, בגילאים בוגרים יותר.

באשר להבחנה שנעשתה במחקר זה, בין רמות הידע (זיהוי לעומת הפקה), עולה כי קיימים הבדלים ברמת הביצוע של משימות זיהוי לעומת משימות הפקה. אולם, אלה באים לידי ביטוי רק כאשר רכישת הידע עדיין לא הושלמה. במקרים אלה מטלות ברמת זיהוי קלות יותר לעומת מטלות ברמת הפקה. ממצאים אלה מצביעים על החשיבות המתודולוגית שיש בהבחנה זו בעת ביצוע מחקרים התפתחותיים ככלי לקבלת מידע מפורט ומדויק על התהליך ההתפתחותי הנחקר.

לסיכום, אפשר לומר כי הממצאים שהתקבלו יש בהם כדי לשפוך אור על התהליך המדורג של התפתחות ידע של ילדים צעירים בנושא של יחס סדר בין קבוצות. בנוסף, המידע שהתקבל מצביע על הקשרים שילדים עושים בגיל הגן בין ידע זה ובין ההבנה של יחס הסדר שבין מספרים. למידע זה השלכות בעלות חשיבות רבה בהקשר של תכנון תכניות לימודים והעבודה עם ילדים בגיל הרך. כמו כן השלכות, גם על תהליכי הכשרה והדרכה של העוסקים בחינוך מתמטי בגיל הרך וכאלה העובדים עם ילדים מתקשים הזקוקים להשלמת תשתיות הידע המתמטי.

מחקר זה נתמך על-ידי הוועדה לעידוד מחקרים במכללת לוינסקי לחינוך ועל-ידי ועדת המחקר הבין-מכללתית במכון מופ"ת.

רשימת מקורות

קופרמן, ר' (2011). מתמטיקה של בית ספר יסודי: לגלות מחדש, להבין, ללמד ולאהוב. תל-אביב: מעלות.

Ben, A. U. (2003). Ordinal-Cardinal view: From natural numbers to classifiers. *Linguistic Society of Hong Kong*, 12(6), 1-12.

Brainerd, C. J. (1974). Inducing ordinal and cardinal representations of the first five natural numbers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 18, 520-534.

Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, 83(3), 223-240.

Briars, D., & Siegler, R. S. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20(4), 607-618.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Butterworth, B. (2000). *What counts: How every brain is hardwired for math*. London: The Free Press.

Colome, A., & Noel, M. P. (2012). One first? Acquisition of the cardinal and ordinal uses of numbers in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(2), 233-247.

Condry, K. F., & Spelke, F. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology: General*, 137(1), 23-38.

Cooper, R. G. (1984). Early number development: Discovering number space with addition and subtraction. In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 157-192). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5(4), 340-407.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218-224.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 234-275). New York: Macmillan Publishing Company.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Gelman, R. (1993). A rational-constructivist account of early learning about numbers and objects. In D. L. Medin (Ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research theory* (Vol. 30, pp. 61-96). San Diego: Academic Press.
- Henik, A., Leibovich, T., Naparstek, S., Diesendruck, L., & Rubinsten, O. (2012). Quantities, amounts, and the numerical core system. *Frontiers in Human Neuroscience*, 5, 186.
- Hurewitz, F., Papafragou, A., Gleitman, L., & Gelman, R. (2006). Asymmetries in the acquisition of numbers and quantifiers. *Language Learning and Development*, 2(2), 77-96.
- Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 106(25), 10382-10385.
- Kamawar, D., LeFevre, J. A., Bisanz, J., Fast, L., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B., & Penner-Wilger, M. (2010). Knowledge of counting principles: How relevant is order irrelevance? *Journal of Experimental Child Psychology*, 105(1-2), 138-145.
- Le Corre, M. G., Van de Walle, G., Brannon, E. M., & Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology*, 52(2), 130-169.
- Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105(2), 395-438.
- Lipton, J., & Spelke, E. (2006). Preschool children master the logic of number word meanings. *Cognition*, 98(3), 57-66.
- Miller, K., Major, S. M., Shu, H., & Zhang, H. (2000). Ordinal knowledge: Number names and number concepts in Chinese and English. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 129-139.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. New York: W. W. Norton.
- Picozzi, M., de Hevia, M. D., Girelli, L., & Macchi Cassia, V. (2010). Seven-month-old infants detect ordinal numerical relationships within temporal sequences. *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(3), 359-367.
- Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.
- Sarnecka, B. W., Cerutti, A., & Carey, S. (2005). *Unpacking the cardinal principle of counting: A last-word rule + the successor function*. Poster presented at 4th biennial meeting of the Cognitive Development Society, San Diego, CA.
- Suanda, S. H., Tompson, W., & Brannon, E. M. (2008). Changes in the ability to detect ordinal numerical relationships between 9 and 11 months of age. *Infancy*, 13(4), 308-337.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 199-238.

- Turconi, E., & Seron, X. (2002). Dissociation between order and quantity meaning in a patient with Gerstmann syndrome. *Cortex*, 38(5), 911-914.
- Turconi, E., Campbell, J. I. D., & Seron, X. (2006). Numerical order and quantity processing in number comparison. *Cognition*, 98, 273-285.
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155-193.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.



ניצה מרק-זגדון, מכללת לוינסקי

ד"ר ניצה מרק-זגדון הנה חוקרת, כותבת ומרצה במכללת לוינסקי לחינוך, בתחום של התפתחות חשיבה מתמטית בגיל הצעיר וכן, בתחום של ליקויים בתהליכי התפתחות חשיבה מתמטית ודסקולוליה. עמדה בראש הוועדה לכתיבת מסמך התאמות לתכנית הלימודים במתמטיקה בבית-הספר היסודי, לתלמידים מתקשים ותלמידים בחינוך המיוחד.

נספחים

נספח 1:

1.1. הנחיות כלליות להעברת המבדק:

1. על הבוחן להציג את עצמו ואת מטרת המבדק: שמי.... ונחננו נשחק ביחד משחקים שקשורים במספרים.
- חשוב לציין בפני התלמיד כי הוא יכול לבקש לעשות פסקה או להפסיק בכלל את הפעילות המשותפת.
2. בכל המשימות, הפעילות הראשונה שבה מהווה "פעילות חימום" במובן שהיא אמורה להבהיר לילד את הנדרש ואמורה לתת לבוחן מידע שהילד אכן הבין את ההנחיה שבה. לכן יש לחזור על הפעילות הראשונה עד שהילד מבצע אותה נכון.
3. על-פי רמת הביצוע בפעילות הראשונה בכל משימה וכן, בעקבות ההתרשמות של הבוחן לאורך המבדק, יש להוסיף או להוריד את גודל הכמות או טווח המספרים בפעילויות.
4. יש לתעד את התשובות של התלמיד ברמה של ידע /לא ידע ולתאר את תהליך הביצוע.

הנחיות להעברת חלק ב:

- חוברת תמונות עם כריכת ספירלה.
- הבוחן יניח את החוברת מול התלמיד ויבקש ממנו להצביע על התמונה שמתאימה למונח שהוא נשאל עליו.
- הבוחן יעבור עם התלמיד על כל החוברת פעמיים, ובכל פעם ישאל על מונח אחר. לדוגמה, פעם ישאל על הברווז הגדול ובפעם הבאה על הברווז הקטן.
- לאחר שהבוחן סיים לבדוק את מחצית הקבוצה, ישנה הבוחן את סדר שאילת המונחים (אם התחיל בהצבעה על הברווז הגדול, ישנה ויתחיל בהצבעה על הברווז הקטן).

הנחיות להעברת חלק ג:

- טווח המספרים במשימות השונות נע בין 1 ל-7. הבוחן יכול על-פי התרשמותו מרמת התפקוד של הילד, להפעיל שיקול דעת באיזה טווח מספרים להתחיל כל משימה.
- אם הילד טועה במשימה בטווח מספרים נתון פעמיים, יש לתת את אותה משימה בטווח מספרים קטן במספר אחד (אלא אם הבודק מתרשם שרמת הידע של הילד נמוכה יותר).

בכל המשימות אין להראות לילד את הכמויות של הפריטים בתמונות או את כמות הקוביות. זאת מאחר וילדים יכולים לענות על השאלות על-פי מראה עיניים של גודל הכמות ולא על-פי הבנה של גודל הקבוצה. לכן, במשימות השונות ההנחיה תהיה להפוך את הכרטיסיות או להכניס את הקוביות לקופסאות.

עם זאת, כדי ליצור בילד אמון בתוכן ובפעילויות המתוארות על-ידי הבוחן, יש להראות לילד בסוף המשימה הראשונה את התמונות בכרטיסיות או את הקוביות בקופסה. אך אין להמשיך ולהראות אותן בהמשך.

1.2. מבדק ידע על יחס סדר גודל קבוצות

בהוראות למבדק, במקום של ההנחיות של הבודק נכתב בקיצור ב'.

משימה	הוראות למבדק	הנחיות למבדק	אביזרים
חלק א': ידע קודם נדרש			
1. ספירה לפנים	ב': האם אתה יודע לספור? ב': תספור מ-1 עד 10. או ב': תספור מ-1 עד 20.	אם הילד לא מתחיל לספור: הבדוק: אני אראה לך למה הכוונה: אחד, שתיים, שלוש, עכשיו אתה תספור. אם הילד יודע לספור מבקשים שיספור עד 20. אם הילד טועה, מבקשים שיספור עד 5 או עד כמה שיועד.	
2. התאמה חד-חד-ערכית בין כמות ובין שם המספר	מציגים לילד לוח עם שורה של 6 פקקים ברווחים שווים ומבקשים: ב': תספור/תמנה את הפקקים	- אם הילד יודע – מציגים לוח עם 11 פקקים. - אם הילד לא יודע – מציגים לוח עם 4 פקקים.	לוח עם 6 פקקים לוח עם 11 פקקים לוח עם 4 פקקים
3. מונחים	קטן/גדול ב': בתמונות יש ברווחים. תצביע על התמונה של הברווז הקטן/גדול.	אם הבוחן מתרשם שהנבדק הצביע באופן סתמי ולא מכוון למונה יש לחזור על הבדיקה של המונח שוב, לאחר שסיים את החוברת.	תמונה של שני ברווזים בגדלים שונים ביחס של 1:3
	הרבה/מעט ב': בתמונות יש פרחים. תצביע על התמונה שיש בה הרבה/מעט פרחים.	אם הילד לא מבין את ההנחיה אפשר לשנות את הניסוח: איפה יש הרבה פרחים וכדומה.	תמונה של שתי קופסאות עם 3 פרחים ותמונה עם 9 פרחים

משימה	הוראות לנבדק	הנחיות לבודק	אביזרים
	יותר/פחות ב': בתמונות יש ענבים. תצביע על התמונה שיש בה הרבה/מעט ענבים.		2 תמונות של אשכולות ענבים
	הכי הרבה/ הכי מעט ב': יש בתמונה קופסאות עם צ'יפס. תצביע על התמונה שיש בה הכי הרבה/הכי מעט צ'יפס.		3 תמונות של קופסאות עם צ'יפס ביחס של 1:3 בין הכמויות
	הכי גדול/הכי קטן גדול ביותר/קטן ביותר ב': תצביע על המפתח הגדול ביותר/הקטן ביותר.		תמונה של 3 מפתחות ביחס של 1:3 בין התמונות
	מונחי סדר: ראשון, אחרון, שלישי, שני ב': תצביע על החיה שתשתה ראשונה/אחרונה/שלישית ושנייה.		תמונה של חיות בתור לשתות מים. התור מתחיל כאן (הבוחן מצביע על הקערה ממנה ישתו מים). יש להניח כלי קטן (פקק) כמיכל למים
חלק ב: משימות לבדיקת ידע של העיקרון הקרדינלי			
4. משימת "תן לי" זיהוי	ב': נשחק עם הארנב בקוביות. אני אגיד כמה קוביות הארנב רוצה ואני אתן לו קוביות. אתה תגיד האם נתתי לארנב מה שביקש. שאלת בדיקה: כמה קוביות הארנב רוצה? האם נתתי לארנב את מה שביקש?	הארנב רוצה 4 קוביות הבוחן נותן 4 רוצה 3 נותן 3 רוצה 4 נותן 5 רוצה 2 נותן 3 רוצה 5 נותן 5 רוצה 2 נותן 2	קערה עם 15 קוביות בצבע אחד בובת ארנב.
"תן לי" הפקה	ב': עכשיו אני אגיד כמה קוביות הארנב רוצה ואתה תיתן לו בדיוק כמה שביקש.	הארנב רוצה 3 קוביות 1, 4, 5, 2, קוביות	קערה עם 15 קוביות בצבע אחד בובת ארנב
5. "אמור כמה יש" זיהוי	ב': נשחק בקוביות. יש כאן מסך ומאחוריו קופסה (מראים לילד את הקופסה). אני אשים קוביות בקופסה ואמנה/אספור אותם בקול. אתה תגיד כמה קוביות שמת בקופסה. ב': לוקח קוביות מהקערה, מונה בקול ושם בקופסה. שואל: כמה קוביות יש בקופסה?	המשימה הראשונה משמשת לצורך אימון שבסופה אפשר להראות לילד את הקוביות בקופסה. בשאר המשימות לא מראים לילד את הקוביות 2, 3, 5, 7	קערה עם: 15 קוביות ארנב מחיצה קופסה
"אמור כמה יש" הפקה	מניחים מפת דקה על של קוביות בשורה. ב': תמנה/תספור את הקוביות ותגיד כמה קוביות יש בשורה.	כדי שהילד לא יזהה את כמות הקוביות בצורה של סבייזינג, יש לכסות את הקוביות במפת נייר דקה, אשר מטשטשת מעט את הזיהוי המידי של כמות	לוחות עם קוביות מודבקות. כל לוח עם הכמות הנדרשת למנייה. מפת נייר דקה.

