

ייצוגי כמות וגמישות: הכוח המניע תהליכי חישוב והבנה מתמטית

רחל שי
אמאל שריף-רסלאן



רחל שי

מרצה במכללת שאנן.

בעבר מרצה, רכזת קורס מאבחנים דידקטיים ומדריכה פדגוגית במכללה האקדמית הערבית לחינוך בחיפה. תחום התמחות: הוראה מתקנת במתמטיקה ומאבחנת דידקטית בגישה דינמית.

תקציר

המחקר בחן בהרחבה את ייצוגי הכמות ואת השפעתם על הרהיטות החישובית. ייצוגי הכמות נבחנו מכמה נקודות מבט של המעבד המבני ושל המעבד הסדרתי: כזיהוי מהיר, כתהליכי השלמה לשלם וכמבט גמיש על השלם וחלקיו. נקודות מבט אלה נבחנו באמצעות השפעתן על החישוביות ועל גילוי תובנות מתמטיות של משמעות התרגיל, הקשרים הלוגיים בין תרגילי החיבור לחיסור והבנת שאלות מילוליות.

במחקר השתתפו 118 תלמידים, 97 מהם בני 7-8 שנים הלומדים בכיתות ב' בבית-ספר יסודי ו-21 תלמידים המתקשים בחשבון ומוגדרים בחינוך המיוחד תלמידים עם לקויות למידה. מקצתם מקבלים תמיכה לימודית בחשבון בקבוצות קטנות ולומדים בכיתה הרגילה במסגרת "שילוב", והאחרים לומדים בכיתות מיוחדות ללקויי למידה הנמצאות בבית הספר הממלכתי במסגרת "כיתות מקדמות". התלמידים עם לקויות למידה בני 9-13 שנים. התלמידים הלומדים בכיתות ב' הרגילות מוינו לשלוש קבוצות על פי הישגיהם בחשבון באמצעות המשתנים האלה: א. הצלחה גבוהה – תלמידים השולטים היטב בתכנים (ציון 90-100); ב. שליטה בינונית – תלמידים המכירים את התכנים אך שוגים רבות ביישומם (ציון 65-89); ג. שליטה נמוכה – תלמידים מתקשים שאינם עומדים בדרישות המינימום של כיתה א' (ציון 0-65). החלוקה והמונחים המגדירים קבוצות אלה מתבססים על סולם נבו (1995).

לצורך המחקר נבנה מבדק מיפוי בנושא הלימודי "תחום העשרים" שהותאם להיבטים שפורטו לעיל ושימש כלי המחקר.

ממצאי המחקר הראו הבדלים מובהקים בין הקבוצות כדלקמן: נמצאו הבדלים צפויים בהיטות החישובית בעיקר בתחום עשרים. המחקר הראה כי ההבדלים קיבלו ביטוי גם ברוב תפקודי הליבה: סוביטיז (זיהוי מהיר של כמויות עד 4) ואומדן מהיר עד 10, הפקת ציור דו-ספרתי, גמישות הייצוג המבני, הכולל השלמת עיגולים לשלם חסר – עד 10 ועד 20 בשרטוט ותובנת ההיפוך בין חיסור



אמאל שריף-רסלאן

ראש החוג למתמטיקה במכללה אקדמית ערבית לחינוך, חיפה.

בוגרת תואר ראשון ושני בפקולטה למתמטיקה בטכניון, ותואר שלישי מהמחלקה להוראת המדעים בטכניון. תחומי המחקר שלה הם מתמטיקה שימושית ברפואה (בפרט קרדיולוגיה) וחשיבה מתמטית מתקדמת. כתבה פרסומים רבים בתחומים אלה.

רקע תאורטי

לב העיסוק החשבוני במוסדות החינוך הוא פתרון תרגילים במתמטיקה. עם זאת התרגילים הם ביטוי לשפה החשבונתית ומשמשים כלים לפעילות החשבונתית, אך הפתרון הטכני שלהם אינו מבטא את מהותם. ערכם ניכר במשמעות שניתנת להם ובמערכות הקשרים המתגלות ביניהם.

במאמר זה המילה "חשוב" מייצגת את תהליכי פתרון התרגילים ואת משמעותם, הנובעים מהמנגנונים המשפיעים על התפתחות יכולת החישוב מתפתחת על בסיס שתי מערכות למידה שמשלימות זו את זו: תהליכי תפיסה ותהליכי שפה וחשיבה. תהליכי התפיסה אחראים על הקלט והעיבוד הכמותי, ומאפשרים בניית ייצוגים מילוליים ובלתי מילוליים לכמויות. הם מספקים את אבני היסוד לתהליכי החישוב הנשמרים בזיכרון. תהליכי השפה והחשיבה משפיעים על ההמשגה, על התובנות המתמטיות ועל ההבנה.

א. ייצוג החספר ומשמעותו הכמותית

המתמטיקה מתבססת על מספרים שהם אבני היסוד שלה. ייצוג הוא אחד מחמשת התהליכים המתמטיים המופיעים בסטנדרטים (NCTM, 2000). הייצוג מאפשר לילד לבנות דימוי פנימי מנטלי למושג מתמטי מופשט המשמש בסיס למשמעות המושג. במילים אחרות, הייצוג מאפשר לחשוב על כמות כדימוי מתמטי מופשט, וכך לנתח סיטואציה מתמטית בלי צורך בהמחשה (לינצ'בסקי ותובל, 1993).

מקובל לדון בשלושה אופני ייצוג למספר: ייצוג כמותי, מילולי וגרפי. הייצוג הכמותי מבטא כמות הניתנת למניה כגון ●●, הייצוג המילולי הוא שם המספר כגון "ארבע" והייצוג הגרפי הוא המספר הכתוב, כגון 4. הקשר ביניהם מעניק את המשמעות למספרים (מרק-זיגדון, 2011).

זיכרון ייצוגי הכמות משמש בסיס לתפיסת הכמות, אבל תמונת כמות סטטית עדיין אינה מאפשרת פעולה על הכמות, שכן החישוביות מחייבת גמישות הייצוג. אדם עשוי לזכור את תמונת נקודות הקובייה ולקשר בין שלושת הייצוגים: מקבץ הכמות, שם המספר והמספר הכתוב, ועדיין לגלות קושי בתהליכי החישוב המתבטאים ביכולת לפרק ולצרף את הכמות המספרית להרכבים מגוונים. לצד זאת גמישות חשיבתית מסייעת להשוואה בין הייצוגים, להכללה ולמסקנת הערך המופשט של המספר. מכאן שגמישות ייצוגי הכמות היא הכוח המניע את תהליכי החישוב ומאפשרת תובנה מספרית וחישובית.

ב. חישוב

פעולת החישוב נחוצה לשם פתרון תרגילי חשבון ונוגעת למכלול התהליכים הפנימיים הפועלים במוחו של האדם בעת הפתרון. היא כוללת הליכים אלגוריתמיים הנשענים על תהליכי תפיסה גמישים של פירוק וצירוף הכמות מצד אחד, ומצד אחר היא עוסקת בתהליכי הבנה של משמעות הפעולה עצמה וגילוי תובנות באשר לקשרים בין מספרים ובין תרגילים. גישה זו אינה מצמצמת למתן תשובה נכונה או שגויה לתרגיל על פי התפיסה המסורתית הצרה, ואף מטילה דופי בתהליכי שינון מילוליים של תרגילים מבודדים ללא הקשרים ביניהם (Boaler, Williams, & Confer, 2015; Baroody, 2006; Gravemeijer & van Galen, 2003).

לחיבור מתוך מבט גמיש על שרטוט. נמצא כי סובייטיזם ואומדן וכן הפקת ציור עד 20, הם מנבאים לרשימות חישוביות בתחום 20. כמו כן נמצא קשר מובהק ומנבא הצלחה בין תובנת קשר ההיפוך לפתרון תרגילים ויישום שאלות מילוליות.

על פי ממצאי המחקר, נבנה מודל התערבות המציג את הקשר בין שלושת תחומי העניין בהוראת החשבון: ייצוגי כמות וגמישות, תהליכי חישוב והבנה מתמטית. המודל מכון את מורי המתמטיקה בהעמקת דרכי ההוראה להיבטים קדם-חישוביים של הייצוג וגמישותו, למען תלמידים רגילים ותלמידים מתקשים כאחד.

מסקנות המחקר גורסות שממצאים אלה עשויים לשפוך אור על הבנת קשיים מתמטיים בקרב תלמידים ולתרום מבחינה דידקטית להעמקת דרכי ההוראה בכיתה הרגילה, ובוודאי כהוראה מתקנת לתלמידים מתקשים.

מילות מפתח: רשימות חישוביות; תובנה מספרית; הבנה מתמטית; ייצוג כמותי; עיבוד מידע כמותי-מספרי; תהליכי תפיסה מתמטית; מנגנוני למידה מתמטיים.

מבוא

תוכנית הלימודים במתמטיקה בשנים האחרונות מדגישה את הקשר בין בקיאות בעובדות יסוד בחשבון ובין תובנה מספרית המספקים בסיס להשגת רשימות חישוביות (משרד החינוך, 2006). מחקרים רבים מדגישים את חשיבות השליטה בעובדות היסוד כבסיס להתפתחות המתמטית. רשימות חישוביות היא שליטה בתהליך חישובי מהיר המתפתח עם תובנה מספרית המחזקת את זיכרון העובדות, ולא כזיכרון תשובות הנרכש באמצעות שינון. בן-יהודה, שרוני ואלמוג (2014) פיתחו כלי לבדיקת רשימות חישוביות, שמבוסס על תובנה מספרית המתמקדת בגילוי קשרים לוגיים בין תרגילים. הכלי נועד לתלמידים בכיתות ג'-ו'. המבדק בדק את השפעת הקשרים הלוגיים בעת שהנבחנים פתרו את התרגילים.

המחקר הנוכחי מציג כלי למיפוי כיתתי בחשבון לכיתה ב'. הוא בוחן היבטים למיניהם בתהליכים קדם-חישוביים המשפיעים על איכות תהליכי החישוב. הכלי בודק שלושה תחומי תפקוד בהתמודדות המתמטית בתחום העשרים: א. ייצוגי כמות – משמעותם המספרית וגמישותם; ב. חישוביות; ג. הבנה מתמטית. השימוש בכלי עשוי לסייע למורים באיתור תלמידים המתקשים בכיתה הרגילה. בד בבד הכלי מאפשר למורה לנתח את מאפייני החולשה המתמטית של התלמיד המתקשה מתוך בחינת מנגנוני הלמידה המשפיעים על היכולת החישובית ולשמש כלי לאבחון תלמידים המתקשים בפעולות חישוב החל מנושא "תחום עשרים" ואילך לכל הכיתות בבית הספר היסודי. יש לציין כי נקודת המוצא של המחקר נשענת על מחקרים קודמים (הניק ורובינשטיין, 2008; מרק-זיגדון, 2011; Libertus, Feigenson, Halberda, 2011), הטוענים כי הטמעה של דגם מבני חזותי כמייצג כמות מראה תהליך תפיסתי המשפיע על בניית ייצוגים מנטליים ועל התפתחות חוש למספרים.

החידוש במחקר זה הוא הדגש בקשר בין הייצוגים וגמישותם להשפעתם על הרשימות החישוביות, על התובנה החישובית ועל ההבנה המתמטית.

מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון קשרים אלה ואת השפעתם על החישוביות בעזרת שתי נקודות מבט של אופנות החישוב: רשימות חישוביות ותובנה חישובית הנובעים מגמישות התפיסה של השלם וחלקיו.

א. רהיטות חישובית;

ב. תובנה מספרית.

יש להבחין בין רהיטות של עובדות יסוד לרהיטות פרוצדורלית.

ברודי (Baroody, 2006) מגדיר רהיטות עובדות יסוד "יישום יעיל, מתאים וגמיש של מיומנויות חישוב במספרים חד-ספרתיים"; מסמך התקנים האמריקאי, ה-CCSSM, מציין שרהיטות פרוצדורלית היא מיומנות ביצוע פרוצדורות בדרך גמישה, מדויקת, יעילה ומתאימה (Kling & Bay-Williams, 2014).

תובנה מספרית עוסקת בתהליכי חשיבה המשפיעים על גילוי אסטרטגיות לשם פתרון יעיל באמצעות מציאת קשרים בין המספרים. אנשים שיש להם תובנה מספרית הם אלה שיכולים להשתמש בגמישות במספרים (Boaler et al., 2015).

טבלה 1: התקנים של CCSSM הנוגעים לרהיטות ולשליטה בעובדות יסוד*

גן חובה	מחברים ומחסרים עד 5 ברהיטות.
כיתה א'	מחברים ומחסרים עד 20, בהפגנת רהיטות בחיבור וחסור עד 10. משתמשים באסטרטגיות, כגון מניית המשך, או השלמה ל-10, פירוק המספר לקבלת 10, שימוש בקשר בין חיבור לחיסור ויצירת סכומים שקולים שהם קלים יותר וידועים.
כיתה ב'	מחברים ומחסרים ברהיטות עד 20 מתוך שימוש באסטרטגיות מנטליות. בסוף כיתה ב' יודעים את הסכומים של 2 מספרים חד-ספרתיים מהזיכרון.
כיתה ג'	כופלים ומחלקים ברהיטות עד 100, מתוך שימוש באסטרטגיות, כגון הקשר בין כפל לחילוק (כגון מתוך הידיעה כי $8 \times 5 = 40$, יודעים כי $40 : 8 = 5$). מבינים תכונות של פעולות. בסוף כיתה ג' יודעים את כל המכפלות של 2 מספרים חד-ספרתיים מהזיכרון.

* מתוך קלינג וביי-ויליאמס (Kling & Bay-Williams, 2014).

טבלה 1 מראה התפתחות הדרגתית מתהליך של חקר וגילוי מתוך אסטרטגיות מוחשיות (מנייה) לפיתוח אסטרטגיות מנטליות גבוהות ועד להפנמה של העובדות בזיכרון.

ברודי (Baroody, 2016) מציין שלושה שלבים בהתפתחות החישוב: א. חישוב בעזרת אסטרטגיית המנייה; ב. שימוש איטי ומודע באסטרטגיות הנובע מהסקת מסקנות בעת גילוי הדפוסים והיחסים בין המספרים; ג. רהיטות חישובית, שליפת הסכומים וההפרשים מרשת הזיכרון, אם בתהליך אסטרטגי מהיר ואם בשליפה ישירה. שלב זה הוא נקודת השיא של הרצף ההתפתחותי בתהליכי הלמידה. ראוי להבין כי שימוש באסטרטגיות נוגע לתהליך חיפוש התשובה החשבונית בדרכים מגוונות: תחילה כמנייה והמשכו שימוש באסטרטגיות מנטליות הנשענות על זיכרון העובדות הבסיסיות או חלקן. חשוב לתת את הדעת להבדלים בין אסטרטגיות אלו.

אסטרטגיית המנייה היא שלב של ייצוג הכמות באמצעות האצבעות כתנועת ספירה מוחשית. מניית המשך נחשבת לאסטרטגיה מתקדמת במנייה מכיוון שהילד כבר מסוגל לראות בכמות של אחד מהמחוברים בקבוצה ולהמשיך את המנייה מהאמצע (שטיינברג, 2003).

אסטרטגיות מנטליות נחשבות לאסטרטגיות מפותחות יותר

מאסטרטגיות המנייה. הן נשענות על השליטה בזיכרון פעולות היסוד, הנחשבות כעובדות החשבון ומאפשרות תהליכי חישוב מורכבים. הן נובעות מתובנה חישובית המביאה לגילוי קשרים לוגיים בין מספרים ובין פעולות. תהליכים אלה מחייבים זיכרון עבודה גמיש המאפשר את פעולת הפירוק והצרוף בדרכים מגוונות על בסיס הבנת הקשרים ביניהם. חישוב המבוסס על תובנה כזו מעמיק את ההבנה המתמטית ובו בזמן מצמצם את העומס על הזיכרון.

ברודי (Baroody, 2016) מציין שלושה תנאים התפתחותיים של התפיסה המאפשרים תובנה זאת: היכולת לראות את קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור, היכולת לזהות את היחסים בין השלם לחלקיו ועיקרון השלמת הנעלם לשלם, במונחים של שלם וחלק. עיקרון זה נובע משני העקרונות הראשונים.

תובנת קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור עשויה לסייע לפתרון תרגילי החיסור כשנוצר קושי, במיוחד אצל תלמידים מתקשים. המחקר של פלטנבורג ועמיתיה (Peltenburg, Heuvel, Panhuizen, & Robitzsch, 2012) מחזק טיעון זה. הם מצאו כי תלמידי חינוך מיוחד בני 8-12, שנכשלו בתרגילי חיסור בתחום 100, הצליחו להתגבר על הקושי בעזרת אסטרטגיית ההשלמה לשלם, לפחות בתרגילים שבהם ההפרש היה קטן, כגון $59 - 61$. זה סמיט ועמיתיו (De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010) הגיעו למסקנה דומה על תלמידי כיתות ג' בחינוך הרגיל. תובנה זו היא בסיס להבנת חוקי האלגברה הנלמדים בשלב שלאחר מכן.

המחקר הנוכחי עוסק בגילוי קשרים בין תרגילים בעזרת סכמה מבנית של שתי קבוצות עיגולים במלבן: : המחקר בודק מי הם התלמידים שרואים מיד את הקשר לארבעת התרגילים: $4+3=$, $3+4=$, $7-3=$, $4-7=$. מטלה זו נותנת ביטוי לגמישות התפיסה: מבט מימין לשמאל, משמאל לימין, מהשלם לחלקים ומהחלקים לשלם בתרגיל. לצד זה נזהה את גמישות החשיבה לגילוי הבנת הקשרים בין התרגילים: חוק החילוף; קשר ההיפוך בין חיבור לחיסור.

א. הבנה מתמטית

לפי חוקרים בחינוך המתמטי (פישיין, תירוש וברש, 1998; Hiebert & Lefevre, 1986), הידע המתמטי כולל שלושה מרכיבים: ידע אינטואיטיבי המוגדר כידע מידי, הנראה כמונח מאליו; ידע אלגוריתמי שבו טמון הידע התהליכי; ידע פורמלי הנוגע להבנת המופשט. על סמך רכיבים אלה, סקמפ (1991) דן בשני סוגים של הבנה מתמטית: הבנה אינסטרומנטלית והבנה רלציונית. הבנה אינסטרומנטלית מתבטאת בהצלחה של ביצוע פרוצדורה במקרה של פעולות חשבון היא מתבטאת בשליטה בתהליך החישובי והפעלת האלוגריתם על בסיס הכרה וזכירה של שלבי הפעולה ללא הסבר. הבנה רלציונית נוגעת ליכולת לזהות יחסים בין רכיבים אחרים של בעיה ולקשר ביניהם. היא נובעת מהבנת המושגים, משמעות הפעולות החשבוניות והקשרים ביניהם. הבנת זיקות אלה מביאה לידי גילוי חוקיות ויכולת להסביר ולנמק.

בבסיס ההבנה המתמטית נמצאת היכולת לקשר בין סוגי ידע מגוונים בתחום המספרים. דהאן וכהן (Dehaene & Cohen, 1997) טוענים שקיים קשר בין שלושה סוגי ידע הקשורים להבנה, ידע סמלי, ידע מושגי וידע אנלוגי. הידע הסמלי מתבטא במשמעות שהילד מעניק למספר הכתוב, הידע המושגי מתבטא בתובנת מושג המספר כמייצג כמות בעלת ערך קבוע בלי קשר לצורת הייצוג

והידע האנלוגי מתבטא במסוגלות להעביר את הבנת הסמל כמושג ליישומים אחרים, על בסיס הבנת העיקרון הדומה הנובע מתהליכי ההשוואה. לדוגמה כמות או גודל המקושרים למספר כלשהו, מקבלים משמעות כמותית מתוך השוואה עם כמויות ומספרים אחרים. המתמטיקה במהותה היא תחום ידע מופשט, המחייב את הלומד להיעזר במושגים של השפה הבנויים על תהליכי חשיבה. מיומנויות החשיבה, כגון הכללה, הסמלה, יכולת העברה, יישום והסקת מסקנות מאפשרות את התפתחות ההבנה המתמטית. השפה מאפשרת להשתמש במילים בניסיון להסביר ולנמק את המסקנות שהובילו לתובנה (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009).

הקשר בין שלושת תחומי התפקוד המתמטי

בין שלושת תחומי התפקוד המתמטי מתקיימים קשר והשפעה הדדית. הפנמת ייצוגים של כמות מאפשרת חשיבה על מספר ללא המחשה, וגמישות מאפשרת את החישוב הן כפעולה אינסטרומנטלית והן כחשיבה רלציונית. החשיבה הרלציונית משפיעה על ההבנה המתמטית.

המספרים וייצוגם הכמותי הם אבני היסוד של הלמידה החשבונית. כאשר הייצוגים מופנמים בזיכרון בדרך גמישה, הם נגישים גם לפעולות החישוב וגם לפעולות החשיבה.

מה משפיע על התפתחות תקינה של ייצוגי כמות?

תהליכי התפיסה הכמותיים הראשוניים תלויים במאפיינים חזותיים-מרחביים של הכמות, תחילה בלי מילים ולאחר מכן בקשר לשפת המספרים. למידע חזותי-מרחבי יש תפקיד מפתח ביצירה והפעלה של דימוי מנטלי (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009). המעבד המרחבי מאפשר התייחסות כיוונית לסדרות על פני ציר המספרים, וגם התייחסות דו-ממדית למבנה ייצוג חזותי כגון נקודות הקובייה. דמיון חזותי-מרחבי הוא הבסיס להתפתחות רעיונות מתמטיים (Dehaene & Cohen, 1997). האינטגרציה של המספרים מיוצגת בקורדינטות ויזו-מרחביות. במחקרי דימות מוח נמצא כי הפעלת ביצועים חזותיים-מרחביים, שהיו קשורים למשימות של השוואת כמויות, מתבצעת באותו אזור במוח, בקורטקס הפרינטלי הימני והשמאלי (Fias & Fischer, 2005). חוקרים אלה מצטטים את רורקי וקונווי (Rourke & Conway, 1997), שמצאו כי הפרעות למידה חזותיות-מרחביות נמצאו בהלימה לעיכוב או להתפתחות לא תקינה בלימודי המתמטיקה.

