

# השפעה של הוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות ומבנים-אלגבריים על יכולת פתרון משוואות

רוית פלדמן

רונית בסן צינצינטוס



רוית פלדמן

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים ורכזת תחום מתמטיקה בחטיבת הביניים אליאנס תל-אביב. בעלת תואר שני בחינוך מתמטי. ותק רב בהגשה לבגרות ברמות הלימוד השונות.



ד"ר רונית בסן צינצינטוס

ראש החוג למתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים. מרצה בכירה במכללה, בעלת ניסיון עשיר בהדרכת מורים ובפיתוח חשיבה מתמטית. תחומי מחקר עיקריים: התאמת מודלים מתמטיים לפתרון בעיות, דרכי חשיבה ותפיסות שגויות במתמטיקה של תלמידים ומתכשרים להוראה, והתפתחות מקצועית של מורים.

## תקציר

תלמידים מתקשים בבחירת פעולות אלגבריות לפתרון בעיות וחסרה להם מיומנות של הסתכלות לוגית על ביטויים אלגבריים.

הוך ודרייפוס הציגו פתרון של תלמיד שפעל לפי כללי האלגוריתמים שלמד אך לא הבחין בהפרש שני ביטויים זהים, כך שמבלי לבצע אף חישוב, פתרון המשוואה הוא הקבוצה הריקה. הוא חסר מיומנות המכונה "חוש למבנה".

מבנה אלגברי הוא מבנה מתמטי המורכב מקבוצה עם פעולה או פעולות, המקיימות אקסיומות מסוימות. המחקר עוסק בהשפעת ההוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות ומבנים אלגבריים על הגמישות המחשבתית, ההבנה, יעילות פתרון התלמידים והישגיהם. מטרתו לבחון השפעת ההוראה על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות. שאלות המחקר בדקו האם ההוראה תגרום לשיפור ביכולת זיהוי מבנים אלגבריים ולשיפור בהישגי תלמידים בפתרון משוואות.

הממצאים מראים כי לפני ההוראה כשליש מהתלמידים פתרו בשימוש בחוש למבנה. בשאר הפתרונות פנו לפתרון מסורבל או לא פתרו כלל. נראה שקיימת מוגבלות בהפעלת שיקול דעת לפני שתלמידים ניגשים לפתור והם אינם בוחנים דרכים אחרות לפתרון. לאחר ההוראה, אחוז גבוה מהתלמידים השתמשו בחוש למבנה ואחוז ההצלחה עלה. טרם ההוראה נמצא כי יש קשר בין מידת ההצלחה בפתרון התרגיל ובין שימוש או אי שימוש בחוש למבנה. מכאן שיש לבנות את תוכנית הלימודים באיזון נכון ולשלב בין חיזוק המיומנות והשליטה של התלמידים בחוקים הפורמליים ובין פיתוח טכניקות ומיומנות חשיבה לוגית. הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים, מביאה לשיפור בפנייה לשימוש בחוש למבנה ובהישגי התלמידים ומכאן תרומתה.

**מילות מפתח:** פתרון משוואות; מבנים-אלגבריים; חוש למבנה.

תלמידים ניגשים לפתרון תרגילים באמצעות פרוצדורות אריתמטיות ואלגבריות שלמדו. פתרון תוך שימוש בפרוצדורות לעיתים מסורבל ומאריך את משך זמן הפתרון. הוא גם יכול לגרום לריבוי טעויות חישוב ולקושי בהגעה לפתרון כאשר נדרשת יכולת חשיבה והבנה מלבד יכולת אלגוריתמית פרוצדורלית. ישנם תרגילים שבהם תשומת לב למבנה המיוחד של התרגיל, תאפשר פתרון קל, מהיר ויעיל יותר. מיומנות זו של התבוננות וניצול מבנה התרגיל לפתרון, נקראת בספרות המקצועית "חוש למבנה" (Linchevski & Livneh, 1999).

## סקירה ספרותית

הרעיון למחקר עלה בשל משוואה מתוך בחינת בגרות במתמטיקה, כאשר תלמיד שגה בהעתקה וקיבל את המשוואה הזו: 
$$1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{132}$$
 פתר על פי האלגוריתמים שלמד: פתח סוגריים, כפל במכנה משותף וכינס אברים דומים. למעט חוסר התמקדות בתחום ההצבה של המשוואה, התלמיד לא טעה. דרך הפתרון שלו העידה על שליטה סבירה בטכניקה אלגברית. אולם חסרה מיומנות אחרת המכונה "חוש למבנה". הוא לא הבחין בהפרש של שני ביטויים זהים.

מיומנות זו מתבטאת באלגברה תיכונית ביכולת לטפל בביטוי אלגברי כיחידה, לזהות שקילות למבנים מוכרים ולבדוק אילו פעולות כדאי לבצע כדי לנצל את המבנה. מיומנויות אלה היררכיות ושליטה ביכולת מצריכה שליטה ביכולות קודמות. כבר בלימודי האריתמטיקה יש לחשוף תלמידים למבנה התרגיל כדי שיפתחו חוש למבנה (Linchevski & Livneh, 1999). הוך ודרייפוס (Hoch & Dreyfus, 2004) מצאו כי אחוז ההצלחה בקרב הפותרים עם שימוש בחוש למבנה היה גבוה במידה ניכרת (100%) מאלו שלא השתמשו בו (29%) ופתרונותיהם הכילו טעויות אלגבריות לא מעטות. ייתכן שתלמידים ניגשים לתרגיל מצוידים במכלול אלגוריתמים שלמדו ומבצעים אותם בין שהם מתאימים ובין אם לאו, ואילו מהלך הפתרון הנשען על שימוש בחוש למבנה מזמן יכולות מוגבלות מאוד לביצוע טעויות אלגבריות. לטענתם, יש לשנות את הרגלי תלמידנו ולעסוק ביתר הדגשה ביכולות שימוש במבנים אלגבריים דומים לצורך פיתוח חוש למבנה באלגברה.

חוש למבנה באלגברה תיכונית מתבטא כבר מגיל צעיר בלימודי האריתמטיקה בבית הספר היסודי ונקרא בספרות המקצועית "חוש למספרים". כלומר חוש למספרים מתבטא ביכולת להבין את הקשרים בין המספרים לפעולות, להשתמש בשימוש גמיש במספרים, להשתמש באומדן ולשפוט סדרי גודל של מספרים, לשפוט היגיון של תשובות, לעבור בין הצגות שונות של מספרים, לקשר את התשובות שמתקבלות למציאות, וכך למעשה נשתמש במספרים בחוכמה (Markovits, Hershkowitz, & Bruckheimer, 1989).

חוש למספרים איננו מתפתח בטבעיות אצל מרבית התלמידים, וכדי לשפרו יש לתת להם במהלך כל הלימוד בבית הספר משימות מגוונות שבהן החישוב הנדרש מועט או לא קיים בכלל. תוכנית הלימודים במתמטיקה המיועדת לפתח בתלמידים את החוש למספרים צריכה לפתח בדרכים גמישות ויצירתיות הן ידע לצורות שונות של מספרים והן מערכים לשימוש בידע זה (Resnick, Lesgold, & Bill, 1990).

אי אפשר למדוד את הישגי התלמידים באמצעות יכולתם לפתור

תרגילים מבודדים, אלא על פי יכולתם להחליט איזו פעולה לנקוט במצב נתון, באילו מספרים להשתמש והערכתם בדבר היגיון התוצאה. מכאן שמתאים לעשות שינויים כבר בבסיס הוראת החשבון (Burns, 2000). טענה דומה מעלים הסוברים כי למרות היותו של פיתוח חוש למספרים חיוני לכישורי החיים וחשיבותו לחיי היומיום ולפיתוח חשיבה מתמטית, תוכנית הלימודים בבית הספר היסודי אינה תואמת ומתמקדת בפרוצדורות ואלגוריתמים חישוביים (Markovits & Pang, 2007). "חוש למספרים" לא התפתח במפורש ובמידה ניכרת. עם זה נמצא כי מספר התשובות הנכונות כמעט הוכפל לאחר פעילויות מתאימות, ולכן רצוי שפעילויות כאלו ישולבו בתוכנית הלימודים לפני כיתות ו'-ז' (Markovits et al., 1989). הוראה נכונה צריכה לפתח תובנה מספרית והבנת קשרים בין פעולות, להישען על הדרך שבה ילדים חושבים, להתבסס יותר על אומדן וחישוב בעל פה ופחות על חישובי נייר פורמליים ולעודד ילדים להמציא דרכים לפתרון משלהם (Burns, 2000).