משימה	הוראות לנבדק	הנחיות לבוזק	אביזרים
		הקוביות. המשימה הראשונה משמשת גם לצורך אימון. לכן, בסופה אפשר להראות לילד את כמות הקוביות. בשאר הלוחות לא מראים לילד את הכמות 3, 4, 5, 7	
חלק ג: משימות לבדיקת ידע על יחס סדר של גודל קבוצות			
6. השוואה בין קבוצות על-פי גודל זיהוי	שתי בובות ארנבים: אחת עם סיכה ירוקה ואחת עם סיכה כחולה על האוזן. הבודק אומר ומצביע: הארנב הזה (עם הסיכה הכחולה), מאוד אוהב לאכול. לכן, תמיד ניתן לו יותר אוכל. הארנב הזה (עם הסיכה הירוקה), לא כל כך אוהב לאכול. לכן, תמיד ניתן לו לאכול פחות. ב': אני אתן לכל ארנב לאכול. אתה תגיד האם נתתי לארנב שאוהב לאכול יותר/ שלא אוהב לאכול, יותר/פחות, אוכל. ב': לארנב הזה שאוהב לאכול, אני נותן 3 גזרים. הבוחן מניח כרטיסיה הפוכה עם תמונה של 3 גזרים. כמה נתתי לו? לארנב הזה שלא אוהב לאכול אני נותן ארבעה גזרים. כמה נתתי לו? האם הארנב שאוהב לאכול קיבל יותר מהארנב שלא אוהב לאכול?	במשימה הראשונה (בלבד) יש להראות לתלמיד את הציורים בתמונה לאחר שענה (כדי לאמת בפני הילד את התיאור המילולי). 4-3 6-5 5-4 7-6 3-2	2 בובות ארנב כרטיסיות עם תמונות של פירות וירקות בכמויות המתאימות לנדרש במשימה
השוואה בין קבוצות על-פי גודל הפקה	שתי בובות ארנבים: אחת עם סיכה ירוקה ואחת עם סיכה כחולה על האוזן. ב': הארנב הזה (עם הסיכה הכחולה), מאוד אוהב לאכול. לכן, תמיד ניתן לו יותר אוכל. הארנב הזה (עם הסיכה הירוקה), לא כל כך אוהב לאכול. לכן, תמיד ניתן לו לאכול פחות. הבוחן מניח לפני התלמיד שתי תמונות הפוכות ואומר: יש כאן שתי תמונות. בתמונה הזו יש 3 מלפפונים. בתמונה הזו יש 4 מלפפונים. כמה מלפפונים יש בתמונה הזו? וכמה מלפפונים יש בתמונה הזו? תיתן לארנב שאוהב לאכול את התמונה שיש בה יותר מלפפונים. תיתן לארנב שלא אוהב לאכול את התמונה שיש בה פחות מלפפונים.	במשימה הראשונה יש להראות לתלמיד את הציורים בתמונה לאחר שענה. 6-5 5-4 7-6 3-2 4-3	2 בובות ארנבים כרטיסיות עם תמונות של פירות וירקות בכמויות המתאימות לנדרש במשימה

משימה	הוראות לנבדק	הנחיות לבודק	אביזרים
7. סידור קבוצות בסדר עולה זיהוי	על השולחן בובת הארנב. ב': הארנב הזה תמיד מתחיל לאכול מהצלחת שיש בה הכי מעט אוכל וממשיך עד לצלחת שיש בה הכי הרבה אוכל. הבודק מסדר את הכרטיסיות ברצף מתאים מהכמות הקטנה לגדולה/ברצף לא מתאים (באופן גלוי) ב': האם הירקות מסודרים כמו שהארנב אוהב לאכול מהצלחת שיש בה הכי מעט אוכל ועד לצלחת שיש בה הכי הרבה אוכל?	רצפים של הכרטיסיות 4-3-5 3-2-1 5-4-6 6-5-4	בובת ארנב צלוחיות פלסטיק כרטיסיות עם תמונות של פירות או ירקות בכמויות מ-1 עד 7
סידור קבוצות הפקה	הבודק מציג לילד 3 כרטיסיות עם כמויות עוקבות. ב': הארנב רוצה לאכול. תמיד הוא יאכל קודם מהצלחת שיש בה הכי מעט ובסוף את הצלחת שיש בה הכי הרבה. תסדר לו את הירקות כמו שהוא אוהב לאכול מהכי מעט ועד להכי הרבה ירקות. * יש לציין את כיוון ההתחלה	רצפי הכרטיסיות 3-2-1 5-4-3 4-3-2 6-5-4	כרטיסיות עם תמונות של פירות וירקות בכמויות מ-1 עד 7
8. שוויון קבוצות בין זיהוי	הבוחן בונה מגדלים מאחורי מחיצה. ב: אני בונה שני מגדלים מקוביות. במגדל שתי קומות ובמגדל השני שלוש קומות (מסיר לרגע את המחיצה ומראה לילד את המגדלים ומחזיר את המחיצה). מה לעשות כדי ששני המגדלים יהיו באותו גובה/אותו דבר? האם להוסיף קובייה אחת או שתי קוביות?/האם להוריד קובייה אחת או שתי קוביות?	רק במשימה הראשונה מראים לילד את המגדלים. 3-2 5-4 6-5 4-3 7-6	מחיצה קוביות
שוויון קבוצות הפקה בין	אני בונה שני מגדלים מקוביות. במגדל שתי קומות ובמגדל השני שלוש קומות (מסיר לרגע את המחיצה ומראה לילד את המגדלים ומחזיר את המחיצה). מה לעשות כדי ששני המגדלים יהיו באותו גובה/אותו דבר?	2-1 4-3 6-5 3-2 5-4	מחיצה קוביות
9. הוספה/הורדה של אחד זיהוי	הבוחן מניח לפני התלמיד קופסה ומכניס לתוכה, אחת-אחת, 4 קוביות, תוך כדי מנייה בקול. ב': אני שם בקופסה 4 קוביות. סוגר את הקופסה ושואל: ב': כמה קוביות שמת בקופסה? (אם הילד לא זוכר, הבוחן חוזר על הפעולה). ב': עכשיו אני מוסיף קובייה אחת לקופסה. האם עכשיו יש 5 או 6 קוביות?	הכמויות: 2, 5, 1, 6, 3, 7, 4	קופסה עם מכסה

משימה	הוראות לנבדק	הנחיות לבודק	אביזרים
הוספה/הורדה של 1 הפקה	ב': אני שם בקופסה 4 קוביות. סוגר את הקופסה ושואל: כמה קוביות שמתי בקופסה? (אם הילד לא זוכר, הבוחן חוזר על הפעולה). ב': עכשיו אני מוסיף קובייה אחת לקופסה. כמה קוביות יש בקופסה?	הכמויות: 7, 1, 6, 2, 5, 3	קופסה עם מכסה
10. הפרש בין קבוצות עוקבות זיהוי	שני ארנבים על השולחן ולידם שתי קופסאות. ב': לארנב הזה אני נותן 2 קוביות ולארנב הזה 3 קוביות (הבוחן שם בכל קופסה את הכמות המתאימה ולא מאפשר לילד לראות את כמות הקוביות בקופסה) שואל: כמה קוביות נתתי לארנב הזה? וכמה קוביות נתתי לארנב הזה? אם הילד עונה נכון, הבוחן שואל: למי נתתי יותר קוביות? אם הילד עונה נכון, הבוחן שואל: האם לארנב הזה נתתי קובייה אחת יותר או שתי קוביות יותר?	רק בסוף המשימה הראשונה מראים לילד את הקוביות. אם הילד טועה, חוזרים על משימה. לאחר שני כישלונות יורדים בכמות של 1 3-2 5-4 4-3 6-5 7-6	קערה עם 15 קוביות שתי קופסאות
הפרש בין קבוצות עוקבות הפקה	שני ארנבים על השולחן ולידם שתי קופסאות. ב': לארנב הזה אני נותן 2 קוביות ולארנב הזה 3 קוביות (הבוחן שם בכל קופסה את הכמות המתאימה ולא מאפשר לילד לראות את כמות הקוביות בקופסה). שואל: כמה קוביות נתתי לארנב הזה? וכמה קוביות נתתי לארנב הזה? אם הילד עונה נכון, הבוחן שואל: למי נתתי יותר קוביות? אם הילד עונה נכון, הבוחן שואל: כמה קוביות יותר יש לו? כמה קוביות יותר נתתי לו?	2-1 4-3 6-5 3-2 5-4	

בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון:

ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה

משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

דוד בן-חיים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל; שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

תקציר

פתרון בעיות והוכחות תמיד שיחקו תפקיד מכריע במתמטיקה. למעשה, הם הלב והנשמה של הדיסציפלינה הזו. יתרה מזו, שימוש בטכניקות הוכחה שונות – באותו תחום מתמטי או בין התחומים המתמטיים – בעבור בעיה ספציפית אחת, יכול להציג את הקישוריות בין תחומים אלו, כמו גם את העושר, היופי והאלגנטיות של המתמטיקה. במאמר הזה, אנו מציגים בעיה גאומטרית מעניינת ומציגים בעבורה שמונה הוכחות שונות על-ידי שימוש בשיטות מתחומים מתמטיים שונים. כמו כן, נעשה שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית (ג'יאוג'ברה – Geogebra) שבאמצעותה אפשר להעלות השערה ראשונית באשר לפתרון הבעיה. אנו בהחלט תומכים בכך, שהמורים יכללו תרגיל מרובה הוכחות בתכניות ההוראה שלהם במתמטיקה. עידוד תלמידים להגיע לתוצאות בדרכים שונות יחזק את ההערכה שלהם כלפי המתמטיקה, ייתן להם תמריץ להפיק בעצמם אפילו יותר פתרונות אלגנטיים ויספק להם הזדמנות להגיע לתובנה מקורית בנושא הוכחות במתמטיקה. כבנוס, הבעיה שהוצגה סיפקה הפתעה נעימה בכך שפתרונה גילה משולש מיוחד עם תכונות מעניינות. כהשלכה מהניסיון שלנו במאמר הזה, אנו טוענים שראשית יש למלא את הצורך שהקהילה המתמטית-חינוכית תיצור עוד בעיות אותנטיות רבות, כאלו המתאימות לריבוי דרכי פתרון והוכחות, ורק לאחר מכן לבדוק ולחקור את תוצאות היישום שלהן בהוראת מתמטיקה ובלמידתה. בעיות מרובות פתרונות מהוות את הבסיס שעליו בנוי הקורס המכונה "פיתוח חשיבה במתמטיקה" בהכשרת פרחי הוראה במתמטיקה לבית-הספר העל-יסודי במכללת שאנן. אנו נדווח על מחקר זוטא שבדק את דעות הסטודנטים שהשתתפו בקורס ודעות מרצים שונים במכללות בנושא השימוש בבעיות מרובות פתרונות.

מילות מפתח: הוכחות במתמטיקה; פתרון בעיות; ריבוי פתרונות והוכחות; סביבות גאומטריות דינמיות; תוכנות גאומטריות דינמיות.

1. מבוא

מטרת המאמר הזה היא להראות עד כמה קשורים זה לזה הנושאים המתמטיים השונים הנלמדים בבית-הספר התיכון, ובמיוחד כיצד הגאומטריה האוקלידית מהווה בסיס שעליו בנויים נושאים של הגאומטריה האנליטית, הטריגונומטריה, תורת הווקטורים והמספרים המרוכבים. כפועל יוצא מכך, מטרת משנה היא לבדוק את אפשרות השימוש בבעיות מרובות פתרונות בדרכים שונות ובאמצעות נושאים מתמטיים שונים בהכשרת מורים במתמטיקה, ובפרט בהכשרת פרחי הוראה במתמטיקה של בית-הספר העל-יסודי.

מנקודת מבט פדגוגית-דידקטית, המאמר הזה מציג בעיה מתמטית ספציפית, שבמבט ראשון נראה שיש לפתור אותה רק בעזרת גאומטריה אוקלידית. אולם אנו נראה בעקבות כך, שהיא ניתנת לפתרון בעזרת שיטות אחדות נוספות, חלקן גאומטריות ואחרות מבוססות על שטחים אחרים במתמטיקה.

הקיום של ריבוי הוכחות למציאת הפתרון, לא רק מציג לתלמידים את היופי והאסתטיקה של המתמטיקה (Dreyfus & Eisenberg, 1986; Sinclair, 2011), אלא גם מקדם את ההבנה המתמטית של התלמידים על-ידי הצגת חומרים מנקודות מבט שונות. היופי של המתמטיקה מתעצם עוד יותר על-ידי השימוש בתוכנה גאומטרית דינמית (DGS – Dynamic Geometry Software).

נוסף על כך, הבעיה המוצגת במאמר זה מגלה תוצאה מפתיעה: משולש מיוחד עם תכונות מעניינות, שלפי מיטב ידיעתנו, עדיין לא הופיע בספרות המקצועית של המתמטיקה.

2. הוכחות במתמטיקה

הוכחות וטיעונים הם אבני יסוד בפתרון בעיות מתמטיות: הם עוזרים לנו לפרש את המתמטיקה, לקשר רעיונות מתמטיים ולהצדיק את תקפותם של משפטים מתמטיים (Martin et al., 2005). לעולם לא ניתן לפקפק בחשיבות ההוכחה במתמטיקה בכלל, ולא במתמטיקה הבית-ספרית בפרט (Harel & Sowder, 2007). תפקידי ההוכחה הם להוכיח, להסביר ולשכנע (Hanna, 1990; Hersh, 1993).

סטיליאנידס (Stilianides, 2007) מגדיר הוכחה כ"טענה מתמטית, סידרה קשורה של טיעונים בעד או נגד טענה מתמטית, בעלת המאפיינים הבאים:

1. משתמשת באמרות/משפטים המקובלים על-ידי הקהילה המתמטית (קבוצה של משפטים), אשר נכונים וניתנים להשגה ללא צורך בהצדקה נוספת.
2. משתמשת בצורות של שכיחה/הסקת מסקנות (דפוסים של הנמקה) תקפות או ידועות לקהילה הלומדת, או בתחום ההמשגה שלה.
3. מתקשרת בעזרת צורות ביטוי (דפוסים של הצעת טענות) אשר מתאימות וידועות לקהילה הלומדת, או בתחום ההמשגה שלה" (עמ' 291).

לו ומקרורי (Lo & McCrory, 2009) מציעים שכדי להבין פעילויות הוכחה בקורסים מתמטיים, יש להוסיף אלמנט רביעי להגדרה:

4. ההוכחה מתייחסת לאובייקטים בתוך הקונטקסט (תלויי קונטקסט) הקובעים מה צריך להוכיח.

ראב (Rav, 1999) מציין, שהוכחה היא בעלת ערך, לא רק בשל הצגת תוצאה כלשהי, אלא גם כי היא יכולה להציג שיטות, כלים, אסטרטגיות ומושגים חדשים בעלי שימוש נרחב יותר במתמטיקה והפותרים כיוונים מתמטיים חדשים. לפי השקפתו של ראב (Rav, 1999), לא ניתן לוותר על הוכחות בהקשר להרחבת הידע המתמטי והן למעשה "הלב של המתמטיקה, הדרך הסלולה ליצירת כלים אנליטיים וזירוז הצמיחה" (עמ' 6). כפי שראב (Rav, 1999) כותב בתזה שלו: "הוכחות, לעומת צורת הניסוח של המשפטים, הן המטען של הידע המתמטי" (עמ' 20).