רוב התלמידים בונים לעצמם ייצוגים מספריים בדרך אינטואיטיבית על בסיס התנסות מוחשית עם כמויות. תהליכי מנייה חוזרים של כמויות מובילים להתפתחות הקשר בין הייצוגים המוחשיים של הכמות לשמם המספרי (Geary, 2004). הקשר בין הייצוגים של הכמות (כמותי, מילולי וגרפי) מתרחש כתכלול בין הייצוג המבני של כמות כמקבץ שלם לייצוג הסדרתי מילולי המאפשר שיום.

תהליכי העיבוד של ייצוגי הכמויות מתרחשים כפעילות המתרחשת בו בזמן בין חמישה מעבדים: מעבד מבני, מעבד סדרתי, מעבד מרחבי, מעבד סמנטי ומעבד גרפי (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; קדרון, 1991). שלושת המעבדים הראשונים – המבני, הסדרתי והמרחבי – אחראים על קלט ועיבוד חזותי-מרחבי כתהליכים תפיסתיים בלתי-מילוליים של ייצוגים כמותיים, הבונים זיכרון כתמונות ייצוגים אלה הם בסיס לשיום ולקשר המילולי. שני המעבדים האחרים – הסמנטי והגרפי – מאפשרים את בניית השפה המתמטית, את השמות, המושגים והסמלים המשמשים כלים של השפה והחשיבה (שי, 2009).

חוקרים מסוימים עמדו על ארבעה תפקודי ליבה מולדים, המשתתפים

בעיבוד המספרים והתפתחות החוש למספרים (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; מרק-זיגדון, 2011; Dehaene & Cohen, 1997). תפקודי ליבה אלו כוללים זיהוי מהיר של כמויות קטנות עד 4 (subitizing), אומדן מהיר כצירוף מהיר של כמויות בדיוות קטנות, השוואה בין כמויות וזיהוי שינויים בכמויות. תפקודי ליבה אלה מאפשרים לתלמיד לבנות לעצמו ייצוגים של כמויות, המופנמים עם הזמן בזיכרון כדימוי פנימי. ליברטוס ועמיתיה (Libertus et al., 2011) מציינים כי אפשר לזהות חוש גבוה למספרים כבר בגיל שלוש, כך שתפקוד יעיל וגמיש של מעבדי התפיסה מאפשר את התפתחות החוש למספרים. מחקרים עומדים על קשר בין קלט כמותי מהיר של כמויות עד 4 (subitizing) בגיל הגן לרהיטות חישובית בבית הספר כבר בכיתה א' (מרק-זיגדון, 2011; Libertus et al., 2011). מרקוביץ (2005) מתארת את החוש למספרים כאינטואיציה המקשרת בין המשמעויות המגוונות של המספר. החוש למספרים כולל את פיתוח היכולת לראות את היחסים בין מושגים מתמטיים למיניהם, עובדות מתמטיות ויכולות מתמטיות, ולכן מאפשר גישה אליהם בעת הצורך.

לאינטואיציה זו חמישה רכיבים:

- הבנת המשמעויות של מושג המספר (גילוי הקשר בין המשמעות הסידורית למשמעות המבנית).
- פיתוח תובנות של היחסים המורכבים בין מספרים והקשר בין אמצעי ההמחשה למושג המספר.
- זיהוי גדלים יחסיים של מספרים.
- פיתוח אינטואיציות הנובעות מהשפעת היחס בין מספרים לפעולות על מספרים.
- פיתוח יכולת השוואה למדידת חפצים ומצבים בסביבתם.

איכות תהליכי התפיסה המולדים של תפקודי הליבה שהזכירו לעיל דהאן וכהן (Dehaene & Cohen, 1997), משפיעה על הקלות או הקושי בבניית ייצוגי כמות וגמישותם. נגישות הזיכרון לייצוגים מאפשרת את הגילוי האינטואיטיבי של הקשרים ביניהם. האינטואיציה הראשונית למספרים היא לא בהכרח מילולית, ואולם היא מתפתחת בזכות השפה ותהליכי החשיבה. השפה מאפשרת את ביסוס האינטואיציות ואת גיבושן לתובנות ומאפשרת את ההבנה המתמטית הכללית (מרקוביץ, שם). לסיכום, החוש למספרים הוא שילוב בין תהליכי תפיסה יעילים ובין כישורי שפה וחשיבה מפותחים.

תלמידים תת-משיגים בחשבון

לתלמידים תת-משיגים בחשבון מאפיינים שונים זה מזה שעיקרם קושי או איטיות בשליפת תשובות נכונות לתרגילי חשבון בסיסיים כבר בתחום עשר וקושי לבנות דימויים מנטליים למושגים מתמטיים המתבטא בקושי להפיק משמעות מספרית מסמלים (Geary, 2005). מאפיין אחר הוא הקושי לתת משמעות לשפה החשבונית ולקשר בינה ובין סיטואציות כמותיות. קשיים אלה גורמים לרתיעה מהתמודדות עם אתגרי החשבון (ברוזה ובן-דוד קוליקנט, 2017; כ"ץ ודרור, 2014).

הנסיבות המשפיעות על הכשל החשבוני נובעות מאטיולוגיות שונות מאוד זו מזו, אף שהסימפטומים נראים דומים בחלקם:

- לקווי למידה בחשבון, דיסקלקוליה, הם ליקויים תפיסתיים בתהליכי קלט ועיבוד כמותי המשפיעים בעיקר על החישוביות, אך לא בהכרח על ההבנה. הקושי בהבנה עלול להיות תוצאה משנית לקושי בבניית ייצוגי הכמות. הוא נובע מדיספונקציה של מערכת העצבים המרכזית, המשפיעה על עיבוד מידע מספרי.

- קשיים בהבנה מתמטית העשויים לנבוע מהתפתחות שפתית נמוכה וקשיים בתהליכי החשיבה הקשורים להכללה, הפשטה והסמלה. קשיים אלה משפיעים על ההבנה המתמטית, שהיא מופשטת במהותה. תלמידים אלה לעיתים רוכשים מיומנויות יסוד בחשבון ומסוגלים לפתור תרגילים, אולם הם נוטים לזכור את התהליך האלגוריתמי בלי הבנה, ולגלות קשיים בהבנת עקרונות מתמטיים וביישום שאלות מילוליות.
- אטיולוגיות אחרות המשפיעות על הכשל החשבוני בעקיפין, כגון חסך סביבתי, לקויות חושים והפרעות רגשיות, מעכבות את תהליכי הלמידה בדרך כלל ובחשבון בפרט.

מקובל להבחין בין תלמידים עם לקויות למידה ובין תלמידים עם קשיים בחשבון, שאינם מוגדרים כלקויות למידה (בן-יהודה ושרוני-יצחק, 2009; מרק-זיגדון, 2011). בפרק הבא נתמקד בלקות החשבון, הדיסקלקוליה, כדי להתחקות אחר מנגנוני התפיסה החשבונית.

דיסקלקוליה - שיבוש בתפקודי הליבה הכמותיים

קושי בתהליכי העיבוד והבניה של ייצוגי הכמות הוא אבן הנגף של תלמידים עם לקות למידה בחשבון, המעכבת את התפתחות כושר החישוב. מחקרים השוואתיים בין תלמידים דיסקלקוליים לתלמידים רגילים מראים הבדלים מובהקים בתפקודי הליבה הכמותיים. תפקוד הסובייטי נמצא לקוי אצל תלמידים דיסקלקוליים והתבטא בזמן תגובה ארוך לזיהוי כמויות מעל 3 עם טעויות רבות. נוסף על כך, גמישות הייצוג הסדרתי נמצאה לקויה בהשלמת סדרות (מרק-זיגדון, 2011; Ashkenazi, Mark-Zigdon, & Henik, 2009; Piazza et al., 2010). לקות זו משבשת את התהליך הראשוני של בניית הייצוגים ושמירתם בזיכרון. לפעמים תהליך זה אינו מתחיל להתגבש בלי תיווך. גרי (Geary, 2004) מצייין כי המאפיין הבולט של תלמידים עם לקויות במתמטיקה הוא הקושי ליצור דימויים מנטליים של מושגים מתמטיים. תלמידים אלה אינם עוברים מהשימוש במנייה לפיתוח ייצוגים מוחיים של עובדות פשוטות. הם רואים בתהליך המנייה פעולה טכנית ואינם מצליחים להפעיל תהליכי למידה המובילים להפנמת הסכום כמייצג כמות. המחקר של מרק-זיגדון (2011) מאשש את הקשר בין בניית ייצוגים לחישוביות. נמצאה קורלציה בין איטיות תלמידים עם לקויות למידה בזיהוי מהיר של כמויות קטנות להופעת קושי בולט בדליית עובדות חשבון במספרים חד-ספרתיים. למרבה ההפתעה, תלמידים אלה גילו תובנות על המבנה העשרוני ועיקרון הפוזיציה של מספרים רב-ספרתיים כמו תלמידים רגילים.

מאפיין אחר של לקות החשבון עשוי להתבטא בחולשה של כושר הקידוד המקשר בין הכמות לסמל הגרפי שלה (הניק, 2008). קושי זה נראה כמו דיסקלציה (לקות קריאה). עם זה מחקר שנערך בקרב סטודנטים מבוגרים המעידים על עצמם כדיסקלקוליים ללא קשיים בקריאה, מראה איטיות בזיהוי מספרים כתובים בלבד בלי קשיים בזיהוי אותיות ומילים (הניק ורובינשטיין, 2008). חוקרי לקויות למידה מתמטיות (הניק ורובינשטיין, 2008; הניק, רובינשטיין, אשכנזי ומרק-זיגדון, 2010; מרק-זיגדון, 2011) מציינים כי לקות החשבון היא נוירו-קוגניטיבית. נמצא כי באזור IPS (העמק התוך קודקודי), החריץ בחלק העורפי במוח, הוא קצר יותר אצל לקוי למידה המגלים איטיות בתגובת הסובייטי של זיהוי כמויות קטנות.

מטרת המחקר היא לבדוק את הקשר בין תהליכי עיבוד של ייצוגים וגמישותם להשגת רהיטות חישובית של עובדות חיסור וחיבור בתחום עשרים, וכבסיס לגילוי תובנה מתמטית על בסיס הייצוג הגמיש.

נושא "חשבון בתחום עשרים" נבחר כתחום תוכן, כיוון שעל בסיס זה מתפתחים כל תהליכי החישוב המתקדמים, ובשל המציאות המראה שחסך בתחום זה מקבל ביטוי אצל תלמידים מתקשים גם בכיתות הגבוהות.

אלה הן שאלות המחקר הנגזרות מכך:

1. האם נמצא קשר בין תפקודי הליבה להצלחה בתהליכי חישוב ורהיטות חישוב?
2. אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הצלחה ברהיטות חישובית?
3. אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הבנה מתמטית?

שיטת המחקר

האוכלוסייה

- א. תלמידים רגילים בכיתות ב' הלומדים בבתי הספר של החינוך היסודי הממלכתי.
- ב. תלמידים מתקשים במתמטיקה בכיתות ג' עד ו', הלומדים בכיתות מקדמות ללקויי למידה ותלמידי כיתות שילוב המתקשים במתמטיקה, הלומדים בכיתות בתי הספר היסודיים והסיבות הביניים.

