

"כאשר מבינים, ניתן לפתור באמצעות 'תרגיל פשוט'..." תלמידי כיתות ה'-ו' מסבירים פעולת חילוק שברים באמצעות ייצוגים באקסל

ענת קלמר
חנה לב-זמיר



ד"ר ענת קלמר

מרצה באקדמית גליל מערבי ובמכללת אורנים.
תחומי מחקר עיקריים: התפתחות ההבנה המתמטית
באמצעות המחשה ויזואלית של מושגים ופעולות
ושילוב כלים ממוחשבים בהתמודדות עם פתרון בעיות
מתמטיות.



ד"ר חנה לב-זמיר

מרצה בכירה במכללת אורנים, ראש החוג לחינוך
מתמטי ומרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה
במכללה.
תחום העניין המרכזי - הכשרת מורים להוראת
המתמטיקה, עם דגש בפיתוח חשיבה אלגברית
בכיתות בית הספר היסודי וטיפוח יצירתיות בקרב מורים
ותלמידים.

תקציר

חלפו כמעט 20 שנים מאז המחקר של מה (Ma, 1999), שבדק ידע בקרב מורים למתמטיקה בנושא פעולת חילוק שברים. נכון להיום מעט מאוד השתנה בגישת המורים. מרבית המורים מתמודדים עם פתרון תרגילי חילוק שברים באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי ומתקשים במתן משמעות לאלגוריתם זה. אחד השינויים המהותיים מאז מחקרה של מה (Ma), הוא התפתחות הטכנולוגיה ושילוב המחשב בהוראה ולמידה. התפתחות זו מרחיבה היום את מגוון האפשרויות העומדות לפני המורים לייצוגים ויזואליים דינמיים התומכים בהתמודדות עם הסבר סיטואציות מתמטיות במגוון נושאים, כמו בחילוק שברים.

מחקר זה מתמקד בתיאור תהליך הוראה, שמזמן למורה ובהמשך לתלמיד, דרכים להבנות את פעולת החילוק באמצעות המחשה הנשענת על הגדרת יחידת הייחוס (המחלק) (Lamon, 1994), שלם הייחוס והמחולק.

המחקר איכותני ומציע סביבה דינמית ממוחשבת שבה המורה והתלמיד יכולים לבנות בעצמם את תהליך הפתרון בדרך המובילה להבנה. המחקר בודק השפעות של ידע תוכן-פדגוגי-טכנולוגי של 9 מורות על יכולת התלמידים להסביר את משמעות פעולת החילוק בשברים. כל מורה עבדה עם תלמיד אחד. המורות בחרו את התלמידים.

ברמת המורה, הממצאים מעידים על התפתחות ידע מתמטי, ידע פדגוגי וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי במהלך המחקר שניכרו בניתוח של המורים את עבודות התלמידים. ברמת התלמיד, הממצאים מעידים על האקסל ככלי המאפשר לתאר את תהליך פעולת החילוק מתוך שימוש במושגים מדויקים על המחלק (יחידת הייחוס), המחולק ושלם הייחוס.

מילות מפתח: חילוק שברים פשוטים; ידע מורים; ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי; הבניית ידע; נימוקים; ייצוג ויזואלי; אקסל.

ידע של מורים למתמטיקה בנושא חילוק שברים

מה (Ma, 1999) בחנה במחקרה ידע של מורים למתמטיקה בנושא פעולת חילוק שברים, הן ברמת ידע תוכן ויכולת פתרון והן ברמת ידע פדגוגי הנוגע לדרכי הוראה ומתן משמעות לפעולה. מחקרה כלל אוכלוסיית מורים למתמטיקה בארצות הברית ואוכלוסיית מורים למתמטיקה בסין. חלפו כמעט 20 שנים ותמונת המצב המתארת את ידע המורים מעידה כי לא חל שינוי ניכר (קלמר-שורץ ולב-זמיר, 2018).

מה (Ma, 1999) נתנה למורים בארה"ב ובסין שאלות בנושא חילוק שברים והציגה את תוצאות ההתמודדות שלהם. המורים התבקשו לפתור תרגיל וגם להציג את תהליך הפתרון בדרך שתהיה בעלת משמעות לתלמיד, במתן סיטואציה מילולית מתאימה. 43% מהמורים למתמטיקה בארצות הברית, לעומת 72% מהמורים בסין, הציגו פתרון אלגוריתמי נכון. המורים מארצות הברית התקשו בהצגת סיפור שייתן משמעות לפעולת החילוק ואלה שניסו את כוחם, סיפוריהם לא ייצגו את התרגיל הנתון.

יש מקום לשער כי היעדר הבנת משמעות הפעולה בחילוק שברים מנעה מהמורים את היכולת לספר סיפור מתמטי מתאים ואף מנעה מהם יכולת לייצג את התרגיל בהמחשה. מרבית המורים המחישו תרגיל חילוק בחצי באמצעות חילוק ב-2 או כפל בחצי ולא את התרגיל המבוקש. ראוי לציין כי 90% מהמורים הסינים הצליחו לייצג את תרגיל החילוק בשברים בייצוג סיפורי מתאים, מקצתם אפילו ביותר ממשמעות אחת.

מחקרה של מה (Ma, 1999) מציג את החשיבות של הבנת משמעות הפעולות והמושגים כדי להצליח לייצג את הסיפור המתמטי, ואת הפער בין ידע מורים בארצות הברית לידע המורים בסין בנושא חילוק בשברים.

פעולת החילוק בשברים פשוטים

חילוק שברים פשוטים נלמד בשתי דרכים, האחת נסמכת על משמעות של חלוקה לחלקים שווים והשנייה נסמכת על משמעות חילוק להכלה (משרד החינוך התרבות והספורט, 2006). בעוד שבמספרים שלמים אפשר להציג סיטואציות חילוק לחלקים שווים וחילוק להכלה, יש בשברים פשוטים הגבלות המותנות במחלק (אם הוא שלם או שבר הקטן מ-1). חוסר מודעות להבחנות אלה מוביל לא אחת לאינטואיציות שגויות ולהישען יותר על אלגוריתם ויכולת ביצועית ופחות על הבנה מושגית (Tirosh, 2000; Gravemeijer, 1999; Ma, 2003; Galen, 2003; Sharon & Swarthout, 2015). מדגישות את חשיבות הייצוג הוויזואלי לכל סיטואציה לצד הייצוג הסימבולי וקישורו לידע קודם של התלמיד בנושא חילוק מספרים טבעיים. למון (Lamon, 1994) מדגישה את חשיבות הגדרת יחידת הייחוס – Referent Unit – בפעולת חילוק שברים. במשמעות של חילוק להכלה, המחלק הופך להיות יחידת הייחוס עבור המחולק. לדוגמה, נסתכל על התרגיל $\frac{2}{3} \div \frac{2}{5}$. המנה לא נוגעת לשלם המקורי – Original Whole, אלא נסתכל עליה כמספר הפעמים ש- $\frac{2}{5}$ נכללות בתוך $\frac{2}{3}$ של השלם המקורי. בעבודה זו נראה בשלם המקורי כשלם הייחוס, 1, כאשר המחלק הוא יחידת הייחוס שאת מוכלותה במחולק אנחנו מחפשים.

1. שלם הייחוס מוזכר במאמרו של שחברי ופלד (2012) בנושא בעיות אחוזים. הן מדברות על שלם ייחוס דינמי.

המחקר הנוכחי נשען על מחקריהן של שיפטר ופרליץ (Schifter, 1998; Perlwitz, 2005) הרואות בקונפליקט קוגניטיבי מנוף ללמידה משמעותית. פרליץ מתארת דרכי פתרון של תלמידי קולג' בבעיית חילוק שלם בשבר והתמודדות עם דילמה בין הפתרון שהתקבל מיישום אלגוריתם כפל בהופכי ובין זה שהתקבל בעזרת ייצוג ויזואלי. זימון דילמה זו והתמודדות איתה מחייבים את המורה להיות בעל ידע רחב. להבין את המתמטיקה מאחורי הפתרונות, ללכת עם האינטואיציות, אך לדעת מי מהן נכונה מתמטית ומי שגויה. לדברי בול (Ball, 2010), ידע זה מכונה "ידע ייחודי להוראה", המשלב בין הבנה מושגית לשליטה אלגוריתמית.

פיתוח אלגוריתם הוא רכיב חיוני של המתמטיקה. לאלגוריתם יש יתרון הניכר בתהליך פתרון המתאים לכל התרגילים מסוג מסוים. ביצוע האלגוריתם בדרך כלל מהיר וקצר. יתרונו של האלגוריתם בביצוע אוטומטי שאינו מצריך חשיבה על משמעות בכל שלב, אך כאן גם חסרונו. לימוד אלגוריתם מקל על הגעה לפתרון אבל לא בהכרח מקושר להבנה אם לא נעשים חיבורים לידע קודם ואם לא נשאלות השאלות המובילות ליצירת חיבורים כאלה (Gravemeijer, 2003; Galen, 2003). אנשי החינוך המתמטי אינם שוללים את עצם החשיבות של שליטה ביצועית, אלא טוענים שתהליך למידה של האלגוריתם בלי הבנה הוא בעל ערך מועט ובדרך כלל אין ידע אלגוריתמי זה תורם לידע המתמטי הכללי של התלמיד. ראוי שהתלמיד יבנה את האלגוריתם בנייה פעילה, כתהליך המושתת על הבנה של מהות הפעולה, באופן שהתלמידים יתנסו ב"המצאות" של דרכי פתרון ומתוך "המצאות" אלה, בתיווך מושכל של המורה, "יצמח" האלגוריתם (Gravemeijer & Galen, 2003).

חילוק נחשב המסובך מבין ארבע פעולות החשבון. שברים פשוטים נחשבים למספרים המורכבים ביותר בבית ספר יסודי. חילוק שברים יכול להיחשב כפסגת המתמטיקה בבית הספר היסודי (Ma, 1999). כל אחת מארבע פעולות החשבון בשברים פשוטים מאגדת בתוכה מגוון משמעותיות ותובנות המכוונות לביצוע האלגוריתם. פעולת חילוק שברים בבית הספר היסודי, בדרך כלל, מתמקדת בביצוע האלגוריתם בעוד ששאלת ה"למה?" בדרך כלל אינה מקבלת מענה באמצעות בנייה מדורגת של הידע בידי הלומד והבנת הפעולה נשארת מעורפלת (Tirosh, 2000). בדיון על חולשתו של אלגוריתם הנלמד בלי דגש בהבנתו, מציגים תירוש (Tirosh, 2000), אשלוך (Ashlock, 1994) וגרבר (Grabber, 1993) מגוון שגיאות הממוינות לקטגוריות, כמו ביצוע שגוי של האלגוריתם ושגיאות הנובעות מתפיסות ואינטואיציות כלפי פעולת החילוק.2

בפרק להלן נדון בהרחבה בתהליך בניית משמעות לפעולת חילוק שברים פשוטים.

בניית משמעות לפעולת חילוק שברים פשוטים

קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018), דנו במאמרו במספר גורמים שיש ביכולתם לתמוך בבניית משמעות לפעולת החילוק בשברים: יצירת דרך אישית, בחינת משמעותיות שונות של חילוק וקישורו לאלגוריתם של כפל בהופכי, ייצוג ויזואלי והעלאת קונפליקט קוגניטיבי כבונה משמעות. פרליץ (Perlwitz, 2005) רואה בקונפליקט קוגניטיבי מנוף ללמידה משמעותית. היא מתארת דרכי פתרון של תלמידי קולג' בבעיית חילוק שלם בשבר והתמודדות עם הקונפליקט בין הפתרון שהתקבל משימוש באלגוריתם ובין זה שהתקבל בעזרת ייצוג ויזואלי (ראו איור 1 המציג את בעיית הציפיות ואיור 2 המציג את פתרונה של התלמידה קריסטין ודילמת החלק הנוותר).

2. פירוט נמצא במאמרו של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018).

ידע תוכן מתמטי:

- א. ידע תוכן כללי (Common Content Knowledge – CCK).
ב. ידע תוכן ייחודי (להוראה) (Specialized Content Knowledge – SCK).
ג. ידע מתמטי רחב (Knowledge at the Mathematical Horizon).

ידע תוכן פדגוגי:

- א. ידע המשלב בין ידע מתמטי לידע על התלמידים (Knowledge of Content and Students – KCS).
ב. ידע המשלב בין ידע מתמטי לידע על הוראה (Knowledge of Content and Teaching – KCT).
ג. ידע של מתמטיקה ותוכנית לימודים (Knowledge of Curriculum – KCC).

ידע התוכן הייחודי להוראת שברים פשוטים מחייב ידע הכולל מגוון רחב של אלגוריתמים לפתרון מעבר לאלגוריתם המקובל (כפל בהופכי), וכן הבנת העקרונות המתמטיים שמשמשים לבסיס הידע הנדרש לכל אלגוריתם. על המורה לדעת איזה תהליך חישובי מספק תשתית להוכחת נכונות אלגוריתם החילוק ככפל בהופכי ואילו עקרונות מתמטיים עומדים בבסיסם. כמו כן ידע המורה צריך לכלול גם היכרות עם ייצוגים חזותיים.

ידע ייחודי להוראה התופס מקום נכבד בעשורים האחרונים, נוגע לאוריינות טכנולוגית של המורה.

ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי בהוראת מתמטיקה – TPCK:

ידע המורה במאה העשרים ואחת חייב לכוון לכלים הדינמיים הממוחשבים הזמינים והמשתנים תדיר. כשמדובר בשילוב מחשבים בהוראה, יש לבחון את מאפייני הידע שהמורים נדרשים להם. הוראה טובה המשלבת כלים דינמיים ממוחשבים, נמצאת בזיקה לידע תוכן מתמטי וקישורו לידע פדגוגי (Hughes, 2005; Escuder, 2011; Furner, 2011). מישרה וקוהלר (Mishra & Koehler, 2006) מכנים ידע זה בשם Technological Pedagogical Content Knowledge – TPCK. טבח וסלוצקי (2015) הציעו מסגרת תאורטית לאפיון פעולות ההוראה המתבצעות בסביבות טכנולוגיות, מתוך התמקדות במרכיבי הידע של מורים שונים זה מזה. המסגרת התאורטית שפיתחו טבח וסלוצקי (שם), נוגעת לשלושה רבדים: מטרת המורה במהלך השיעור, האמצעי הטכנולוגי שנבחר ודרך השימוש בו. ממצאי מחקר מלמדים שלמרות הגיון שהטכנולוגיה מאפשרת בכיתה, מורים מלמדים בגישה מסורתית שבה המורה במרכז. בפעמים שבהן המורים השתמשו בטכנולוגיה, הם עשו זאת בדרך סטטית.

כדי שמורים יוכלו לשלב את המחשב בהבניית מושגים ופעולות מתמטיות ולהתאים את הכלים לדרכי חשיבה מגוונות של תלמידים, עליהם לרכוש ידע שיאפשר להם להיות אורייני טכנולוגיה בחינוך מתמטי. מורה המשלב כלים דינמיים ממוחשבים בהוראה, צריך לשאול את עצמו אם הכלי הממוחשב תומך בבניית תובנות מתמטיות שהוא רוצה להשיג והאם יש יתרון בשילוב המחשב על פני האלטרנטיבות הלא ממוחשבות. חשוב להגדיר את המטרות הפדגוגיות לפני קבלת ההחלטות בדבר הטכנולוגיות שישרתו את הלמידה (Offir, 2010). המצב שבו בתי הספר מוצפים בהצעות לסביבות מתוקשבות לפני שהמורים הגדירו לעצמם מה הם רוצים להשיג מסביבות אלו, אינו נכון להוראה. אופיר (2010) ניסח

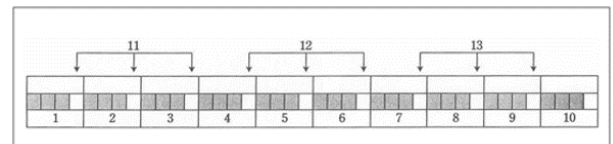
2. ראו דוגמאות במאמרו של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018).

בכיתה התפירה של גב' סמית, התלמידים תופרים ציפיות לכריות עבור תצוגת הבית הפתוח. גב' סמית קנתה לכיתתה 10 יארד של בד עבור הפרויקט. עבור כל ציפית נדרש $\frac{3}{4}$ יארד של בד. כמה ציפיות לכריות ניתן לגזור מבד זה?

איור 1: בעיית הציפיות

(תורגם מתוך 2005, Perlwitz)

קריסטין: קודם ציירתי 10 חתיכות של בד באורך 1 יארד. אחרי זה הוצאתי $\frac{3}{4}$ מכל חתיכה ונשארה חתיכת בד של $\frac{1}{4}$ בכל חלק של 1 יארד. אחרי זה חיברתי את כל החתיכות של $\frac{1}{4}$ כדי לראות כמה קבוצות של $\frac{3}{4}$ אני יכולה לקבל. התשובה הסופית היא 13 ציפיות לכריות עם שארית של $\frac{1}{4}$ חתיכה [הפסקה], או מה שחשבתי שהוא $13\frac{1}{4}$. כאשר הלכתי לבדוק את זה בשיטה הישנה של כפל בהופכי, התשובה הייתה $13\frac{1}{3}$ [כנראה נבוכה] אני לא מצליחה להבין למה.



איור 2: פתרונה של קריסטין ודילמת החלק הנותר

(תורגם מתוך 2005, Perlwitz)

הסטודנטים במחקרן של קלמר-שורץ ולב-זמיר (2018) התבקשו לפתור את הבעיה ולהסביר כיצד הגיעו לפתרון מתוך תהליכי למידה המבוססים על משמעות. הסטודנטים יישמו את האלגוריתם של כפל בהופכי והגיעו למנה $13\frac{1}{3}$. מגוון האסטרטגיות שהוצגו לפתרון הבעיה העידו על מגוון קישורים תוכניים. כמה מהדרכים הובילו לתשובה שהתקבלה באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי וכמה מהן הובילו לתשובה $13\frac{1}{4}$ באמצעות ייצוג ויזואלי. שתי המנות שהתקבלו יצרו קונפליקט שהוביל ללמידה משמעותית העוסקת במשמעויות של החלק הנותר: משמעות אחת חלק מיארד ומשמעות שנייה חלק מהבד לציפית אחת.

כדי להבטיח שיח מתמטי מפרה, על המורה להיות בעל ידע רחב. בפרק להלן נדון במאפייני ידע מורה ונסביר מאפיינים אלה על סמך חילוק שברים פשוטים.

מה מורים צריכים לדעת בעניין הוראת חילוק שברים?

מחקריו של שולמן (Shulman, 1987) על ידע מורים שימשו בסיס לחוקרים מתחום החינוך המתמטי ואפיינו את הידע הייחודי למורים למתמטיקה. האבחנה היא בין ידע תוכן מתמטי לידע תוכן פדגוגי. בול (Ball, 2010) מבחינה בין שלושה מאפייני ידע תוכן מתמטי ושלושה מאפייני ידע תוכן פדגוגי, כמפורט להלן:

1. ראוי לציין שהבעיה אכן יוצרת קונפליקט קוגניטיבי, עם זה יש לתת את הדעת על כך שאין משמעות לרבע ציפית וגם לא לשליש ציפית. מסיבה זו, בעת שחזור מחקר נציג בעיה שבה יש משמעות לחלק הנותר, לדוגמה כמה צנצנות של $\frac{3}{4}$ ליטר אפשר למלא מתוך מכל של 10 ליטר ריבה. במידה שתתקבל גם צנצנת שאינה מלאה, נבדוק כמה ריבה תהיה בצנצנת האחרת. בשאלה מסוג זה ראוי להזכיר את מספר הצנצנות המלאות והחלק הנותר מקבל משמעות.

מודל לקבלת החלטות לפי עקרון אימוץ טכנולוגיות בחינוך. המודל יוצא מהמטרות הפדגוגיות של המורה המאמץ את הטכנולוגיה, ומעצבים את הטכנולוגיה על פי המטרות הפדגוגיות.

ישנם כמה נתונים שצריך להביא בחשבון בבואנו לבחור את הכלים הטכנולוגיים המתאימים להוראה. ענבל-שמיר וקלי (2007) פיתחו מחוון לאפיון וניתוח פעילויות מתוקשבות. המחווון עוסק בשישה ממדים של הוראה, ונותן ביטוי למידת ההבניה שיש בפעילות כמו למידת הקשר בין הלומדים בבניית התובנות שלהם (ראו נספח 1 – טבלת פירוט ממדים ורמות בכל ממד).

יש לתת תשומת לב להוראה באמצעות פעילויות מתוקשבות הכוללת בחירה מושכלת של כלים קיימים וטיפול סביבה דינמית פתוחה, שבה גם המורה וגם התלמיד שותפים לבניית הייצוגים למושגים ולפעולות. בבניית הייצוג המתקשבת על ידי המורה והתלמיד, יש מסר שגם המורה וגם התלמיד מקבלים עליהם אחריות ללמידה. מורים ותלמידים שיהיו שותפים ליצירת ייצוגים כמודלים דינמיים ויוכלו להסביר את הפעולות בבעיות המתמטיות המוצבות לפניהם, ייתכן שייטיבו להבין והיו מסוגלים ליצור אסטרטגיות למגוון רחב של בעיות. המורים יבססו את ידע התוכן הפדגוגי-טכנולוגי והתלמידים יבנו את הידע המתמטי שלהם. היכולת של המורה ושל התלמיד לבנות עולם זוטא שבתוכו התלמיד יפעל כמו בתוך מעבדת חקר לגילוי ובניית תובנות מתמטיות, עולם שבו יוכל לדמיין ולהמחיש את הפעולות והמושגים המתמטיים ולקשרם לידיע קיים, יאפשר למורים ותלמידים ללמוד וללמד לשם הבניה של הידיע. אחת הסיבות למורכבות בהבנת מושג השבר ופעולות עם שברים נובעת מכך שלתלמידים מעט הזדמנויות שבהן הם בונים לעצמם היגיון עם הכמויות בייצוג של שבר. לטענת אמפסון, לוי והקנברג (Kent, Empson, Levi, & Hackenberg, 2015), אם תלמידים לא יכולים לראות את השברים ככמויות יהיה להם קשה לשלב היגיון בפעולות איתם. ממצא זה מתקשר לקושי של המורים בהבנת משמעות הפעולה בחילוק שברים, ממצא שמנע מהמורים את היכולת להציג סיפור מתמטי מתאים לתרגיל ובהמשך אף מנע מהם יכולת להמחיש את התרגיל (Ma, 1999). סביר שלקושי זה יהיה ביטוי בהוראה המכוונת להבנה בעלת משמעות.

השפעות של ידע טכנו-פדגוגי על בחירת כלים דינמיים להבניית פעולת חילוק עם שברים

קנת, אמפסון ונילסן (Kent, Empson, & Nielsen, 2015), מדברים על מודלינג ישיר (Direct Modeling) שבו תלמיד יוצר אסטרטגיות שמשלבות ייצוג של כל הכמויות באופן שמשקף את מבנה הבעיה שלפניו. אשר לשברים פשוטים, אסטרטגיות אלה מבוססות על ההבנה המוקדמת של שברים כחלק משלם וההבנה של התלמידים בפעולת החילוק במשמעות של מנייה של כמויות. עבודות אחרות מתארות ומדגישות את החשיבות של מודליזציה בבניית פתרון לבעיות מתמטיות (Ferrucci, Yeap, & Carter, 2003). הדגש בהן הוא ביכולת התלמידים לייצג את הכמויות הנתונות בבעיה והיחסים ביניהן, כדי לעשות לעצמם ויזואליזציה של יחסים מתמטיים מופשטים.

ישנם כיום באינטרנט מגוון כלים דינמיים שבעזרתם אפשר להמחיש את פעולת החילוק ובפרט חילוק שברים פשוטים. בדרך כלל, סביבות אלה נותנות את הכלים "מוכנים" והתלמיד צופה פסיבי בתהליך. מתוך ממצאי המחקר המציג את יחסן של המורות לשילוב כלים טכנולוגיים בהוראה (קלמר-שורץ ולב-זמיר, 2018), נלמד שמרבית המורות נוהגות לשלב את הטכנולוגיה במהלך ההוראה,

אלא שהמורות הזכירו את הכלים שהמכנה המשותף להם הוא שהכלי מנהל את הפעולה ואת תהליך הלמידה. הן לא העלו יכולת לבנייה עצמית של ייצוגים בכלים הדינמיים, שבה התלמיד והמורה דומיננטיים והם אלה המכוונים את תהליך הלמידה. ראוי לציין כי קיימים אתרים רבים המאפשרים לתלמיד אקטיביות, אך גם הם ברובם אינם גמישים בבחירת סוגי התרגילים והרצף שלהם שלא בהכרח מובילים למטרות שמורה בחר לשיעורו.

ישנן סביבות פתוחות, כמו אקסל או גאוגברה ואחרות (dudamath), המאפשרות בניית עולם המחשה לפי הבנת התלמיד. בניית מודל של חילוק להכלה באקסל או בגאוגברה מאפשרת המחשה של פעולת החילוק הן עבור מספרים טבעיים (ובכך מתחברת לידיע הקודם של התלמידים) והן עבור שברים. בנייה כזו דורשת מהתלמיד רמה גבוהה של חשיבה שאותה מכנים סמית ושטיין (Smith & Stein, 1998) "עשייה מתמטית", המכוונת להבנה מושגית שאינה מושתתת בהכרח על חשיבה אלגוריתמית. עשייה זו מחייבת את התלמיד להבין את משמעות המושגים והפעולות, ורפלקציה על התקדמותו בדרך להשגת המטרה.

תיאור המחקר אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 9 מורות שהן סטודנטיות שנה שנייה לתואר שני בחינוך מתמטי, ו-9 תלמידי כיתות ה'-ו'. המורות שהשתתפו במחקר היו כלל הסטודנטיות בקורס ל"שילוב המחשב בהוראת מתמטיקה" במכללה לחינוך בישראל. כל המורות בעלות ותק של 5 עד 15 שנות הוראה והן מלמדות מתמטיקה בכיתות ה'-ו' של בית הספר היסודי. באמתחתן ניסיון בהוראת חילוק שברים וניסיון בהוראה המשלבת טכנולוגיות. כל מורה התבקשה לבחור תלמיד אחד שהיא תעבוד איתו בזמן המחקר. 8 מכלל התלמידים הם תלמידי כיתה ו' ונמצאו בשלב שלאחר למידת אלגוריתם חילוק שברים באמצעות כפל בהופכי. מורה אחת לימדה בזמן המחקר בכיתה ה' וביקשה להשתתף במחקר. מכאן שתלמיד אחד למד בזמן המחקר בכיתה ה' טרם לימוד פורמלי של אלגוריתם חילוק שברים. המטרה בבחירת תלמידי כיתה ו' הייתה לבדוק את ההבנה המושגית לאחר שנבנתה אצלם היכולת הביצועית (אלגוריתמית). השתתפותו של תלמיד כיתה ה' במחקר אומנם נבעה מאילוץ של המורה, אך הדבר טומן בחובו ערך מוסף של בדיקת הבנה מושגית טרם למידת האלגוריתם.

מטרת המחקר

מחקר זה בודק השפעות של ידע מורים, ידע תוכן מתמטי, ידע פדגוגי וידע טכנו-פדגוגי בהוראת חילוק שברים פשוטים, על התפתחות ההבנה בקרב תלמידים. ממטרת המחקר נגזרות שלוש שאלות המחקר.

שאלות המחקר

- א. כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל פתרון שגוי (ראו איור 1 ואיור 2)?
- ב. כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם
 1. הסבר תהליכי החילוק?
 2. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?
 3. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?
- ג. מהן ההשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית?

1. **שאלון מקדים** – נבדקה התמודדות התלמידים עם פתרון תרגיל חילוק שברים לאחר הצגת בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון השגוי של קריסטין בשל דילמת החלק הנותר.

2. **תוכנית אקסל** מעוצבת להמחשת מרכיבי תרגילי חילוק שברים. קובץ אקסל הוכן מראש לצורך המחקר ויש בו גיליון נפרד עבור כל תרגיל חילוק. בגיליונות יש תרגילים שעלו בהדרגה ברמת הקושי, מחילוק מספרים טבעיים לחילוק מספר טבעי בשבר וחילוק שבר בשבר. בכל תרגיל הפותר בנה את הסיטואציה הנתונה של חילוק ובדק הכלה של המחלק במחולק בעזרת העתקה והדבקה. בשלב בניית מודליזציה של התרגיל, הפותר היה צריך לתאר את שלם הייחוס שממנו "נגזר" המחלק ולפי זה נבנה המחולק. לדוגמה ראו נספח 2 המתאר התנסות בבניית תרגילי חילוק באקסל.

אותו קובץ שימש הן בשלב המקדים עבור המורות, והן בשלב ההוראה עבור התלמידים.

בגיליון האקסל הודגש שלם הייחוס. המחולק והמחלק יוצגו ביחס לשלם הייחוס. במקרה של מנה שאינה מספר טבעי, נבדק איזה חלק מיחידת הייחוס הוא החלק הנותר (ראו נספח 2 – דוגמאות לתרגילים שהמורות המחישו באקסל בשלב ההתנסות האישית).

בשל ההתנסות בשלב המקדים, החלטנו לא לשלב תרגילים של חילוק שבר במספר טבעי בשלב ההוראה, מכיוון שחילוק כל מספר במספר טבעי מזמן יישום של חילוק במשמעות חילוק לחלקים. בחרנו להתמקד בתרגילים שבהם "נוח" יותר ליישם משמעות חילוק להכלה. הייצוג של תרגילים מסוג זה של חילוק שבר במספר טבעי במשמעות של חילוק להכלה באמצעות אקסל, מסורבל, ולזה בדיוק אנחנו מתכוונות שעל המורה להכיר יתרונות וחולשות של אמצעי המחשה נבחר.

בתהליך ההתנסות בפתרון תרגילי חילוק באמצעות ייצוגים

באקסל יש ארבעה חלקים (לא בהכרח בסדר המוצג כאן):
א. יצירת השלם (שלם הייחוס)
ב. יצירת המחולק
ג. יצירת המחלק (יחידת הייחוס)
ד. בדיקת מספר הפעמים שהמחלק (יחידת הייחוס) מוכל במחולק, כלומר המנה.

3. **שאלון לאחר התנסות** – חזרה על השאלה עם דילמת החלק הנותר בבעיית הציפיות, שניתנה בשלב הראשון וזאת לאחר ארבעה שיעורים של בניית ייצוגים באקסל לתרגילי חילוק ופתרונם.

מהלך המחקר

מחקר זה איכותני ויש בו שלב מקדים שבו התנסו המורות בייצוג תרגילי חילוק באקסל. בהמשך, בשלב ההוראה, המורות התנסו בהוראה של חילוק שברים בשילוב אקסל. לבסוף, רפלקציה של כל מורה.

השלב המקדים – התנסות של המורות בהמחשת פתרון תרגילי חילוק שברים פשוטים באמצעות ייצוג באקסל. האקסל מאפשר ייצוג תרגילי חילוק שברים ומתן משמעות לארבעה המונחים על פי למון (Lamon, 1994): יחידת הייחוס (המחלק), השלם המקורי (שלם הייחוס), מחולק ומנה. ראוי לציין כי בייצוג תרגילי חילוק באקסל יש ערך מוסף על פני ציור על דף, בכך שהלומד יכול לבדוק את המוכחות של המחלק במחולק על ידי העתקה והדבקה ולשמור על דיוק בדיקתו.

במהלך ארבעה מפגשים שבהם המורות התנסו בהמחשת פתרון תרגילי חילוק באמצעות ייצוגים באקסל, הוגדרו המונחים הרלוונטיים.

שלב ההוראה – כל מורה התבקשה להנחות תלמיד אחד על פי שלושה שלבים המוצגים בטבלה 1.

טבלה 1: שלבי התנסות עם תלמידים

שלב	התנסות עם תלמידים	התאמה לשאלת מחקר
1	שלב ראשון התקיים טרם ההתנסות בבניית ייצוגים של פעולת החילוק באקסל. במהלכו נבדקה התמודדות התלמידים עם פתרון תרגיל חילוק שברים לאחר הצגת בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון השגוי של קריסטין בשל דילמת החלק הנותר (ראו איור 2). שלב זה התבצע בנוכחות המורות אך בלי התערבותן.	מענה על שאלת המחקר הראשונה: כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל הפתרון השגוי?
2	שלב ההתערבות נמשך ארבעה מפגשי למידה, ובו התלמידים למדו לייצג תרגילי חילוק שברים באקסל. בשלב זה נבנתה התוכנה על משמעות חילוק שברים. ⁵ המורות חזקו את האינטואיציות של התלמידים כלפי פעולת החילוק בשברים מתוך קשר לידע קודם על חילוק מספרים טבעיים. קישור זה התבצע באמצעות ייצוג מרכיבי תרגילי החילוק באקסל. כל מורה בחרה חלק מהשאלות שבמאגר (נספח 3 – מאגר שאלות). בחירת השאלות נקבעה לפי התפתחות הלמידה של התלמיד שעימו עבדה המורה. המורות התבקשו להוסיף שאלות המעידות על תובנה חשבונית לפי שיקול דעתן. ⁶	שלב ההתערבות נמשך ארבעה מפגשים שבהם המורות התנסו בהמחשת פתרון תרגילי חילוק באמצעות ייצוגים באקסל, הוגדרו המונחים הרלוונטיים.
3	בדיקה חוזרת לאחר כשבועיים של ידע תלמידים ויכולתם להסביר את הפתרון של אותה שאלה עם דילמת החלק הנותר בבעיית הציפיות שניתנה בשלב הראשון וזאת לאחר ארבעה שיעורים של בניית ייצוגים באקסל.	מענה לשאלת המחקר השנייה: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם א. הסבר תהליכי החילוק? ב. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי? ג. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?

1. 8 מבין 9 התלמידים עברו תהליך זה לאחר שפורמלית למדו לבצע את פעולת החילוק באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי.

2. כל מורה קיבלה החלטה על מספר התרגילים וסוג התרגילים שיוצגו לתלמיד.

כשהגיע לתשובה $\frac{40}{3}$, הוא כתב בצד הדף תרגיל חילוק במאונך.
בסיום הוא רשם את התוצאה $13\frac{1}{3}$ (ראו איור 3).

איור 3: מציאת המנה באמצעות כפל בהופכי וחילוק במאונך

לאחר פתרון זה התפתח השיח הזה:

מורה: "איך ידעת שהתשובה היא $13\frac{1}{3}$?"

תלמיד: "מפני שהמכנה של השבר $\frac{40}{3}$ הוא 3, ולכן התשובה חייבת להיות עם מכנה 3."

מורה: "למה אתה מתכוון?"

תלמיד: "שעשיתי חילוק, העברתי את השבר המדומה למספר מעורב ולכן המכנה נשאר 3."

מעיון בממצאים של שאר שבעה תלמידי כיתה ו', התקבלה תמונה דומה של פתרון הנשען על אלגוריתם, עם נימוק המתבסס על התוצאה.

המורה שעבדה עם תלמיד כיתה ה', שלא הכיר את אלגוריתם הכפל בהופכי, מתארת את דרך ההתמודדות שלו עם הפתרון בדרך שהייתה חשובה לו:

תלמיד: "זה חילוק... אני לא יודע איך... לא למדתי... זה יהיה יותר

מ-10, אבל אני לא יודע להסביר, אולי ארשום $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

.... עד שאגיע ל-10... רגע, $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ זה $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$

זה 3. בכל 3 מטרים יש לנו 4 פעמים. עוד 3 מטרים, זה

כבר 6 מטרים, יש לנו כבר 8 פעמים... עוד 3 מטרים זה

כבר 9 מטרים וזה 12 פעמים. נשאר עוד מטר זה עוד פעם

אחת $\frac{3}{4}$ אז התשובה היא 13 וקצת."

בהמשך לפתרון הבעיה, נבחנה התמודדותם של התלמידים עם דילמת החלק הנותר. המורות הציגו לתלמידים את דרך הפתרון של קריסטין (ראו איור 2). תגובות התלמידים על דילמת החלק הנותר מוצגות בטבלה 2.

שלב הרפלקציה – בתום שלב ההוראה התבקשה כל מורה לבצע רפלקציה על התהליך שעברה. המורות התבקשו לדון ברפלקציה בהתפתחות הידע שלהן כמורות (ידע תוכן מתמטי, ידע פדגוגי וידע פדגוגי-טכנולוגי). שלב זה נתן מענה לשאלת המחקר השלישית: מהן ההשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית?

כל מורה ביצעה תהליך איסוף הנתונים של השלב המקדים ושלב ההוראה בזמן תיעוד כל אחד מהמפגשים עם התלמיד שעבדה עימו. המורות הקליטו את השיח עם התלמיד, שכתבו אותו וצילמו את שלבי הפתרון לכל תרגיל שהוצג בכל אחד מהמפגשים (ראו טבלאות 2-5). כל מורה כתבה רפלקציה והגישה אותה לחוקרות.

ניתוח הנתונים

השיח בין תלמיד למורה במהלך המפגשים נותח על סמך תיעוד המפגשים עם התלמידים. תיעוד המפגשים כלל הקלטות, שכתוב וצילום דוגמאות כדי לבחון תהליך התפתחות ידע התלמידים. השיח עם התלמידים נותח ונבדק דמיון ושוני בקרב התלמידים (שמונה תלמידים מכיתה ו' ותלמיד אחד מכיתה ה'). הניתוח מלווה בציטוטים, בדוגמאות לאיורי פתרונות התלמידים ובדוגמאות של בנייה באקסל.

רפלקציות המורות נאספו ונותחו במהלך בחינת שלוש קטגוריות ידע מורה: ידע תוכן מתמטי, ידע תוכן פדגוגי וידע תוכן טכנו-פדגוגי.

ממצאים

חשיפתן של המורות לאקסל והתנסותן בו ככלי לייצוג ופתרון תרגילי חילוק, שימש בסיס ידע חיוני שעליו נשען תהליך ההוראה שלהן עם התלמידים. בתיאור הממצאים במחקר זה, נתמקד בידע התלמידים לפני תהליך ההתערבות, בידע שנבנה במהלך התנסותם באקסל ובידע שבא לידי ביטוי בתום התהליך. לסיכום, הבאנו ציטוטים מרפלקציות של המורות המתארות את תרומת התהליך להתפתחותן המקצועית.

שאלת המחקר הראשונה הייתה כיצד מתמודדים תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים וכיצד הם מגיבים על דילמת החלק הנותר בשל פתרון שגוי?

כמתואר בטבלה 1, בשלב ראשון נבדק ידע תלמידים בעניין בעיית הציפיות (ראו איור 1). בהמשך נבדקה יכולתם להסביר את משמעות הפתרון של שאלת דילמת החלק הנותר (ראו איור 2), לפני ההתנסות בייצוג הפעולה באקסל. בתיאור הממצאים נציג דיווח של אחת המורות המייצגת את התהליך שאפיין את השיח בין המורות לתלמידים. לאחר מכן יוצגו נתונים משווים בין התמודדות כל התלמידים עם דילמת החלק הנותר לפני תהליך הלמידה באקסל ולאחריו.

חלק ראשון - פתרון תרגיל חילוק שברים והסבר דילמת החלק הנותר

שמונה המורות שעבדו עם תלמידי כיתה ו', ציינו שמאחר שפתרון תרגילי חילוק באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי היה שגור אצל תלמידיהן, אך טבעי היה שהם בחרו לפתור באמצעות יישום האלגוריתם המוכר. נציג פתרון של תלמיד כיתה ו' ואת פתרונו של תלמיד כיתה ה'.

דוגמה לפתרון של תלמיד כיתה ו' לבעיית הציפיות (ראו איור 1):

$$10 \div \frac{3}{4} = \frac{10}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

מספר התלמידים	תגובות התלמידים על הפתרון של קריסטין
4 תלמידי כיתה ו'	התשובה הנכונה היא $13\frac{1}{3}$. היא פשוט טענה בחישוב.
1 תלמיד כיתה ו'	כשעשיתי חילוק, העברתי את השבר המדומה למספר מעורב המכנה נשאר 3. חייב להיות 3 היא טועה. לא יכול להיות 4.
2 תלמידי כיתה ו'	שתי התשובות נכונות זה גם $13\frac{1}{3}$ וגם $13\frac{1}{4}$
1 תלמיד כיתה ו'	הציור מראה שאני טעיתי. זה מוזר כי פתרתי כמו שלימדו אותי. אני לא מבין מה קרה כאן.
1 תלמיד כיתה ה'	התשובה של קריסטין נכונה.

בשלב הראשון, כשהתבקשו התלמידים לפתור את בעיית הציפיות, כל 8 תלמידי כיתה ו' פתרו באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי. 5 מהם פתרו נכון ו-2 מהם שגו במהלך הפתרון, אך תיקנו את הטעות. תלמיד אחד לא ידע להסביר את הקונפליקט בין תשובתו לתשובתה של קריסטין. תלמיד כיתה ה' שפתר את הבעיה מתוך הישענות על פעולת החילוק במשמעות של חילוק להכלה והגיע לפתרון קרוב לתשובה המדויקת, אבל לא ציין מהו החלק הנותר, טען שתשובתה של קריסטין נכונה. גם תשובתו וגם תשובתה של קריסטין היו מעט יותר מ-13 והוא לא ראה סתירה בין התשובות. אף לא אחד מהתלמידים הסביר את התשובה השגויה בהסבר משמעות הסתירה, אלא הניב תשובות, כמו "היא טענה בחישוב", "שתי התשובות נכונות", "אני לא מבין...", "חייב להיות...".

חלק שני - שלב ההוראה

שאלת המחקר השנייה הייתה: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם

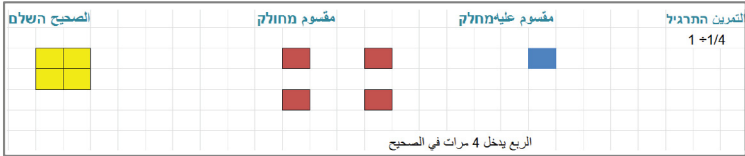
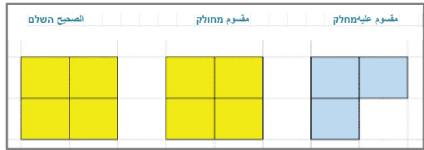
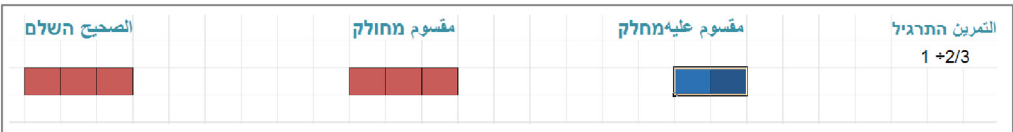
1. הסבר תהליכי החילוק?
 2. החלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?
 3. דילמת החלק הנותר בשל הצגת פתרון שגוי?
- במענה לשאלת המחקר השנייה על כל סעיפיה, בחרנו להתמקד תחילה בתיאור מקרה של אחת המורות שעבדה עם תלמיד כיתה ו'. תיאור זה משקף במידה רבה את התהליך שהתבצע בין שאר המורות ותלמידיהן.

מורה: "התלמידים מכירים את תוכנת האקסל, אבל לא מהכיוון של ייצוג תרגילים. לקח לי כחצי שעה להסביר לתלמיד על תוכנת האקסל, איך 'משרטטים', 'גוזרים', 'מדייקים' ו'צובעים'. הדגמתי באקסל תרגיל חילוק של שלם בשלם ואחר כך ביקשתי מהתלמיד לייצג בעצמו תרגיל דומה. ביקשתי שייצור את המחולק, המחלק והמנה. עברנו לחילוק שלם בשבר ובהמשך לחילוק שבר בשבר (ראו טבלה 3). ביקשתי מהתלמיד לייצג את התרגילים באקסל תוך כדי ששאלתי אותו שאלות מכוונות. ביקשתי שבכל תרגיל ייצג באקסל את שלם הייחוס, את המחולק ואת יחידת הייחוס (המחלק). בשלב ראשון, הצגתי לתלמיד את שלושת התרגילים הבאים: $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$ ו- $1\frac{2}{3}$, בכולם המחולק שלם אחד."

טבלה 3 מתארת את תהליך העבודה ואת הדיאלוג בין המורה לתלמיד שלה במפגש הראשון.



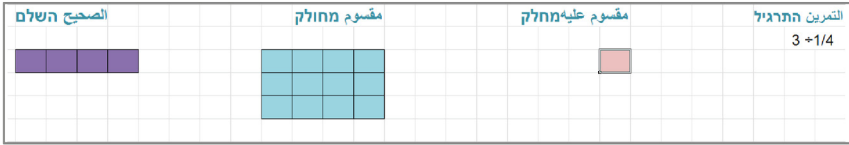
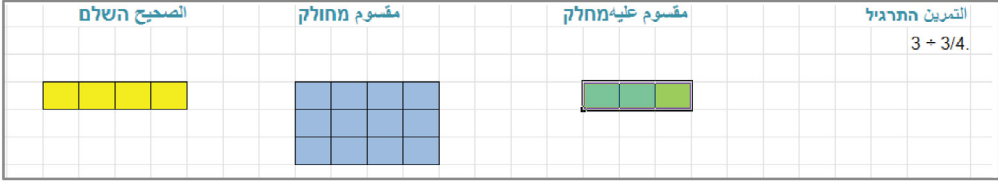
טבלה 3: מפגש למידה ראשון עם התלמיד

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
1	1: $\frac{1}{4}$ חילוק שלם בשבר יחידה	מורה: "איך תייצג את השלם של התרגיל 1: $\frac{1}{4}$?" תלמיד: "השלם יהיה מורכב מארבעה רבעים, כל משבצת היא רבע אחד. אבדוק כמה פעמים רבע נכנס בתוך השלם."  איור 4: ייצוג של התרגיל 1: $\frac{1}{4}$ באקסל על ידי התלמיד  איור 5: ייצוג באקסל של פתרון התרגיל 1: $\frac{1}{4}$ התלמיד ייצג את התרגיל באקסל ורשם תשובה נכונה לאחר שבחר להפריד את המחולק לארבעה רבעים, ואמר: "ככה אפשר לראות שהמחלק נכנס 4 פעמים במחולק".
2	1: $\frac{3}{4}$ חילוק שלם בשבר שמונהו גדול מ-1	בתרגיל 1: $\frac{3}{4}$, התלמיד ייצג את השלם כארבעה רבעים, את המחלק כ-3 משבצות (רבעים). מורה: "מה אתה רוצה לבדוק?"  איור 6: ייצוג של התרגיל 1: $\frac{3}{4}$ באקסל על ידי התלמיד תלמיד: "כמה פעמים נכנסות 3 משבצות בתוך השלם. נשארת לי משבצת אחת לא מכוסה ולכן התשובה היא 1: $\frac{1}{3}$". מורה: "תסביר איך הגעת ל-1: $\frac{1}{3}$?" תלמיד: "נשארה משבצת אחת של המחולק שלא כיסיתי. 3 משבצות הן המחלק שלי והחלק שנשאר הוא אחד מתוך השלוש".
3	1: $\frac{2}{3}$	התלמיד הסביר בדרך מילולית את תהליך הפתרון של תרגיל 1: $\frac{2}{3}$ בדרך זו: "השלם (הכוונה לשלם הייחוס), הוא שלוש משבצות. שתי משבצות ($\frac{2}{3}$) (הכוונה ליחידת הייחוס) נכנסות פעם אחת בתוך ה'שלוש משבצות' ונשארה לי משבצת אחת לא מכוסה, שהיא מחצית משתי המשבצות (מחצית של $\frac{2}{3}$) ולכן התשובה היא 1: $\frac{1}{2}$". להלן הצגת הפתרון וההסבר המילולי עם בניית הייצוג באקסל.  איור 7: ייצוג של התרגיל 1: $\frac{2}{3}$ באקסל על ידי התלמיד

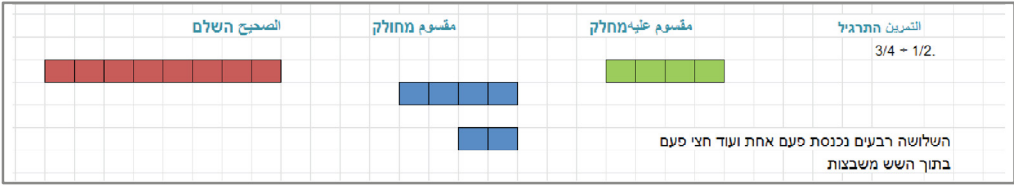
במפגש השני הוצגו תרגילי חילוק שבהם המחולק היה מספר טבעי הגדול מ-1. במפגש זה הוצגו התרגילים: $2 \div \frac{3}{8}$, $3 \div \frac{3}{4}$, $3 : \frac{1}{4}$.

טבלה 4 מתארת את תהליך העבודה והשיח בין אותה מורה לאותו תלמיד במפגש השני.

טבלה 4: מפגש למידה שני עם התלמיד

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
4	$3 : \frac{1}{4}$ חילוק מספר טבעי גדול מ-1 בשבר יחידה	תלמיד: "אני יודע ש- $\frac{1}{4}$ נכנס 12 פעמים ב-3, אבל אני יכול להראות גם באקסל. השלם (שלם הייחוס) שלי הוא $\frac{4}{4}$ ולכן 3 שלמים (המחולק) מהווים $\frac{12}{4}$. המחלק הוא משבצת אחת (רבע השלם)". התלמיד מנה 12 משבצות בתוך המחולק ואמר: "$3 : \frac{1}{4} = 12$".  איור 8: ייצוג של התרגיל $3 : \frac{1}{4}$ באקסל על ידי התלמיד
5	$3 : \frac{3}{4}$ חילוק מספר טבעי גדול מ-1 בשבר שמונהו גדול מ-1	בתרגיל להלן התלמיד הכין באקסל מלבן של 4 משבצות כמייצג את שלם הייחוס והסביר: "המחולק הוא 3, כלומר מלבן של 12 משבצות (3 פעמים שלם הייחוס). המחלק הוא $\frac{3}{4}$, כלומר מלבן של שלוש משבצות (יחידת הייחוס)". בהמשך "גזר" התלמיד מכל שורה אופקית של המחולק שלוש משבצות. מנה 3 פעמים את יחידת הייחוס בתוך המחולק ונשארה לו שלשה אחת במצב אנכי שעדיין לא מנה. הוא היסס אך אחרי כמה שניות גזר כל משבצת משלוש המשבצות המופיעות במאונך וסידר אותן מחדש, אופקית, מתחת לשלוש שקיבל ורשם את המנה, 4. מורה: "למה היית צריך לבצע את הגזירות של השלשה האחרונה?" תלמיד (חושב מעט ואומר): "אה... רק עכשיו קלטתי שלא הייתי צריך. הרי כל שלוש משבצות הן יחידת הייחוס שלי ולא משנה איך הן מונחות. כעת אני תופס שיכולתי לגזור לפי העמודות ומיד לקבל אותה מנה בפחות גזירות".  איור 9: ייצוג של התרגיל $3 : \frac{3}{4}$ באקסל על ידי התלמיד מורה: "בוא ננסה כעת לבדוק את התשובה שלך בעזרת כפל בהופכי". התלמיד פותר את התרגיל ככפל בהופכי, מגלה שתשובתו נכונה והוא מרוצה מהביצועים שעשה.
6	$2 : \frac{3}{8}$	בתרגיל זה התלמיד מתחיל בייצוג באקסל ובמהלך הבניה הסביר מה שהוא עושה. תלמיד: "כל שלם הוא $\frac{8}{8}$ ולכן המחולק הוא פעמיים השלם, כלומר, 16 משבצות (16 שמיניות). המחלק הוא 3 משבצות (3 שמיניות). כמה פעמים קבוצה של 3 משבצות נכנסת בתוך ה-16? 5 פעמים ונשאר לי 1 ולכן התשובה היא $5\frac{1}{8}$". בתוך שהוא מביט באקסל, הוא מזהה בעיה ואומר: "לא נכון, החלק שנשאר הוא אחד מתוך השלוש שמהוות את יחידת הייחוס ולכן המנה היא $5\frac{1}{3}$".

במפגש השלישי הוצגו התרגילים: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ ו- $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, בהם גם המחולק וגם המחלק שברים פשוטים. ראו טבלה 5.

מספר	תרגיל	ייצוג הפתרון באקסל ותיאור התהליך והשיח בין המורה לתלמיד
7	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ חילוק שבר בשבר	תלמיד: "השלם (שלם הייחוס) צריך להתחלק ב-2 וב-4 ולכן הוא $\frac{8}{8}$. המחולק $\frac{3}{4}$ מיוצג אצלי על ידי שש משבצות (6 שמיניות) ויחידת הייחוס, החצי, זה 4 משבצות (4 שמיניות). אני צריך לבדוק כמה פעמים ה-4 משבצות נכנסות בתוך ה-6 משבצות." התלמיד מתחיל לייצג את התרגיל באקסל. הוא כותב בתחתית הדף: "חצי נכנס פעם אחת ועוד חצי פעם, בתוך שש משבצות" ורושם תשובה $\frac{1}{2}$."  איור 10: ייצוג של התרגיל $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ באקסל על ידי התלמיד
8	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$	התלמיד הסתכל על התרגיל ואמר: "אני יודע את התשובה בלי אקסל, זה 3. כי $\frac{1}{4}$ נכנס 3 פעמים ב-$\frac{3}{4}$". בהמשך ניגש התלמיד לאקסל ומבלי לדבר הציג את השלם, הציג את המחלק והמחולק ואמר: "רבע הוא משבצת אחת והוא נכנס 3 פעמים בתוך שלושה רבעים". מורה: "בוא נקשר בין שני התרגילים שעשינו כעת $1\frac{1}{2}$ ו-$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 3$. מה תוכל לומר?" תלמיד: "בשני התרגילים המחולק שווה, הוא $\frac{3}{4}$ והמחלק בתרגיל השני הוא מחצית מהמחלק שבתרגיל הקודם, $\frac{1}{4}$ הוא מחצית ה-$\frac{1}{2}$. כשמסתכלים על המנות של שני התרגילים, בתרגיל השני המנה גדולה פי 2 מהמנה של התרגיל הראשון. כמו שלמדנו, למשל, אם המנה של 24:8 היא 3 אז המנה של 24:4 תהיה גדולה פי 2, היא 6. גם כאן $1\frac{1}{2}$ זה חצי של שלוש." מורה: "יפה! אתה מקשר מאוד יפה בין תרגילים."

חלק שלישי - חזרה לדילמת החלק הנותר

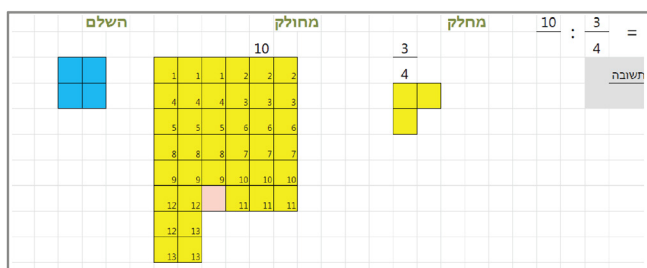
סעיפים ב ו-ג בשאלת המחקר השנייה היו: כיצד מתמודדים תלמידים במהלך למידה המבוססת על ייצוג תרגילי חילוק שברים באמצעות אקסל, עם -

ב. התייחסות לחלק הנותר, כאשר המנה אינה מספר טבעי?

ג. התייחסות לדילמת החלק הנותר בעקבות הצגת פתרון שגוי?

עד כה עסקנו בתיאור מקרה של תלמיד בודד. התלמידים האחרים שעברו תהליכים דומים של ייצוג תרגילי חילוק באקסל, נעזרו במודל שהם יצרו באקסל או בציור, כבואם לפתור את בעיית הציפיות ולהסביר את דילמת החלק הנותר (ראו איור 2). להלן 2 דוגמאות של תשובות תלמידות.

תלמידה א (תלמידת כיתה ו'):



איור 11: תשובה של תלמידה לדילמת החלק הנותר עם ייצוג באקסל

כששאלתי אותה:

אז איך אפשר להסביר את הטעות של קריסטין?

המחלק הוא $\frac{3}{4}$ והמחולק הוא 10, לכן, בגלל שהמכנה של

המחלק הוא 4 אייצג את השלם כ 4 רבעים" (בכחול באיור).

התלמידה ייצגה את הסיטואציה באקסל, כשהיא מייצגת את

שלם הייחוס באמצעות 4 משבצות ואת המחולק באמצעות

40 משבצות. היא החלה להעתיק ולהדביק שלשות של

משבצות כדי לבדוק כמה שלשות מכסות את המחולק (כמה

המחלק הוא שלוש משבצות, לכן המשבצת שנותרה היא רק 1/3 ממנו. קריסטין אולי הסתכלה על השלם (שלם הייחוס) שיש בו ארבעה חלקים, לכן טעתה.

לפני ההתנסות באקסל תלמידה זו לא יכלה לזהות את משמעות החלק הנותר ולא הצליחה להסביר למה החלק הנותר אצלה הוא $\frac{1}{3}$ ואצל קריסטין $\frac{1}{4}$. לאחר ההתנסות הבינה התלמידה את משמעות החלק הנותר, ראתה אותו ויזואלית והצביעה עליו. התלמידה הוסיפה:

הדרך קלה מאוד וזה נראה יותר ברור במיוחד העניין עם החלק הנותר.

התלמידה סיכמה את תהליך הלמידה באמצעות האקסל ואמרה:

לדעתי זה מצריך יותר מדי זמן. צריך לצייר ולאחר מכן לבצע את פעולת החילוק, זה מאוד מעייף. אבל, כדאי פעם אחת ללמוד עם אקסל ואז, כשמבינים ניתן לפתור דרך "תרגיל פשוט".

תלמידה ב (תלמידת כיתה ו') נתנה הסבר המבוסס על ידע קודם וקישרה בין חילוק במספרים טבעיים לחילוק בשברים. היא אמרה:

החלק הנותר הוא מתוך $\frac{3}{4}$ כי זה בדיוק כמו בחילוק מספרים טבעיים כשאני מחלקת

(4) $2 = 44 : 5$ אז החלק הנותר הוא 4 מתוך 5 (המחלק) ובחילוק שברים זה אותו עיקרון, החלק הנותר הוא $\frac{1}{3}$ מ- $\frac{3}{4}$.

לפני תהליך ההתנסות באקסל, שום תלמיד לא הצליח להסביר את משמעות החלק הנותר בבעיית הדילמה, ואילו לאחר למידה 8 תלמידים הצליחו לעשות זאת. לאחר ההתנסות של התלמידים בפתרון תרגילים באמצעות אקסל, 8 מתוך 9 התלמידים יכלו להסביר את תשובתה השגויה של קריסטין. רק אחד התלמידים נזקק לפתרון התרגיל באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי כדי להסביר את משמעות החלק הנותר בעוד שהשאר לא נזקקו לו.

שאלת מחקר שלישית נגעה להשפעות של התפתחות ידע המורים על ההוראה המכוונת ללמידה משמעותית.

כאמור, כל מורה תיעדה את תהליך הלמידה עם התלמיד, ובתום התהליך כתבה רפלקציה על תרומת התהליך להתפתחות הידע שלה כמורה. רפלקציה זו כללה את התהליך שבו המורות השתתפו בלמידה אישית ובהמשך כיצד שלב זה בא לידי ביטוי בתהליך ההוראה. המורות הדגישו בכתיבתן את חשיבות השפה המתמטית המדויקת, את ההשפעה המזיקה בהוראה הנשענת על אלגוריתם וכנגד זה את חשיבות בניית תהליכי למידה שמפתחים הבנה באמצעות ייצוגים דינמיים. נגלה בדברי המורות קטגוריות של סוגי ידע מורה. להלן מקבץ ציטוטים מתוך רפלקציות של המורות, הממין לפי סוגי ידע.

התפתחות ידע תוכן מתמטי

"לאור ההתנסות שלי עם המשימה, הגעתי למסקנה, שמורים למתמטיקה בבית הספר היסודי העוסקים בהוראת חילוק שברים, צריכים לדעת לבטא ולייצג בצורה נכונה ומדויקת את כל מרכיבי התרגיל, בכל דרך שיבחרו ולקשר בין המרכיבים האלו."

"לפתור תרגיל חילוק באמצעות כפל בהופכי, זה טכני ואני

לא ממש התעניינתי בשאלה: למה זה נכון. אין לי ספק שכמורה אני חייבת להבין לעומק את המשמעות של מה שאני עושה על מנת ללמד מעבר להנחיות לפעולה. היום אני ממש יכולה לראות את תמונת התרגיל לפני הפתרון..."

"המורים צריכים להיות מודעים... עליהם להציג גם את המחלק וגם את המחולק ביחס ליחידה השלמה שאותה הם קבעו, שלם הייחוס, ולמנות את מספר הפעמים בהם נכנסת יחידת הייחוס (המחלק) במחולק, מה החלק הנותר, ואיזה חלק הוא מהווה מתוך יחידת הייחוס ולדעת לרשום את המנה בצורה מתמטית נכונה."

"למדתי להתבונן בתרגיל ולהבין את המשמעות של כל מספר בתרגיל. זו הפעם הראשונה שנתקלתי במונחים, כמו שלם הייחוס או יחידת הייחוס... עכשיו באמצעות האקסל, אני מרגישה שבאמת הבנתי את התהליך."

"שימוש בשפה מתמטית לאורך הוראת הנושא הוא עניין מאוד חשוב שעל המורה לשים לב אליו. בשילובו של האקסל בהוראת הנושא לא יהיה הרבה ערך מוסף, אם לא ישתמש המורה במושגים המתמטיים הנכונים והמדויקים לשם הוראה."

ציטוטים המתייחסים להתפתחות ידע תוכן פדגוגי

"מורים המלמדים את הנושא, צריכים להתחבר לדרכי הפתרון של התלמידים, הנכונות והפחות נכונות, להבין את המקור שלהן, ולנתח את הטעויות של התלמידים, במיוחד את טעויות החשיבה, לנסות להוביל את התלמידים להבנה מעמיקה."

"מורים צריכים לתכנן את הוראתם כך שהוראה זו תתחיל מהידע האינטואיטיבי שיש לתלמידים בנושא, תתנגש עם הקשיים האינטואיטיביים שיצוצו במהלך ההוראה, תטפל בקשיים אלה כראוי על מנת שיתרחש תהליך של למידה."

"הטיפול בטעויות תלמידים לשם הוראה נכונה ולשם התגברות על הטעויות, צריך להיות מלווה בשאלות מתאימות שתאפשר למורה להבין את מקור הטעות ולטפל בו כראוי."

"מעולם לא שמתי לב לשתי המשמעויות של החלק הנותר, פעם כשזו התשובה הנכונה, שמתארת חלק מהמחלק ופעם כשזה חלק מהשלם. לקח לי זמן להבין את זה, אז בטח שגם לתלמידים זה מורכב."

"הרבה פעמים אנו נתקלים במורים המלמדים את הנושא רק בעזרת טכניקת הכפל בהופכי, מבלי להסביר את המקור של הטכניקה ומבלי לאפשר לתלמידים לחקור את הנושא לעומק."

"בעבודתי זו נחשפתי למידת השפעת הוראת האלגוריתם על התלמיד, והתלות שהוא מפתח באלגוריתם זה. תלות זו היוותה מחסום ללמידה משמעותית בתחילת העבודה. לקח לי הרבה זמן עד שהצלחתי לגרום לתלמיד לא להשתמש באלגוריתם ולהציג דרך נוספת."

"היה מעניין לראות תלמיד שלא למד איך פותרים על ידי כפל בהופכי, מסוגל להתמודד עם המשימה תוך גיוס הבנה ויכולת להגיע לתשובה הגיונית. זה נתן לי אומץ להעז יותר ולא לחשוב שאם לא לימדתי, התלמידים לא יוכלו להתמודד."

"הכלי (האקסל), אפשר לתלמיד להציג את התרגיל באופן ויזואלי. הוא חייב היה להיות פעיל בבניית הייצוג. היה מדהים לראות את התלמיד מציג תרגילים, משתמש בשפה מתמטית נכונה, מסביר כל מהלך שהוא עושה ומסוגל גם להסביר איפה הוא מתקשה."

ציטוטים הנוגעים להתפתחות ידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי

"התהליך גרם לי להיות מודעת ליתרונות של הטכנולוגיה, ולראות איך אפשר לנצל יתרונות אלה. חשוב להכיר את החסרונות של הטכנולוגיה הזו על מנת לתעל את ההוראה שלנו ולתכנן אותה בהתאם. למשל, זה לוקח זמן רב, אז חשוב להיות ממוקדים."

"בעקבות ההתנסות שלי עם המשימה, התברר לי שאם אני רוצה לנסות דרך הוראה מסוימת, אני צריכה להבין אותה וללמוד אותה לעומק. כשהתחלתי בהעברת הפעילות, התכוונתי לקרוא המשימה ייצגית בעצמי תרגילים באקסל על מנת להכיר את הפעילות, להתחבר אליה, ולדעת לשאול את השאלות הנכונות. במהלך ההעברה של המשימות, היו מקומות שבהם לא הרגשתי ביטחון במה שאני מעבירה ואת זה לא אהבתי במיוחד."

"שילוב האקסל בהוראת חילוק שברים, מאפשר לי כמורה להמחיש את המשמעות של פעולת החילוק, להציג מושגים מתמטיים בצורה ברורה, דבר שיכול לתרום לפיתוח של הבנה מעמיקה. הרגשתי אחרי התהליך עם התלמיד שלי, שהוא ממש רואה את המנה."

"זה היה עבורי חדש ומלמד... לימדתי מספר פעמים את הנושא... תמיד לפי הספר ולפעמים שילבתי כל מיני יישומים... הפעם הרגשתי שאני עברתי תהליך, הייתי מעורבת וזה היה מעניין וחשוב."

סיכום ודין

מחקר זה התמקד בהתמודדות תלמידים בבית ספר יסודי עם בעיית חילוק שברים פשוטים ויכולתם לדון במשמעות החלק הנותר (Perlwitz, 2005), באמצעות דילמה שהוצגה לפנייהם טרם תהליך ההתערבות ולאחריה.

הצגנו דרך הוראה המאפשרת לתלמיד לבנות את תהליך החילוק

בשברים מתוך המחשה המתבססת על הגדרת שלם הייחוס ובניית המחלק והמחלק (יחידת הייחוס) לפי אותו שלם (שחברי ופלד, 2012; Lamon, 1994). בניית התרגיל נעשתה באקסל. יש לציין שמהות הפתרון באמצעות האקסל לא מכוונת להקניית אלגוריתם הכפל בהופכי, אלא לכלי שבאמצעותו אפשר להציג פתרון ויזואלי, להבין את משמעות המנה ובמיוחד את משמעות החלק הנותר, כשהמנה אינה מספר טבעי. אין במאמר זה משום המלצה להשתמש דווקא בתוכנת האקסל, אלא ברעיון של הבניית התהליך על ידי התלמיד בכלי דינמי. לדוגמה תרגיל 6 (ראו טבלה 4 לעיל) מראה כיצד התלמיד פועל ומסביר כל שלב בתהליך החילוק. נראה שהייצוג הוויזואלי מאפשר לו להבין את הטעות שלו. התשובה האינטואיטיבית מכוונת אותו לראות במשבצת שנותרה $\frac{1}{8}$, אבל התלמיד בוחן את תשובתו (החלק הנותר מתוך מה?) ומתקן את הטעות במתן הסבר ש"החלק הנותר הוא 1 מתוך 3". יש מקום לשער שתהייה זו לא הייתה מתעוררת אם היה פותר באמצעות האלגוריתם של כפל בהופכי, שהיה מוביל אותו לתשובה המדויקת. הייצוג החזותי של הפתרון שחרר אצלו את התלות באלגוריתם ופינה מקום להערכה ביקורתית. נראה ששלב ההוראה חשוב מאוד, שכן הייתה תמיכה ביכולתו של התלמיד להציג את נתוני התרגיל ולהסביר את כל שלבי הפתרון, מתוך שימת דגש בשימוש במושגים הנוגעים להכלה

ולהבחנה במשמעות החלק הנותר.

בתרגיל 7 (ראו טבלה 5), התלמיד "מתבונן" במחלק ובמחולק, וקובע את שלם הייחוס. מבחינה מתמטית מתבצעת כאן בדרך אינטואיטיבית הרחבה של המחלק והמחלק לשברים בעלי מכנה זהה $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8}$. התלמיד בודק כמה פעמים 4 "נכנס" ב-6. בהמשך נראה שקורה דבר נוסף, התלמיד "מסתכל" על תרגיל 8 וקובע את המנה, כשהוא מסביר את קביעתו ואף מסוגל להקיש

ממנת התרגיל $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, שמנת התרגיל הבא $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$ תהיה גדולה פי 2 מקודמתה. נראה שבמהלך הפעילות פיתח התלמיד יכולת ליישם עקרונות מתמטיים מוכרים ולהרגיש די בטוח בתשובתו.

לאחר תהליך הלמידה של התלמיד, חזרה כל מורה לדילמת החלק הנותר כדי לבחון תוצאות ההתנסות של התלמיד על יכולתו להתבונן ולהגיב בביקורתיות על פתרונה של קריסטין (ראו איור 2). נלמד מתגובותיהם על שינוי ניכר בהבנתם את משמעות המנה. התהליך שחרר אותם מהתלות באלגוריתם, וכך בכך חיזק את יכולתם לבחון בביקורתיות תשובה שונה מזו שהגיעו אליה, בעת שהם מלווים קביעותיהם בהסברים ונימוקים. נראה שייצוג הפתרון באקסל צייד את התלמידים ביכולת להסביר נכונות או טעות בלי צורך בהדגמה של פתרון אלגוריתמי. הכלי שיחרר את התלמידים מהתלות באלגוריתם (Kamii & Dominick, 1998).

הם ידעו לציין שהחלק הנותר בבעיית הציפיות נוגע ליחידת הייחוס (1 מתוך 3) ואף להסביר את מקור הטעות של קריסטין כפי שהסבירה תלמידה א': "קריסטין אולי הסתכלה על שלם (הייחוס) שיש בו ארבעה חלקים, לכן טעתה...". או: "אולי בלבד בין יארד שלם לבין החלק מהציפית (התכוונה ל- $\frac{1}{4}$ יארד). יפה

היה לראות את הסברה של תלמידה ב, הנשען על ידע במספרים טבעיים כדי להסביר מדוע החלק הנותר הוא $\frac{1}{3}$ מתוך $\frac{1}{4}$. אחת התלמידות סיכמה את התהליך בהזכירה את הזמן הרב הנדרש לייצוג התרגיל באקסל, ועם זה היא ציינה את תרומת הייצוג להבנה: "לדעתי זה מצריך יותר מדי זמן... זה מאוד מעייף... אבל כדאי פעם אחת ללמוד דרך אקסל ואז כשמבינים ניתן לפתור דרך "תרגיל פשוט" (באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי)."

נקודת המוצא למחקר זה היא ראיית חשיבות בהבניית הידע וביצוע פעולות חשבוניות המושתתות על תובנה של התלמיד. המחקר מציע סביבה דינמית ממוחשבת שבה המורה והתלמיד יכולים לבנות בעצמם את תהליך הפתרון בדרך המובילה להבנה. התפיסה המנחה את המחקר היא שאיכות ההוראה היא פועל יוצא של ידע מורה: ידע תוכן מתמטי וידע פדגוגי (Shulman, 1987; Ball, 2010) ונוסף על אלה, ידע על אודות שילוב מושכל של כלים דינמיים ממוחשבים בהוראתו, כלומר ידע תוכן-פדגוגי-טכנולוגי (טבה וסלוצקי, 2015; Mishra & Koehler, 2006).

ל-8 מתוך 9 התלמידים שהשתתפו במחקר, היה ידע פורמלי על אודות חילוק שברים באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי, אך נלמד ממצאי המחקר שידע ביצועי זה אינו מעיד על הבנה. חסר זה

בהבנה בא לידי ביטוי כשהתבקשו לדון בסתירה בין הפתרון האלגוריתמי שהגיעו אליו לפתרון הוויזואלי (השגוי) שהוצג לפנייהם.

התלמידים למדו לייצג תרגילי חילוק שברים באקסל (כשהמחלק נתון כשבר פשוט), במשמעות של חילוק להכלה. דיווחי המורות ועבודות התלמידים מלמדים על התפתחות מהותית ביכולת התלמידים להניב הסברים בעלי משמעות על החלק הנותר לאחר הייצוג באקסל. הידע שלהם לא התמקד בקביעת נכונות הפתרון, אלא גם ביכולתם להבין את מקור הטעות.

מתוך ציטוטי המורות אפשר ללמוד על משמעות התהליך שעברו ועל תרומתו להתפתחות ידע התוכן המתמטי וידע התוכן הפדגוגי שלהן. יפה היה לראות את התמקדותה של אחת המורות בשני התפקידים של החלק הנותר ובהיבט הפדגוגי הנובע מכך:

מעולם לא שמתי לב לשתי המשמעויות של החלק הנותר, פעם כשזו התשובה הנכונה, שמתארת חלק מהמחלק ופעם כשזה חלק מהשלם. לקח לי זמן להבין את זה, אז בטח שגם לתלמידים זה מורכב.

קושי זה תואם את המתואר במחקרה של שיפטר (Schifter, 1998), על אודות התובנה של המורה שבמהלך הצגת הבעיה והדילמה בעקבותיה, נוכחה בכפל התפקידים של החלק הנותר ובצורך לדון במשמעות שתי התשובות שהתקבלו.

בדיון על ייצוג תרגיל החילוק באמצעות אקסל, הזכירו המורות את מקומן כמזמנות סביבה טכנולוגית שבה גם הן וגם התלמידים פעילים, ואת תרומת הכלי להבנת התהליך באמצעות המחשת הפתרון, שימוש במושגים מתמטיים ופיתוח יכולת של "ראיית" המנה.

מרפלקציות של המורות נלמדת חשיבותו של התהליך האישי בהתפתחות הידע הייחודי להוראה (Ball, 2010), הכולל מגוון ייצוגים לפתרון, כמו ייצוגים סימבוליים (כתיבת תרגילים) והבנת משמעות המנה מעבר ליכולת הצגת פתרון באמצעות אלגוריתם כפל בהופכי. המורות דנו בחשיבות השימוש בייצוגים ויזואליים (פתרון באמצעות כלים טכנולוגיים) ואף הבחינו בין יישומים שבהם התלמיד פועל במסגרת נתונה, לכלי האקסל שבו התלמיד "מייצר" את הפתרון ומביא לידי ביטוי הבנה באשר לתפקיד כל "שחקן" בתרגיל. שילובים אלה מחייבים התנסות של המורים בדרך להוראה המכוונת ללמידה משמעותית.

המחקר מלמד ששילוב כלים טכנולוגיים ובמקרה הספציפי – האקסל, בהוראת חילוק שברים, תרומתו בשני מישורים:

1. ברמת מורה – הכלי מאפשר להמחיש את המשמעות של פעולת החילוק ובתוך כך להבין הבנה עמוקה יותר את הרעיונות המתמטיים בבסיס הפעולה, כמו מקור קושי אפשרי לתלמידים. המורים הדגישו את הידע המתמטי, הידע הפדגוגי (Ball, 2010) וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי (טבח וסלוצקי, 2015; Mishra & Koehler, 2006), שהתפתח במהלך המחקר. התפתחות זו ניכרת בהבנה עמוקה יותר של מהות חילוק השברים, הבנה שאינה נסמכת על אלגוריתם בלבד, יכולת לצפות טעויות של תלמידים ויכולת להתמודד עם טעויות אלה. המורים ציינו שהחלטה על שילוב מחשב בהוראה ובלמידה, מחייבת במידה רבה את המורה לעבור תהליך של היכרות והתנסות עם הכלי הנבחר, בחינתו והבנת משמעות שילובו בהוראה. על המורים לחשוב על תהליך תיווך בעל משמעות ומתוך כך תרומתם המרבית להתפתחות ידע מתמטי מהותי בקרב תלמידיהם. המורים דיברו על יתרונות וחסרונות של שילוב הכלי (אקסל), בעצם היותו כלי מחייב מעורבות של התלמיד ומעודד שאילת שאלות והבנה של כל ייצוג.
2. ברמת התלמיד – הכלי מאפשר לתלמידים לתאר את תהליך פעולת

החילוק מתוך שימוש במושגים מדויקים על המחלק (יחידת הייחוס), המחלק ושלם הייחוס. לאחר העבודה באקסל, תלמידים השתמשו בשפה מתמטית נכונה, הסבירו כל שלב בדרך לפתרון ואף היו "פנויים" לשילוב תובנה מספרית ויישום עקרונות מתמטיים כדי לנמק או לזהות טעויות בפתרונותיהם. הייצוג הוויזואלי וההבנה שנדרשה מהם שחררו אותם מהתלות באלגוריתם וביססו הבנה עמוקה של מהות הפעולה (Kamii & Dominick, 1998). התלמידים היו מעורבים בתהליך הפתרון והיו מודעים לייצוג המחלק והמחלק לפי היחידה השלמה שקבעו אותה כ"שלם הייחוס". הם מנו את מספר הפעמים שבהן נכנס המחלק במחלק, הבינו את משמעות החלק הנותר המתקבל וידעו לרשום את המנה בדרך מתמטית נכונה. שיאו של התהליך ביכולתם של התלמידים לדון בדרך ביקורתית בפתרון שגוי לאחר הדילמה שהוצגה לפנייהם ולכוון למקור אפשרי לשגיאה.

תרומת המחקר

תרומתו בהשפעות של ידע מורה (ידע תוכן וידע פדגוגי) וידע תוכן פדגוגי-טכנולוגי על הבניית ידע של תלמידים במהלך ייצוג דינמי של תרגילים באקסל. ידע המורה הוא בסיס להוראה המכוונת להבנת משמעות הפעולה והשפעתו על עומק ההבנה של התלמיד ועל יכולתו להסביר ולנמק את תשובותיו. מחקר זה רואה חשיבות בבחירה בכלים דינמיים פתוחים שמאפשרים ייצוג מושגים ופעולות מתמטיות ומגביר את המעורבות של התלמיד, במקרה שלנו בנושא חילוק שברים פשוטים. שילוב ייצוג ויזואלי באמצעות אקסל של תהליך הפתרון מעמיק את ההבנה של התלמיד ואף מאפשר לתלמיד לבחון תהליכי פתרון בדרך ביקורתית.

מגבלות המחקר

אוכלוסיית התלמידים במחקר זה קטנה. 9 תלמידים, כאשר 8 מהם בשלב המחקר שלטו במיומנות הפתרון האלגוריתמי. היה אפשר ללמוד שידע קודם זה לא הספיק כדי להעיד על הבנה של משמעות הפתרון.

חסרונה של קבוצת ביקורת שלמדה באותו זמן את הנושא, מתוך שימת דגש בתהליכים המבוססים על עקרונות הלמידה המשמעותית, מקשה על ייחוס השינויים בידע התלמידים לייצוג ויזואלי באמצעות האקסל וראוי שייבחן בהיקף גדול יותר, אולי אף באמצעות כלים טכנולוגיים אחרים.

רשימת מקורות

טבח, מ' וסלוצקי, ג' (2015). חקר מורים שעשו הסבה ממקצוע בתחום ההייטק להוראת מתמטיקה בסביבה ממוחשבת. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' בלאו, א' כספי, נ' גרי, י' קלמן וז' זילבר-ורוד (עורכים), **ספר כנס צ'ייס למחקרי טכנולוגיות למידה: האדם הלימוד בעידן הטכנולוגי** (עמ' 136-146). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

משרד החינוך התרבות והספורט. (2006). **תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: המחבר. אוזר מתוך http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf

ענבל-שמיר, ת' וקלי, י' (2007). הוראה מתקשבת – דרך חיים או מעמסה למורה? אפיון הקצוות של טווח העשייה המתקשבת של מורים. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' כספי וי' יאיר (עורכים), **ספר כנס צ'ייס למחקרי טכנולוגיות למידה: האדם הלימוד בעידן הטכנולוגי** (עמ' 174-181). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

- Kent, L. B., Empson, S. B., & Nielsen, L. (2015). The richness of children's fraction strategies. *Teaching children mathematics*, 22(2), 84-90.
- Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany, NY: State University of New York Press.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. doi:10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x
- Offir, B. (2010). *The process of change in education: Moving from descriptive to prescriptive research*. Hauppauge N.Y.: Nova Science Publishers.
- Perlwitz, M. D. (2005). Dividing Fractions: Reconciling Self-Generated Solutions with Algorithmic Answers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(6), 278-283.
- Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2015). How many in one? *Mathematics in the Middle School*, 20(5), 308-312.
- Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 55-87. doi:10.1023/A:1009911200478
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching In the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25. doi:10.2307/749817
- קלמר-שורץ, ע' ולב-זמיר, ח' (2018). ידע מורים וביטוי בהוראת חילוק שברים פשוטים. **מספר חזק** 29, 2000, 27-8.
- שחברי, ג"ע ופלד, א' (2012). מודלינג וקונפליקט קוגניטיבי כדרך לשיפור תפיסת שלם הייחוס בשברים. **מספר חזק** 21, 2000, 30-23.
- Ashlock, R. B. (1994). *Error patterns in computation* (6th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Ball, D. L. (2010). *Knowing mathematics well enough to teach it: From teachers' knowledge to knowledge for teaching*. Paper Presented at the Institute for Social Research Colloquium, Ann Arbor, MI.
- Escuder, A., & Furner, J. M. (2011). *The impact of geogebra in math teachers' professional development*. Paper presented at the International Conference on Technology in Collegiate Mathematics Annual Conference, Denver, Colorado.
- Escuder, A., & Furner, J. M. (2012). The Impact of GeoGebra in Math Teachers' Professional Development. Retrieved from Hohenwarter, J., & Hohenwarter, M. (2012). *Introduction to GeoGebra version 4.2*.
- Ferrucci, B. J., Yeap, B.-H., & Carter, J. A. (2003). A modeling approach for enhancing problem solving in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(9), 470-475.
- Gravemeijer, K., & Galen, F. V. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In W. G. Martin, J. Kilpatrick, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 114-122). Reston, VA: NCTM.
- Grabber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *The Arithmetic Teacher*, 40(7), 408-411.
- Hughes, J. E. (2005). The role of teacher knowledge and learning experiences in forming technology-integrated pedagogy. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13(2), 277-302.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.



המימד	אפיון גבוה (3)	אפיון בינוני (2)	אפיון נמוך (1)
ניצול הערך הטכנולוגי	הטכנולוגיה הכרחית בביצוע הפעילות. יש הפנייה למגוון אתרים עשירים, עדכניים, או כאלה המשלבים טקסט עם מרכיבים ויזואליים המסיעים להבנת התכנים לדוגמא: הלומד משתמש בהדמיות באופן אקטיבי, מבצע אינטראקציה עם התכנים, או שותף פעיל לדיאלוג בפורום.	המרכיב הטכנולוגי עשוי ליצור עניין וחידוש, אך ללא שינוי במהות הלמידה ולכן ניתן להמרה בפעילות לימודית שאינה מתוקשבת. העניין יכול להיות מושג על ידי: הפנייה לקישורים בודדים, או שימוש בפורום כמקום להבעת עמדה אך ללא דיון.	השימוש בתקשוב הוא טכני ואינו משפיע על מהות הלמידה. תלמידים מורידים דפי עבודה מסורתיים ממוחשבים, לעיתים, ממלאים ומחזירים למורה ישירות או לפורום. הדגש על המימד הארגוני וניהולי. אין קישורים למקורות ברשת.
רמת חשיבה נדרשת	הפעילות מעודדת חשיבה, שאילת שאלות, נקיטת עמדה או הסקת מסקנות, מעודדת יצירתיות, יזמות והבניית ידע בדרך של ניתוח, יישום, אנליזה, סינתזה, רפלקציה והערכה. (בלום – רמה 3-6).	הפעילות מעודדת הבנה תוך שימוש במספר מוגבל של מיומנויות חשיבה: מתן דוגמאות, תיאור, סיכום או הסבר כללי למידע שנאסף ברשת (בלום – רמה 2).	שינון ידע. התמקדות בשאלות ותשובות סטנדרטיות. מכוונת לביצוע משימות איסוף מידע פשוטות (בלום – רמה 1).
מידת השיתופיות	יש שימוש במרכיבים תיקשוביים התומכים בעבודה שיתופית כחלק בלתי נפרד ומהותי בתהליך הלמידה. הלומדים משמשים מקור מידע לעמיתיהם לדוגמא: לומדים דנים בנושאים משותפים; בונים תוצר משותף; מתייעצים; מעריכים זה את זה או מתייחסים לתוצרי עמיתים.	יש הנחיות מפורשות לכך שתלמידים יעבדו בכיתה בזוגות או בקבוצות, אך ללא תמיכה טכנולוגית באינטראקציה בין עמיתים. (תלמידים עובדים ביחד בכיתה ומגישים עבודה למורה בפורום). אין אינטראקציה בין קבוצות.	אין התייחסות ללמידה שיתופית. מתוך ההנחות עולה כי הלמידה היא אישית. לעיתים הלומדים מנועים מעבודה שיתופית מתוך העיקרון שלמידה יש לבצע רק באופן עצמאי. לעיתים התשובות מועלות לפורום, אך לשם עיון המורה בלבד.
קרוב התכנים לעולמו של הלומד	קיים קישור לעולמו התרבותי של הלומד ולידע הקודם שלו. אפשר לעשות זאת על ידי: א) בחירת הקשר שעשוי לעניין את הלומדים, ב) עיסוק בפתרון בעיית אמת. ג) קיום דיונים אקטואליים ורלוונטיים ללומדים.	יש ניסיון לקשר את התכנים לעולמו של הלומד, אולם הקישור אינו משמעותי. למשל הבעת אפשרות להביעה דיעה אישית, או יצירת סיפור מסגרת מלאכותי שאיננו קשור ישירות למהות ולאופי הפעילות.	אין ניסיון לקשר ולקרב את התכנים לעולמו של הלומד. מושם דגש על חומר שהלומד צריך לדעת או לזכור.
הכוונה לתוצרים עשירים	קיימות הנחיות מפורטות ומובנות למשימה, העוזרות ללומד בבניית התוצר, ומאפשרות למורה לשמש כמנחה. התוצר מגוון, יצירתי או מקורי. מאפשר ניצול כישורים אישיים וביטוי עצמי.	ההנחיות מאפשרות תוצר בעל פתיחות מסוימת וביטוי אישי, אולם הן כלליות, ואינן תומכות או מבנות את תהליך הלמידה. למשל: כתוב סיפור בעקבות...; בנה ת.ז. של... מה הייתי עושה אילו...; דעתי על...	ההנחיות מכוונות לתוצר אחיד, סגור ומוגדר על ידי המורה (המורה במרכז הלמידה). לא נדרשת יצירתיות לביצוע התוצר. למשל: שאלות ותשובות סטנדרטיות, מיון נתונים בטבלה...
הערכה שזורה	הערכה ניתנת ע"י המורה או התלמידים העמיתים על פי קריטריונים ברורים נתונים מראש. ההערכה מלווה את תהליך הלמידה ומשכיחה אותו.	קיימת התייחסות להערכת התוצרים, אך ללא הצגת קריטריונים ברורים. באתר או בכיתה, ללא ביצוע הערכה מעצבת.	אין התייחסות לאופן שבו הלומד מוערך. או שההערכה מסכמת (נשלחת למורה לבדיקה ומתן ציון) ואינה מהווה חלק מעצב בתהליך הלמידה.

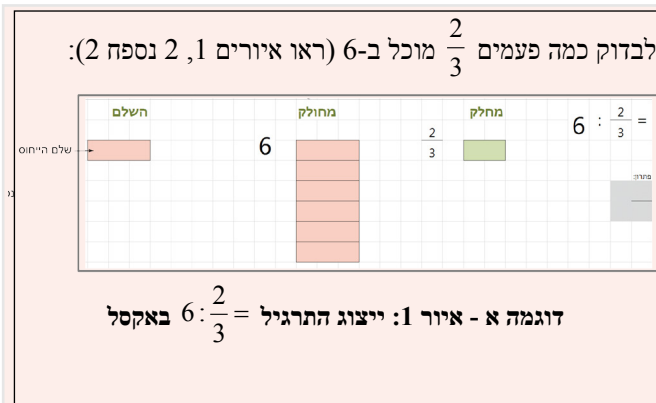
נספח 2 - התנסות המורות במכללה בשלב המקדים

דוגמאות לשלושה תרגילים מההתנסות של המורות לבניית ייצוגים לתרגילי חילוק שברים באקסל.

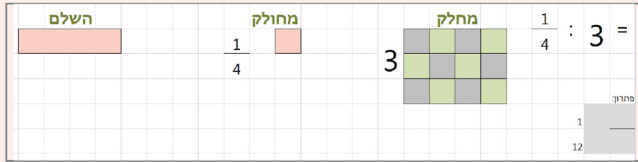
א. חילוק שלם בשבר; ב. חילוק שבר בשלם; ג. חילוק שבר בשבר.

דוגמה א - תרגיל חילוק שלם בשבר:

$6 : \frac{2}{3}$ שלם הייחוס בנוי מ-3 משבצות בגיליון האקסל, המחלק ממחיש $\frac{2}{3}$ משלם הייחוס (על ידי 2 משבצות מתוך 3), והמחולק מהווה 6 פעמים שלם הייחוס (18 משבצות). לפתרון התרגיל יש

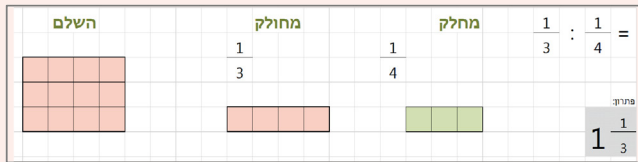


המחשית הפתרון: המחלק מוכל 9 פעמים במחלק.

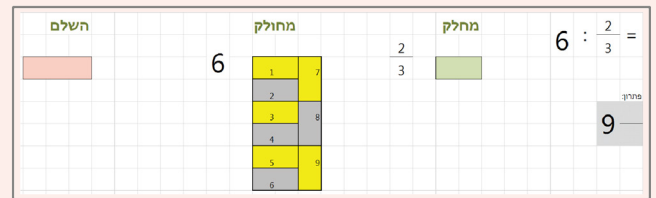


דוגמה ב - איור 2: המחשית הפתרון, $\frac{1}{12}$ של המחלק מוכל במחלק
דוגמה ג - תרגיל חילוק שבר בשבר: $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} =$

כדי להצליח לייצג את המחלק ואת המחלק בעזרת משבצות שלמות שלם הייחוס ייבנה מ-12 משבצות (כפולה משותפת של 4 ושל 3), המחלק מהווה $\frac{1}{4}$ משלם הייחוס, והמחלק הוא $\frac{1}{3}$ משלם הייחוס.



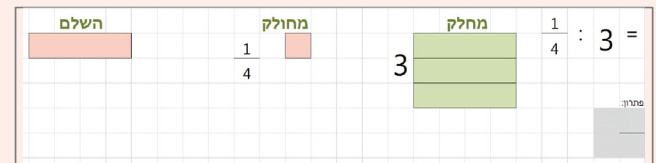
דוגמה ג - איור 1: המחשית הפתרון, המחלק מוכל במחלק פעם אחת ועוד שליש ממנו (מהמחלק).



דוגמה א - איור 2: המחשית הפתרון של התרגיל $6 : \frac{2}{3} =$ באקסל

דוגמה ב - תרגיל חילוק שבר בשלם: $\frac{1}{4} : 3 =$

בדוגמה זו, שלם הייחוס בנוי מ 4 משבצות, המחלק מהווה 3 פעמים שלם הייחוס, והמחלק הוא $\frac{1}{4}$ מתוך שלם הייחוס. לפתרון התרגיל יש לבדוק איזה חלק של ה-3 מוכל ב- $\frac{1}{4}$:



דוגמה ב - איור 1: ייצוג התרגיל $\frac{1}{4} : 3$ באקסל

נספח 3 - שאלות לתלמידים

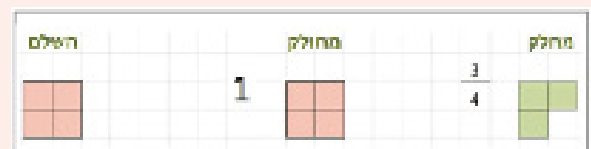
חילוק שברים - בניית מודל דינמי

שיעור 1

1. בנו את התרגילים הבאים באקסל.
2. תארו בכתב את תהליך הפתרון.

לפניכם שתי דוגמאות להמחשה:

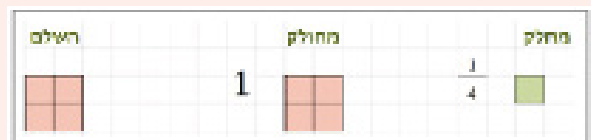
דוגמה 1



- חילקנו 4 רבעים ב $\frac{1}{4}$

- בדקנו כמה פעמים $\frac{1}{4}$ מוכל בשלם

דוגמה 2



- חילקנו 4 רבעים ב- $\frac{3}{4}$

- בדקנו כמה פעמים $\frac{3}{4}$ מוכל בשלם

פתרו:

א. פתרו את התרגילים הבאים תוך בניית באקסל וכתובת התרגילים ב"שפה" של המכנים המופיעים בכל תרגיל.

ב. תארו בכתב את הפתרון לאחר הבנייה באקסל.

$$2 : \frac{3}{4} =$$

$$5 : \frac{3}{4} =$$

$$10 : \frac{3}{4} =$$

$$1 : \frac{3}{4} =$$

$$1 : \frac{3}{8} =$$

$$2 : \frac{3}{8} =$$

$$5 : \frac{3}{8} =$$

$$10 : \frac{3}{8} =$$

שיעור 2

א. פתרו את התרגילים הבאים תוך בניית באקסל וכתובת התרגילים ב"שפה" של המכנים המופיעים בכל תרגיל.

ב. תארו בכתב את הפתרון לאחר הבנייה באקסל.

$$\frac{1}{4} : 2 =$$

$$\frac{1}{4} : 3 =$$

$$\frac{3}{4} : 2 =$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{3} =$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{5} =$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$$