המי ולפוול (Hemmi & Lofwall, 2009) ביצעו מחקר שבדקו בו השקפות של מתמטיקאים על התועלת בלמידת הוכחות, ובעקבות כך הם הסיקו כי "כל המתמטיקאים במחקר שלהם סברו שהוכחות הן בעלות ערך עבור הסטודנטים, מפני שהן מציעות להם שיטות חדשות, מושגים חשובים והתנסות בחשיבה לוגית הנחוצה בפתרון בעיות" (עמ' 201). אי לכך, אין זה פלא שפיתוח היכולת של סטודנטים להוכיח ולהפעיל שיקול דעת הוא אחת המטרות של הסטנדרטים של תכניות הלימודים בהרבה ארצות. לדוגמה עיקרון אחד במתמטיקה הבית-ספרית בארה"ב הוא: "שיקול דעת והוכחה צריכים להיות חלק עקבי בהתנסויות המתמטיות של הסטודנטים, מהגן ועד סוף בית-הספר התיכון" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

למידת מתמטיקה באופן בסיסי אמורה להיות ממוקדת "ברכישת נקודת מבט מתמטית", "בפיתוח שכיחה מתמטית", "בלמידה לתקשר מתמטית", "בביצוע קישוריות במתמטיקה" ו"בבניית קשרים עם דיסציפלינות והתנסויות אחרות" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 56).

מכיוון שלמידת מתמטיקה עוסקת בגילוי, בהוכחה ובשיקול דעת, אלו הן דרכים משמעותיות לפיתוח תובנה, עשיית קשרים וביצוע תקשורת מתמטית. המועצה הלאומית של מורים למתמטיקה (להלן NCTM) מחזקת את העובדה הזו בטענה: "להיות מסוגל להפעיל שיקול דעת הוא חיוני להבנה" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 56). טענה זו מצביעה על כך שבקואות בהוכחה מתמטית והפעלת שיקול דעת הם חלק בלתי נפרד של המתמטיקה!

בדומה ל-NCTM, חוקרים בולטים בחינוך מתמטי גם טוענים שלא ניתן להמעיט בערך של תפקיד הארגומנטציה וההוכחה בלמידת הסטודנטים, והם תומכים ברעיון של הכללת הנושא הזה בתכנית הלימודים הבית-ספרית ובתכניות הכשרה של מורים למתמטיקה. לדוגמה, בול ועמיתותיה (Loewenberg Ball et al., 2000), דריפוס (Dreyfus, 2000) והנה (Hanna, 1996) תומכים בעמדה הזו:

"הוכחה היא מרכזית במתמטיקה וככזו היא חייבת להיות מרכיב מרכזי של חינוך מתמטי. הדגשה זו מוצדקת לא רק כי הוכחה היא בלב הפרקטיקה המתמטית, אלא גם בגלל שהיא כלי חינוכי לקידום ההבנה המתמטית" (Loewenberg Ball et al., 2000).

דריפוס (Dreyfus, 2000) מציין כי "הוכחה היא בלבה של המתמטיקה, ונחשבת כמרכזית בהרבה תכניות של בתי-הספר התיכוניים".

הנה (Hanna, 1996) קובעת ש"הוכחה ראויה למקום בולט בתכנית הלימודים, מפני שהיא ממשיכה להיות סממן בולט של המתמטיקה עצמה, כשיטה מועדפת של אימות, ומפני שהיא כלי בעל ערך בקידום ההבנה המתמטית".

3. בעיה אחת - הרבה דרכי פתרון והוכחה

אנשי חינוך מתמטי מסכימים שקישור רעיונות מתמטיים על-ידי שימוש ב יותר מגישה אחת לפתרון אותה בעיה הוא אלמנט חיוני בהתפתחות השכיחה המתמטית (Schoenfeld, 1985; Polya, 1973; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

פתרון בעיות בדרכים שונות גם דורש וגם מפתח ידע מתמטי (Polya, 1973), ומעודד גמישות ויצירתיות במחשבה המתמטית האינדיבידואלית (Leiken & Lev, 2007; Tall, 2007).

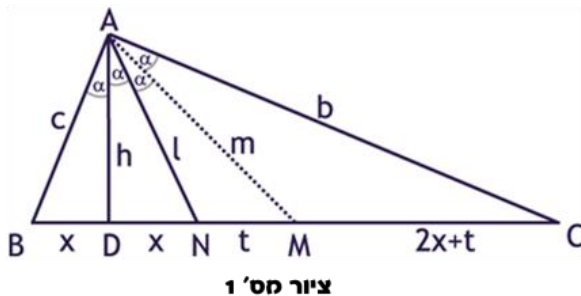
בתוספת לתפקיד הייחודי של הוכחה במתמטיקה, אנו סבורים שניסיונות להוכיח תוצאה מסוימת (או לפתור בעיה) על-ידי שימוש בשיטות ממספר ענפים שונים במתמטיקה (גאומטריה, טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים וכדומה) הם מאוד חשובים לפיתוח העמקת ההבנה המתמטית, לפיתוח יצירתיות, להערכת הערך של ארגומנטציה והוכחה בלמידת נושאים מתמטיים שונים. הגישה שלנו, של הצגת ריבוי הוכחות לאותה בעיה, כמכשיר לבניית קישורים מתמטיים, נתמכת על-ידי פוליה (Polya, 1973, 1981), שונפלד (Schoenfeld, 1988), ארסוז (Ersoz, 2009), NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) ולבב-וויינברג ולייקין (Levav- & Wayneberg, 2009).

בדומה מאוד לרעיון שלנו, של "בעיה אחת, ריבוי פתרונות/הוכחות", קיים הרעיון של מטלות בעלות ריבוי פתרונות (multiple solution tasks) המוצגים על-ידי לייקין ולב (Leiken & Lev, 2007), לייקין (Leiken, 2009), לבב-וויינברג ולייקין (Levav-Wayneberg & Leiken, 2009). במסגרת הרעיון הזה, קיימת דרישה ברורה להוכחת משפט או טענה במספר דרכים. לייקין (Leiken, 2009) מציינת שההבדלים בין ההוכחות מתבססים על (1) הצגות שונות של מושג מתמטי; (2) תכונות שונות (הגדרות או משפטים) של מושגים מתמטיים מנושא מתמטי מסוים; (3) כלים ומשפטים מתמטיים מענפים מתמטיים שונים; (4) משפטים וכלים שונים מנושאים שונים (לא בהכרח מתמטיקה). במקרה שלנו, אנו מיישמים את הסוג השלישי של ההבדלים בין ההוכחות: אנו נציג פתרונות שונים לבעיה באמצעות כלים ומשפטים של גאומטריה אויקלידית, גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה, וקטורים ומספרים מרוכבים.

תוספת המושג של ריבוי דרכי פתרון לבעיה אחת לתכנית הלימודים של מתמטיקה, כמו גם את המטלות בעלות ריבוי פתרונות, מאפשרת את ההתפתחות של ידע מתמטי מקושר לא רק בעבור הסטודנטים אלא גם בעבור מוריהם.

4. הצגת הבעיה'

נתון משולש ABC שאורכי צלעותיו הם: $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$. מהקודקוד A מעבירים את שלושת הקטעים הבאים: את הגובה AD לצלע BC המסומן ב- h , את חוצה זווית $\angle A$ המסומן ב- l ואת התיכון AM לצלע BC המסומן ב- m , כפי שניתן לראות בציור מס' 1. נתון ששלושת הקטעים מחלקים את זווית $\angle A$ לארבע זוויות שוות, שכל אחת מהן מסומנת ב- α . יש למצוא את ערכה של זווית זו.



דרכ א' - שימוש בהנדסת המישור

ברור שהמשולש $\triangle BAN$ משולש שווה שוקיים, שכן $AB = AN = l = c$ (משולש שבו הגובה וחוצה הזווית מתלכדים). מעובדה זו ניתן לסמן $BD = DN = x$ ו- $NM=t$.

- (1) (על-פי משפט חוצה הזווית) $\frac{m}{h} = \frac{t}{x}$, על-פי משולש $\triangle ADM$
- (2) (על-פי משפט חוצה הזווית) $\frac{b}{l} = \frac{b}{c} = \frac{2x+t}{t}$, על-פי משולש $\triangle ANC$
- (3) (על-פי משפט חוצה הזווית) $\frac{b}{c} = \frac{2x+2t}{2x} = \frac{x+t}{x}$, על-פי משולש $\triangle ABC$
- (4) $\frac{2x+t}{t} = \frac{x+t}{x} \Rightarrow t = x\sqrt{2}$ על-ידי שימוש בקשרים (2) ו-(3) מקבלים:

1. המקור לבעיה והנצחה: את המשימה שעליה מבוסס המאמר הציג לאחד מהמחברים המורה למתמטיקה, מנחם אורנשטיין ז"ל, מבית-הספר נעל"ה שבכפר הנוער צבי סיטריין – חוף הכרמל, שנדרס למוות ביציאה מבית-הספר, בדרכו לביתו ביישוב צופים (מזרחה לכפר-סבא). מנחם ז"ל אהב בכל נפשו את הוראת המתמטיקה והיה אהוד על כל תלמידיו. אנו מקדישים מאמר זה לזכרו. יהי זכרו ברוך.

$$(5) \quad m = \frac{ht}{x} = \frac{hx\sqrt{2}}{x} = h\sqrt{2} \quad \text{על-ידי שימוש בקשרים (1) ו-(4) מקבלים:}$$

על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש $\triangle ADM$ מקבלים:

$$(6) \quad (DM)^2 + h^2 = m^2 \Rightarrow (x+t)^2 + h^2 = m^2$$

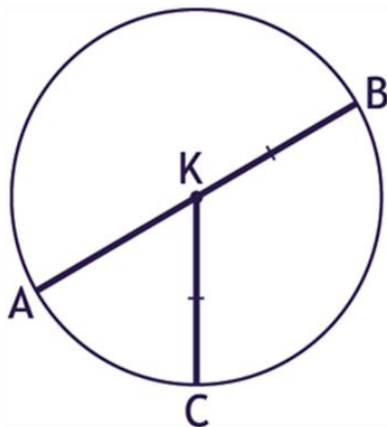
על-ידי שימוש בקשרים (4) ו-(5) מקבלים:

$$(7) \quad [x(1+\sqrt{2})]^2 + h^2 = 2h^2 \Rightarrow h = x(1+\sqrt{2}) \Rightarrow h = DM$$

על-ידי שימוש בקשר (7) מקבלים, שמשולש $\triangle ADM$ הוא ישר-זווית ושו"ש, כלומר, $2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$. התוצאה הסופית מפתיעה, ומחייבת שהמשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית בקודקוד A .

התייחסות למשימה ההפוכה: המשימה ההפוכה היא: נתון משולש בעל זוויות חדות של $\angle BCA = 22.5^\circ$ ו- $\angle ABC = 67.5^\circ$ ודרך הקודקוד A (של הזווית הישרה) מעבירים בתוך המשולש שלושה קטעים המחלקים את הזווית לארבע זוויות שוות. יש להוכיח שקטעים אלו הם: גובה, חוצה-זווית ותיכון לצלע BC . במקרה זה, ההוכחה פשוטה מאוד בהשוואה למשימה המקורית. בחלק מהמקרים ההוכחות של המשפט ושל המשפט ההפוך קלות וישנם מקרים שההוכחה באחד הכיוונים קלה אך בכיוון ההפוך היא קשה הרבה יותר. דוגמה בולטת לכך, היא ההוכחה הקשה של המשפט: "אם במשולש שווים באורכם שנים מחוצי-הזוויות, אזי המשולש הוא שו"ש", לעומת הקלות שבהוכחת המשפט ההפוך.

הערה דידקטית: כצפוי, מרבית הסטודנטים והמורים שנתבקשו לפתור את משימת המאמר החלו לפתור אותה בדרך גאומטרית המשתמשת במשפט חוצה הזווית, כפי שהוצג בפתרון א' וזאת מהסיבה שבמשימה ישנם שלושה משולשים שבכל אחד מהם עובר חוצה זווית.



ציור מס' 2

דרך ב' - שימוש בהנדסת המישור

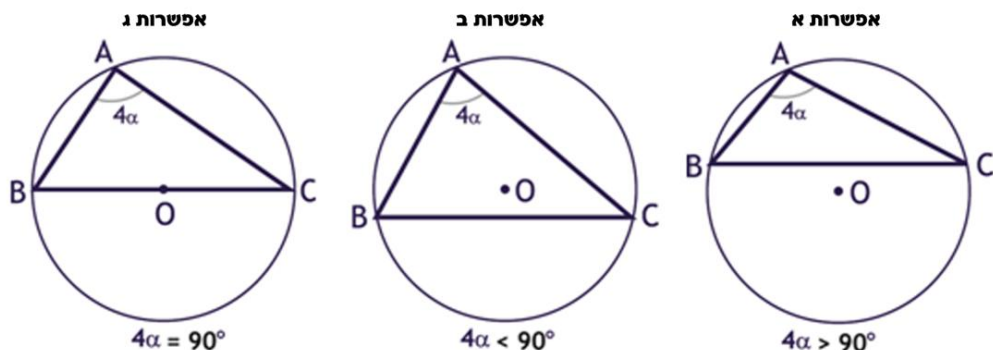
משפט עזר: אם AB הוא קוטר של מעגל ו- K היא נקודה על הקוטר כך ש- $KB=KC$ אזי הנקודה K היא מרכז המעגל (ראו ציור מס' 2).

$$\angle KCB = \angle KBC \Rightarrow \angle ACK = 90^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

$$\angle CKB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle AKC = 2\alpha$$

אפשרות ג: אם $4\alpha = 90^\circ$, אזי מיקום המרכז O נמצא על בסיס המשולש.

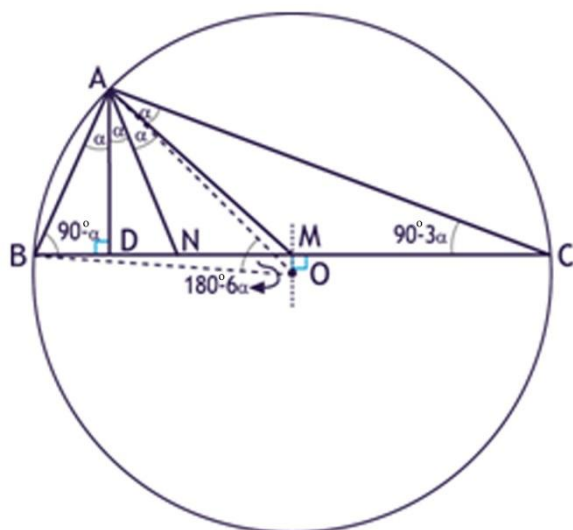
שלוש האפשרויות מתוארות בציור מס' 4.