משתתפי המחקר

118 תלמידים השתתפו במחקר הנוכחי: 97 תלמידים מכיתות ב' (גיל 7-8 שנים) הלומדים בחינוך הרגיל ו-21 תלמידים תת-משיגים בני 9-13 שנים שהם תלמידי כיתות שילוב הלומדים בכיתה רגילה ותלמידי חינוך מיוחד הלומדים בכיתות מקדמות ללקויי למידה. בין התלמידים הרגילים בכיתות ב' ובין אלו הלומדים בכיתות של תלמידים עם לקויות למידה של החינוך המיוחד נמצאו גם תלמידים תת-משיגים שהצליחו יפה במבדק החשבון בתחום העשרים. תלמידים הלומדים בחינוך המיוחד מבוגרים בגילם מתלמידי כיתות ב', ולכן יש מקום לצפות שלפחות כמה מהם יצליחו בנושא הבסיסי הנחקר.

נבו (1995) פיתח סולם ציונים המגדיר ארבע תת-קבוצות: תלמידים מצטיינים, תלמידים השולטים היטב בחומר, תלמידים שעומדים בדרישות המינימום ואלו שאינם עומדים בדרישות המינימום. על פי סולם הציונים של נבו ובשל התפלגות הציונים במבדק (איור 1), הוחלט לחלק את משתתפי המחקר לשלוש קבוצות: תלמידים מצטיינים השולטים היטב בתכנים (טווח ציונים 91-100), תלמידים שמכירים את התכנים (טווח ציונים 66-90) ותלמידים שאינם עומדים בדרישות המינימום (טווח ציונים 65 ומטה).

יש לציין כי בחינוך הרגיל לקראת סוף כיתה ב', יש מקום לצפות לשליטה ולרהיטות חישוב בתחום 20 (על פי הסטנדרטים של CCSSM, ראו טבלה 1 בהמשך). התרשימים באיור 1 ממחישים את חשיבות האיתור המוקדם של התלמידים שלא הגיעו לרמה הנדרשת.

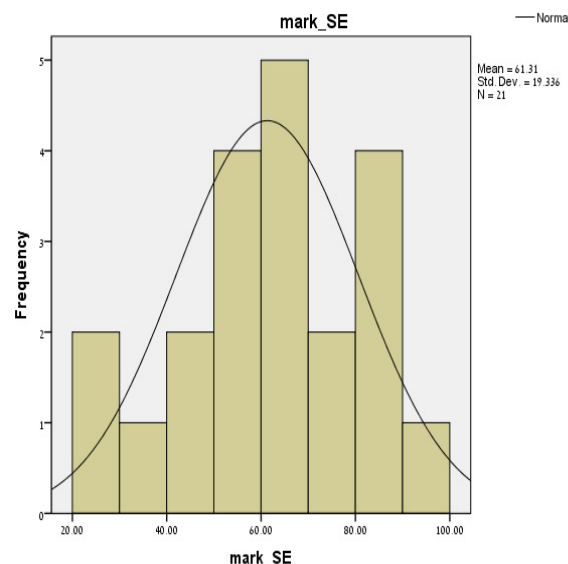
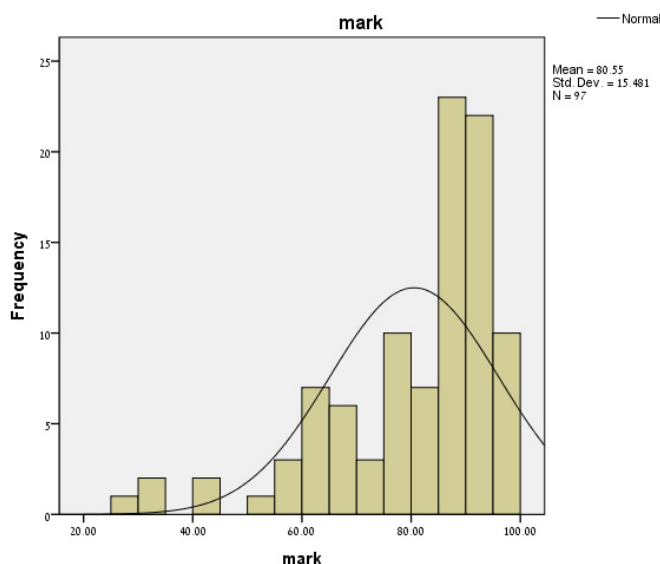
כלי המחקר

במהלך המחקר הנוכחי פותח כלי עבור מורים המלמדים בכיתות ב' בחינוך הרגיל או תלמידים עם לקויות או שניהם בחישובים בסיסיים בחיבור וחסור בכל גיל. הכלי מאפשר מיפוי כיתתי וניתוח פרטני גם יחד. הוא כולל את שלושת התחומים: ייצוגים ומשמעותם הכמותית, חישוב והבנה מתמטית. הכלי נכתב בשתי שפות: עברית וערבית.

תיאור כלי המחקר

דוגמה של בדיקה בעזרת הכלי לכל אחד מתפקודים אלה. כך מתאפשרת בדיקת הקשר בין יכולות התפקוד להשפעת הייצוגים על איכות החישוב וההבנה. יש לציין כי ההגדרה של "רהיטות חישוב" במחקר הנוכחי היא מיומנות ביצוע תהליכי חישוב של תרגילי חיסור וחיבור בתחום עשרים בדרך מדויקת, יעילה ומהירה. ייצוגי הכמות נבחנו בהרחבה מנקודות מבט הנוגעות לתפקודי הליבה של תהליכי עיבוד התפיסה הכמותית שהם זיהוי מהיר של ייצוגי כמויות, השוואה וזיהוי שינויים בכמות.

כלי המחקר משתמש במבדק מיפוי בתחום עשרים, הכולל 20 סעיפים. בכל סעיף ישנם שלושה עד ארבעה תרגילים מאותו סוג. נוסף על כך, הכלי כולל טבלת מיפוי כיתתי לשימוש המורה לשם ניתוח של הממצאים המסתמכים על פתרונות התרגילים לכל הכיתה ולכל תלמיד בנפרד (נספח 2). הכלי בוחן שלושה תחומי מיומנות בחשבון: משמעותם המספרית וגמישותם של ייצוגי כמות, חישוב והבנה מתמטית. טבלה 2 מתארת את דרך הבדיקה. נספח 1 מציג



טבלה 2: תחומי התפקוד המתמטי ודרך בדיקתם (דוגמאות בנספח 1)

ייצוג המספר ומשמעותו הכמותית	
הייצוג המבני בתחום 10 ובתחום 20, חמש נקודות מבט	ייצוג סדרתי בתחום 20, שלוש נקודות מבט
א. זיהוי מהיר של כמויות בדידות עד 10, וזיהוי כמויות עד 20 כייצוגים של כסף. ב. הפקת ייצוג מהזיכרון – שרטוט למספר כתוב. ג. השוואה בין ייצוגים. ד. זיהוי שינויים בכמות – השלמת החסר ל-10 ול-20. ה. תבנית ייצוג והתאמת ארבעה תרגילים לתבנית.	א. השלמת סדרת המשך קדימה. ב. השלמת מספרים בספירה לאחור. ג. השלמת סדרה בדילוגים.
חישוב	
מיומנויות חישוב, ארבע נקודות מבט משלימות	הייצוג הסדרתי בתחום 20, שלוש נקודות מבט
א. הבנת הקשר בין ייצוגי כמות חזותיים לתרגילים. ב. פתרון תרגילים מדורגים. ג. השלמת נעלמים. ד. פתרון תרגילים לפי רמזי קשר.	א. דיוק – תשובות נכונות לתרגילים. ב. פתרון מנטלי (תצפית על הילד – פתרון עם או ללא מנייה). ג. מהירות – הספק תרגילים נכונים בזמן. ד. מסוים – יציין את מידת השליטה בתהליך. (*)
(*) רהיטות חישוב נמדדת בזמן היא עדות לתהליך חישוב כמומנות נרכשת. עם זה חשוב לציין כי המורה לא הגביל.	
הבנה מתמטית	
תובנה חישובית	הבנת שאלות מילוליות
א1. גילוי הקשר בין השלם לחלקיו ובין התרגילים בעניין תבנית משותפת במהלך הבנת חוקי החשבון: חוק החילוף בחיבור $(a+b=b+a)$ ועיקרון ההפיכות בקשר בין החיבור והחיסור כפעולות הפוכות $c-b=a$ $a+b=c$. א2. יישום תובנות חישוב בתרגילים עם רמזי קשר והשפעתם על הדיוק וההספק.	א. שאלת חיבור עם נתונים גלויים. ב. שאלת השוואה והבנת חישוב ההפרש. ג. הסקת מסקנה על פי נתון קודם (זיכרון עבודה). ד. חישוב עודף על פי נתון המשתמע מהשאלה הקודמת.

ממצאי המחקר

ממצאי המחקר עוסקים בהבדלים בין קבוצת התלמידים השולטים היטב בתכנים (טווח ציונים 91-100), שהוגדרו "תלמידים מצטיינים" (מצוינים), קבוצת תלמידים עם טווח ציונים 66-90, שהוגדרו "תלמידים המכירים את התכנים" (בינוניים) וקבוצת התלמידים עם טווח ציונים 65 ומטה שהוגדרה "תלמידים שאינם

תוקף ומהימנות הכלי

המהימנות הפנימית של כל אחד משלושת החלקים בכלי המחקר, משמעותם המספרית וגמישותם של ייצוגי כמות, חישוב והבנה מתמטית, נבדקה באמצעות חישוב האלפא של קרונברך. מקדמי המהימנות של שלושתם נמצאו בטווח 0.82 עד 0.86. עקיבותו הפנימית של הסולם כולו הייתה $\alpha_k=0.83$.

פתרון תרגילים

טבלה 3 מציגת הבדלים מובהקים בפתרון תרגילים בחינוך הרגיל בין שלוש הקבוצות: ברהיטות שנמדדה כהספק פתרון נכון של תרגילים (מדורגים / עם רמזי קשר) בפרק זמן של דקה וחצי, במציאת צירופים לעשר כתרגיל חיבור או כתרגיל חיסור ובתרגילים המדורגים, שבהם היה אפשר לזהות הבדלים בפתרון תרגילי חיסור כבר בתחום 10. בתחום עשרים נמצאו הבדלים מובהקים בפתרון תרגילי חיבור עם העברה וחיסור ללא פריטה ועם פריטה.

לבדיקת מקור ההבדל נערך ניתוח המשך מסוג Bonferroni שהראה כי בחינוך הרגיל ההבדלים היו בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות "המצוינים" ו"הבינוניים" בכל המיומנויות שצוינו בפסקה לעיל. כמו כן נמצא הבדל בין שתי הקבוצות, "המצוינים" ו"הבינוניים", בכל אחת מהמיומנויות האלה מלבד ב"תרגילי חיסור בתחום 10". יש לציין כי לא נמצאו הבדלים בין כל הקבוצות בפתרון תרגילי חיבור בתחום 10 ובתחום 20 ללא העברה.

לבדיקת ההבדל בין קבוצת ה"חלשים" בחינוך הרגיל ובין קבוצת החינוך המיוחד נערך מבחן t-test שהראה כי קיים הבדל מובהק רק בפתרון תרגילי חיבור עם העברה בתחום 20, ובפתרון תרגילי החיסור בתחום 20 (טבלה 3).