## קשיי תלמידים בפתרון משוואות באלגברה

ההתנהגות המתמטית של התלמיד נוגעת לשלושה היבטים בסיסיים: **הפורמלי** העוסק באקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות; **האלגוריתמי** העוסק בטכניקות פתרון ובאסטרטגיות סטנדרטיות; **האינטואיטיבי** העוסק במידת הסובייקטיביות שבה היחיד מקבל במישורין מושג, משפט או פתרון. לפעמים ישנה התאמה מוחלטת בין שלושת המרכיבים. אך לעיתים בתהליכי למידה, הבנה ופתרון יכולים להיווצר קונפליקטים שמביאים לידי תפיסות מוטעות וטעויות שיטתיות. כדי להתגבר על הטעויות, על התלמיד להבין את הבסיס הפורמלי המצדיק את האלגוריתם. לימוד אלגוריתמים בלא הבנה ברורה של ההצדקה ושל המסגרת הפורמלית מוביל לשימוש מוטעה (Fischbein, 1994). קשיים בהפעלת טכניקה אלגברית היא תופעה שכיחה. אחת הסיבות לכך היא שהתכנים נלמדים בעיקר למידה טכנית ולא נשענים על הבנה (Hoch & Dreyfus, 2004); Booth, 1981). תלמידים השתמשו בטכניקה של פתרון חישובי גם כשכלל לא היה צורך. ייתכן שהם מעדיפים את הפתרון החישובי שהוא בטוח יותר מבחינתם וכך הם נכנסים לרוטינה של עבודה טכנית בפתרון המשוואות (Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1990). בדרך כלל תלמידים מצליחים לפתור משוואות ואי שוויונות מסוימים ממעלה ראשונה ושנייה, אבל התהליכים שהם מבצעים חסרי משמעות בעבורם. הם מתקשים בפתרון משוואות ואי שוויונות שאי אפשר לפתור בגישה אנליטית (סוזן, 2000).

בבית ספר היסודי לא מושם דגש בראייה מבנית של ביטויים חשבוניים, ולכן התלמידים מתקשים להתמודד עימם בלימודי האלגברה. אי הדגשת המבניות היא למשל מקור הקושי בטיפול בביטוי  $a+b$  כאובייקט באלגברה (Booth, 1989). יש שתי תפיסות של ראייה מבנית של ביטויים מתמטיים. האחת, תפיסה ראשונית, תהליכית, סדרתית ויורדת לפרטים שנוגעת לביטוי המתקבל מתוצאה של סדרת פעולות, והשנייה, תפיסה מבנית, מורכבת יותר, הרואה בביטוי אובייקט שלם מבלי לכוון לאיברים המרכיבים אותו. חוסר היכולת של התלמידים להבין את דואליות התהליך-המבנה של סמלים אלגבריים הוא אחד ממקורות הקושי שלהם בלימודי האלגברה (Sfard, 1991). תלמידים רבים רואים בביטוי אלגברי ביטוי שאינו שלם ונוטים להוסיף "0" ואז לפשט ולפתור את המשוואה שנוצרה. נמצא כי תלמידים נוטים לראות בביטויים אלגבריים משוואות ולעשות בהם פעולות המותרות רק למשוואות (Kieran, 1992).

## השיטה

המחקר שילב בין מחקר כמותני למחקר איכותני ואוכלוסיית המחקר כללה קבוצת לימוד בת 23 תלמידים בכיתה י', הלומדים מתמטיקה ברמת 4 יחידות לימוד.

## כלי המחקר

**שאלון מקדים:** בשאלון שש מטלות. שאלות 1, 4, 5 הן משוואות שאפשר לפתור אותן בשתי דרכים: בטכניקה אלגברית ובחוש למבנה. דרך הפתרון תהיה יעילה ומהירה כאשר ישתמשו בחוש למבנה, לדוגמה שאלה 4:  $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right)$ . שאלה 2 אינה דורשת פתרון משוואה, אך דורשת זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי להגיע לתשובה נכונה. שאלה 3 היא משוואה שידע התלמידים מאפשר לפתור אותה רק באמצעות טכניקה אלגברית של פתרון משוואה שגרתית והיא איננה דורשת חוש למבנה:  $\left(\frac{x^2+12}{x}\right)^2 - 15\left(x + \frac{12}{x}\right) + 56 = 0$ : שאלה 6:  $\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4}{x^2+2x}$ . היא משוואה וכדי לפתור אותה יש לבצע מניפולציה אלגברית ולזהות את המבנה, אחרת יהיה קשה לפתור אותה (ראו נספח א).

**יחידת הוראה:** מנתה שבועה שיעורים. כדי לפתח אצל התלמידים את החוש למבנה מעבר להתבוננות הטכנית ולשפר את גמישות מחשבתם והישגיהם. בתחילה המטרה הייתה לפתח אסטרטגיה לעבודה עם מספרים לצורך שיפור חוש למספרים. לאחר מכן הועברו פעילויות לפיתוח גמישות הבחירה ושימוש באלגוריתם יעיל בפתרון משוואות. בהמשך ניתנו משימות לפיתוח הבנה איכותית של ביטויים אלגבריים באמצעות שימוש בלוגיקה מתוך ראייה כוללת של הנושא. כמו כן הושם דגש בפיתוח היכולת לעבור בין הצגות שונות של ביטויים שקולים, ובשלב האחרון הושם דגש בביסוס והעמקת ההבנה באמצעות שיעורים חווייתיים (ראו נספח ב).

**שאלון מסכם:** דומה לשאלון המקדים. הוא ניתן לאחר ההוראה כדי לבדוק שינוי ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות ובהישיג התלמידים.

**ראיונות:** נעשה שימוש בריאיון חצי מובנה. על סמך דרכי הפתרון שהציגו בשאלון המסכם נבחרו שמונה תלמידים, ארבעה שפתרונם נשען ברובו על חוש למבנה וארבעה שהמעטו להשתמש בחוש למבנה. המטרה הייתה לזהות את תהליך החשיבה של התלמידים ולברר האם השתמשו בחוש למבנה ואם לא, להוביל אותם בעזרת שאלות מנחות לדרכי פתרון יעילות יותר. מטרה נוספת, לברר עם התלמידים האם יחידת ההוראה השפיעה על גמישות מחשבתם ועל דרך פתרון התרגילים.

## ממצאים

כאמור, מטרת המחקר הייתה לבחון את השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות. תוצאות המחקר הנוכחי יוצגו בארבעה חלקים: ממצאים מניתוח השאלון המקדים, ממצאים איכותניים מהליך העברת יחידת ההוראה ומהראיונות, ממצאים מניתוח השאלון המסכם והשוואה בין השאלונים.

## ממצאים טרם ההוראה

טבלה מס' 1 מציגה את שיעורי ההצלחה בפתרון השאלות ושיעורי המשתמשים בחוש למבנה. נראה כי כאשר נעשה שימוש בחוש למבנה, כך עולה שיעור ההצלחה בפתרון השאלה. בשאלות 1, 3,

תלמידים נוטים לפנות לרעיון הראשון שנראה להם מתאים לפתרון, בלי תכנון וניתוח מעמיק של מאפייני הבעיה ונתונייה. תופעה זו של תכנון נמהר עקב היעדרותה של בקרה עצמית ראשונית אצל התלמיד עלולה להתרחש במגוון תחומים הדורשים פתרון בעיות, אפילו יומיומיות, כמו בעיות במתמטיקה (Schoenfeld, 1992). הנטייה הטבעית שלנו כבני אדם בקבלת החלטות היא לפנות למוכר לנו מהעבר, גם כשהבחירה איננה מתאימה בהכרח (Ginat, 2007). תגובה אינטואיטיבית זו מבוססת על מנגנון שבו כאשר אנו נתקלים במצב מסוים המחייב דיון, מתבצעת בדיקה אם מצב זה דומה לאחד המצבים המוכרים לנו מהעבר, והתגובה היא לפי הצורך. ככל שניסיונו של האדם בתחום מסוים עשיר יותר, כך האינטואיציה שלו בתחום תהיה טובה יותר (וינר, 2000).

## גישות בהוראת המתמטיקה

בתחום החינוך המתמטי יש התלבטות מתמדת בין שתי גישות המאפיינות למידה בכיתה. האחת מדגישה את חשיבות הקניית התכנים המתמטיים העיקריים, בהדגשת הידע הפרוצדורלי (למשל הפעלת פעולות חשבון והמניפולציות האלגבריות). השנייה מדגישה את פיתוח תהליכי החשיבה הדרושים להתמודדות עם בעיות מתמטיות ובניית מודלים מתמטיים לסיטואציות (פרידלנדר, 2008).

מורים רבים מלמדים מהר מדי לצורך הספק גבוה. קיימת הבחנה בין שני סוגים של הבנה: Relational Understanding – ידיעה של מה לעשות ומדוע; Instrumental Understanding – ידיעה כללית, בלי הבנת הסיבות ובלי יכולת יישום. בשל עומס תוכנית הלימודים והשפעת הבחינות, מורים רבים ואפילו המנסים, ממשיכים ללמד מתמטיקה בעיקר על פי הבנה אינסטרומנטלית (Skemp, 1976). בדומה לכך, מורים ותלמידים מאמינים שאפשר להצליח במתמטיקה באמצעות שינון חוקים ונוסחאות ובאמצעות תרגול טכני רב (Schoenfeld, 1989). על המורים להימנע מלהציג לפני התלמידים פתרון מלא וישיר. הבנה מהותית יותר תושג אם יוצגו גישושים ראשוניים וחלקיים בלבד ודרכים להתמודד עימם. מומלץ לדון במליאת הכיתה ורצוי לפתור בעיות בקבוצות קטנות כשהמורה משמש נווט בלבד ומפקח באמצעות שאלות מכוונות (Schoenfeld, 1987). תוכנית הלימודים שמה דגש בתוצרים ובתהליכי חשיבה ומדגישה כי המתמטיקה אינה רק מקצוע נוקשה בעל חוקים חד-משמעיים, אלא מקצוע בעל היבט רחב שבו אפשר להתמודד עם משימות לא שגרתיות באמצעות שילוב בין חשיבה אלגוריתמית ובין חשיבה מסתעפת ויצירתית (חכים וגזית, 2011).