ציור מס' 4

ברור שמרכז המעגל החוסם O נמצא על האנך האמצעי לצלע BC. השימוש בדרך השלילה מטרתו להוכיח שאפשרויות א ו-ב של מיקום מרכז המעגל יוצרות סתירה.

אפשרות א: מחברים את מרכז המעגל O עם הקודקודים A ו-B של המשולש (ראו ציור מס' 5).



ציור מס' 5

הזווית

$$\angle AOB = 2(90^\circ - 3\alpha) = 180^\circ - 6\alpha$$

(לפי שזווית מרכזית שווה לכפליים הזווית ההיקפית הנשענות על אותה קשת).

מאחר ש- $OA = OB$ (רדיוסים) הרי שמשולש $\triangle AOB$ הוא שווה שוקיים ולכן $\angle OAB = 3\alpha$ מאחר ש-

$$\angle OAB < \angle MAB \text{ מתקבל}$$

ש- $3\alpha < \angle MAB$ והרי זה בסתירה לנתון ש- $\angle MAB = 3\alpha$,

כלומר נשללת אפשרות א

ש- $90^\circ < \angle BAC$.

אפשרות ב: כמו באפשרות א,

מחברים את מרכז המעגל O עם הקודקודים A ו-B (ראו ציור מס' 6).

גם במקרה זה

$$\angle AOB = 180^\circ - 6\alpha \text{ והזווית}$$

$$\angle OAB = 3\alpha$$

מאחר ש- $\angle OAB > \angle MAB$,

מתקבל ש- $3\alpha > \angle MAB$.

הדבר מהווה סתירה לנתון

ש- $\angle MAB = 3\alpha$, כלומר נשללת

אפשרות ב' שהזווית $\angle BAC$

קטנה מ- 90° .

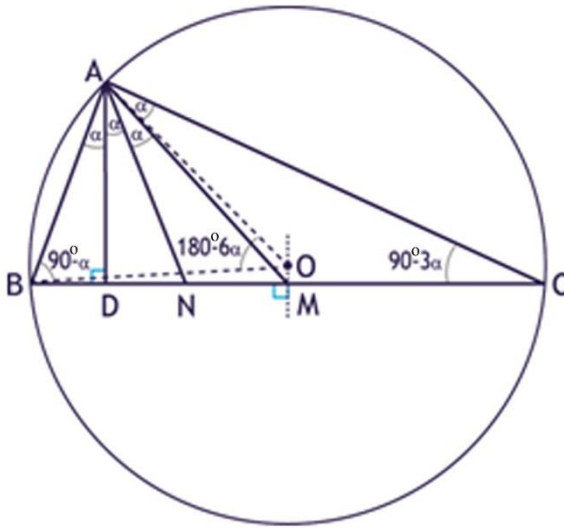
המסקנה:

האפשרות היחידה שקיימת היא

אפשרות ג, שבה $4\alpha = 90^\circ$, כלומר

המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש

ישר-זווית ו- $\alpha = 22.5^\circ$.



ציור מס' 6

הערות מתודיות: בהוכחה בדרך השלילה יש לבדוק את כל האפשרויות ולשלול את כולן, פרט לאחת שהיא האפשרות הנכונה. ראוי לציין שתלמידים מתקשים להבין את הדרך הזו של ההוכחה בדרך השלילה, ולכן תלמידים נמנעים בדרך-כלל להשתמש בדרך זו.

במסגרת חיפוש פתרונות גאומטריים נמצאו שני פתרונות נוספים המבוססים על חסימת המשולש הנתון במעגל. בפתרונות הנוספים שנמצאו לא נעשה שימוש במשפט חוצה הזווית או הוכחה בדרך השלילה.

דרך ד' - שימוש בטריגונומטריה

נמצאו מספר פתרונות

טריגונומטריים שבהם נעשה שימוש

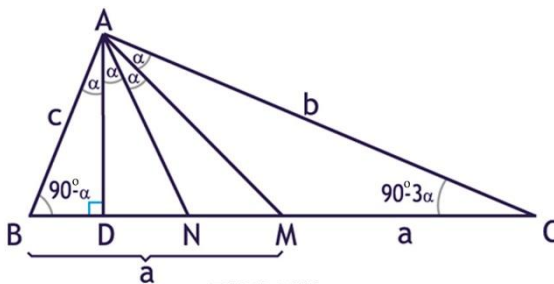
במשפט הסינוסים או הקוסינוסים

וכן פתרון שבו נעשה שילוב עם

חישוב שטחים. כל אחד מפתרונות

אלו מחייב שימוש בזהויות

טריגונומטריות ובשלב הסופי פתרון



ציור מס' 7

של משוואה טריגונומטרית. הפתרון המוצג במקרה זה הוא הפשוט מבין הפתרונות שהושגו. בשלב הראשון מסמנים: $BC=2a$ (ראו ציור מס' 7).

בשלב השני מבטאים את אורכו של התיכון AM על-ידי שימוש במשפט הסינוסים בשני משולשים שונים והשוואה בין שני הביטויים שמתקבלים.

$$(1) \quad \frac{AM}{\sin(90^\circ-3\alpha)} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow AM = \frac{a \cos 3\alpha}{\sin \alpha}, \text{ מקבלים } \triangle AMC \text{ מהמשולש}$$

$$(2) \quad \frac{AM}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{a}{\sin 3\alpha} \Rightarrow AM = \frac{a \cos \alpha}{\sin 3\alpha}, \text{ מקבלים } \triangle AMB \text{ מהמשולש}$$

מהשוואת קשרים (1) ו-(2) מקבלים,

$$\frac{a \cos 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha}{\sin 3\alpha} \Rightarrow 2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ועל-ידי שימוש בזהות של סינוס זווית כפולה מקבלים את המשוואה הטריגונומטרית,

$$\sin 6\alpha = \sin 2\alpha \text{ שפתרונותיה הם:}$$

$$6\alpha = 180^\circ - 2\alpha + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ + 45^\circ k$$

או

$$6\alpha = 2\alpha + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 90^\circ k$$

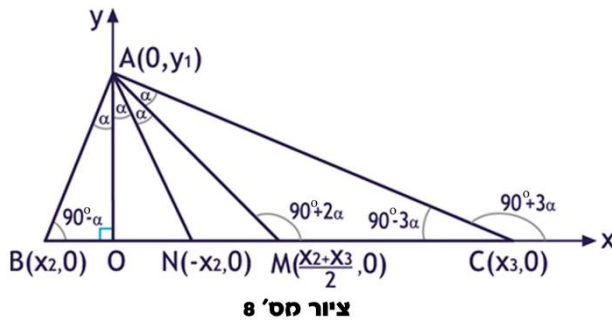
(כאשר k מספר שלם).

הפתרון הרלוונטי היחיד לבעיה הנתונה הוא $\alpha = 22.5^\circ$ ועל כן המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית.

הפתרון הטריגונומטרי אינו נזקק לבניית עזר, אך מחייב יידע של זהויות טריגונומטריות ויכולת פתרון של משוואה טריגונומטרית.

דרך ה' - שימוש בהנדסה אנליטית

מיקום קודקודי המשולש $\triangle ABC$ במערכת הצירים מופיע בציור מס' 8. שיעורי קודקוד A הנמצא על ציר ה- y הם: $A(0, y_1)$. הקודקודים B ו- C נמצאים על ציר ה- x והשיעורים שלהם מסומנים: $B(x_2, 0)$ ו- $C(x_3, 0)$. עקב הגובה AO בנקודה $O(0,0)$ שהיא גם ראשית הצירים.



בהתאם לשיעורי הקודקודים B ו-C נקבעו שיעורי הנקודות M ו-N כדלקמן:

$$N(-x_2, 0), M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, 0\right)$$

בהסתמך על כך שמשולש $\triangle ABN$ הוא משולש שוו"ש.

ממשולש $\triangle AOB$ נובע ששיפוע הצלע AB – הוא:

$$(1) \quad \frac{y_1-0}{0-x_2} = \frac{-y_1}{x_2} = \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow x_2 = -y_1 \tan \alpha$$

ממשולש $\triangle AOM$ נובע ששיפוע התיכון AM הוא:

$$(2) \quad \frac{y_1-0}{0-\frac{x_2+x_3}{2}} = \tan(90^\circ + 2\alpha) = -\tan(90^\circ - 2\alpha) = \frac{-1}{\tan 2\alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{x_2+x_3}{2y_1}$$

ממשולש $\triangle AOC$ נובע ששיפוע הצלע AC הוא:

$$(3) \quad \frac{y_1-0}{0-x_3} = \tan(90^\circ + 3\alpha) = -\tan(90^\circ - 3\alpha) = \frac{-1}{\tan 3\alpha} \Rightarrow x_3 = y_1 \tan 3\alpha$$

על-ידי הצבה בקשר (2) של ערכי x_2 ו- x_3 , כפי שמופיעים בקשרים (1) ו-(3), מקבלים

$$(4) \quad \tan 2\alpha = \frac{-y_1 \tan \alpha + y_1 \tan 3\alpha}{2y_1}, y_1 \neq 0 \Rightarrow 2 \tan 2\alpha = \tan 3\alpha - \tan \alpha$$

כשרושמים את $\tan 2\alpha$ בצורה $\tan(3\alpha - \alpha)$ ומשתמשים בנוסחה של $\tan(\alpha - \beta)$ מקבלים,

$$2 \frac{\tan 3\alpha - \tan \alpha}{1 + \tan 3\alpha \tan \alpha} = \tan 3\alpha - \tan \alpha, \tan 3\alpha - \tan \alpha \neq 0$$

מקבלים את הקשר, $\tan 3\alpha \tan \alpha = 1$ שמוביל לקשר $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha = 0$, שממנו מקבלים, $\cos 4\alpha = 0$ ולכן $4\alpha = 90^\circ$. כלומר המשולש $\triangle ABC$ הנתון הוא ישר-זווית.

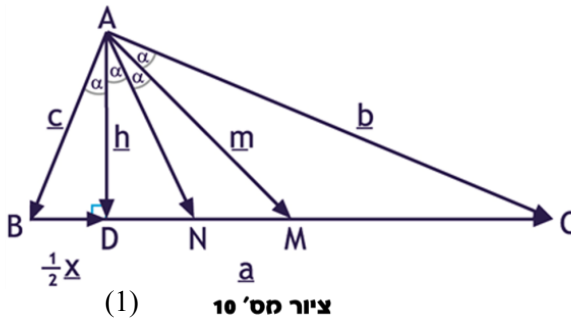
על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש $\triangle ADM$ מקבלים $AM = a$. ולכן משולש $\triangle BAC$ הוא ישר-זווית לפי המשפט: "אם במשולש התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש ישר-זווית", כלומר $\angle BAC = 90^\circ$.

התוצאה האחרונה מפתיעה משום שבפתרון לא נעשה כל שימוש בחוצה הזווית. דבר זה מביא למסקנה שכאשר הגובה במשולש יוצר זווית כלשהי עם הצלע של המשולש וגם התיכון היוצא מאותו קודקוד יוצר את אותה זווית עם הצלע השנייה אז המשולש חייב להיות ישר-זווית (סיגלר, 2004).

הערה מתודית: לפי פתרונות ה'-ו', רואים שבפתרונות בדרך של הנדסה אנליטית חייבת להיות מימונות לבחירת מיקומו של המשולש במערכת הצירים וכן ידע בטריגונומטריה שבלעדיו לא ניתן לפתור את המשימה.

דרך ז' - הוכחה על-ידי שימוש בווקטורים

סימון הווקטורים הוא כדלקמן:



$$\vec{BC} = \underline{\quad}, \vec{AC} = \underline{\quad}, \vec{AB} = \underline{c}$$

$$\vec{AM} = \underline{a}, \vec{BN} = \underline{x}, \vec{AD} = \underline{h}$$

סימון הווקטורים מופיע גם בציור מס' 10.

בהתאם לסימון מקבלים $\underline{a} = \underline{b} - \underline{c}$

המשולשים $\triangle ADB$ ו- $\triangle ADC$ הם ישרי-זווית וגם $b > c$, וזאת משום שהם בעלי צלע משותפת (הגובה) וגם $DC > DB$.

ממשפט חוצה הזווית במשולש $\triangle ABC$ מקבלים את הקשר הבא,

$$(1) \quad \underline{x} = (\underline{a} - \underline{x}) \cdot \frac{c}{b}, \text{ ועל-ידי חילוף מקבלים,}$$

$$(2) \quad \underline{x} = \underline{a} \cdot \frac{c}{c+b} = (\underline{b} - \underline{c}) \cdot \frac{c}{c+b}$$

בהתאם לסימון הווקטורים הביטוי לווקטור הגובה הוא,

$$\underline{h} = \underline{c} + \frac{1}{2} \underline{x}, \text{ ובעזרת קשר (2) מקבלים,}$$

$$(3) \quad \underline{h} = \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c}) \frac{c}{c+b}$$

מאחר שהווקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{h}$ ניצבים זה לזה אזי המכפלה הסקלרית שלהם $\underline{a} \cdot \underline{h} = 0$.

הצבת ערכי הווקטורים, כפי שמופיעים בקשרים (1) ו-(3), במכפלה הסקלרית מניבה את הקשר הבא,

$$(\underline{b} - \underline{c}) \left[\underline{c} + \frac{1}{2} \frac{c}{b+c} (\underline{b} - \underline{c}) \right] = 0$$

$$(4) \quad \underline{b} \cdot \underline{c} = \frac{c(c^2 + 2cb - b^2)}{2b}$$

ממשולש $\triangle ADM$ מקבלים $\cos 2\alpha = \frac{h}{m}$. בעזרת משפט חוצה הזווית מקבלים,

$$\frac{\frac{h}{m}}{\frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{2}}} = \frac{\frac{h}{m}}{\frac{x}{2}} \quad \text{ומכאן ערך הווקטור} \quad \underline{x} = \underline{a} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha} \quad \text{על-ידי שימוש בקשר (2) מקבלים,}$$

$$(5) \quad \cos 2\alpha = \frac{c}{b-c} \quad \text{או לאחר חילוף} \quad \frac{\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha} = \frac{c}{c+b}$$

מהזהות הטריגונומטרית $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$ ומקשר (5) מקבלים,

$$\cos 4\alpha = \frac{2c^2}{(b-c)^2} - 1 = \frac{c^2 + 2cb - b^2}{(b-c)^2} \quad \text{או בצורה,}$$

$$(6) \quad c^2 + 2bc - b^2 = (b-c)^2 \cos 4\alpha$$

בהסתמך על קשר (6), ניתן לרשום את קשר (4) בצורה,

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = \frac{c}{2b} \cdot (b-c)^2 \cos 4\alpha$$

מצד אחר ניתן לרשום את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ בצורה הבאה,

$\underline{b} \cdot \underline{c} = b \cdot c \cos 4\alpha$ ועל-ידי השוואת שני הביטויים שהתקבלו למכפלה הווקטורית של $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ מקבלים,

$$\cdot \cos 4\alpha \left[bc - \frac{c}{2b} \cdot (b-c)^2 \right] = 0$$

האפשרות הראשונה היא $\cos 4\alpha = 0$, שמשמעותה $4\alpha = 90^\circ$.