הבדלים דומים בחינוך הרגיל בין שלוש הקבוצות נמצאו גם במציאת צירופים ל-10 וגם בהשלמת תרגילים עם נעלמים. כמו כן הממצאים מראים כי אין הבדל מובהק בין התלמידים ה"חלשים" בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד (טבלה 3).

יישום שאלות מילוליות

הממצאים מראים כי קיימים הבדלים מובהקים במשתנה זה בין שלוש הקבוצות בחינוך הרגיל. ההבדלים ניכרו בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות, "המצוינים" ו"הבינוניים" וגם בין הקבוצות עצמן, "הבינוניים" ו"המצוינים". נוסף על כך, נמצא הבדל מובהק במשתנה זה בין התלמידים החלשים בחינוך הרגיל לתלמידי החינוך המיוחד (טבלה 3).

עומדים בדרישות המינימום" (חלשים), וכן בהבדלים בין קבוצת התלמידים הלומדים בחינוך המיוחד (בני 9-12 שנים) וקבוצת התלמידים החלשים בכיתה ב' רגילה.

בטבלה 3 מוצגת ההשוואה בין המיומנויות של שלוש הקבוצות (בחינוך הרגיל): בתפקודי הליבה שהוגדרו ברקע התאורטי (סובייטיז ואומדן, השוואת כמויות, זיהוי שינויים בכמות וגמישות הייצוג) בפתרון התרגילים וביישום שאלות מילוליות. נוסף על כך, מוצגת השוואת משתנים אלה בין קבוצת התלמידים הלומדים בחינוך המיוחד ובין קבוצת התלמידים החלשים בכיתה ב' רגילה.

תפקודי ליבה

מטבלה 3 עולה כי קיימים הבדלים מובהקים בתפקודי הליבה בין שלוש הקבוצות הלומדות בחינוך הרגיל ברכיבים האלה: 1. הספק בדקה של קלט הסובייטיז ואומדן ייצוגים עד 10; 2. הפקת ציור למספר דו-ספרתי; 3. השוואת כמויות ייצוגים משורטטים; 4. גמישות הייצוג בהשלמת החסר לייצוג משורטט ל-10 וגם ל-20 – תובנת ההיפוך על פי סכמה.

לבדיקת מקור ההבדל נערך ניתוח המשך מסוג Bonferroni שהראה כי בחינוך הרגיל ההבדל היה בין קבוצת ה"חלשים" ובין כל אחת מהקבוצות האחרות "המצוינים" ו"הבינוניים". כמו כן נמצא שאין הבדל מובהק בין שתי הקבוצות האחרונות בכל אחד מהמשתנים שצוינו לעיל מלבד תובנת ההיפוך, שבה קיימים הבדלים בין כל זוג משלוש הקבוצות.

לבדיקת ההבדל בין קבוצת ה"חלשים" בחינוך הרגיל וקבוצת החינוך המיוחד נערך מבחן t-test שהראה כי קיים הבדל מובהק רק לגבי הסובייטיז והאומדן עד 10 לאחר שנמצאה חולשה בולטת עוד יותר בקרב ליקויי הלמידה המאובחנים (טבלה 3).



טבלה 3: תפקודי ליבה ותרגילים בקבוצות "המצוינים", "הבינוניים", "החלשים" ותלמידי החינוך המיוחד

מיומנות	מצוינים	בינוניים	חלשים	F	df	*p	-SE חינוך מיוחד	t-test	**p	
הספק	הספק בדקה 1 – כתיבת מספר לכמות (סובייטיז ואומדן עד 10)	0.898 (0.15)	0.732 (0.21)	0.628 (0.21)	11.192	95	<0.0001	0.4905 (0.183)	-2.126	0.041
	הספק בדקה וחצי – תרגילים מדורגים	0.96 (0.07)	0.82 (0.18)	0.5 (0.15)	44.908	93	<0.0001	0.5863 (0.18)	1.463	ns
	הספק בדקה וחצי – תרגילים עם רמזי קשר	0.97 (0.07)	0.73 (0.24)	0.40 (0.23)	41.738	95	<0.0001	0.4813 (0.256)	1.354	ns
הפקה	הפקה 1 – ציור למספר עד 10	3 (0.97)	2.98 (0.87)	2.47 (0.8)	2.267	96	Ns	2.69 (0.915)	0.768	ns
	הפקה 1 – ציור למספר דו-ספרתי	3.83 (0.33)	3.5 (0.94)	2.75 (1.55)	6.73	96	0.002	3 (1.194)	0.555	ns
הבנת הערך המספרי	כתיבת מספר לשרטוט של ייצוג דו-ספרתי ¹	4.03 (3)	3.86 (2)	4.48 (1)	2.739	87	ns	3 (1.3)	-0.792	ns
	שימור כמות בתחום 6 (יישום סימני השוואה: <=> ²)	1 (0)	0.94 (0.21)	0.75 (0.41)	6.504	96	0.02	0.88 (0.31)	1.106	ns
	השוואה בתחום 20 (ייצוג כסף) ²	2.9 (0.26)	2.87 (0.6)	2.13 (1.2)	8.884	96	>0.0001	2.3 (1.06)	0.557	ns
לקראת חישוב										
המעבר מייצוג לתרגיל	השלמת שרטוט ל-10 והתאמת תרגיל ³	3.78 (0.39)	3.42 (0.84)	2.56 (1.35)	10.608	96	>0.0001	2.6 (1.3)	0.074	ns
	השלמת שרטוט ל-20 והתאמה לתרגיל ³	3.26 (0.89)	3.11 (0.94)	1.91 (1.13)	11.645	96	>0.0001	2.05 (1.6)	0.3	ns
חישוב										
ציירופים ל-10	חיבור 10 = +	2.97 (0.19)	2.84 (0.57)	1.93 (1.14)	15.009	94	>0.0001	2.07 (1.21)	0.35	ns
	חיסור 10 = -	2.93 (0.37)	2.52 (0.99)	1.25 (1.28)	16.582	94	>0.0001	1.714 (1.31)	0.308	ns
השלמת נעלם (חיבור וחיסור)	חיבור	2.97 (0.19)	2.67 (0.65)	2.06 (1.06)	10.068	96	>0.0001	2.238 (0.995)	0.516	ns
	חיסור	2.9 (0.31)	2.77 (0.58)	1.86 (0.86)	17.462	94	>0.0001	1.905 (1.09)	0.137	ns
תרגילי חיבור וחיסור	חיבור בתחום 10	3.86 (0.35)	3.88 (0.33)	3.79 (0.43)	0.421	93	ns	3.91 (0.3)	1.952	ns
	חיבור ללא העברה בתחום 20	1.9 (0.41)	1.8 (0.57)	1.5 (0.85)	2.25	92	ns	1.76 (0.77)	0.945	ns
	חיבור עם העברה בתחום 20	1.97 (0.19)	1.82 (0.52)	0.93 (0.92)	19.859	93	>0.0001	1.67 (0.97)	2.259	0.031
	חיסור בתחום 10	4 (0)	3.86 (0.69)	3.07 (1.44)	7.835	93	0.001	3.286 (1.42)	0.435	ns
	חיסור ללא פריטה בתחום 20	2 (0)	1.8 (0.53)	0.5 (0.65)	54.112	93	>0.0001	1.191 (1.03)	2.223	0.033
	חיסור עם פריטה בתחום 20	1.97 (0.19)	1.78 (0.46)	0.07 (0.27)	139.163	93	>0.0001	0.905 (1.18)	2.588	0.014
הבנה מתמטית										
תובנת ההיפוך	קשר בין חיבור לחיסור ³	1.38 (0.9)	0.52 (0.8)	0.25 (0.58)	14.085	96	>0.0001	0 (0)	-1.787	ns
יישום	שאלות מילוליות	0.83 (0.19)	0.58 (0.25)	0.2 (0.13)	39.742	94	>0.0001	0.235 (0.53)	2.201	0.035

*p השוואת שלוש הקבוצות בחינוך הרגיל

**p השוואת החינוך המיוחד עם קבוצת התלמידים "החלשים" בחינוך הרגיל

1 סובייטיז ואומדן – זיהוי מהיר של ייצוגים מבניים

2 השוואת כמויות

3 זיהוי שינויים בכמות וגמישות הייצוג

הממצאים מראים שיש קשר בין תפקודי הליבה להצלחה בתהליכי החישוב ובמיוחד ברהיטות חישובית. להשלמת התמונה יש לבחון אילו תפקודי ליבה עשויים לנבא הצלחה ברהיטות חישובית וגם בהבנה מתמטית.

טבלה 4 מציגה ממצאי רגרסיה ליניארית רבת משתנים (multiple linear regression analysis) כדי לנבא את הספק רהיטות התרגילים באמצעות תפקודי הליבה.

טבלה 4: ממצאי רגרסיה ליניארית רבת משתנים באמצעות תפקודי ליבה (קלט-סובייטיז ואומדן, הפקת ציור עד 20, השלמת ציור עד 20 ותובנת ההיפוך – חיסור/חיבור מתוך שרטוט)

המשתנים המסבירים	B	β	t	p-value	R	R^2	R^2_{adj}
קבוע	0.299	-	3.320	0.001	0.581	0.337	0.307
קלט-סובייטיז ואומדן	0.303	0.317	3.234	0.002			
הפקת ציור עד 20	0.053	0.260	2.908	0.005			
השלמת ציור עד 20	0.024	0.124	1.365	0.176			
תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.041	0.18	1.853	0.067			

מהתבוננות בממצאי הרגרסיה (טבלה 4), עולה כי התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(3,92)=11.189, p<0.0001$) עם מתאם מרובה של 0.581 ואחוז השונות המוסברת הוא 33.7%. מהטבלה עולה כי ערכי מקדמי הרגרסיה המתוקננים (β) מציינים תרומה מובהקת של המשתנים קלט-סובייטיז ואומדן והפקת ציור עד 20 להספק רהיטות התרגילים, ואילו לשני המשתנים האחרים, השלמת ציור עד 20 ותובנת ההיפוך, אין תרומה מובהקת להספק זה.

נוסף על כך, נראה מהטבלה כי למשתנה קלט-סובייטיז ואומדן יש השפעה חזקה ביותר על הספק רהיטות תרגילים מדורגים. על סמך מקדמי הרגרסיה הלא מתוקננים (0.303 ו-0.053 לקלט-סובייטיז ואומדן ולהפקת ציור עד 20 בהתאמה) התקבלו מתאמים חיוביים.

משמעותם היא שכלל שקלט-סובייטיז ואומדן גבוהים יותר, כך הספק רהיטות התרגילים המדורגים גבוה יותר. בהתאמה נמצא מתאם חיובי עבור המשתנה הפקת ציור עד 20.

טבלה 5 מציגה את ממצאי רגרסיה ליניארית (linear regression analysis) כדי לנבא את התובנה החישובית ואת הבנת השאלות המילוליות באמצעות תובנת ההיפוך, חיסור/חיבור, מתוך שרטוט.

מטבלה 5 עולה כי עבור התובנה החישובית התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(1, 94)=16.294, p<0.0001$) עם מתאם 0.384 ואחוז שונות מוסברת 14.8%. כמו כן נמצא שערך מקדם הרגרסיה הלא מתוקנן הוא 0.116, כלומר ככל שתובנת ההיפוך גדלה, כך עולה גם התובנה החישובית.