במחקר הנוכחי המתמקד בפתרון המשוואות, נעשה שימוש בפירוק לגורמים באמצעות הוצאת גורם משותף, נוסחאות הכפל המקוצר ובפירוק לגורמים של טרינום ריבועי, נושאים שנלמדו בהרחבה בלימודי המתמטיקה בחטיבת הביניים.

## מטרת המחקר

לבחון את השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות.

## שאלות המחקר

האם הוראה המשלבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות?

האם הוראה המשלבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור בהישגי התלמידים בפתרון משוואות?

5א אין כלל שימוש בחוש למבנה ושיעורי ההצלחה נמוכים מ-40%. בשאלות 2א, 2ג, 2ד, 5ב ו-6 – רק מי שהשתמש בחוש למבנה הצליח לפתור את התרגיל נכון.

#### טבלה מס' 1: אחוזי ההצלחה ואחוזי המשתמשים בחוש למבנה

(N=23)

| שאלה                                 | 1             | 2א  | 2ב | 2ג | 2ד  | 3             | 4   | 5א            | 5ב  | 6  |
|--------------------------------------|---------------|-----|----|----|-----|---------------|-----|---------------|-----|----|
| אחוז הצלחה                           | 39            | 96  | 78 | 44 | 13  | 39            | 44  | 35            | 13  | 13 |
| פנייה לחוש למבנה                     | 0             | 96  | 91 | 79 | 13  |               | 22  | 0             | 13  | 22 |
| הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה       | ללא חוש למבנה | 100 | 86 | 56 | 100 | ללא חוש למבנה | 100 | ללא חוש למבנה | 100 | 61 |
| הצלחה בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה | 39            | 0   | 0  | 0  | 0   | 39            | 28  | 35            | 0   | 0  |

טבלה מס' 2 מציגה את התפלגות דרכי הפתרון עבור השאלות טרם ההוראה. שאלות 1, 4, 5 הן משוואות שאפשר לפתור בשתי דרכים, אך תלמיד שישתמש בחוש למבנה – דרך הפתרון תהיה יעילה ומהירה יותר בעבורו, ולכן דרכי הפתרון של התלמידים בקטגוריה זו נותחו יחדיו. בשאלות אלו היה אפשר לפתור באמצעות זיהוי מבנה וגם ללא זיהוי המבנה. בממוצע רק כ-7% השתמשו בחוש למבנה, כ-30% פתרו נכונה ללא שימוש בחוש למבנה וכ-50% ניסו לפתור ללא שימוש בחוש למבנה בדרך נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון.

בשאלה 2 שאינה דורשת פתרון משוואה, אך דורשת זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי לחשב באמצעותו ביטוי אחר, בממוצע כ-60% מהנבדקים פתרו נכונה עם שימוש בחוש למבנה, כאשר אחוז ההצלחה במגמת ירידה חדה ככל שמתקדמים בסעיפים. כמו כן שיעור הפתרון השגוי ללא זיהוי חוש למבנה במגמה הפוכה ועלה בהדרגה ככל שמתקדמים הסעיפים והגיע לשיא של כ-50% בסעיף ד', שבו כ-40% לא פתרו כלל.

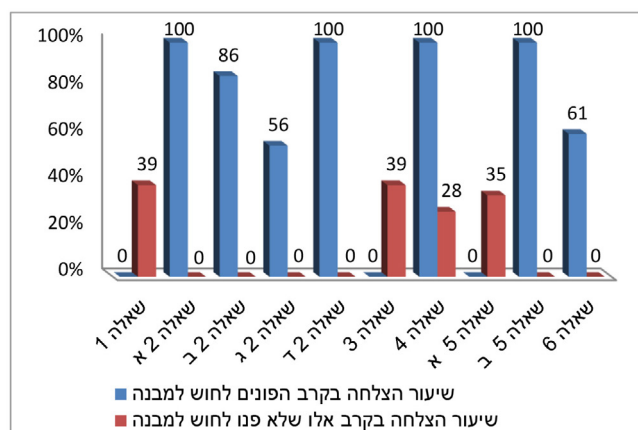
בשאלה 3 אי אפשר לפתור באמצעות זיהוי מבנה. נמצא שכ-50% מהתלמידים פתרו בדרך נכונה, אך טעו בשלבי התהליך בעוד שאחוזי ההצלחה עמדו על פחות מ-40%.

בשאלה 6 המורכבת ביותר, שאותה אפשר לפתור אך ורק באמצעות זיהוי מבנה אלגברי, כ-80% מהתלמידים טעו בטכניקה האלגברית לחלוטין או לא פתרו כלל.

#### טבלה מס' 2: שכיחות (באחוזים) דרכי פתרון בשאלון טרום ההוראה

(N=23)

| שאלה                        | אפשר לפתור עם שימוש בחוש למבנה ובלעדיו |    | לא נדרש פתרון משוואה, אלא זיהוי מבנה אלגברי נתון |    |    |    | אי אפשר לפתור בשימוש בחוש למבנה | אי אפשר לפתור בשימוש בחוש למבנה | אחוז |
|-----------------------------|----------------------------------------|----|--------------------------------------------------|----|----|----|---------------------------------|---------------------------------|------|
|                             | 1                                      | 4  | 5                                                | א2 | ב2 | ג2 | ד2                              |                                 |      |
| פתרון/שאלה                  | 1                                      | 4  | 5                                                | א2 | ב2 | ג2 | ד2                              | 3                               | 6    |
| נכון עם שימוש בחוש למבנה    | 0                                      | 22 | 0                                                | 96 | 78 | 44 | 13                              | -                               | 13   |
| עם שימוש בחוש למבנה + טעות  | 0                                      | 0  | 0                                                | 0  | 13 | 35 | 0                               | -                               | 8.5  |
| נכון ללא שימוש בחוש למבנה   | 39                                     | 22 | 35                                               | -  | -  | -  | -                               | 39                              | -    |
| טכניקה אלגברית נכונה + טעות | 52                                     | 48 | 57                                               | 0  | 0  | 0  | 0                               | 52                              | -    |
| טכניקה אלגברית שגויה        | 9                                      | 4  | 9                                                | 4  | 9  | 17 | 48                              | 9                               | 70   |
| לא פתר                      | 0                                      | 4  | 0                                                | 0  | 0  | 4  | 39                              | 0                               | 8.5  |



גרף מס' 1: אחוזי ההצלחה של תלמידים שפתרו בשימוש בחוש למבנה לעומת אלו שלא פתרו באמצעותו (N=23)

בשאלה 5 סעיף א' בדק האם התלמידים השתמשו בחוש למבנה. סעיף ב' בדק האם תלמידים שבסעיף א' לא פתרו באמצעות חוש למבנה יוכלו, לאחר הכוונה, לנמק כיצד אפשר לבצע מניפולציה אלגברית נדרשת כדי להגיע למשוואה השקולה. נמצא כי רק 13% הצליחו, לאחר ההכוונה, לזהות את המניפולציה האלגברית הנדרשת.

גרף מס' 1 ממחיש ויזואלית את הפערים הניכרים בשיעורי ההצלחה בין המשתמשים בחוש למבנה לאלו שלא משתמשים בו.

את שאלה 3 שלא היה אפשר לפתור באמצעות חוש למבנה, הצליחו לפתור 39% אחוזים. בשאלות שהיה אפשר לפתור גם באמצעות חוש למבנה וגם בלעדיו, אחוזי הצלחה לאלו שלא השתמשו בחוש למבנה, היו נמוכים מ-40%.

בשאלות אחרות שהיה אפשר לפתור רק באמצעות חוש למבנה, אחוזי ההצלחה של המשתמשים בחוש למבנה היו גבוהים מאוד וכמה מהם הגיעו ל-100% בעוד שמי שלא השתמש בחוש למבנה – לא הצליח כלל.

## ממצאים מתהליך יחידת ההוראה

נתאר את הממצאים כפי שנצפו במהלך העברת יחידת ההוראה.

### חוש למספרים

שיעור הפתיחה עסק במספרים טבעיים ורציונליים לצורך פיתוח חוש למספרים כדי להעלות את מודעות התלמידים ששימוש בחוש למספרים מאפשר פתרון יעיל ומהיר. לדוגמה:

$$1. \quad 73 + 42 + 58 + 100 = ?$$

$$2. \quad 3\frac{3}{4} + 7.1 - 5.24 + 0.25 + 1\frac{9}{10} = ?$$

מניתוח תשובות התלמידים והערותיהם בשיעור נראה כי הם לא הורגלו לשימושים כאלה בשלב זה של לימודיהם. התרגילים כללו מספרים בלבד ללא שימוש באלגברה, ולכן נשמעו אמירות כגון "אין משוואה?", "את מבקשת רק לפתור?", "יש פה רק מספרים?". רוב התלמידים פתרו באמצעות חיבור במאונך לפי סדר הופעת המספרים בתרגיל. בתרגילים עם שברים, רבים חששו לנסות לפתור וביקשו להיעזר במחשבון. כשלא קיבלו אישור לשימוש במחשבון, נשמעו אמירות כי "הם לא מסתדרים עם שברים", "אי אפשר בלי מחשבון". אסטרטגיית פתרון נפוצה הייתה להעביר את כל השברים בתרגיל לשברים פשוטים או עשרוניים ולחשב על פי סדר הופעתם. טענה חוזרת שנאמרה היא כי שיטת ההוראה גורמת להם לפתור על פי הסדר, כי כך המורים תמיד מבקשים מהם.