האפשרות השנייה נותנת את הקשר $(b-c)^2 = 2b^2$ או בצורה $\frac{1}{2b} \cdot (b-c)^2 = b$

לאחר הוצאת שורש ריבועי והוצאת גורם משותף מקבלים $b(\sqrt{2}-1) = -c < 0$.

היות ולפי הנתון $b > c$ וכן $\sqrt{2}-1 > 0$, הרי שהאפשרות השנייה נדחית והמסקנה הסופית היא שהמשולש הנתון חייב להיות ישר-זווית.

ראוי לציין שלמרות שההוכחה בעזרת ווקטורים מסובכת ומורכבת יותר בהשוואה להוכחות האחרות, ואף מחייבת שילוב של הנדסת מישור וטריגונומטריה, יש לאלגברה הווקטורית חשיבות רבה ככלי להוכחה ופתרון בעיות כשבחלק מהמקרים היא הדרך הפשוטה יותר בהשוואה לדרכים האחרות.

דרך ח' - שימוש במספרים מרוכבים²

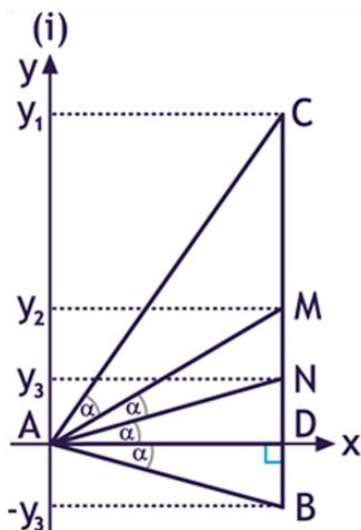
נבחר מערכת צירים כך שהקודקוד A הוא בראשית הצירים והגובה AD מונח על ציר ה- x בכיוון החיובי. מסמנים את הגובה ב- $AD = x$ ואת הצלעות $AC = b$, $AB = c$.

התיאור של המשולש במערכת הצירים של מישור גאוס מופיע בציור מס' 11.

בציור ציר ה- x הוא ציר המספרים הממשיים וציר ה- y הוא הציר המדומה iy .

הנקודות: C ו- M, N, D, B הן בעלות אותו שיעור של $-x$.

סימונים נוספים: $DC = y_1$, $DM = y_2$, $DN = y_3$ (ברור ש- $DB = -y_3$).



ציור מס' 11

במישור גאוס שיעורי הנקודות כדלקמן:

$$C: z_1 = x + iy_1; M: z_2 = x + iy_2; N: z_3 = x + iy_3; B: z_3 = x - iy_3$$

כעת מבטאים את $(z_3)^2$ בדרך אלגברית ובדרך טריגונומטרית:

$$(z_3)^2 = (x + iy_3)^2 = (x^2 - (y_3)^2) + 2xy_3i$$

בדרך טריגונומטרית על-ידי נוסחת דה-מואבר

$$(z_3)^2 = |z_3|^2 \operatorname{cis} 2\alpha = (x^2 + (y_3)^2)(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$

2. העיקרון של הוכחה זו: בעקבות הצגת הבעיה הנ"ל לקבוצת פרחי הוראה ובקשה לפתור אותה בדרכים שונות, קיבלנו את עיקרי ההוכחה בעזרת מספרים מרוכבים מאחת הסטודנטיות (אירנה לריאנוב). אנו הרחבנו את ההוכחה ומציגים אותה במאמר הזה.

כשמשווים את הערכים הממשיים ואת הערכים המדומים בשני הביטויים מקבלים:

$$x^2 - (y_3)^2 = (x^2 + (y_3)^2) \cos 2\alpha$$

$$2xy_3 = (x^2 + (y_3)^2) \sin 2\alpha$$

על-ידי חלוקת שני הקשרים האחרונים זה בזה, מקבלים את הקשר הבא:

$$(1) \quad \tan 2\alpha = \frac{2xy_3}{x^2 - (y_3)^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{y_2}{x} \quad \text{ממשולש } \triangle AMD \text{ מקבלים}$$

היות והנקודה M היא נקודת האמצע של הצלע BC, הרי ששיעור ה- y שלה הוא

$$(2) \quad y_2 = \frac{y_1 + (-y_3)}{2}$$

ומכאן מקבלים

$$(3) \quad \tan 2\alpha = \frac{y_1 - y_3}{2x}$$

מהשוואת הביטויים של $\tan 2\alpha$ שבקשרים (1) ו-(3) מקבלים

$$\frac{y_1 - y_3}{2x} = \frac{2xy_3}{x^2 - (y_3)^2}, \text{ שלאחר טיפול אלגברי מקבל את הצורה}$$

$$(4) \quad \left(\frac{y_3}{x}\right)^2 = \frac{y_1 - 5y_3}{y_1 - y_3}$$

ממשולש $\triangle AND$ מקבלים $\tan \alpha = \frac{y_3}{x}$, ועל-ידי הצבה בקשר (4) מקבלים

$$(5) \quad \tan^2 \alpha = \frac{y_1 - 5y_3}{y_1 - y_3}$$

ממשפט חוצה הזווית מקבלים:

$$\text{במשולש } \triangle ANC \quad \frac{b}{c} = \frac{AC}{AN} = \frac{CM}{MN} = \frac{J_1 - J_2}{J_2 - J_3}$$

מקשר (2)

$$J_2 = \frac{J_1 - J_3}{2}$$

מקבלים,

$$\frac{b}{c} = \frac{J_1 + J_3}{J_1 - 3J_3}$$

במשולש $\triangle ABC$

$$\frac{b}{c} = \frac{CN}{NB} = \frac{J_1 - J_3}{2J_3}$$

$$\frac{J_1 - J_3}{2J_3} = \frac{J_1 + J_3}{J_1 - 3J_3} \quad \text{מקבלים } \frac{b}{c}, \text{ מהשוואת הביטויים של}$$

ועל-ידי טיפול מתמטי מקבלים את המשוואה:

$$\frac{J_1}{J_3} = 3 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{שפתרונותיה הם:} \quad \left(\frac{J_1}{J_3}\right)^2 - 6\left(\frac{J_1}{J_3}\right) + 1 = 0$$

$$\cdot \text{ מהציור ברור ש- } \frac{J_1}{J_3} > 1 \text{ ולכן } \frac{J_1}{J_3} = (3 + 2\sqrt{2})J_3$$

על-ידי הצבת הביטוי האחרון בביטוי של $\tan^2 \alpha$ כפי שמופיע בקשר (5) מקבלים

$$\cdot \alpha = 22.5^\circ, \tan^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \text{ , וניתן למצוא בעזרת מחשבון ש-}$$

ניתן להימנע מלהיעזר במחשבון על-ידי שימוש בזהות הטריגונומטרית: $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$ כאשר

$$\tan^2 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad \text{הזווית } \alpha = 45^\circ \text{ , ואז מקבלים}$$

כלומר מתקבלת זווית של 22.5° , ולכן $\angle BAC = 90^\circ$.

5. "הוכחה למחצה" ושכילה אינדוקטיבית על-ידי שימוש בסביבה גאומטרית

דינמית (Dynamic Geometry Environment - DGE)

הכנסת התוכנות הגאומטריות הדינמיות (DGS= Dynamic Geometry Software) כגון ה-Geometers Sketchpad, ולאחרונה ג'יאוג'ברה (Geogebra) לכיתות יוצרות אתגר למקובל בלמידת משפטים והוכחות דדוקטיביות בהוראה ובלמידה של גאומטריה אויקלידית. סטודנטים/לומדים יכולים להתנסות באמצעות גרירות שונות ושינויים תכופים של אובייקטים גאומטריים שהם בונים, וכתוצאה מכך יכולים להסיק תכונות, הכללות והשערות בנוגע להוויה הגאומטרית.

פעולות הגרירה של אובייקט גאומטרי מאפשרות לסטודנטים להבין/לתפוס מחלקה שלמה של אובייקטים שבהם ההשערה המסוימת היא אינוריאנטית (אינה משתנה), ולכן הסטודנטים משתכנעים שההשערה שלהם תהיה תמיד נכונה (de Villiers, 1998). יחד עם זאת, מחמת הטבע האינדוקטיבי של הסביבה הגאומטרית הדינמית, אנו מכנים את התהליך הזה 'הוכחה למחצה'. אי לכך, בעקבות השימוש בסביבה הגאומטרית הדינמית, הפער הקיים בין הניסוי לתאוריה ברכישת ובהצדקת ידע גאומטרי, הופך לדאגה פדגוגית ואפיסטמולוגית חשובה (Leung & Lopez-Real, 2002). הסטודנטים חייבים להיות מודעים שהם עדיין צריכים להוכיח מאשר לסמוך על הניסוי הווירטואלי.

'כמעין חקירות אמפיריות' רוכשות יותר ויותר חשיבות, הן מבהירות פונקציות של הוכחה שבאופן מסורתי היו מעורערות (de Villiers, 2004; Connor & Moss, 2007). דוגמאות של פונקציות אלו הן הסבר, תובנה, הבנה, תקפות וגילוי. שיטות החקירה הללו, שאינן דדוקטיביות ומסתמכות על ניסוי, אינטואיציה ושכילה אינדוקטיבית (de Villiers, 2004), נראות כמספקות יותר קונטקסט משמעותי להוראת-למידת גאומטריה בעזרת הסביבה הגאומטרית הדינמית מאשר הגישה הקלאסית של הוכחה כדרך של קבלת וודאות.

כתוצאה מהנ"ל, החלטנו לבדוק איך הבעיה שלנו ניתנת לפתרון במסגרת הסביבה הגאומטרית הדינמית. השתמשנו בעזרת תוכנת ג'יאוג'ברה (Geogebra) שבעזרתה יכולנו לבנות ולשלוט בתנאים הנתונים של הבעיה (משולש שמאחד מקודקודיו מועברים שלושת הקווים המיוחדים), וגרירת האובייקט המתמטי באחד הקודקודים של המשולש – עד לקבלת 4 הזוויות הנוצרות על-ידי צלעות המשולש ושלושת הקווים המיוחדים, שתהיינה שוות.

לג'יאוג'ברה (Geogebra) יש יתרון שמקבלים בכל רגע ורגע את גודל הזוויות השונות בעקבות הגרירה, תוך כדי שמירה על התנאים הבסיסיים של הבעיה. בנקודה זו, ידענו שזה אמור לקרות כאשר הזווית $\angle BAC$ היא 90° , ואכן זו התוצאה שקיבלנו. הניסוי מוצג במלואו בקישור הבא:

<http://highmath.haifa.ac.il/stupel/st.doc>

הקלות שבה ניתן להעלות השערות ראשוניות באשר לסוג המשולש על-ידי שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית, הובילה אותנו להסיק שמהלך פעולה אפקטיבי יהיה להתחיל להציג את הבעיה בעזרת תוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra) (או כל תוכנה מתאימה אחרת), לאפשר לסטודנטים לבנות את המשולש עם שלושת הקווים המיוחדים, להציג תנאים שיש לפקח עליהם, ולהשתמש בגרירה של האובייקט

הגאומטרי עד לקבלת התוצאה. אז ברגע שמתקבלת ההשערה שהזווית חייבת להיות 90° , צריך לבקש מהסטודנטים להוכיח את התוצאה באופן דוקטיבי באמצעות כלים גאומטריים מקובלים. התוכנה בסביבה הגאומטרית הדינמית משמשת כלי מתווך לגישור הפער בין המודל הפיזי ובין ההוכחה הסימבולית הפורמלית.

6. חקר מקרה (case study)

במהלך הסמסטר השני של שנת הלימודים תשע"ב, ערכנו במכללה להכשרת מורים שאנו מלמדים בה, מחקר זוטא בנושא של פתרון בעיות בדרכים רבות ושונות.

מטרת המחקר הייתה לבדוק הן את היכולת של פרחי ההוראה לפתור בעיות בדרכים שונות והן להעריך מהי דרגת החשיבות שהם מייחסים לשימוש באסטרטגיה זו בהוראה שלהם ושל התלמידים שלהם בעתיד. במקביל, מטרת משנה הייתה לבחון בו זמנית גם את ההתייחסות של המרצים למתמטיקה (בחלקם גם מורים ותיקים ומנוסים בהוראה בפועל בבתי-ספר תיכוניים) לשימוש בשיטה של פתרון בעיות בדרכים רבות ושונות, והאם קיים הבדל מבחינתם בין הוראה כזו לתלמידי תיכון לעומת הסטודנטים במכללה.

במחקר השתתפו 37 סטודנטים וסטודנטיות בשנה ג', לקראת סיום לימודיהם בחוג למתמטיקה במסלול הכשרת מורים לבית-הספר העל-יסודי (לכיתות ז'-י'). במהלך תכנית ההכשרה מועברים קורסים סמסטריאליים בנושא "בעיות נבחרות בהנדסת המישור" ו"שילוב תחומים במתמטיקה". בשני הקורסים הללו מוצגות בעיות לפתרון בדרכים שונות, ולעתים זו הזדמנות מצוינת להשלים פערים בידע המתמטי ובמיוחד להקנות לסטודנטים כלים מתודיים/פדגוגיים להרחבת ארסנל שיטות/אסטרטגיות ההוראה שלהם. במקביל נעשתה פנייה למרצים במכללות להוראה שחלקם הם גם מורים מנוסים בבתי-ספר תיכוניים, לקחת חלק במחקר. 13 מרצים השיבו לנו בחיוב.

בשלב הראשון של המחקר חולקה השאלה הבאה לסטודנטים ונשלחה גם למרצים למתמטיקה במספר מכללות באזור הצפון, כדי ששני המדגמים יענו עליה:

"האם לדעתך יש ערך להציג/לדרוש פתרון של משימות במתמטיקה במספר דרכים שונות בהוראה בבית-הספר העל-יסודי ו/או במכללות להכשרת מורים? נא לתת דוגמאות לתרגילים/בעיות/משימות במתמטיקה, שניתן לפתור במספר דרכים."