טבלה 5: ממצאי רגרסיה ליניארית רבת משתנים באמצעות תובנת ההיפוך, חיסור/חיבור מתוך שרטוט

המשתנה המנובא	המשתנה המסביר	b	β	t	p-value	R	R^2	R^2_{adj}
תובנה חישובית	קבוע	0.661	-	19.686	<0.0001	0.384	0.148	0.139
	תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.116	0.384	4.037	<0.0001			
הבנת שאלות מילוליות	קבוע	0.535	-	14.033	<0.0001	0.262	0.068	0.058
	תובנת ההיפוך (חיסור-חיבור)	0.085	0.262	2.615	0.01			

עבור הבנת השאלות המילוליות התקבלה רגרסיה מובהקת ($F(1, 93)=6.837, p=0.01<0.05$) עם מתאם 0.262 ושונות מוסברת 6.8% בלבד. כמו כן נמצא שערך מקדם הרגרסיה הלא מתוקנן הוא 0.085, כלומר ככל שתובנת ההיפוך גדלה, כך גם הבנת השאלות המילוליות (טבלה 5).

ממצאים המסכמים את טבלה 5 מראים כי תובנת ההיפוך מנבאת רהיטות חישובית. המתאם בין תובנת ההיפוך לשאלות המילוליות קיים, אך היה נמוך יותר.

בקבוצת התלמידים הלומדים החינוך המיוחד, אף שנמצא מתאם מובהק בין הרהיטות החישובית להפקת שרטוט למספר דו-ספרתי ($r_p=0.528, p=0.015<0.05$), לא נמצאו מתאמים מובהקים בתפקודי הליבה האחרים. ייתכן שממצאים אלה מושפעים מההטרונגיות של התלמידים בקבוצה זו הנובעת מהגיל והיכולת התפקודית. כמו כן יש לציין כי רובם לא פתרו כלל את תרגילי החיסור, נתון שהשפיע על הממצאים הקשורים לחישוביות. רק בקבוצה זו נמצא קשר מובהק בין הקלט המבני לספירת הדילוגים ($r_p=0.585, p=0.005<0.05$). יש להדגיש כי השונות הבין-

אישית בין התלמידים הייתה גדולה, אך אפשר לראות כי ילדים שקלט הסובייטיז שלהם היה איטי ונמוך, טעו גם בספירת הדילוגים.

דין

ממצאי המחקר הראו כי לתפקודי הליבה יש השפעה על התפתחות יכולת החישוב, אם כי קיימים הבדלים במידת השפעתם על המעבר לרהיטות החישובית.

כצפוי, נמצאו הבדלים בולטים ברהיטות החישובית בתחום עשרים בין תלמידים חלשים לאחרים. אולם מכיוון שמטרת המחקר הייתה לאתר את תפקודי ליבה עם ההבדלים הנכונים ביותר ואת מידת ההתאמה ביניהם לרהיטות החישובית, נמצא כי ההתאמה המהותית הייתה בין תפקודי המעבד המבני ובמיוחד גמישותו לרהיטות החישובית. לפיכך יש מקום להניח כי חולשה בתפקודים אלה עשויה לנבא קושי בהשגת רהיטות חישובית.

לעומת זאת, לתפקוד המעבד הסדרתי לא נמצאה השפעה חיובית על הרהיטות החישובית. כל התלמידים בכל הרמות הצליחו בהשלמת הסדרות, אבל לא הייתה לכך השפעה על הרהיטות, לא של

מספר אחד עקב מנייה שגויה לאחר, כגון $12-4=9$. כנראה שהתחילו את המנייה לאחר מהמספר 12, ולכן הגיעו ל-9 כד: 12, 11, 10, 9. ממצא זה מתאים לטענת ברודי (Baroody, 2016), שהמעבר מפתרון בעזרת אסטרטגיית המנייה לרשימות חישובית תלוי בהתפתחות שלוש תובנות: הבנת הקשר בין השלם לחלקיו, הבנת עיקרון ההשלמה לשלם והבנה כי בין החיבור לחיסור מתקיים קשר של היפוך הסדר. גם מחקרם של פלטנבורג ועמיתיה (Peltenburg et al., 2012) הראה כי תובנת קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור השפיעה מאוד על רשימות חישובית אצל תלמידי כיתה ד'.

במחקר הנוכחי נעשתה הבחנה בין התלמידים החלשים הלומדים בכיתה רגילה לקבוצת תלמידים עם לקויות למידה (ל"ל) בני 9-12. ההבדלים התבטאו בקלט המבני של סובייטי ואומדן עד 10, שהיה חלש יותר אצל תלמידים עם לקויות למידה. בשאר תפקודי הליבה לא נמצאו הבדלים בינם ובין החלשים בכיתה ב' בחינוך הרגיל. תלמידים עם לקויות למידה, כמו החלשים בחינוך הרגיל, הצליחו בהשלמת סדרות. מיומנות זו סייעה להם בחיבור בעזרת אסטרטגיית המנייה, שהייתה נכונה יותר מזו של התלמידים החלשים בחינוך הרגיל. אולם אסטרטגיית המנייה לא סייעה להם בחיסור, 57% מהם לא פתרו כלל את תרגילי החיסור עם הפריטה, 29% מהם לא פתרו כלל חיסור בתחום 20 ללא פריטה. מכאן נסיק כי אסטרטגיית המנייה סייעה לפתרון אינסטרומנטלי, אך כנראה בלי תובנה חישובית.

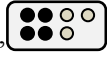
ההבדלים הבולטים בין הקבוצות בכיתה ב' רגילה ניכרו בתרגילים בתחום עשרים. קבוצת התלמידים המצטיינים (השולטים היטב) פתרו נכון את כל התרגילים בדקה וחצי. הם סיימו מהר עוד יותר את אשכול התרגילים עם רמזי הקשר. כצפוי, יש מקום לומר כי הם בעלי רשימות חישובית גבוהה ותובנה חישובית. הצלחתם בחישוב הייתה מותאמת להצלחתם בתפקודי הליבה. לעומתם תלמידים שהראו חולשה בתפקודי הליבה המבניים, פתרו בעזרת אסטרטגיית המנייה, עבדו באיטיות ונטו לטעויות בחיסור בתחום עשרים. אשכול התרגילים עם רמזי הקשר לא עזר להם ואף גרם לטעויות רבות יותר, כי התרגילים הופיעו בתחום עשר ועשרים לסירוגין. ממצאים אלה מתקשרים לטיעון כי הפתרון באמצעות אסטרטגיית המנייה אינו מספיק יעיל לפתרון תרגילים כבר בתחום עשרים. החולשה בגמישות הייצוג המבני, שנמצאה אצל רוב התלמידים המתקשים, עשויה להסביר את הקושי במעבר להכללה באמצעות, המתבטאת בעיקר בחיסור. כל זמן שאין הפנמה של ייצוג מבני גמיש המאפשר את ראיית השלם וחלקיו, התלמיד אינו מסוגל להשתחרר מהמנייה האינסטרומנטלית, שחוזרת על עצמה, ללא הפנמת הסכום.

תובנת ההיפוך שנמצאה בהתאמה גבוהה עם פתרון התרגילים ועם הבנת השאלות המילוליות, ומבטאת את גמישות הייצוג, סייעה לתלמידים המצליחים. לעומת זאת אצל התלמידים המתקשים היא נמצאה כחולשה בולטת ועשויה להסביר את הקושי שלהם לעבור לאסטרטגיות מנטליות. טיעון זה מתאים לטיעון של ברודי (Baroody, 2016) שהמעבר לאסטרטגיה מנטלית מחייב הימצאות תובנות אלה.

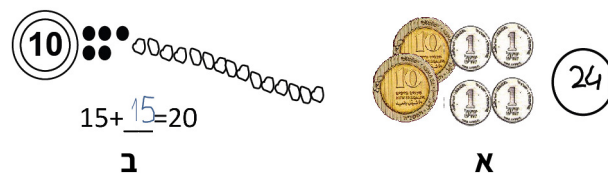
סקנות דידקטיות

הקשר שנמצא בין תפקודי הליבה לחישוביות, עשוי לשפוך אור על תהליכי הוראה יעילים שעשויים לעודד את התפתחות תפקודים אלה. מודעות המורה לתפקודי הליבה ולתהליכי תפיסה ראשוניים עשוי להשביח את ההוראה עבור כלל התלמידים ועבור התלמידים המתקשים במיוחד.

התלמידים המתקשים ולא של הבינוניים. הייצוג הסדרתי הנכון, השלמת סדרות עד 20, ובכללו השלמה מאמצע הסדרה וספירת דילוג, סייע לתלמידים החלשים והבינוניים בפתרון נכון של תרגילי חיבור באמצעות אסטרטגיית המנייה. בדרך כלל גרמה המנייה לטעויות בתרגילי החיסור במיוחד בתחום עשרים. ברוב הפעמים שבהן נצפתה מנייה, היא עיכבה את מהירות תהליכי הפתרון שהיו באופיים אינסטרומנטליים, בלי הבנת משמעות הפעולה. מעט טעויות הופיעו אצל התלמידים המתקשים בהשלמת סדרת דילוגים. מעניין לציין כי נמצאה התאמה בין קושי זה לקושי בזיהוי מהיר של כמות כמבנה. נראה שבטעויות אלה יש רמז לקושי בקלט המבני, המשפיע על היכולת להפנים ייצוגי כמות כמקבץ, ולפעול באמצעותן בחשיבה על פי הזיכרון.

הקשר בין הסובייטי לרשימות חישובית נמצא במחקרים קודמים (מרק-זיגדון, 2011; Libertus et al., 2011). המחקר הנוכחי העמיק את החקר בגמישות הייצוג המבני והשפעתו. הגמישות נבדקה בשתי דרכים: א. כהשלמה לשלם בשרטוט ובתרגיל; ב. כתובנת ההיפוך בין החיסור לחיבור על פי השרטוט , הנוגע לשלם וחלקיו. נמצא קשר בין השלמת שרטוט מספר דו-ספרתי לרשימות חישובית, וקשר מובהק בין תובנת ההיפוך לרשימות החישובית (להלן דוגמה).

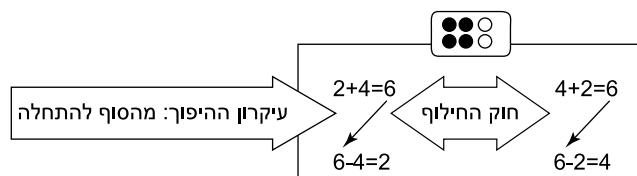
א. השלמה לשלם: ההשלמה לעשר הייתה קלה לכלל התלמידים שנעזרו במניית המשך. לעומת זאת בתחום עשרים בלט קושי אצל תלמידים חלשים בפירוק נכון של הסכמה המייצגת את העשרת והאחדות וכתובנת התרגיל המתאים. הנטייה למנייה אינסטרומנטלית בלי הבנה הייתה מלכודת לטעויות. יש לציין כי לא הייתה לתלמידים בעיה לזהות סכמה זו כמספר דו-ספרתי במטלה כגון איור 2א', אלא שבהשלמה ל-20, תלמידים חלשים השלימו כמתואר באיור 2ב'.