במהלך השיעור תלמידים הציגו פתרונות שונים זה מזה במליאה, ובדיון נבחנו ההבדלים ביניהם. נשמעו כל מיני אמירות, בהן אמירה זו: "לא תמיד רואים". טענה שחזרה על עצמה ממספר תלמידים: "אומנם הדרך השנייה (שימוש בחוש למספרים) יותר קלה לחישוב, אך אני עדיין מעדיף לפתור לפי הסדר". לקראת סוף השיעור כבר היה אפשר לזהות שימוש בחוש למספרים, כאשר את התרגיל האחרון מרבית התלמידים פתרו בשימוש בחוש זה. לסיום השיעור, התלמידים נחשפו למחקרים בנושא חוש למספרים, הוסבר להם מהו חוש למספרים ושהוא אינו מתפתח בטבעיות, ולכן חשוב לפתחו. נשמעו אמירות כגון "שיעור זה היה שונה", "מפתח הבנה וחשיבה מתמטית".

תמונה 2:

פתרון באמצעות חוש למספרים

תמונה 1:

פתרון טכני ללא שימוש בחוש למספרים

תמונה 4:

פתרון באמצעות חוש למספרים

תמונה 3:

פתרון טכני ללא שימוש בחוש למספרים

## גמישות לשימוש בחספר אלגוריתמים בפתרון משוואות

התקיימו מספר שיעורים בנושא כדי לפתח גמישות שתאפשר לבחור מבין מספר אלגוריתמים את היעיל ביותר לפתרון המשוואות. באחד השיעורים נחלקו התלמידים לקבוצות, כל קבוצה קיבלה משוואה אחרת והתבקשה לפתור בשתי דרכים לפחות, לפרט את היתרונות והחסרונות של כל דרך ולהציג את המסקנות לפני הכיתה. המורה עברה בין הקבוצות נמנעה מלהתערב, אך עודדה את התלמידים להגיע לפתרונות בעצמם. ואכן, התלמידים שיתפו פעולה היטב.

$$\frac{x-3}{2(x-3)} = 7 \quad 2(x-4)^2 - 18 = 0$$

דוגמה למשוואות שהוצגו: מניתוח תשובות התלמידים נראה שהאסטרטגיה השכיחה לפתרון הייתה בדרך טכנית: בפתיחת סוגריים, כינוס איברים דומים ופתרון המשוואה. מרבית הקבוצות התקשו למצוא דרך פתרון אחרת. בעת דיון במליאה, הצעותיהם של שאר התלמידים והשאלות המנחות של המורה גרמו להם לחפש דרכים אחרות לפתרון. בסופו של דבר, לכל משוואה הוצגו שתי דרכים לפתרון: באמצעות חוש למבנה וללא שימוש בחוש למבנה. כמו כן נמצא כי התלמידים התקשו לראות במבנה האלגברי איבר אחד. לדוגמה, הם התקשו לבצע פעולות על הביטוי  $x-4$  כעל איבר אחד. הוצגו יתרונות וחסרונות של כל דרך. הדעה הרווחת הייתה שהדרך "טכנית" (ללא שימוש בחוש למבנה) היא הבטוחה יותר ולכן מבחינתם גם הדרך הקלה יותר. הדיון נסב על יעילות הפתרון ועל חישובים מיותרים שלעיתים גורמים לטעויות. נאמרו טענות כגון "אבל ככה לימדתם אותנו...", "לא תמיד אפשר לשים לב...", "אמרו לנו כשיש שברים צריך לחפש מכנה משותף...", "אבל לא בכל התרגילים זה מצטמצם יפה, אז צריך לדעת דרך שעובדת תמיד...", וכן הדיון עסק במודעות למתן תשומת לב לתרגיל לפני שניגשים לפתור. לא תמיד יש דרך יעילה יותר מהדרך הטכנית, אבל התבוננות בתרגיל לפני הפתרון לעיתים חוסכת עבודה ומונעת חישובים מיותרים שלעיתים גורמים לטעויות בחישוב.

תמונה 6:

פתרון משוואה עם שימוש בחוש למבנה

תמונה 5:

פתרון משוואה ללא שימוש בחוש למבנה

במצא אחר מרבית התלמידים חשבו שהמשוואות  $x^2 = t$  ו- $x = \sqrt{t}$  שקולות. לדוגמה, פתרון המשוואה  $(x-4)^2 = 9$  הוצג כך:  $x-4 = 3 \rightarrow x = 7$  ואף תלמיד לא תהה לגבי הפתרון הנוסף.

## היכולת לעבור בין הצגות מאוונות של ביטויים שקולים

כדי לפתח את המיומנות לעבור בין הצגות אלגבריות למיניהן על פי יעילות המיטבית בדרך הפתרון, פותחו שני מערכי שיעור. מניתוח מערכי השיעורים ותשובות התלמידים עולה כי התלמידים התקשו מאוד במעבר בין שתי הצגות שונות זו מזו לאותו הביטוי במידה שלא ניתנה הוראה מפורשת. לדוגמה, תלמידים התבקשו לחשב את ערך הביטוי  $9x^2 + 6x + 1$  עבור  $x = 13$ . האסטרטגיה הנפוצה הייתה הצבת  $x = 13$  וחישוב לפי סדר ההופעה. תלמידים רבים שגו בחישוב הביטוי. תלמיד אחד בלבד נעזר בנוסחת כפל מקוצר של דו-איבר בריבוע. התלמידים טענו שבשל האיסור בשימוש במחשבון, החישוב

ארוך ומתיש. טענה חוזרת שנשמעה מפי התלמידים כי לא ניתנה הוראה בתרגיל להשתמש בנוסחת הכפל המקוצר: "אם היית מבקשת מאיתנו להשתמש בנוסחת הכפל המקוצר, היינו מצליחים".

תמונה 8:  
הצגה יעילה של ביטוי אלגברי  
כפל מקוצר של דו איבר בריבוע

תמונה 7:  
הצגה לא יעילה של ביטוי אלגברי

נוסף על כך, לא רק שהתלמידים לא הבחינו במבנים זהים, הם כלל לא הבינו את המושג "ביטוי שקול".

לדוגמה בתרגיל שבו נדרש למצוא את הביטוי השקול לביטוי  $x^2 + 4 + 2x^2 - 2y^2 - (x^2 + 4)$ , התלמידים לא הבינו כלל את המטלה  $3x + 3y$ .

ולכן התנהל דיון מהו המושג ביטוי שקול. לאחר מכן האסטרטגיה הנפוצה ביותר הייתה פתיחת סוגריים ורובם לא הבחינו שישנם ביטויים זהים. לעומת זאת לאחר שהבחינו במבנה הזהה וגילו שההפרש בין שני הביטויים הזהים הוא אפס, לא נצפה קושי בפירוק לגורמים על פי נוסחת הכפל המקוצר להפרש ריבועים. לעומת תרגילים אחרים שבהם נוסחת הכפל המקוצר הייתה מורכבת מאיברים שבהם המעריך אינו מהמעלה השנייה, כמו  $\frac{2x - y + x^3 + 4 - 2x + y}{x^6 - 16}$  שבו מרבית התלמידים לא הצליחו ליישם את הנוסחה להפרש ריבועים. קושי רב נצפה בשאלות כשנתבקשו למצוא את ערכו של ביטוי מבלי לחשב את ערכי הפרמטרים שמהם הוא מורכב. כמו בשאלה זו, נתון:  $ab = 96$ ,  $a - b = 4$ . מבלי לחשב את  $a$  ו- $b$  מצא את ערך הביטוי  $a^2 + b^2$ . אף תלמיד לא הצליח לפתור. מרביתם פתרו מערכת משוואות ומצאו את ערכי הפרמטרים. כאשר נתבקשו להסביר, כמה מהם ענו כי לא שמו לב. רבים טענו כי לא ידעו כיצד לחשב ללא מציאת הפרמטרים  $a$  ו- $b$ , ורבים מהם

## ממצאים לאחר הוראה

טבלה מס' 3 מציגה את שיעורי ההצלחה בפתרון השאלות ושיעורי המשתמשים בחוש למבנה בשאלון המסכם לאחר ההוראה.