למעלה מ-90% מהסטודנטים הביעו הסכמה באשר לחשיבות ההצגה ופתרון הבעיות בעזרת שיטות מתמטיות שונות. באופן ספציפי הם ציינו את החשיבות מהסיבות: "פיתוח חשיבה"; "חיבור בין נושאים שונים שנלמדים במהלך הלימודים"; "עידוד יצירתיות"; "תהליך לימודי משמעותי שבו התלמיד יכול להתפתח ולחזק את ידיעותיו וגם ירחיב את אופקיו"; "בכיתה של מצטיינים, הם יכולים לראות את היופי שבמתמטיקה וחווים חוויה בעת פתרון תרגיל מסוים במספר דרכים המובילות לאותו פתרון". רק 3 מהסטודנטים סברו אחרת, כגון: "להציג פתרון של משימות במספר דרכים מקשה על

הלומדים ויוצר בלבול... יש ללמוד כל נושא בפני עצמו"; "לא כל תלמיד יכול לראות את כל האפשרויות במידית ו/או בזמן מבחן".

מבחינת הדוגמאות, במרבית המקרים, הסטודנטים הציגו את משפט פיתגורס, תיכון ליתר במשולש ישר זווית, מציאת שטחים; כל הדוגמאות הללו הוצגו רק במילים וללא פיתוח נוסף.

בשלב השני של המחקר הוצגה לסטודנטים בעיית ארבע הזוויות ונתבקשו לפתור אותה בכל דרך שתיראה להם. זו הייתה שאלה אתגרית בעבור הסטודנטים והתקבלו מהם תשובות מעטות; בדרך-כלל בשיטות של גאומטריית המישור וטריגונומטריה. במקרה יוצא מן הכלל, אחת הסטודנטיות הציעה פתרון מיוחד בעזרת מספרים מרוכבים, שהוביל לפתרון המלא בשיטה זו המוצגת במאמר.

בהמשך, בשלב השלישי, הסטודנטים קיבלו את כל ההוכחות שהיו ברשותנו (כ-12 דרכים שונות) ונערך דיון עמם. הם נתבקשו להצביע על הפתרון היפה ביותר לדעתם: מה הפתרון הפשוט ביותר ומהי דרך הפתרון השגרתית ביותר ולפרט את החשיבות והתרומה של פתרון בעיה מסוימת בדרכים שונות.

הסטודנטים התרשמו מאוד מהמספר הרב של הפתרונות לבעיה. מבחינת סדר העדיפויות, 16 סטודנטים מתוך ה-37 העדיפו את הפתרון בשיטת גאומטריה אנליטית בטענה ש"הוא יותר פורמלי ולכן קל יותר, אך עדיין יש צורך לבחור את מיקום ראשית הצירים". 9 סטודנטים אחרים העדיפו את הדרך הגאומטרית, ושאר 12 הסטודנטים את השיטה הטריגונומטרית וציינו "כי הפתרון בדרך זו מחייב שליטה בזהויות ויכולת של פתרון משוואות טריגונומטריות".

מבחינת היופי של הפתרונות, 18 סטודנטים וסטודנטיות ציינו שהפתרון בשיטה הגאומטרית הכי יפה. עיקר ההתייחסות הייתה להוכחה בדרך השלילה. "לא היינו חושבים על כך, למרות שלאחר הצגת ההוכחה, הייתה ברורה ומסתמכת על משפטי הנדסה ידועים מאוד". לגבי הפתרון בשיטת האלגברה וקטורית: "נראה מסובך למדי, אבל נתן הזדמנות להשלים הבנה של החומר בנושא עצמו", או התבטאות כגון "זו הזדמנות ליישם תאוריה שנלמדה בקורס תורת הווקטורים" שנלמדה באחד מקורסי ההכשרה במתמטיקה.

במקביל לעיסוק בנושא הזה של ריבוי דרכי פתרון לבעיות ספציפיות, במסגרת קורס לשילוב הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה, התנסו הסטודנטים בשימוש בתוכנות שונות ובעיקר בתוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra). המורה של הקורס קיבלה מאתנו את בעיית ארבעת הזוויות כמו גם בעיות נוספות כדי שהסטודנטים יתנסו בהצגה שלהן להעלאת השערות באשר לפתרון שלהן.

בשלב הזה לאחר שראו את מגוון השיטות לפתרון בעיית ארבע הזוויות, היה אפשר להבחין בשינוי עמדות של הסטודנטים לכיוון העצמת החשיבות של שימוש בכלים מתמטיים שונים לפתרון בעיה אתגרית.

בשלב האחרון של המחקר לגבי קבוצת הסטודנטים, נבחרו באופן אקראי 12 סטודנטים מהקבוצות שלמדו את הנושא, ונערך ראיון מובנה עם כל אחד/אחת. הריאיון עמם כלל 5 שאלות. נדווח כאן על 2 מהן:

1. מהו בעיניך הערך של הצגת פתרונות/הוכחות מרובים לאותה בעיה? האם כדאי להשקיע בכך?
2. בהנחה שאתה מלמד או עומד ללמד בבית-הספר, האם תנקוט בשיטות כאלו? האם תדרוש מתלמידך לפתור בעיות בכמה שיטות שונות?

לשאלה הראשונה כל הסטודנטים המרואיינים חזרו שוב על הרעיונות של "מאפשרת לראות את התמונה הכללית לעומת חלק נפרד בשטח אחד קטן", או "הוכחות מרובות לאותה בעיה מפתחות, מעוררות, מסקרנות... יותר מעניינות וזה לא סכמטי", "מפתחות מיומנויות חשיבה גם לסטודנטים וגם למורים". מכאן, שהראיונות אוששו את הנכתב על-ידי מרבית אלו שענו על השאלון בתחילה.

באשר לשאלה השנייה, כאן כבר היו 7 מרואיינים שהביעו דעתם שאכן ידרשו מתלמידיהם פתרונות בשיטות שונות, אפילו במבחנים וכמובן בשיעורי-בית. אחת המרואיינות ציינה שתדרוש שימוש בשיטות שונות כי "כך אוכל להחליט באילו נושאים התלמידים שולטים היטב ובאילו שולטים פחות". לעומת זאת מספר לא מבוטל של 5 סטודנטים שהביעו דאגה ש"השיטה הזו תבלבל את התלמידים" או "ננקוט בה, רק במקרים מסוימים ולא תמיד ולא בכל נושא". סיבות אחרות "צריך לקחת בחשבון את מגבלות הזמן שעומד לרשות המורה כמו גם את מגבלות היכולת של התלמידים", וזה "טוב רק לתלמידים ברמה מסוימת".

יש לציין שהקורסים שעסקו בפתרון בעיות בדרכים שונות, קיבלו חוות דעת טובה יחסית מהמשתתפים, על שאלון הערכת איכות ההוראה המועבר על-ידי המכללה בסוף כל קורס הנלמד בהכשרת מורים. הרמה הכללית מקבוצה אחת הייתה 5.6 ומהשנייה 5.8 (מתוך 6). גם בחלק המילולי, הסטודנטים הביעו שביעות רצון גבוהה יחסית מהקורס וניהולו.

אנקדוטה: אחד הסטודנטים בקורס, מורה בפועל זה הרבה שנים ומשלים תעודת הוראה, הגיש עבודה במסגרת תרגיל בית על בעיה דומה ופתר אותה בכל השיטות שהצגנו לעיל לבעיית ארבעת הזוויות. הבעיה שהציג הייתה בעיית שלוש הזוויות, מאחר ומעבירים מאותו קודקוד A "רק" גובה ותיכון שיוצרים 3 זוויות שוות כל אחת – והשאלה הייתה מהו הערך של α (מקור הבעיה: משימות מקשרות בפיתוחה של פרופ' רוזה לייקין מאוניברסיטת חיפה, במימון המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי – מל"מ). במקרה זה שוב התקבל משולש ישר זווית, אולם הפעם משולש ישר זווית עם $30^\circ, 60^\circ$, כאשר הזווית הישרה בקודקוד A.

כפי שמצוין לעיל, 13 מרצים למתמטיקה במכללות להכשרת מורים השיבו לשאלון הראשוני. במקרה זה, שלחנו יחד עם השאלון את הבעיה עם פתרונות מגוונים. כל המשיבים הביעו התלהבות משיטות הפתרון השונות והעושר האצור בהן מבחינה מתמטית. כולם הביעו הסכמה לגבי חשיבות פתרון בעיות בשיטות שונות ומגוונות. אחד מהמשיבים הדגיש את העובדה, שניסיונות ראשונים לפתור בעיות מסוימות מסתיימים בכישלון. "אבל אם בן אדם יודע שלכל סיטואציה אפשר לגשת ממספר כיוונים, אז כישלון ראשון לא מפחיד אותו – הוא מתחיל לחפש דרכים חדשות. וזה מגבש את האופי שלו! וזה היבט חינוכי חשוב מאוד בלימודי המתמטיקה!". מרצה אחר התייחס לנושא ההערכה: "יש לציין

שפתרון בעיות בדרכים שונות מאפשר להשוות ביניהן, להעריך את היתרונות והחסרונות שלהן. כלומר, מבחינה פדגוגית מדובר לא רק על יישום ידע, אלא גם על הערכה שלפי טקסונומית היעדים החינוכיים של כלום נחשבת כרמה הגבוהה ביותר".

אחת המרצות הדגישה את נושא היצירתיות המתמטית, כאשר מספר ממדים שלה (שטף, גמישות ומקוריות) מתבטאים בשיטה של ריבוי פתרונות והוכחות. כמו כן, היא ציינה את חשיבות קיום הדיון הכיתתי המזדמן על-ידי הפתרונות השונים (יפה יותר? קל יותר? מסביר יותר? מדוע? וכדומה).

רוב המרצים (10 מתוך ה-13) עשו הבחנה בין המטרות הקשורות לתלמידים בבית-הספר לבין הכשרת מורים. לדוגמה, אחת המשיבות הדגישה בהתייחסות לתלמידים את "הקישוריות לענפי מתמטיקה שונים; מענה להטרונגיות (התלמיד החזק פותר בדרכים אחדות, ואילו התלמיד האטי יותר יפתור לפחות בדרך אחת); גמישות ומעבר בין ייצוגים שונים; מטרת תרגול והשימוש ביותר מושגים וכלים מתמטיים; הנאה והדגשת היופי של המתמטיקה". באשר לשימוש בהכשרת מורים, היא הדגישה שכל הנקודות שנמנו בעבור התלמידים נכונות גם להכשרת מורים, ומכאן עשתה הבחנה והתייחסה ספציפית לפרחי ההוראה: "עצם ההתעסקות בפתרון בעיות בדרכים שונות, גורמת לפרח ההוראה להרגיש (לא רק להבין) את יתרונותיה, וכך גדל הסיכוי שישתמשו באסטרטגיה זו"; מאפשרת לקיים "חזרה ללא תחושת חזרה: פרחי ההוראה זקוקים לרענון ולחיזוק הרקע המתמטי שלהם, ולא תמיד הם מודעים לכך די הצורך"; "פתרון בעיות בדרכים שונות מאפשר למורה לעתיד לבחור, מבין מגוון פתרונות, פתרון שמתאים יותר למטרות ההוראה או לפתיחת נושא".

ארבעה מרצים ציינו את "התועלת החינוכית הצומחת לתלמיד בניסיונו לפתור בעיה מתמטית אחת בדרכים שונות, וזו רבה מזו המושגת מעיסוקו בפתרון בעיות רבות בעלות מבנה פתרון דומה, או אף זהה"; "לעתים יותר יעיל לפתור בעיה מתמטית בשלוש דרכים שונות במקום לפתור שלוש בעיות שונות בדרך אחת".

הדגשות נוספות מעבר ל"פיתוח גמישות מחשבתית" היו בנוגע ל"היפוך ידע תאורטי לידע יישומי ושימושי"; "שיפור היכולת של המורה ליצור עניין בשיעורים"; "שיפור היכולת של המורה לטפח את הסקרנות והחקרנות של תלמידיו".

בעקבות החשיפה לאפשרות השימוש בכלים טכנולוגיים (במקרה שלנו במיוחד התוכנה הגאומטרית דינמית, ג'יאוג'ברה [Geogebra]), רוב המרצים הדגישו את אפשרות "ההמחשה החזותית" ו"ההבלטה" של "עוצמתה האדירה של המתמטיקה" באמצעות הכלים הנ"ל. כל זאת, מעבר להדגשת הפן האינדוקטיבי בעזרת התוכנה לעומת הפן הדדוקטיבי הדרוש כהשלמה לפתרון ו/או להוכחה.

לסיכום. חקר המקרה, הן של הסטודנטים/פרחי ההוראה והן של המרצים למתמטיקה במכללות מצביע בבירור על חשיבות רבה של יישום השיטה של פתרון בעיות בדרכים שונות, ואנו מציעים להרחיב את ההכללה של הנושא הן בהוראה התיכונית והן בהכשרת מורים למתמטיקה במכללות לחינוך. אנו מציעים לכלול לפחות קורס מיוחד לשם כך, וזאת מעבר לשילוב השיטה בקורסים המתמטיים והפדגוגיים בתכניות ההכשרה.

7. הערות מסכמות והשלכות על ההוראה

הגאומטריה היא מכרה זהב למשימות מרובות דרכי פתרון. ההוכחות ניתנות להפקה על-ידי שימוש בשיטות שונות מתוך נושא מסוים של הגאומטריה, או מתוך ענפים מתמטיים אחרים, כגון גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה ומרחבים וקטורים. מחברי המאמר הזה טוענים שריבוי הוכחות עשויים לקדם גם הבנה טובה יותר וגם העלאת היצירתיות של הסטודנטים הלומדים מתמטיקה. חקר המקרה כפי שתואר לעיל, חיזק משמעותית טענה זו.

ריבוי דרכי הפתרון שהוצגו כאן בעבור שאלה אחת בגאומטריה מציגים את הקישוריות בין שטחים שונים של המתמטיקה, ומראים איך גאומטריה יכולה לשמש כבסיס לנושאים כגון טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית ותורת הווקטורים. לדוגמה, כאשר פותרים את הבעיה בעזרת שיטות של גאומטריה אנליטית (מעבר לשימוש הברור בגאומטריה אויכלידית), מתגלה הקשר לטריגונומטריה באמצעות השיפועים של צלעות המשולש וכתוצאה מכך הצורך לפתור משוואות טריגונומטריות. כאשר משתמשים בהוכחה בווקטורים, הקשר לטריגונומטריה מתברר בדרישה ליישם את נוסחת המכפלה הסקלרית, ושוב קיים הצורך לפתור משוואות טריגונומטריות כדי להגיע לתוצאה הרצויה.