איור 2: דוגמה לטעות אופיינית בהשלמה ל-20

ב. הקשר המובהק שנמצא בין תובנת ההיפוך לרשימות החישובית השפיע במיוחד על הדיוק בתרגילי החיסור ועל הבנת השאלות המילוליות.

המטלה המתוארת באיור 3 מבטאת את גמישות הייצוג המשמשת תפקוד ליבה. חוק החילוף מתגלה כמבט, פעם לשמאל ופעם לימין. הבנת ההיפוך בין החיבור לחיסור מחייבת מבט מהשלם לחלקים ולהפך, מהחלקים לשלם.



איור 3: דוגמה לתובנת ההיפוך על פי שרטוט

במחקר הנוכחי נמצא שהתלמידים החלשים והבינוניים לא ראו ולא הבינו את הקשר בין פירוק השלם לתרגילי החיסור. קושי זה התבטא בטעויות בפתרון תרגילי החיסור. כולם פתרו את התרגילים באמצעות אסטרטגיית המנייה, וככל שהפרש היה גדול יותר בין המספרים, כן היו יותר טעויות. בתחום עשרים, חלק מהתלמידים נמנעו מהפתרון. הטעות האופיינית בחיסור התבטאה בסטייה של

בין החיסור לחיבור (Baroody, 2016). גרבנמייר וואן גאלן (Gravemeijer & Van Galen, 2003) מתארים שהיכולת לתובנת המספר היא יכולת להתמצא בסביבה המתמטית המורכבת מרשת של יחסים בין מספרים לעובדות. הם ממליצים על דגם ייצוג נקודות כמותי בתחילת ההוראה, המכוון את הילד לראות בקבוצות את השלם כבסיס תפיסתי לתהליכי הצירוף בכמות.

כבר ב-1978 הציגה כ"ץ עקרונות תפיסתיים אלה. היא הייתה נוירולוגית ופסיכולוגית שפיתחה שיטה להוראה מתקנת באמצעות דגמים של כרטיסי ליי, לדוגמה   לדוגמה.

עקרונות דומים של הוראה מתקנת באמצעות תבניות עשר מופיעים במאמרו של לוסק (Losq, 2005), לדוגמה  .

שני הדגמים מציגים דרך הוראה המבוססת על הבניית ייצוגים בתחום עשר, בעזרת דגמים המכוונים את העין לקליטה מהירה של הכמות. הם מאורגנים בזוגות, כאשר גודל הכרטיס מכוון לעשר. הם מדגימים למידה המגמישה את הייצוג באמצעות פעילות השלמת דיסקיות לשלם. יש ביניהם הבדל קטן אך בעל משמעות. בתבניות ליי של כ"ץ אין חלוקה למשבצות ונוסף על כך, יש מרחק קטנטן בין רביעייה לרביעייה. לטענת כ"ץ, עיקרון זה מסייע למאמץ הלמידה כהשלמה לגשטלט, בלי יכולת מנייה. לעומת זאת, המשבצות מאפשרות מנייה.

פעולת ההשלמה לשלם חסר מסייעת לתהליכי הפתרון של התרגילים. למרבה ההפתעה, לאחר תרגול זה הקושי בפתרון תרגילי החיסור נעלם גם אצל תלמידים עם לקויות למידה. על פי שיטת כ"ץ, יש ללמד את החיסור לפני החיבור. לאחר שהילד יודע לפתור תרגילי חיסור בתחום מספר כלשהו, הוא עשוי לגלות כמעט בכוחות עצמו את קשר ההיפוך בין החיבור לחיסור (כ"ץ, 1978). גילוי זה מארגן ומקשר בין התהליך התפיסתי לתהליך המנטלי גם יחד. תבניות מוכרות משמשות אפוא קשר רעיוני תומך זיכרון לפעולות החישוב.

גמישות במהלך מבט על תבניות, כגון  מביאה לידי תובנות המתמטיות של גילוי הקשרים בין התרגילים, חוק החילוף וקשר ההיפוך בין החיבור לחיסור. תובנות אלה משפיעות על הבנה מתמטית של הקשר בין השלם לחלקיו, המתבטאת בשאלות מילוליות.

נוסף על כך, תבניות כגון     מציגות את העומס על הזיכרון. למשל, אם ננסה לכתוב את כל התרגילים האפשריים לכמות 6, נגלה 18 תרגילים (לא כולל תרגילים עם נעלם). לעומת זאת אם נבין את הקשרים הנובעים מכל סכמה, נראה כי לפנינו ייצוגים של 4 סכמות בלבד. הסכמה מאפשרת לרכז את התרגילים כאשכולות מקושרים הנטמעים בזיכרון ביתר קלות.

תחום עשרים

תחום עשרים נשען על הרהיטות בתחום עשר, המשמשת מנוף להתפתחות תהליכי חישוב מתקדמים (בן-יהודה ואחרים, 2014; Baroody, 2006; Kling & Bay-William, 2014). פתרון תרגילי חישוב מעל עשר הוא אתגר מורכב הן מבחינת תהליכי הפעולה המצריכים גמישות זיכרון עבודה מתמטי והן מבחינת הצורך לגייס תובנות מתמטיות. אם התלמיד לא יצליח להפעיל במהירות תהליכי פירוק וצירוף של הרכבי הכמות בתחום עשר, הוא לא יצליח להתמודד עם תהליכי הפתרון בתחום עשרים. תרגילי הפריטה וההעברה בתחום עשרים מחייבים זיכרון עבודה גמיש,

למורים רבים יש נטייה להדגיש בהגזמה את תהליכי ספירה ומנייה המייצגים את המעבד הסדרתי, ופחות לחזק את תהליכי הקלט והעיבוד של הייצוג המבני. נטייה זו מביאה כמה מהילדים לראות באסטרטגיית המנייה את הדרך המרכזית לפתרון תרגילים. תופעה זו מעכבת את יכולתם לדמות כמויות ולעבור לתהליך המנטלי של החישוב. התוצאות של עיכוב זה ניכרות בקושי להתמודד עם תרגילי החיסור, שכן אסטרטגיית המנייה לאחר בחיסור מורכבת יותר. תלמידים אלה אינם מפנימים את הסכומים וההפרשים ואינם מגיעים לרהיטות חישובית גם בכיתות גבוהות. טענה זו מתקשרת לדברי גרי (Geary, 2004), המציין כי האפיון הבולט של תלמידים עם לקויות במתמטיקה הוא הקושי ליצור דימויים מנטליים של מושגים מתמטיים. חשוב אפוא לחשוף את התלמידים בו בזמן לשני הייצוגים, הסדרתי והמבני. יש להדגיש את חיזוק תהליכי העיבוד של הייצוג המבני ובעיקר להגמשתם כבסיס לפתרון מנטלי.

בתחילת הוראת החשבון, בגן ובכיתה א', חשובה התנסות דינמית עם אמצעי המחשה מגוונים במהלך מנייה, שיח ומלל להמשגת מושג המספר. לצד ריבוי דוגמאות, מומלץ לחשוף את הילדים גם לדגמים מבניים סכמתיים של נקודות מאורגנות, כגון דגם הנקודות במשחק הדומינו, דגמי תבניות ליי וכדומה. נקודות היווצרות צורה דו-ממדית נקלטות כתמונה של השלם ובו בזמן גם את פרטיו כבודדים. את דגם זה אפשר להמחיש גם מבחינה דינמית באמצעות דסקיות, פקקים וכדומה. הדגם מסייע למעבר מהתלות בהמחשה להפנמה בזיכרון ומכאן הוא משמש גשר לקראת הבניית הייצוג המופשט. פנל ורואן (Fennel & Rowan, 2001) מציינים את חשיבותם של דגמי הייצוג ככלים לטיפול ההבנה והמשמעות של המספרים ופעולות החשבון. הדגמים מאפשרים מעבר מן ההתנסות הסביבתית המוחשית המגוונת למבנה סכמתי וכוללני. ככל שהם יותר פשטניים בצורתם, כן הם מאפשרים תהליך של ארגון מבני. סכמות כמות עד עשר, הבנויות מעיגולים, עומדות בקריטריון זה.

ייצוגי כמות בתחום עשר נבנים במהלך תהליכי הלמידה ומעוררים את תהליכי ההגמשה בעת הבנייתם:

א. חשיפה לדגם מבני ושיום המספר: מומלץ לפתח באמצעות משחקים, כגון דומינו, קובייה או כל דגם כמותי מובנה של נקודות בארגון צורני, המסייע לתהליכי קלט כמותי והבנייתו כייצוג המופנם בזיכרון בהתאמה לשם המספר.

ב. הפקה: מומלץ לתת לילד לבנות דגמים מבניים באמצעות פריטים עגולים, כגון פקקים או דסקיות. התנסות פעילה זו במהלך חשיפה לדגם, תחזק את תהליכי הקליטה, תחילה כהעתקה ובהמשך כבניית דגם לאחר חשיפה קצרה והסתרה. בניית הדגם מהזיכרון מראה את הפנמתו.

ג. תהליכי הגמשה לפירוק וצירוף תפיסתי יתפתחו כפעולת השלמה לדגם: מתוך הדגם שהילד בנה מהזיכרון, יש להסתר חלק מהדסקיות כשעיני הילד עצומות. עליו לענות על השאלות: כמה היו קודם? כמה חסר עד...? תהליך ההשלמה לשלם על פי רמז מחזק את הפנמת השלם ובו בזמן מכין את תהליכי הפירוק והצירוף של השלם וחלקיו (כ"ץ, 1978; Losq, 2005).

תהליכים תפיסתיים אלה (א-ג) מאפשרים לילד להשתחרר מהמנייה ולעבור לפעולה חישובית מנטלית באמצעות "ייצוגים מופנמים בתהליכי הגמשה".

גמישות הייצוגים מאפשרת את התפתחות תהליכי חישוב המתקדמים. תובנה חישובית נובעת מתהליכי תפיסה הנוגעים לראייה הגמישה של הקשר בין השלם לחלקיו. קשר זה הוא בסיס לגילוי היחסים בין המספרים ובין הקשרים בין התרגילים, חוק החילוף ותובנת ההיפוך

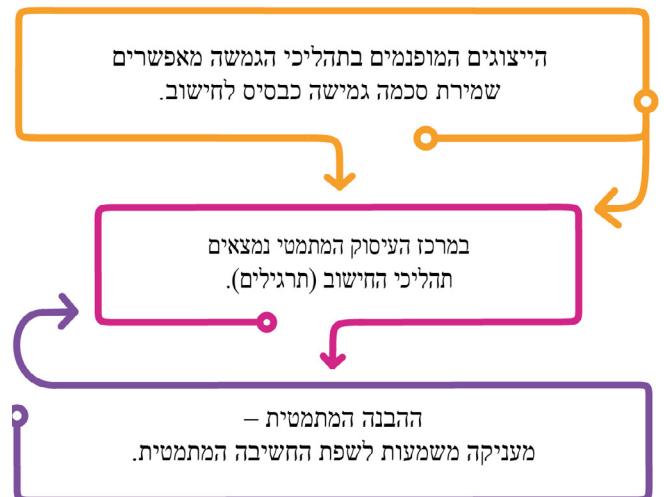
שיאפשר כמה תהליכי פירוק וצירוף בו בזמן. לדוגמה כאשר התלמיד פותר תרגיל עם פריטה באסטרטגיית ההשלמה לעשר, עליו לבצע ארבעה תהליכי פירוק וצירוף, כמעט בו בזמן:

$$\begin{array}{c} \boxed{10} - 3 \\ 12 - 5 = 12 - 2 - 3 = 7 \\ \boxed{10+2} \quad \boxed{2+3} \end{array}$$

איור 4: ארבעה תהליכי פירוק וצירוף בתרגיל אחד

ההליך החישובי מחייב שימוש גמיש בזיכרון העובדות והבנת הקשרים בין הפעולות. תלמידים מגלים עובדות נגזרות על בסיס העובדות שהם זוכרים וגילוי הקשרים ביניהם (Baroody, 2006). לדוגמה, אסטרטגיית פתרון לעומת תרגילי "תיאומים". לדוגמה: $13-6=$, נחשב לתרגיל קשה. לעומתו את התרגיל $6+6=12$ קל יותר לזכור. הבנת הקשר בין המספרים והבנת הקשר בין החיבור לחיסור, עשויה לנווט את הילד לפתרון.

מכל האמור לעיל אפשר להפיק מודל המציג את ההשפעה של ייצוגי הכמות על החישוב וההבנה:



איור 5: שלושת מוקדי ההוראה במתמטיקה

סיכום

המחקר הנוכחי ביסס את הטענה כי הצלחה בחשבון קשורה קשר ישיר לבשלות ותקינות תפקודי הליבה התפיסתיים המקבלים ביטוי בהפנמת ייצוגי כמות ובעיקר בגמישותם. הם משפיעים על הרהיטות החישובית ועל ההבנה כאחד.

חוש לכמויות הוא מתנת אל מולדת, המעניקה יתרון לניחנים בה. הם נהנים מתפיסה מהירה וגמישה של כמויות הנובעת מאיכות תפקודי הליבה. מנגנונים אלה משפיעים על התפתחותם החשבונית בלי מאמץ קוגניטיבי נראה לעין. לעומתם תלמידים עם לקויות למידה חייבים להשקיע מאמץ קוגניטיבי והפניית קשב כדי לקלוט כמויות בסיסיות אפילו בתחום ארבע. רוב התלמידים נמצאים בטווח בין המחוננים לתלמידים המתקשים בחשבון.

ניסיון ההוראה המתקנת עם תלמידים עם לקויות למידה מראה כי אפשר לפתח תהליכי למידה ולסייע לתלמידים אלו בהבניה של ייצוגי כמות כתהליכים גמישים וכבסיס לתהליכי פירוק וצירוף הנדרשים בחישוביות. שימוש בכלים ובתהליכי הוראה מותאמים בכיתה הרגילה מעלים את רמת ההצלחה גם של תלמידים ממוצעים

בכיתה וגם של תלמידים עם לקויות למידה.

רשימת מקורות

בן-יהודה, מ' ואילני, ב' (2008). פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך: תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים. תל-אביב: מכון מופ"ת.

בן-יהודה, מ' ושרוני-יצחק, ו' (2009). אח"ד מי יודע? אבחון חשבון דידקטי: ערכה לאבחון ואיתור קשיים בחשבון/מתמטיקה. חולון: יסוד.

בן-יהודה, מ', שרונים, ו' ואלמוג, נ' (2014). פיתוח כלי לבדיקת המהירות והדיוק בחישוב המבוסס על תוכנה מספרית בקרב תלמידים בכיתות ג'-ו'. דפים, 58, 197-224.

ברוזה, א' ובן-דוד קוליקנט, י' (2017). תהליכי למידה של תלמידים תת-משיגים במתמטיקה בסביבה עשירה בפיגומים ותיווך אינטנסיבי של מורה - חקר מקרה. מספר חזק 28, 14-29, 2000.

הניק, א' (2008). מחקרי מוח וחינוך. בתוך פ"ש קליין וי"ב יבלון (עורכים), ממחקר לעשייה בחינוך לגיל הרך (עמ' 31-37). ירושלים: האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים.

הניק, א' ורובינשטיין א' (2008). היבטים נוירוקוגניטיביים של דיסקלקוליה התפתחותית. Medicine: ילדים, 46-42.

הניק, א', רובינשטיין, א', אשכנזי, ש' ומרק-זיגדון, נ' (2010). היבטים נוירוקוגניטיביים בעיבוד מידע נומרי. אוריינות ושפה, 3, 113-130.

כ"ץ, צ' (1978). הקניית החשבון על פי הגישה ההתפתחותית: מדריך למורה (מהדורה ניסיונית). תל-אביב: המחבר.

כ"ץ, ש' ודרור, ט' (2014). אמונות מחוללות פעולה – גם במתמטיקה. שאנון, יט, 195-219.

לינצ'בסקי, ל' ותובל, ח' (1993). תפקיד המודלים כאמצעי מסייע למתקשים בחשבון: ניתוח מושג השבר. מגמות, לה, 109-96.

מרקוביץ, צ' (2000). חוש למספרים: פעילויות לפיתוח החוש למספרים והחשיבה המתמטית (מהדורה ניסיונית). חולון: יסוד.

מרק-זיגדון, נ' (2011). דיסקלקוליה התפתחותית: הגדרה, מאפיינים, והשלכות דידקטיות. מספר חזק 19, 10-14.

משרד החינוך. (2006). תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים. ירושלים: מחבר.

נבו, ד' (1995). בין "דרישת מינימום" ל"רמת הצטיינות": הצעה לסולם ציונים חדש. הד החינוך, סט(9), 10-13.

סקמפ, ר' (1991). הבנה רלציונית (Relational) והבנה אינסטרומנטלית (Instrumental) חלק א'. על"ה, 8, 24-29.

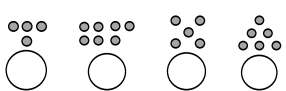
פישיבין, א', תירוש, ד' וברש, א' (1998). ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית. על"ה, 22, 12-28.

קדרון, ר' (1991). ליקויי למידה התפתחותיים: הגדרה, אפיונים וקווי-יסוד לטיפול. ירושלים: משרד החינוך והתרבות.

שטינברג, ר' (2002). פתרון בעיות מילוליות בגן. הד הגן, 67(1), 22-33.

- Geary, D. C. (2004). [Mathematics and learning disabilities](#). *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.
- Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.114-122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kling, G., & Bay-Williams, J. M. (2014). [Assessing basic fact fluency](#). *Teaching Children Mathematics*, 20(8), 488-497. doi:10.5951/teacchilmath.20.8.0488
- Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). [Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability](#). *Developmental Science*, 14(6), 1292-1300. doi:10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x
- Losq, C. S. (2005). [Number concepts and special needs students: The power of ten-frame tiles](#). *Teaching Children Mathematics*, 11(6), 310-315.
- Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100-A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 351-369. doi:10.1007/s10649-011-9351-0
- Piazza, M., Facoetti, N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33-41. doi:10.1016/j.cognition.2010.03.012
- Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 34-46.
- שי, ר' (2009). [אבחון יסודות החשבון: מבט חדש על פעילויות מבחן מינקוביץ'](#). חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.
- Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2009). Numerical distance effect in developmental dyscalculia. *Cognitive Development*, 24(4), 387-400. doi:10.1016/j.cogdev.2009.09.006
- Baroody, A. J. (2006). [Why children have difficulties mastering the basic number combination: And how to help them](#). *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22-31.
- Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with basic differences in grade 1. *PNA*, 10(3), 161-190.
- Boaler, J., Williams, C., & Confer, A. (2015). Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. *YouCubed*, 1-28.
- Common Core State Standards of Mathematics (CCSSM). (2010). *Common core state standards initiative: Preparing America's students for college & career*. Retrieved from http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). [Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic](#). *Cortex*, 33(2), 219-250. doi:10.1016/S0010-9452(08)70002-9
- De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction*, 20(3), 205-215. doi:10.1016/j.learninstruc.2009.02.020
- Fennel, F., & Rowwan, T. (2001). [Representation: An important process for teaching and learning mathematics](#). *Teaching Children Mathematics*, 7(4), 288-292.
- Fias, W., & Fischer, M. H. (2005). [Spatial Representation of Numbers](#). In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 43-54). New York: Psychology Press.

נספח 1: דוגמאות מהמבדק – בנושא תפקודי החשבון

1. בדיקת הייצוגים וגמישותם		
תפקודי תפיסה	המטלה	מיומנויות חשיבה
זיהוי ואומדן כמויות בדידות בתחום 10 וכתיבת המספר	שיום וכתיבת מספר לסכמת ייצוג (מוכרות ולא מוכרות) 	קשר בין אופני הייצוג: כמותי, מילולי, גרפי
זיהוי ערך הכסף, כייצוג מספר דו-ספרתי וכתיבת המספר	 	הבנת ההמרה: הכללה והבנת הערך המספרי של הסמל הכתוב

1. ייצוג כמותי ומשמעות המספר (מנגנוני תפיסה)							
מס'	שם התלמיד	ייצוג מבני				ייצוג סדרתי	
		קלט זיהוי מהיר של כמויות		הפקה הילד מצייר לפי המספר		השלמת סדרות בתחום 20	גמישות להפיכות ספירת דילוגים
		שיום כמות בדידה עד 10	שיום מספר דו-ספרתי על פי ייצוג כסף	תחום 10	תחום 20	השלמת סדרות בספירה קדימה	השלמת סדרה בספירת דילוגים

לקראת תהליכי חישוב: גמישות הייצוג המבני			
מס'	שם התלמיד	הקשר בין דגם ייצוג מבני לתרגילים כתובים: כהשלמת החסר כמציאת 4 תרגילים לתבנית	
		השלמת עיגולים לכמות 10 וכתבת תרגיל	השלמת ציור לכמות וכתבת תרגיל 20 לחלקי: 4 תרגילים לתבנית

2. חישוב							
א. רהיטות חישוב							
מס'	שם	תחום 10		תחום 20			
		חיבור	חיסור	חיבור	חיסור	חיבור	חיסור
				ללא העברה	עם העברה	ללא פריטה	עם פריטה

II. קריטריונים להערכת רהיטות חישובית		דיוק חלקי: כתוב את מספר התרגילים הנכונים. חיסור: ציין כמה תרגילים הספיק לפתור בדקה וחצי. יעילות: ציין אם השתמש במנייה לחיבור או לחיסור?	
דיוק, הספק, יעילות			
סמן ✓ אם פתר הכול נכון בזמן וללא מנייה.			

ב. תובנה חישובית							
מס'	שם	השלמת נעלם		השלמה ל-10		תובנה חישובית לפי רמזי קשר	
		חיבור	חיסור	חיבור	חיסור	חיבור	חיסור

3. הבנה מתמטית						
מס'	שם	הבנת שאלות מילוליות				הבנת הוראות (התרשמות כללית)
		נתונים גלויים	השוואת כמויות (חישוב בכמה יותר?)	שאלה עם נתון סמוי (זיכרון עבודה)	חישוב עודף	
						תאר את עלו קשיים, כגון התארגנות על הדף, סדר, כתיבה נכונה. האם הופיעו שיכולי ספרות או כתב ראי?
						תאר: האם קורא ומבין הוראות בכתב? אם התקשה בקריאה, קרא בפניו. תאר את הבנתו בעל פה.