טבלה מס' 3: אחוזי ההצלחה בפתרון השאלות ואחוזי השימוש בחוש למבנה בשאלון המסכם לאחר העברת יחידת ההוראה (N=23)

| שאלה                                 | 1   | 2א  | 2ב | 2ג | 2ד  | 3                    | 4                      | 5  | 6  |
|--------------------------------------|-----|-----|----|----|-----|----------------------|------------------------|----|----|
| אחוז הצלחה                           | 96  | 96  | 87 | 65 | 30  | 35                   | 61                     | 52 | 26 |
| משתמשים בחוש למבנה                   | 96  | 96  | 96 | 87 | 30  | אי אפשר              | 100                    | 78 | 74 |
| הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה       | 100 | 100 | 91 | 75 | 100 | לא השתמשו בחוש למבנה | 61                     | 67 | 35 |
| הצלחה בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה | 0   | 0   | 0  | 0  | 0   | 35                   | כולם השתמשו בחוש למבנה | 0  | 0  |

טבלה מס' 4 מציגה את התפלגות דרכי הפתרון בקטגוריות הנבחרות בשאלות השאלון המסכם לאחר העברת יחידת ההוראה:

בשאלות 1, 4, 5 במוצע למעלה מ-90% השתמשו בחוש למבנה ו-70% מהם פתרו נכונה. גם בשאלה 2 על כל סעיפיה במוצע כ-80% השתמשו בחוש למבנה

ויתרו על המשימה.

ממצא חשוב אחר היה כי תלמידים רבים ביצעו פעולות שמותרות רק על משוואות, גם על ביטויים אלגבריים. לדוגמה: חילקו את הביטוי  $36a^2 - 48a + 16$  ב-4 או לחלופין, השוו את הביטוי לאפס ופתרו כמשוואה. דוגמה אחרת, הביטוי  $1 + \frac{x}{2x+3}$ . כאשר התבקשו התלמידים למצוא את הביטוי השקול לו, כמה מהם ראו בביטוי משוואה וניסו למצוא את ערכו של  $x$ . מקצתם אף ביצע מכנה משותף והעלים את המכנה.

## ביסוס ההבנה והעמקתה באמצעות שיעורים חווייתיים

כדי לבסס ולהעמיק את ההבנה הועברו כמה שיעורים בשלב האחרון של יחידת ההוראה, במתכונת חווייתית השונה מהשיעורים בתוכנית הלימודים הרגילה.

**שיעור בחדר מחשבים:** התלמידים פתרו בקצב אישי משימות שהוצגו לפנייהם במצגת. המצגת נתנה מענה אוטומטי האם התשובה נכונה ורק לאחר שהגיעו לתשובה הנכונה עברו למשימה הבאה. התלמידים התרגשו ללמוד בחדר מחשבים.

**משחק זיכרון ממוחשב:** הורכב מארבע משוואות ומהפתרונות. התלמידים התבקשו לפתור בדרך היעילה ביותר כדי לעמוד בלוח הזמנים. הכיתה חולקה לקבוצות וכל קבוצה בתורה ניסתה למצוא זוגות מתאימים, משוואה ופתרונה, במשחק הזיכרון. קבוצה שהצליחה, הסבירה את דרך הפתרון היעילה ביותר שמצאה. התלמידים שיתפו פעולה במהלך המשחק והיו מרוכזים ומרותקים למסך.

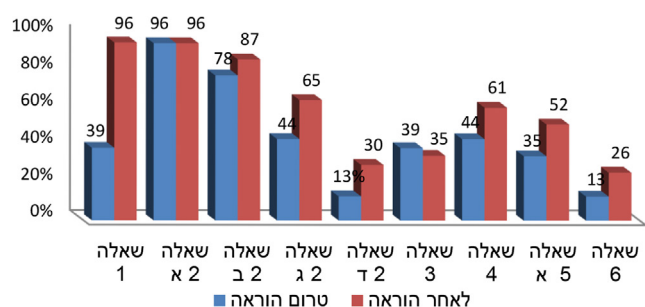
**שיעור בספרייה:** הספרנית הציגה את ספרי הלימוד במתמטיקה והתלמידים התבקשו לעיין בהם ולחבר שאלות העוסקות בחוש למבנה. מסקנתם הייתה שספרי הלימוד לא יעזרו כי רוב התרגול בהם לא עוסק בחוש למבנה, ולכן הם חיברו את השאלות בעצמם. נראה כי השאלות שחיברו היו דומות מאוד לאלה שהוצגו בשיעורים, אך הצלחתם הייתה חשובה.

נראה כי כל השיעורים החווייתיים היו מוצלחים מאוד.

וכ-70% הצליחו לפתור נכונה. שאלה 3 – פחות מ-40% הצלחה. כ-50% השתמשו בטכניקה נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון. שאלה 6 – למעלה מ-70% השתמשו בחוש למבנה, אך לעומת שאלות אחרות, רק כ-25% פתרו נכונה.

טבלה מס' 4: שכיחות (באחוזים) דרכי פתרון בשאלון המסכם (N=23)

| אפשר לפתור רק בשימוש בחוש למבנה | אי אפשר לפתור באמצעות חוש למבנה | לא נדרש פתרון משוואה. נדרש זיהוי ושימוש במבנה אלגברי נתון כדי לחשב באמצעותו ביטוי אחר | אפשר לפתור באמצעות שימוש בחוש למבנה וגם ללא שימוש בחוש למבנה |     |     |    |    |    |                             |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-----|-----|----|----|----|-----------------------------|
| 6                               | 3                               | 2 א                                                                                   | 2 ב                                                          | 2 ג | 2 ד | 5  | 4  | 1  | שאלה                        |
| 26                              | -                               | 30                                                                                    | 65                                                           | 87  | 96  | 52 | 61 | 96 | נכון עם שימוש בחוש למבנה    |
| 48                              | -                               | 0                                                                                     | 22                                                           | 9   | 0   | 26 | 39 | 0  | חוש למבנה + טעות            |
| -                               | 35                              | -                                                                                     | -                                                            | -   | -   | 0  | 0  | 0  | נכון ללא שימוש בחוש למבנה   |
| -                               | 52                              | 0                                                                                     | 0                                                            | 0   | 0   | 17 | 0  | 4  | טכניקה אלגברית נכונה + טעות |
| 22                              | 13                              | 40                                                                                    | 4                                                            | 4   | 4   | 4  | 0  | 0  | טכניקה אלגברית שגויה        |
| 4                               | 0                               | 30                                                                                    | 9                                                            | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  | לא פתר                      |



גרף מס' 3: שיעורי ההצלחה בפילוח לפי שאלות לפני ההוראה ולאחריה (N=23)

## ממצאים עיקריים מהראיונות האישיים

מהראיונות עולה כי ההוראה גרמה לתלמידים לשנות את גישתם לפתרון התרגילים, להתבונן ולחשוב לפני הפתרון על בחירת האסטרטגיה המתאימה. לטענתם, לפני ההוראה הם ניגשו לתרגיל באסטרטגיה טכנית מבלי להסתכל על התרגיל בכללותו ועל הדרכים הטמונות בו. תלמידה אמרה: "נראה לי שאם היית נותנת את התרגיל בגיל צעיר הייתי פותרת כך (עם שימוש בחוש למבנה) ובגלל שלימדו אותנו את השיטות של לפתוח סוגריים ומכנה משותף, אז אני מתרגלת לעבוד רק בשיטה הזו". תלמיד אחר הוסיף "פשוט רגיל ישר לנסות לפתור את התרגיל ולא לחפש דרכים קלות יותר". התלמידים טענו כי לאחר ההוראה הם הבינו שאסטרטגיית השימוש בחוש למבנה יכולה לסייע להם בפתרון קל, מהיר ויעיל יותר עם פחות סיכויים לטעויות בדרך. תלמידה אמרה: "ברור שהדרך השנייה עדיפה (שימוש בחוש למבנה), זה יותר מהיר. בשנייה אחת אפשר לפתור את זה. הדרך הראשונה מבלבלת, את יכולה לעשות הרבה טעויות כשלא שמים לב. לי זה קורה כל הזמן. הכול מתבלגן לי כשיש הרבה מספרים". למרות ההבנה כי פתרון המבוסס על חוש למבנה מאפשר פתרון קל ויעיל יותר, היו שטענו כי בכל מקרה ימשיכו להשתמש בדרך המוכרת והבטוחה יותר בעבורם. תלמיד טען כי "יהיה יותר קל להשתמש בדרך השנייה אבל אני כנראה אשתמש בזה (הצביע על השאלון הראשון) כי זה יותר אוטומטי". רבים טענו כי השיעורים האלה אפשרו לפתח חשיבה מתמטית, שכן הם לא קיבלו את האסטרטגיה הנכונה מהמורה מייד ובדרך ישירה, אלא נאלצו להגיע בכוחות עצמם ובעזרת חברי הקבוצה לפתרון. "בדרך כלל באים, שואלים את המורה והיא אומרת איך אפשר לתקן ולפתור, וכאן כשהייתה עבודת כיתה רציתי לשאול אותך איך מוצאים את הפתרון ובאתי שוב ושוב ולא קיבלתי את התשובה. ביקשת מאיתנו לחשוב". תלמיד אחר טען כי בהוראת זיהוי מבנה אלגברי, "אתה יותר חושב בעצמך, כי בשיעורים אחרים אתה לומד איך לפתור את התרגיל ואתה מתרגל רק את הדרך

## השוואה בין השאלונים טרם העברת יחידת ההוראה ולאחריה

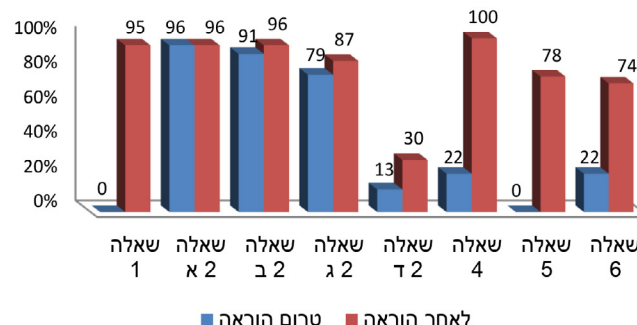
טבלה מס' 5 מציגה את ממוצע שיעורי ההצלחה ושיעורי השימוש בחוש למבנה לפני ההוראה ולאחריה ואת הפערים ביניהם.

נראה כי בממוצע שיעורי ההצלחה עלו במידה ניכרת בכ-20% לאחר ההוראה. כמו כן שיעור השימוש בחוש למבנה גדל במידה ניכרת בכ-45% לאחר ההוראה. שיעור הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה גבוה ועומד על כ-80% ומעלה בשני השאלונים לעומת שיעור הצלחה נמוך מאוד בקרב אלו שלא השתמשו בחוש למבנה.

טבלה מס' 5: ממוצע אחוזי ההצלחה ואחוזי המשתמשים בחוש למבנה לפני ההוראה ולאחריה והפערים ביניהם (N=23)

| הצלחה                          | לפני ההוראה | לאחר ההוראה | פער |
|--------------------------------|-------------|-------------|-----|
| הצלחה                          | 41          | 61          | 19  |
| שימוש בחוש למבנה               | 37          | 82          | 45  |
| הצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה | 86          | 79          | -7  |

גרף מס' 2 מציג את ההבדלים בשיעורי המשתמשים בחוש למבנה בפילוח לפי שאלות לפני ההוראה ולאחריה. נראה כי למעט שאלה 2א, בכל השאלות יש גידול בשיעור המשתמשים בחוש למבנה לאחר ההוראה. בשאלות 1, 4, 5, 6 הגידול הוא מהותי ביותר.



גרף מס' 2: אחוז המשתמשים בחוש למבנה בכל שאלה לפני ההוראה ולאחריה (N=23)

גרף מס' 3 מציג את ההבדלים בשיעורי ההצלחה לכל שאלה לפני ההוראה ולאחריה. נראה כי בכל השאלות, למעט שאלה 2א ו-3, שיעורי ההצלחה גבוהים במידה ניכרת לאחר ההוראה.

ממוקדת במבנים אלגבריים גררה עלייה ניכרת בשימוש בחוש למבנה.

שאלת המחקר השנייה לא הסתפקה בבדיקה האם הוראה משולבת מבנים אלגבריים הגבירה את השימוש בחוש למבנה, אלא המשיכה ובדיקה האם גם היא הביאה לשיפור בהישגים.

נמצא כי שיעור ההצלחה עלה לאחר ההוראה. תחילה, שליש מהתלמידים השתמשו בחוש למבנה לפני ההוראה ואחוזי הצלחתם היו גבוהים במיוחד. השאר שניסו לפתור ללא זיהוי המבנה אחוזי הצלחתם, היו מזעריים. כלומר עוד בשלב טרום ההוראה נמצא כי קיים קשר בין מידת ההצלחה בפתרון התרגיל לשימוש או אי שימוש בחוש למבנה. רוב התלמידים שהשתמשו בחוש למבנה הגיעו לתשובה נכונה. למרות זאת, מרבית התלמידים מעדיפים את הדרך הארוכה והבטוחה יותר מבחינתם, אף על פי שבפועל בדרך זו יש סיכוי גדול יותר לטעות. הדבר מלמד על דרכי עבודה ולמידה שגויים. ממצא זה במחקר הנוכחי דומה לממצאיהם של הוך ודרייפוס שמצאו כי כל התלמידים שהשתמשו בחוש למבנה הצליחו לפתור נכון את התרגילים, ולעומתם התלמידים שלא השתמשו בחוש למבנה – הצלחתם הייתה נמוכה (Hoch & Dreyfus, 2004).

מהמחקר הנוכחי עולה כי למעלה ממחצית הפותרים ללא שימוש בחוש למבנה פתרו בדרך אלגברית נכונה, אך טעו באחד משלבי הפתרון. ממצא זה מחזק את מחקרים של הוך ודרייפוס שבו מרבית התלמידים הציגו שליטה בטכניקה אלגברית, אך פתרונות התלמידים שלא השתמשו בחוש למבנה הכילו טעויות אלגבריות לא מעטות, שלא הופיעו בפתרונות של אלה שהשתמשו בחוש למבנה. עם זה יש מקום לראות כי שיעור השימוש בחוש למבנה עלה ב-45% לאחר ההוראה בעוד שאחוז הצלחה גדל ב-20% בלבד. גם כאן הדבר נובע מטעויות חישוב ובעיקר מחוסר התמקדות בקבוצת הצבה. כאשר נדרשו לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות מבנה דומה ולהיעזר במשתנה אחר לצורך פתרון המשוואה, אחוז ההצלחה בקרב המשתמשים בחוש למבנה היה נמוך מאוד גם לאחר ההוראה. על פי הוך ודרייפוס תלמיד נחשב למגלה חוש למבנה אם הוא יכול לעשות את הדברים האלה: לזהות מבנה מוכר בצורה הפשוטה ביותר, לטפל בביטוי אלגברי מורכב כיחידה ובאמצעות הצבה מתאימה לזהות מבנה מוכר בצורה מורכבת יותר ולהבחין איזה פעולות כדאי לבצע כדי לנצל את המבנה. היכולות האלה היררכיות וכדי לשלוט ביכולת מסוימת יש לשלוט ביכולות הקודמות לה. בשאלה זו נצפתה עלייה בזיהוי המבנה מתוך השוואה בין שני השאלונים. למרות הצורך לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות את המבנה המשותף, למעלה משלושה רבעים מהתלמידים הצליחו לעומת כחמישית בלבד לפני ההוראה. אולם כאמור, בשאלה זו לא הספיק רובד זיהוי המבנה בלבד, אלא התלמיד היה צריך לחשוב כיצד לנצל את המבנה המשותף ולמרות הגידול בזיהוי המבנה, שני שלישים מבין אלו שזיהו לא ידעו מהי המניפולציה כדי לנצל את המבנה. ייתכן שזו הסיבה לאחוזי ההצלחה הנמוכים. בדומה לממצא זה, סוזן (2000) טוענת כי לתלמידים יש קשיים בפתרון משוואות שאי אפשר לפתור אותם בגישה אנליטית המוצגים בלי רמז לאלגוריתם מוכר שיביא לידי פתרון. לסיכום, ממצאי המחקר הראו כי הוראה ממוקדת במבנים אלגבריים גררה עלייה בהישגי התלמידים.

בכל תהליך ההוראה נמצא כי תלמידים אינם מכירים את מושג השקילות כלל. הם מפעילים חוקים בשרירותיות, מה שיצר קושי בהתמודדות עם המטלות. ממצא זה תואם לממצאיהם של ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), וכן את ממצאיהם של שטיינברג ועמיתיו (Steinberg et al., 1990), שטענו כי

הזו ובשיעורים האלה אתה צריך לחשוב ולהתעלם מהדרך שבה הרגילו אותך ומסתכל על התרגיל בעצמך". גם תלמידים, שבשאלון המסכם נראה כי נתרמו פחות מיחידת ההוראה, טענו כי "נראה לי שבטוח הרחוק השיעורים עוזרים. אם יעשו תרגילים כאלה מההתחלה, לדוגמה במבחנים, אז הם יעזרו". מרבית התלמידים חשבו כי יש להוסיף נושא זיהוי מבנים אלגבריים לתוכנית הלימודים הרגילה. מרביתם זכרו היטב את השיעורים החווייתיים יותר, כגון עבודה בקבוצות, שיעור בחדר מחשבים וכדומה.

## דיון ומסקנות

בפרק הנוכחי נעמוד על משמעותם ותרומתם של ממצאי מחקר זה שהתמקד ביכולת תלמידים לזהות מבנה אלגברי בפתרון משוואות כדי לבחון השפעת הוראה משולבת מבנים אלגבריים על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות.

כאמור, שאלת המחקר הראשונה הייתה האם הוראה משולבת מבנים אלגבריים תביא לשיפור ביכולת הזיהוי של מבנים אלגבריים בפתרון משוואות.

טרם העברת ההוראה, רק 37% השתמשו בפתרון אלגנטי לעומת 82% לאחריה. בשאר הפתרונות התלמידים הציגו פתרון מסורבל או שלא פתרו כלל. תלמידים רבים פתרו בדרך טכנית באמצעות פרוצדורות אריתמטיות ואלגבריות שלמדו. דבר שגרר ריבוי טעויות חישוב, חוסר התמקדות בקבוצת הצבה וקושי למציאת פתרון לתרגילים שדרשו יכולת חשיבה והבנה מעבר ליכולת טכנית. אחוז נמוך זה מראה כי קיימת מוגבלות בהפעלת שיקול דעת לפני שתלמידים ניגשים לפתור והם אינם בוחנים דרכים מגוונות לפתרון. ממצאים אלו מחזקים חוסר הפעלת בקרה תחילית בידי תלמידים ופנייה לרעיון המוכר הראשון ללא תכנון וניתוח מעמיק. לדוגמה, תלמידים נוטים לפנות בפזיזות ומתוך שגרה לתרגיל ומנסים לפתור באנלוגיה לבעיה דומה המוכרת להם גם אם השימוש במשאב לא בהכרח נחוץ לפתרון (Schoenfeld, 1992). כאשר אנו נתקלים במצב המחייב התמקדות, מתבצעת בדיקה אם מצב זה דומה לאחד המצבים המוכרים לנו מהעבר והתגובה היא לפי הצורך. ניסיונו הקודם של האדם ישפיע על תוצאות התהליך. ככל שניסיונו של האדם בתחום מסוים גדול יותר, כן האינטואיציה שלו כלפי התחום תהיה טובה יותר (וינר, 2000).

מתוצאות המחקר עולה כי בכל השאלות (למעט אחת) היה גידול בשימוש בחוש למבנה לאחר ההוראה. ייתכן שהסיבה כי בשאלה זו זיהוי המבנה היה מיידי ואינטואיטיבי.

בשאלות מסוימות נצפה שיעור שימוש נמוך בחוש למבנה גם לאחר ההוראה. ייתכן שההסבר נעוץ בממצא כי בתרגילים אלו על התלמיד להסתכל על מבנה התרגיל, לבצע מניפולציה אלגברית כדי לזהות מבנה דומה ונוסף על כך, לדעת מהי המניפולציה שיש לבצע כדי לנצל את המבנה. כלומר כאשר נדרשת מניפולציה אלגברית כדי לזהות את המבנה המשותף, יש קושי אצל התלמידים בזיהוי המבנה.

כאשר המבנה המשותף הופיע באותו אגף של המשוואה, אף לא אחד השתמש בחוש למבנה לפני ההוראה בעוד שלאחריה השתמשו כמעט כולם בחוש למבנה. ניכרת עלייה בשימוש בחוש למבנה בשאלה שבה המבנה המשותף הופיע בשני אגפי המשוואה (22% לפני ההוראה לעומת 100% לאחריה). ממצא זה מאשש את ממצאיהם של הוך ודרייפוס (Hoch & Dreyfus, 2004). ככל הנראה, הופעת המשתנה בשני אגפי המשוואה עזרה בזיהוי איברים דומים. סיבה אחרת מתאימה היא הופעת השאלה לאחר שפתרו שאלה קודמת שדרשה שימוש בחוש למבנה. נראה כי הוראה

לתלמידים הבנה לקויה בנושא שקילות של ביטויים אלגבריים ומשוואות ולפיכך נימוקיהם אינטואיטיביים בעיקר.

כמו במחקרה של קירן (Kieran, 1992), גם במחקר זה נצפה כי בכל תהליך ההוראה הנבדקים ביצעו פעולות שמותרות על משוואות גם על ביטויים אלגבריים. הסיבה לכך ככל הנראה שלפחות אחד האגפים של המשוואה הוא ביטוי אלגברי, ולכן נוצרת השפעה סמויה של מודל "פעולות בפתרון משוואות" ומכלילים גם על ביטוי אלגברי. נוסף על כך, אחוז ניכר מהנבדקים לא ידע לבצע פעולת שורש ריבועי על שני אגפי המשוואה. התלמידים סברו שהדרך היחידה היא הפעלת אלגוריתם סטנדרטי של פתיחת סוגריים, ולכן הם איבדו בדרך את אחד הפתרונות. נראה שהסיבה לכך היא תוכנית הלימודים שחלק ממנה נשען על הבנה אינסטרומנטלית. סקמפ (Skemp, 1976) טען שלימוד הכללים בלי הסיבות מאפשר לתלמיד לתפקד בתוך גבולות מוגדרים מאוד המאפשרים להתמודד עם בעיות סטנדרטיות בדרך טובה, אך ללא ההבנה של מה לעשות ומדוע התלמיד לא יוכל להתמודד עם מטלות חדשות.

אם כן, יש מקום להסיק כי בבניית תוכנית הוראה יש חשיבות רבה ליצירת קשרים בין הידע הפורמלי ובין התהליכים האלגוריתמים. ממצא זה מחזק את טענתו של פישביין (Fischbein, 1994) כי על התלמיד להבין את הבסיס הפורמלי המצדיק את האלגוריתם. ממצא זה שעלה במהלך ההוראה, הביא להתמקדות בנושא זה במהלך הדיונים במליאה. היה אפשר לזהות בשאלון המסכם כי זו סייעה במידה ניכרת בהפחתת טעויות כאלה.

”

כמו כן נמצא כי אף שנושא פירוק לגורמים נלמד בהרחבה בכיתה ט', התלמידים אינם מודעים למושג. הם שולטים בטכניקה של הוצאת גורם משותף אך בלי להבין את המטרה. ממצא זה מדגיש את הצורך בחידוד מושגי היסוד בשפה האלגברית וחידוק הידע המושגי במהלך לימוד נושא מסוים.

מושגי היסוד נבנים ומוגדרים במהלך ההוראה. ההוראה במחקר הנוכחי נבנתה בדרך שונה מעט

מהשיעורים בתוכנית הלימודים הרגילה. השיעורים נבנו כשיעורים חווייתיים, המלווים בשילוב עבודה בקבוצות, דיונים במליאה ושימוש בעזרים לא שגרתיים. שינוי זה תואם לגישת ההוראה הדוגלת בכך שעל המורים להימנע מנתינת פתרון מלא וישיר לתלמידים (Schoenfeld, 1987). מהראיונות האישיים נלמד כי דרך לימוד זו אינה שגרתית עבור התלמידים ולעיתים התקשו להתמודד איתה. "השיעורים הראשונים דרשו מאיתנו יותר לחשוב אבל בהמשך היה יותר בסדר", "לא היה קל, רציתי תשובה ולא קיבלתי..." בדרך כלל באים, שואלים את המורה והיא אומרת איך אפשר לתקן ולפתור, וכאן כשרציתי לשאול את המורה איך מוצאים את הפתרון ובאתי שוב ושוב, לא קיבלתי את התשובה. המורה ביקשה מאיתנו לחשוב...". מהראיונות עולה כי התרומה העיקרית של ההוראה היא פיתוח יכולות התלמידים לחשוב, ולהפעיל בקרה לפני בחירת האסטרטגיה לפתירת התרגיל.

לטענת התלמידים, המורים השרישו בהם את הגישה הפרוצדורלית הטכנית. כלומר לפתור רק בדרך אחת. "לימדו אותנו ראשית לפתוח סוגריים", "בשיעורים אתה לומד איך לפתור ומתרגל רק בדרך הזו".

ממצא זה עולה בקנה אחד עם טענתו של שונפלד (Schoenfeld, 1989), כי שיטת ההוראה במתמטיקה בנויה על שינון ותרגול נוסחאות ומשפטים. לימוד כזה מקנה לתלמידים ניסיון בפתרון בעיות מתמטיות מאותו סוג, ואולם לא בונה ידע המעודד יצירתיות, גילוי וחשיבה מעמיקה.

יחידת ההוראה שנבנתה במחקר זה באה להציג שינוי וסטייה מתוכנית הלימודים הסטנדרטית ועל פי ממצאי המחקר הוכחה את תרומתה. ברגע שנחשפו למבנה התרגיל חשיפה מסודרת, חווייתית, המבוססת על דיונים והבנה, הרגישו התלמידים יותר בנוח להשתמש בחוש למבנה בתרגילים שדרשו זאת. התלמידים למדו לחשוב ולבצע בקרה במבנה התרגיל וכך למצוא את הדרך היעילה ביותר ורק אז לנסות לפתור.

## סיכום

המחקר מחדש כי הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים מביאה לשיפור הן בשימוש בחוש למבנה והן בהישגי התלמידים. מומלץ להכשיר מורים לעידוד פיתוח אסטרטגיות פתרון מבוססות הבנה. רצוי ללמד אסטרטגיה של חיפוש מאפיינים מיוחדים בשאלות נוסף על אלגוריתמים השגורים הנלמדים בשיעורי המתמטיקה. אסטרטגיה זו תעודד בקרה ושיקול דעת כבר בתחילת הפתרון, וכחלק מתוכנית הוראה שיטתית מומלץ להוסיף לכל פרק לימוד כמה שאלות מיוחדות כדי לפתח אצל התלמידים מיומנויות מתאימות.

מהמחקר עולה כי תלמידים מתקשים מאוד לראות בביטוי אלגברי יחידה. ממצא זה מחזק את הטענה כי בבית ספר היסודי לא מדגישים ראייה מבנית של ביטויים חשבוניים ולפיכך התלמידים מתקשים להתמודד עימם בלימודי האלגברה (Booth, 1989). כאן חוסר היכולת של תלמידים להבין את הדואליות תהליך-מבנה של סמלים אלגבריים הוא אחד ממקורות הקושי בלימודי האלגברה (Sfard, 1991). אם כן, מומלץ לשלב הוראת מבנים אלגבריים בתוכנית הלימודים.

בכל תהליך ההוראה נמצא כי תלמידים אינם מכירים את מושג השקילות כלל. הם מפעילים חוקים בשרירותיות, מה שיצר קושי בהתמודדות עם המטלות.

”

מומלץ להמשיך ולחקור את הנושא גם בקרב אוכלוסיות של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה, ולבדוק עד כמה הם נוטים להשתמש בחוש למבנה. מחקרים אלו יאפשרו העלאתו של נושא חשוב זה והשפעותיו על מרכז הדיון הפדגוגי ועדכון תוכנית הלימודים כדי להתאימה לצורכי התלמידים ולפיתוח חשיבתם המתמטית.

## רשימת מקורות

- וינר, ש' (2000). סיפוקן של הצורך בוודאות – אינטואיציה. **על"ה**, 26, 17-22.
- חכים, ג' וגזית, א' (2011). **מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל תלמידי ה-ז**, בהשוואה למורי מתמטיקה בבית הספר היסודי, ולפרחי הוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק 2000**, 20, 40-48.
- סוזן, ע' (2000). **ניתוח גישות תלמידים, מהיחידה הקדם-אקדמית בפתרון משוואות ואי-שוויונים. על"ה**, 25, 27-41.
- פרידלנדר, א' (2008). **כיצד פותרים... תרגילים? הצעה לתרגול מיומנויות אלגבריות. על"ה**, 39, 11-19.

- Markovits, Z., & Pang, J. (2007). The ability of sixth grade students in Korea and in Israel to cope with numbers sense tasks. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31th psychology of mathematics education conference* (Vol. 3, pp. 241-248). Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- Resnick, L. B., Lesgold, S., & Bill, V. (1990). From protoquantities to number sense. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME conference: With the North American chapter twelfth PME-NA conference* (vol. 3, pp. 305-311). Mexico: Program Committee of the 14 PME Conference.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What is all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-216). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355. doi:10.2307/749440
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121. doi:10.2307/749588
- Booth, L. R. (1981). Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 29-41. doi:10.1007/BF0038604
- Booth, L. R. (1989). A question of structure. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 57-59). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Burns, M. (2000). *About teaching mathematics* (2nd ed.). Sausalito, Calif.: Math Solutions Publications.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.
- Ginat, D. (2007). Hasty design, futile patching and the elaboration of rigor. In *Proceedings of the 12th annual SIGCSE conference on innovation and technology in computer science education* (pp. 161-165). New York, NY: ACM.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196. doi:10.1023/A:1003606308064
- Markovits, Z., Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. (1989). Research into practice: Number sense and nonsense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 53-55.



## נספחים נספח א

|                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>2. אם ידוע כי <math>x^3 + 3x = 18</math> מצא את ערכם של הביטויים האלה:</p> <p>א. <math>x^3 + 3x + 12</math></p> <p>ב. <math>6x + 25 + 2x^3</math></p> <p>ג. <math>\frac{5x(x^2 + 3)}{3 - x^3 - 3x}</math></p> <p>ד. <math>x^6 + 6x^4 + 9x^2</math></p> | <p>1. פתור את המשוואה הבאה:</p> $1 - \frac{1}{x+2} - \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{132}$                                                                                                                        |
| <p>4. פתור את המשוואה:</p> $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}\right)$                                                                                                                                               | <p>3. פתור את המשוואה:</p> $\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{4}{x^2 + 2x}$                                                                                                                                    |
| <p>6. פתור את המשוואה:</p> $\left(\frac{x^2 + 12}{x}\right)^2 - 15\left(x + \frac{12}{x}\right) + 56 = 0$                                                                                                                                                 | <p>5. נתונה המשוואה:</p> $\frac{1}{x-1} - \frac{2x+2}{x^2-1} = 1$ <p>א. פתור את המשוואה.</p> <p>ב. ענת פתרה את המשוואה והגיעה למשוואה השקולה:</p> $1 - 2 = x - 1 \quad \text{עבור } x \neq \pm 1$ <p>האם ענת צודקת? נמק</p> |

**שיעור חמישי:** השיעור התקיים בחדר מחשבים. מטרתו חשיפה למבנים אלגבריים בדרך חווייתית. הוצג שאלון רב ברירה העוסק בחוש למבנה באמצעות מצגת. השאלות הראשונות שימשו המשך ישיר לשיעור הקודם ובהן התלמידים ביצעו בקרה עצמית, ואילו בשאלות האחרונות הוצג ביטוי אלגברי והתלמידים נדרשו לזהות באמצעות מניפולציה אלגברית את המבנה השקול לו מבין כמה תשובות מתאימות. לדוגמה:

9. מצא את הביטוי השקול לביטוי -

$$\frac{x^2 + 4 + 2x^2 - 2y^2 - (x^2 + 4)}{3x + 3y}$$

$x \neq -y$

א.  $\frac{2}{3}$   
 ב.  $\frac{2x-2y}{3x+3y}$   
 ג.  $\frac{x}{y}$   
 ד.  $\frac{2(x-y)}{3}$

לחץ על התשובה הנכונה

**שיעור שישי:** משחק זיכרון ממוחשב. המטרה לחשוף חשיפה חווייתית למשוואות, כך ששימוש בחוש למבנה יאפשר פתרון יעיל ומהיר יותר. הכיתה חולקה לקבוצות וכל קבוצה בתורה ניסתה למצוא את הזוגות המתאימים, משוואה ופתרונה, במשחק הזיכרון. קבוצה שזכתה בזוג מתאים הסבירה את דרך הפתרון היעילה ביותר שמצאה.

Match The Memory

Memory game structure

Card Flipped: 28 Time: 01:04

|                                                 |             |                                                             |         |                              |
|-------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------|---------|------------------------------|
| $\frac{1}{2}(2x-7) + x = 9 + \frac{1}{2}(2x-7)$ | $x \neq -2$ | $\frac{3(x-5)}{x+7} + 8 = \frac{3(x-5)}{x+7} + \frac{1}{2}$ | $x = 5$ | $\frac{3x^2-12}{x+2} = 3x-6$ |
| אין פתרון                                       | $x = 9$     |                                                             |         |                              |

© 2013 Match The Memory

**שיעור שביעי:** סיום ההוראה. המטרה לבסס ולהעמיק את ההבנה – יצירת מבנה אלגברי בידי התלמיד עצמו. השיעור התקיים בספרייה, התלמידים התבוננו בספרי הלימוד, חיברו בעצמם שאלות שיש בהן חוש למבנה. כל קבוצה בנתה חידון והעבירה אותו במליאת הכיתה.

**שיעור ראשון:** שיעור פתיחה בנושא חוש למספרים במספרים טבעיים ורציונליים. המטרה להמחיש לתלמידים כיצד שימוש בחוש למספרים מאפשר פתרון יעיל ומהיר. לדוגמה:

$$3\frac{3}{4} + 7.1 - 5.24 + 0.25 + 1\frac{9}{10} = ?$$

בתרגילים, באמצעות זיהוי מוקדם של צמדי מספרים, קל לחשב בעל פה ואפשר להגיע לפתרון נכון ומהיר. ניתן דגש בשיח מתמטי על אודות חוש למספרים.

**שיעור שני:** עבור תלמידים רבים הדרך היחידה להסתכלות על משוואה היא באמצעות פעולות טכניות של פתיחת סוגריים, העברת אגפים וכדומה. מטרת השיעור הייתה להוביל לשימוש ביותר מאלגוריתם טכני אחד ולפתח גמישות ויעילות בפתרון, מתוך נתינת דגש בביטוי אלגברי כיחידה. הכיתה חולקה לקבוצות – כל קבוצה קיבלה משוואה שונה. חברי הקבוצה התבקשו לפתור בשתי דרכים לפחות, לפרט את היתרונות והחסרונות של כל דרך ולהציג מסקנות במליאה. לדוגמה: הסבירו (בשתי דרכים לפחות) מדוע למשוואה  $(x+5)^2 + 5 = 0$  אין פתרון.

**שיעור שלישי:** המטרה לפתח מיומנות הפעלת שיקול לוגי טרם פנייה להפעלת אלגוריתם. הפעילות מפתחת הבנה איכותית של ביטויים אלגבריים ומחייבת הסתכלות שאינה טכנית. דף המשימה דרש מהתלמידים לענות על משימות שלא הורגלו בהן, אך הפתרון היה בהחלט בהישג ידם באמצעות שימוש בלוגיקה. חשיבות רבה הייתה להנחיה ולדיון המעמיק בתום המשימה.

דוגמה:

לפניכם מסגרת ובה ארבעה תנאים עבור המשתנים  $A, B, C$ :

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= 0 \\ A \times B &< 0 \\ A \times C &> B \\ A + B &= C \end{aligned}$$

א. מצאו הצבה של מספרים עבור  $A, B, C$  שבה מתקיימים כל ארבעת התנאים לעיל.

ב. נסו לאפיין את כל ההצבות שבהן מתקיימים כל ארבעת התנאים לעיל.

**שיעור רביעי:** המטרה לפתח יכולת זיהוי מבנים אלגבריים. המשימה, שימוש במבנים אלגבריים נתונים כדי להגיע לפתרון בדרך יעילה ובלי צורך במציאת פרמטרים ושימוש באלגוריתם מורכב.

לדוגמה: חשבו בדרך הנוחה ביותר את ערך הביטוי  $9x^2 + 6x + 1$  עבור מהמספרים  $x = -3$ ,  $x = 13$ . אין להיעזר במחשבון!