העיסוק של הסטודנטים עם הקשר בין ענפים שונים של המתמטיקה בונה את ראייתם את המתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף בדיד של נושאים מנותקים האחד מן השני (House & Coxford, 1995). במרבית מספרי המתמטיקה לבתי-הספר ברחבי העולם, הבעיות במתמטיקה מאורגנות בתוך נושאים ספציפיים המוצגים בתכנית הלימודים: הסטודנטים נוטים לחשוב שבעיות מסוימות קשורות לנושאים מסוימים, ולכן מניחים שלכל בעיה יש שיטה אחת ויחידה לפתרונה (Shoenfeld, 1988). כמו כן, בה בעת שמסמך הסטנדרטים של NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) מדגיש את הצורך שמורים אמורים למצוא משימות המציגות קישוריות בין ענפים מתמטיים שונים, הוא גם מדגיש שלאחר משימות כאלו מצריך זמן רב וקורא ליוזמה מיוחדת מצד המורים להשקיע מאמצים בהכנת משימות כאלו. הניסיון שלנו מראה בהחלט, שעל אף שהמשימה הזו אינה קלה, קיים צורך לזהות בעיות נוספות שאפשר לפתור אותן בעזרת שיטות מגוונות והדורשות יישום של הוכחות מתחומים שונים של המתמטיקה. אנו רואים שמתפקידנו להמשיך ולחפש בעיות מתאימות כאלו ומעודדים את העמיתים שלנו גם לעשות זאת. אנו מאמינים שהמורים למתמטיקה צריכים להציג לסטודנטים שלהם בעיות שחייבים לפתור אותן ביותר מדרך אחת, וממליצים ככל האפשר ליישם ידע מענפים שונים של המתמטיקה. כמסקנה ממחקרו, בינגולבלי (Bingolbali, 2011) מציין שליישום של ריבוי דרכי פתרון בעיות יש פוטנציאל לפיתוח "ההבנה היחסית" (relational understanding) – מושג הנוקף ליכולתו של סקמפ [Skemp, 1976]) ותורם להתפתחות העצמאות שלהם. יתרה מזו, כאשר בוחנים סטודנטים, המורים צריכים לאפשר להם לפתור לעתים בעיות על-ידי שימוש בהוכחות מענף מתמטי כלשהו ולא לעמוד על כך שיפתרו בעזרת הוכחה מהנושא הספציפי הנלמד באותה עת. המחקר זוטא שביצענו מצביע על כך, שאכן גם פרחי הוראה וגם המרצים במכללות מדגישים את חשיבות הקישוריות של תחומים שונים ואת פיתוח היצירתיות וההבנה המתמטית באמצעות השיטה של ריבוי פתרונות לבעיות נתונות.

בתקופה זו ובימים אלה, בלתי אפשרי להתעלם מההתפתחות של הטכנולוגיה וההשפעה שלה כמעט על כל שטחי החיים. מערכת החינוך אינה יוצאת מן הכלל, ובהחלט לא ניתן להתעלם מהערך של הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה. אנו מאמינים באמונה שלמה ביתרונות של שילוב תוכנות גאומטריות דינמיות (DGS) בפתרון בעיות מתמטיות ולמעשה הדגמנו את הבעיה שלנו בשימוש בתוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra).

בגיליון מיוחד של PME (Jones, Gutierrez & Mariotti, 2000) בהיותם עורכים אורחים של הגיליון שכותרתו "Proof in dynamic geometry environments", הם הצהירו ש"קיימת עדות רחבה, שעבודה עם תוכנה גאומטרית דינמית מספקת לסטודנטים אפשרויות של גישה למתמטיקה תאורטית, משהו שדי קשה לתפיסה באמצעות כלים פדגוגיים אחרים" (עמ' 3).

חקר אינדוקטיבי באמצעות ה-DGS יכול להוביל את הסטודנטים לפתח השערות משלהם לגבי הפתרון של בעיה, ולאחר מכן לעסוק בהוכחה הדדוקטיבית. כל זאת בתוספת לתרומה של ראיית הצגות גרפיות שונות של המושגים ומצבים קשורים אחרים של הבעיה. לכן אנו ממליצים שמורי המתמטיקה יאפשרו תחילה לסטודנטים שלהם להתמודד עם פתרון בעיות באמצעות עבודה בסביבות כאלו עד שהם מגיעים להשערה סולידית בעבור הוכחה דידקטית.

לסיכום, מאמצנו להתמודד עם הבעיה המוצגת, סיפקו לנו הרגשה אמיתית של עבודה כמו המתמטיקאים אשר מחפשים פתרונות שונים לבעיה, במיוחד אלו שהם קצרים, אלגנטיים ואסתטיים מבחינה מתמטית. על-ידי עידוד הסטודנטים הלומדים גם לעשות כך, הם גם ילמדו להעריך את הקשרים בין הענפים השונים של המתמטיקה ויגלו כיצד אפשר להתמודד עם בעיה אחת מנקודות מבט שונות. נוסף על כך, השילוב של התוכנות של הסביבות הדינמיות יוסיפו כלי טכנולוגי משלים שיעזור לסטודנטים בחקירה שלהם, ובה בעת גם יספק אמצעים למורים כבסיס לפעולה פדגוגית ודיונים בכיתה. כבנוס, גילינו משולש מיוחד במינו, שבו שלושת הקווים המיוחדים מקודקד אחד יוצרים ארבע זוויות שוות ביניהם ובין הצלעות של המשולש.³

3. הבעת תודה: המחברים רואים כחובה אישית להביע את תודתם והוקרתם לד"ר ורדה טלמון, מנהלת המרכז הארצי של המורים למתמטיקה בבתי-הספר העל-יסודיים שבאוניברסיטת חיפה, ולעובדות המרכז גאולה סבר ומאיה כץ על הסיוע הרב שהתקבל מהן, להכנת הקישורים לתוכנה הגרפית-דינמית, שאפשרה הצגה חזותית של הבעיה.

8. מקורות

- סיגלר, א' (2004). מיומנו של מורה: משפט הפוך מעניין, בעקבות שאלה של תלמידה. על"ה, 31, 26-28.
- Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *The Australian Journal of Teacher Education*, 36(1), 18-31.
- Connor, J., & Moss, L. (2007). *Student use of mathematical reasoning in quasi-empirical investigations using dynamic geometry software*. Paper presented at Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME 2007), Department of Mathematics, Ohio University, Ohio. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.127.9441&rep=rep1&type=pdf>
- de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-394). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- de Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 4(3), 397-418.
- Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 11-25). Nicosia: The University of Cyprus.
- Dreyfus, T., & Eisenberg T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics*, 6(1), 2-10.
- Ersoz, F. A. (2009). Proof in different mathematical domains. *ICME Study*, 1, 160-165.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig & A. Guietrrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: PME.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Hemmi, K., & Löfwall, C. (2009). Why do we need proof. *Proceedings of CERME 6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 201-210). Lyon: CERME.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- House, P. A., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). *Connecting mathematics across the curriculum*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Jones, K., Gutiérrez, A., & Mariotti, M. A. (2000). Proof in dynamic geometry environments: Guest editorial. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 1-3. Retrieved from <http://eprints.soton.ac.uk/63766/>
- Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. *ICME Study*, 19(2), 31-36.
- Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME.
- Leung, A., & Lopez-Real, F. J. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 145-165.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. *Proceedings of CERME 6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 776-785). Lyon: CERME.
- Lo, J. J., & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics course for prospective elementary teachers. *ICME Study*, 19(2), 41-46.
- Loewenberg Ball, D. L., Hoyle, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2000). The teaching of proof. *ICME IX Discussion Document*, Tokyo, Japan.
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5-41.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145-166.
- Sinclair, N. (2011). Aesthetic considerations in mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 2-32.

- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38, 289-321.
- Tall, D. (2007). *Teachers as Mentors to encourage both power and simplicity in active material learning*. Plenary Lecture at the Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing, Abu-Dhabi.

מקורות נוספים בעברית הקשורים לנושא המאמר (אינם מצוטטים במפורש בגוף הטקסט):

- אפלבוים, מ' וסמובול, פ' (2005). תגובה למאמר: "הוכחה בדרך אחרת". *על"ה*, 35, 80-82.
- יאנובסקי, ל' (2011). פתרון בעיות לא שגרתיות בעזרת שיטות מקוריות מתחומים מתמטיים שונים. *על"ה*, 45, 42-36.
- לייקין, ר' (2006). על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות. *על"ה*, 36, 8-14.
- לייקין, ר', לבב-ויינברג, ע' וולטמן, א' (2012). ריבוי פתרונות לבעיה בגאומטריה והכללת הבעיה. *על"ה*, 47, 36-30.
- שריקי, ע' וזיסקין, ק' (2005). אפשר גם בלי טריגונומטריה – דרך אחרת לחישוב אורכי המחוגים של מעגל חוסם ומעגל חסום של משולש. *על"ה*, 35, 12-14.



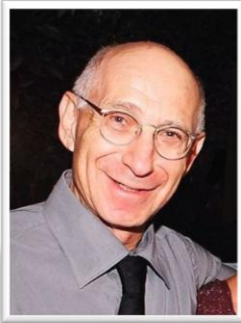
פרופ' דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי Michigan State Univ בחינוך מתמטי. ראש מינהלת מל"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.



ד"ר משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים. מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים. פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל. עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה במכללת שאנן ומנהל בית-ספר שש-שנתי. ראש המסלול העל-יסודי.



מדור חוויות מכנס

שלמה וינר, מכללת אחווה לחינוך והאוניברסיטה העברית

למעט בשניים.
האחד – הרצאת
המליאה של רוז
גריפיתס

(Rose Griffiths). כותרת הרצאתה הייתה: Working with children in public care who have difficulties in mathematics. גריפיתס פיתחה אמצעי למידה מוחשי כדי להסביר לילדים עובדות חיבור פשוטות כמו:

$5 + 3 = 7 + 1$ וכדומה. זה שצריך להסביר עובדות כאלה לילדים בגילאים 6-9 מעידות על כך שלפנינו ילדים עם צרכים מיוחדים. הדאגה לילדים עם צרכים מיוחדים כשהיא כשלעצמה היא כבר דבר הנוגע אל הלב עוד לפני הכניסה לפרטים. גולת הכותרת של ההרצאה הייתה מספר קטעי וידאו שבהם נראתה גריפיתס עובדת עם הילדים האלה. ההתנהלות שלה שהייתה מלאת רוך, סבלנות, חמימות והתחשבות המחישה לשומעים שהם לא רק אנשי אקדמיה יבשים, אלא גם בני-אדם עם רגשות.

מושב אחר שריתק אותי היה מושב הסדנה של שרה הרשקוביץ ממט"ח ואירית פלד מאוניברסיטת חיפה שכותרתה: Modeling and curriculum in elementary school mathematics.

במושב זה הציגו מנחות הסדנה למשתתפיה כמה בעיות מילוליות לא שגרתיות. בעצם ההצגה של בעיות כאלה לאנשי חינוך מתמטי ותיקים יותר וותיקים פחות היה משום חידוש.

חוויות ורשמים, מעצם טבעם, הם אישיים. אנשים שונים מתרשמים מאותו אירוע באופן שונה. לכן כדי להבין את ההבדלים בין ההתרשמויות השונות, רצוי לדעת כמה פרטים על בעל ההתרשמות. ובכן, איש שבע כנסים אני. שבעתי כנסים, כינוסים, סדנאות ועצרות. זה שלושים וחמש שנים, מדי שנה בשנה, אני טס בקיץ לחוץ לארץ לאיזה כנס. הייתי בכל המקומות שניתן לחשוב עליהם, חוץ מפסגת האורסט. ראיתי איך דברים מתחילים לחזור על עצמם, לפעמים בדיוק כמו שהיו, לפעמים תוך שימוש במונחים חדשים, אבל בעצם, "אותה הגברת בשינוי אדרת". מה מניע אותי, אם כך, לטוס לעוד איזה כנס בקיץ 2013? להתעדכן, אני אומר לעצמי. גם אם איווכח שאין חידושים זה יהיה עדכון. זה יהיה חיזוק לקביעתו של קהלת: "מה שהיה הוא שיהיה ומה שנעשה הוא שיעשה – אין כל חדש תחת השמש". שווה בעיניי לנסוע לקצה העולם כדי לקבל תמיכה לטענה שקהלת אכן היה החכם מכל אדם. ואולי, מצד אחר, למרות הכול, קהלת טעה ובכל זאת התחדש משהו.

ובכן, טסתי לפראג לכנס SEMT 13 (Symposium on Elementary Maths Teaching) שהתקיים בפקולטה לחינוך של אוניברסיטת קארל (Charles University) בין 18 ל-23 באוגוסט 2013. בדיעבד, מצאתי כמה סיבות טובות שהצדיקו את נסיעתי. אמנם ברוב המושבים שבהם נכחתי לא גיליתי חידושים,

מיושן ולא רלוונטי וחשבתי: אוי לו לדור שאלה הם מנחיו.

ולבסוף, הצד התיירותי של הכנס. פראג היא אחת הערים היפות בִּתְּבֵל. עיר שבכל רגע נתון שלה מתקיים בה קונצרט, בין שזה בכנסייה ובין שזה באולם קונצרטים. גולת הכותרת שלה היא המצודה (Pražský hrad), זו שעמדה מול עיניו של קפקא כשכתב את סיפורו "הטירה". המצודה היא אתר תיירותי יוצא דופן. ממרומיה ניתן לצפות על הגדה המזרחית של נהר הֶלְטָאבה העובר בלבה של פראג. בתוכה ישנם כנסיות וארמונות עתיקים וישנה גם סמטת צורפי הזהב (golden lane). לקפקא היה שם חדר ובו הוא כתב כמה מיצירותיו. במקום אחר במצודה, ארמון לופקוביץ, ניתן לראות פרטיטורות בכתב ידם של היידן, מוצרט ובטהובן. למי שקפקא והמלחינים הקלסיים האלה קרובים ללב, הביקור במקומות האלה מעורר התרגשות רבה.

וישנו גם הצד היהודי: בתי הכנסת העתיקים שהשתמרו ובית הקברות שבו נטמן המהר"ל מפראג.

וכך, לסיום, אני שב לנקודת ההתחלה של דבריי, אל קהלת, ואני אומר: גם אם אין חדש תחת השמש עדיין ניתן ליהנות מהדברים הישנים. למזלם של משתתפי הכנס, שמי פראג היו בהירים בכל ימות הכנס כך שליוותה אותם אמירה נוספת של קהלת: "מתוך האור וטוב לעיניים לראות את השמש".

ההתנסות הזאת הביאה אותנו לרפלקציה על דרכי החשיבה שלנו בפתרון בעיות. היא גרמה לנו להיות מודעים להתנהלות שלנו במהלך פתרון בעיות ואפשרה לנו להשוות את התנהלותנו להתנהלות שונה משלנו ולגלות שלפעמים היא עדיפה על זו שלנו.

זה באשר לצד האקדמי של הכנס. אבל לכל כנס יש גם צד חברתי. מכיוון ש-SEMT איננו כנס המוני, הוא מאפשר שיחות משמעותיות עם מכרים ותיקים בין המושבים וגם מאפשר ליצור היכרויות חדשות. מהי הבעיה הקשה ביותר של צ'כיה בימים אלה? שאלתי ידיד ותיק. – השחיתות, הוא השיב. – זו גם הבעיה שלנו, אמרתי, אלא שלנו יש עוד כמה בעיות קשות.

בסיום שערכו מארגני הכנס לאחד הארמונות בסביבות פראג יצא לי לדבר עם דוקטורנטית משוודיה. התרבות השוודית אינה כל כך מוכרת בישראל אבל בכל זאת מצאתי שני דברים שמוכרים לרוב הישראלים: האחד הוא סרטיו של אינגמר ברגמן והשני הוא סיפורה של בילבי (שמה בשוודית הוא: Pippi). הסיפור הזה מתחבר לסיפורם של הילדים בהרצאה של גריפיתס. הילדים של גריפיתס חיים במשפחות מאמצות בעוד שבילבי חיה בלי הורים בכלל. הדוקטורנטית סיפרה לי על תולדות חייה של מחברת הספר, אסטריד לינדגרן. התברר לי להפתעתי שהיא מתה לא מזמן, בשנת 2002 בגיל 95. כשחזרתי ארצה קראתי עליה פרטים נוספים בויקיפדיה. הדוקטורנטית השוודית סיפרה לי כי המנחים שלה דרשו ממנה למחוק את פיאז'ה מרשימת המקורות של הדוקטורט שלה בטענה שהוא

References

- Griffiths, R. (2013). Working with children in public care who have difficulties in mathematics. In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching: Tasks and Tools in Elementary Mathematics* (pp. 21-32). Prague: The Czech Republic Charles University.
- Peled, I., & HersHKoviz, S. (2013). Modeling and curriculum in elementary school mathematics. In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching: Tasks and Tools in Elementary Mathematics* (pp. 350-359). Prague: The Czech Republic Charles University.

פרופ' שלמה וינר

סיים את עבודת הדוקטור שלו ב'לוגיקה מתמטית ותורת המודלים' באוניברסיטה העברית בהדרכתו של עזריאל לוי בשנת 1972. ב-1976 הצטרף לחוג להוראת המדעים באוניברסיטה העברית.

ב-1997 פרש מהאוניברסיטה העברית ועבר לאוניברסיטת בן גוריון בנגב, כדי להקים בה תכנית לתואר שני בהוראת מדעים. כיום הוא ראש התכנית לתואר שני בחינוך מתמטי בבית ספר היסודי במכללת אחווה לחינוך.

מדור המלצה על ספר - שתי מדריכות לארץ הפלאות

איליה סיניצקי, גורדון - המכללה האקדמית לחינוך ושאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך



וספקות?). מבין ההיבטים הרבים של הספר, בחרו המחברות להתמקד בתחום הלוגיקה. למען האמת, כנראה שהסדר של קבלת ההחלטות היה הפוך: תוך כדי חיפוש אחר חומר שיכול להקל על הלומד ולהפוך את למידת הלוגיקה ל'חיה' יותר, הן הגיעו להרפתקה המלווה את 'הרפתקאות אליס'.

אז מה הן שתי החוברות האלו? הן אינן עוד ספר מועד על 'אליס' – שכן קשה, ואולי אף בלתי אפשרי, לכתוב דבר כזה אחרי מרטין גרדנר. הן גם לא סיפור חופשי בעקבות 'אליס' ובהשראתה המלווה באוסף של חידות לוגיות בסגנון ספרו של ריימונד סמוליאן "Alice in Puzzle-Land". אלו הן לא יותר אך גם לא פחות מספר לימוד לוגיקה לסטודנטים

אני מחזיק בידי שתי חוברות, שיצאו לאור בסוף 2012 מטעם מכון מופ"ת, שבמבט ראשון נראות דקות למדי בהשוואה לספרים מדעיים רבי היקף. התמונה על דף הכריכה לא משאירה מקום לספק: מזמינים את הקוראים להתלוות לאליס הקטנה במסע רווי הרפתקאות לוגיות בארץ הפלאות.

קורא יקר, מתי קראת לאחרונה את ספר ההרפתקאות של אליס? אולי, כאשר היית ילד קטן והתבוננת, יחד עם הוריך, בתמונות של אליס ושל הארנבון עם השעון בכיס האפודית? או כשחזרת לקרוא בספר בגיל בוגר יותר והוקסמת שוב ושוב מ'הערות השוליים' שלואיס קרול שזור כבדרך אגב לאורך הספר, וחושף את הקורא לעומק פילוסופי כמעט בלתי מוגבל? ספר זה היה ספר חובה לדורי דורות ילדים בתרבות האנגלית. אין זה פלא שדור הטלוויזיה והמחשבים מכירים את אליס בעיקר מסרטים ומאזכורים אקראיים ברשת האינטרנט.

ד"ר עטרה שריקי ופרופסור נצה מובשוביץ-הדר, שתי מומחיות בתחום החינוך המתמטי, הידועות ביצירתיותן ובנכונותן ללכת להרפתקאות חינוכיות לא קלות, הציבו לעצמן משימה מורכבת: להביא את אליס אל הסטודנטים (או להביא את הסטודנטים אל אליס? לא חשוב, העיקר – להציגם אחד לאחר. או אחת לאחרת? שמתם לב לכך שעצם הדיבור על הספר כבר מעורר שאלות

המתמטי המטופל בפרק. לא נשכח את הפן המתמטי 'נטו' – בין הדוגמאות יש טיפול בקשרי הכלה במשפחת המרובעים, חקר משוואות ריבועיות ועוד. בדפי ההפעלה מופיעים קטעים גם מפרקים נוספים בספר "הרפתקאות אליס בארץ הפלאות" המשמשים כחזרה ותרגול של הנושא: הספירלות בלמידת הנושא ממש מתממשת (ובכך נסלח 'חטא' המחברות של שבירת סדר העלילה שבסיפור).

המחברות של החוברות שעניינן לוגיקה עמדו מול משימה דידקטית נוספת לא קלה: להחליט בעבור כל נושא וכל מטלה, מהי רמת הדיוק המתאימה לדיון. הדבר אינו פשוט: ידועה הבדיחה על ביולוג, מתמטיקאי ולוגיקן. כאשר הם רואים ארנבון לבן אחד חולף מול עיניהם במהירות (כמו בספר, אך בשדה), הביולוג מסיק שכל הארנבונים הם לבנים, והמתמטיקאי מתקן אותו ואומר שהמסקנה הנכונה היא כי קיים לפחות ארנבון לבן אחד. גם הדיוק הזה אינו מתאים ללוגיקן, ולפיו קיים ארנבון שלפחות **צדו האחד** לבן. בעיית מציאת האיזון בין הדיוק המתמטי והקפדנות לבין "יובש יתר" מקבלת פתרון מעשי בחוברת המיועדת למרצה, שבה כל הפעילויות המיועדות לסטודנטים מוצגות יחד עם פתרונות אפשריים לשאלות ובצירוף דיון נרחב – לרבות התייחסות לשגיאות נפוצות של הלומדים.

מומחיותן של עטרה ושל נצה בהוראת המתמטיקה מורגשת במבנה הברור והאחיד של כל הפרקים, בהבניה הדרגתית של הידע הלוגי מנושא לנושא וכן בתוך כל נושא. עם זאת, הן בעלות ידע אנציקלופדי, ורואות את חובתן להרחיב את הידע של הקורא בתחומים

המתמחים בהוראת המתמטיקה, ומדריך למרצה בקורס מבוא ללוגיקה.

ומה מיוחד בהן? שילוב ציטוטים מספרי קריאה ודיונים בהם ידוע כדבר שעושה את המקצוע מתמטיקה 'יבש פחות', ובכך מועיל ללמידתה. באופן טבעי ספרו של לואיס קרול, שהוא בעצם שמו הספרותי של המתמטיקאי והלוגיקן 'צ'רלס לוטוויג' דודג'סון, נוגע במספר רב של נושאים בלוגיקה ואפילו ביסודותיה. אולם לואיס קרול לא כתב את הספר 'אליס' כספר לימוד. לכן, ההחלטה של המחברות ללכת בלמידת הלוגיקה לפי מלל הספר הייתה אמיצה ולא פשוטה כלל לביצוע. כך! לא להדגים ולהמחיש את הכללים וחוקי הלוגיקה באמצעות דוגמאות מהספר, אלא לקחת ספר קריאה מיוחד ולהשתמש בספר כמקור עיקרי להוראה וללמידה של קורס מסודר בלוגיקה. החלטה זו דרשה, כמובן, קריאה מחודשת של כל מילה ומילה, וטיפול בכל משפט ממש 'עם פינצטה' – שתי המחברות הוכיחו פעם נוספת שהן אלופות בכך.

בחוברת של אוסף הפעילויות נבנתה סביבת למידה שבגרעינה נמצאים קטעים מהפרק הראשון בספרו של קרול (שוב יש להדגיש, בסדר הופעתם, כך שהסטודנטים אמורים לחוות את הסיפור מחדש). בספר הלימוד כמו בספר לימוד – כל פרק מוקדש לנושא לוגי מסוים, ובעקבות קריאת 'קטע המקור' הלומד מופנה אל דפי הפעלה ובהן שאלות: בתחילה, השאלות מובילות את הלומד לניתוח לוגי של הדברים האמורים בקטע, ובהמשך השאלות מכוונות את הלומד לדון בסיטואציות ובמשפטים שעניינם הוא הנושא הלוגי המסוים

המלך? – נכון שזה נראה די קרוב לבעיית הספר שמגלח רק את אלה שלא מתגלחים בעצמם?
 – מה נובע מכך שהפסוק 'המלך חושב שהכובע שעל ראש הכובען אינו גנוב' הוא פסוק שקר?
 – האם קיום הגוף שעליו הראש הוא תנאי הכרחי או מספיק לאפשרות כריתת הראש?
 – וכיצד אפשר לנסח את דברי אליס 'אני מתכוונת למה שאני אומרת' כפסוק תנאי?
 – ואולי זה פסוק אמת?

די, אנחנו כבר לא מבחינים בין ספרו של קרול לבין הכתיבה של עטרה נוצה – ואולי זוהי המטרה? לו לא היינו פותחים את החוברות הללו, אנחנו – כפי שנאמר בפתיחת פרק הסיום (או בסיום פרק הפתיחה?) – 'לא היינו פוגשים את כל היצורים שקיימים בארץ הפלאות, וגם לא את הארנב הלבן או את מלכת הלבבות'.

אז למי מיועד 'לוגיקה בארץ הפלאות'? אחרי קריאה מרעננת, ננסה כך: לכל אלה שרוצים להכיר את מושגי היסוד של לוגיקה או ללמוד אותה באופן מסודר, או למורים ולמורי מורים שמתכוונים ללמד לוגיקה או... או... או... ובשפת יומיום – לרבים שרוצים ליהנות שוב ושוב ממשחק לוגי, מתמטי ודידקטי שמספקות לנו שתי מדריכות לארץ הלוגיקה. האם כוונתי לשתי המהברות או לתוצרי עבודתן? קראו וודאו את המשמעות של הקשר או, ו-גם דברים נוספים רבים.

רבים. בעקבות כך, מרוויחים הסטודנטים, למשל, את הדיון המדעי בנושא כדור-הארץ ונפילה חופשית (האם אכן אליס עלולה להופיע אי שם באוסטרליה בתום הנפילה?). לא הוזנה גם ההיבט הפדגוגי הכללי, והמחשה של הדיון על תפקיד הקריאה והחופש לטעות ולתהות כחלק מהתפתחותו של הלומד באה לידי ביטוי לאורך כל הספר.

המחברות רואות את התפקיד המרכזי של החוברת 'אוסף פעילויות' כספר לימוד לסטודנטים פרחי הוראה. לי נראה כי למורה עתידי זהו גם חומר מאורגן שחלקים רבים ממנו אפשר ורצוי לשלב בהוראת המתמטיקה בבית-הספר במגוון רחב של גילים. כמרצה, מצאתי כאן קורס לימודי מחושב היטב מבחינה דידקטית, וזיהיתי בו גם דגם להבניית תהליכי למידה. קורא מנוסה יבחין בין הפרקים גם ברכיב של מחקר פעולה: כל נושא ונושא נפתח בשאלון שחוזר על עצמו אחרי לימוד הנושא. כך שהלומד והמרצה יכולים לבדוק את התקדמותם בעצמם.

נוסף לכל, פה ושם, בדפי ההפעלה ובדיונים הנרחבים בחוברת למרצה נרמזו כי לוגיקה פשוטה וברורה שמוסברת יפה כל כך היא רק 'החלק הנראה לעין', ומאחורי הדלתות הסגורות ממתינות לעתים קרובות הפתעות ו'נפילות' ללוגיקה מוזרה ולפרדוקסים לוגיים. הנה מספר קטן של דוגמאות:

– 'האם יש לכובען כובעים משלו? וכיצד יכול הוא להסיר את הכובע שלו מול

קריאה מתנה! הוראה מעשירה! אידיה מרקא!



פרופ' איליה סיניצקי

מתמטיקאי שעוסק בחינוך מתמטי כ-30 שנה, מרצה למתמטיקה ולהוראת מתמטיקה במכללות גורדון ושאנן להכשרת מורים ובאוניברסיטת חיפה. עוסק בפיתוח דרכי הוראת המתמטיקה וחוקר קשרים בין עקרונות המתמטיקה לבין חשיבה מתמטית.

האולפניאדה המתמטית: היבטים תוכניים, ערכיים ומגדריים
יצחק איזק, מכללה ירושלים
דיוה דויטש, מכללה ירושלים

תפיסת המושגים 'קושי' ו'אתגר' בבעיות מתמטיות שגרתיות ולא שגרתיות,
בתנאים שונים של מעורבות עם הבעיות
מארק אפלבאום, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע

מי לפני מי? רכישת עקרונות רצף קבוצות בקרב ילדי הגן
ניצה מרק-זגדון, מכללת לוינסקי

בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה
משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
דוד בן-חיים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל; שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך



כתב-העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה