

היבטים גאומטריים באתרים יהודיים: חקירה באמצעות סביבה גאומטרית אינטראקטיבית*

שרה הרשקוביץ
נח דנא-פיקארד



פרופ' שרה הרשקוביץ

מרצה בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
והמרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח)
עוסקת בפיתוח מחקר והכשרת מורים למתמטיקה,
וחוקרת בנושאים הקשורים לפתרון בעיות ולקשר שבין
מתמטיקה, תרבות ואומנות.

תקציר

בעבודה זו נציג חקירה גאומטרית של אלמנט באתר יהודי – בית הכנסת הגדול דוהאני (Dohany) בבודפשט, הונגריה. סטודנטים לתואר ראשון מהמגזר היהודי החרדי לומדים קורס בגאומטריה אנליטית כחלק מלימודיהם האקדמיים. בקורס שהם לומדים בשילוב סביבה טכנולוגית עם גאומטריה דינמית, הם התבקשו לשרטט אלמנט גאומטרי מתוך האתר היהודי הנזכר לעיל, המוכר להם מתוך תרבותם הכללית. מטרת הפעילות הייתה לקשר בין לימודי המתמטיקה למציאות שהם מכירים ובכך לעורר בהם עניין בלימודי המתמטיקה.

מילות מפתח: סימטריה; גאומטריה אנליטית; טרנספורמציות במישור; שיקוף; סביבה גאומטרית דינמית.

מבוא

למושג "אומנות יהודית" יכולות להיות משמעויות רבות. המשמעות יכולה להיות מעשה ידי אומן יהודי, או אומנות הנשענת על אלמנטים מהתרבות היהודית. בדוגמה הראשונה כל סוג של אומנות ייתכן, והוא יכול להיות מושפע מהתרבות המקומית שבה האומן נמצא. יש דוגמאות רבות של אומנים יהודים שיצרו אלמנטים מכל מיני תרבויות. למשל, שאגאל הוא אחד מהם. אנשים יכולים להשתמש במילים "אומנות יהודית" לכל חפץ אומנותי שיוצר אומן ממוצא יהודי. אלפרד ורנר (Werner, 1962) מציין שעד זמן מסוים במאה העשרים, שום חוקר לא היה קורא למשהו אחר אומנות יהודית.

בדוגמה השנייה רוב החפצים ממלאים צורך דתי, כגון קופסה למגילת אסתר שנכתבה בכתב יד מיוחד (איור 1א), קישוטים לספר תורה, למשל רימון או תפוח לספר תורה (איור 1ב), חנוכייה (איור 1ג) וחפצים רבים אחרים. אחת התכונות של חפצים אלה היא הסימטריה.

* המאמר תורגם לעברית מתוך: Dana-Picard, Th., & Herskovitz, S. (2019). Geometrical features of a Jewish monument: Study with a DGS. *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(1-2), 60-71. doi:10.1080/17513472.2018.1552067



פרופ' נח דנא-פיקארד

פרופ' חבר למתמטיקה במרכז אקדמי לב וראש הקתדרה לחינוך, מתמטיקה ויהדות. בעבר הוא היה נשיא המרכז. יש לו שני דוקטורטים, אחד מצרפת והשני מאוניברסיטת בר-אילן. במשך שנים הוא חוקר במתמטיקה ובחינוך מתמטי, במיוחד בסביבה עתירת טכנולוגיה. לפני מספר שנים הוא נכנס לפרויקט של STEAM Education עם קבוצה בין-לאומית. במסגרת זו הוא נתן הרצאות מרובות במקומות שונים בעולם ובכנסים בינלאומיים. הדבר קשור גם לעבודתו בתורה ומדע כמסגרת הקתדרה.

האומנות. היבטים אלו היו נחוצים לו עבדו לפי הקווים המנחים של סקין (Sequin, 2017). בעבודתו זו, באוכלוסיית הסטודנטים שלנו, אלו הם דברים ברורים. המטרה העיקרית בעבודה זו היא הבנייה המתמטית של חפצים אלה כדי להתמקד בניתוח וביצירה המתמטית.

העבודה שעשינו עם התלמידים מבוססת על מחקרו של שיראלי (Schiralli, 2007) על ההקבלה בין תפקיד הדפוסים במתמטיקה ובאומנות (שם, עמ' 111). הוא מציין שגם המתמטיקאי וגם האומן עוסקים בדפוסים כחוויה, הם מנתחים דפוסים, מייצגים דפוסים, ויוצרים דגמים חדשים. הם מדמיינים אותם במגוון היכולות שלהם, מחברים את היכולות האלה ויוצרים צורות גדולות ומורכבות יותר. בפרק II אנו מראים כיצד סטודנטים לתואר ראשון יכולים ליצור דגמים אומנותיים בעזרת כלים מתמטיים. הפעילות שאנו מתארים במאמר זה התקיימה בקורס בגאומטריה אנליטית בסביבה עשירה בטכנולוגיה. השתמשנו במערכת של גאומטריה דינמית – Dynamical Geometry System – DGS בתוכנה שנקראת GeoGebra. התוכנה הייתה זמינה בכיתה והתלמידים התקינו אותה במחשבים האישיים שלהם.

שילוב הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה ובלמידה מביא בחשבון את המטרות העיקריות של עבודה מתמטית, כמו הבנה מושגית, תכנון פרודוקטיבי, שימוש בייצוגים, בפתרון בעיות ומציאת קשרים בין תחומים למיניהם (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Washburn & Crowe, 1988). נוסף על כך, למידה בשימוש בטכנולוגיה מזמנת יכולות אינטראקטיביות חדשות והזדמנויות פדגוגיות (Pierce & Stacey, 2010). התלמיד יכול לחקור רעיונות מתמטיים באופן דינמי ועל פי הביצועים שלו לקבל משוב ענייני לעבודה שלו, הוא יכול להעלות השערות, לבנות פתרונות ולבדוק אם קיבל את התוצאות הרצויות, כפי ששוורץ (Schwartz, 1989) מכנה זאת: השימוש בטכנולוגיה מזמן מעין "מראה אינטלקטואלי".

הרוזטה בבית הכנסת הגדול ברחוב דוהאני בבודפשט

הפעילות המתמטית

בית הכנסת דוהאני בבודפשט הוא בית הכנסת הגדול ביותר באירופה. במבנה שלו אפשר לזהות הרבה רעיונות מתמטיים, מקצתם בעלי אופי גאומטרי, האחרים קשורים לרעיונות בתורת המספרים, כגון מספרי פיבונאצ'י ויחס הזהב (ראו Dana-Picard & Hershkovitz, 2018; Koshy, 2001).

במאמר זה ננתח תכונות גאומטריות של אחד האלמנטים בבית הכנסת. אנו מתכוונים לרוזטה, כלומר החלון האומנותי העגול והמעוצב עם ויטרז'ים מעל הכניסה הראשית של הבניין. מבחינה אסתטית, היופי של הויטרז'ים נראה מבפנים כאשר אור יום מאיר מבחוץ. בעבודת הסטודנטים עסקנו רק בגאומטריה של המרכיבים המגוונים של הרוזטה. החלון האומנותי מוצג באיור 2 להלן.

ביצירה זו אפשר למצוא היבטים מתמטיים גם במסגרת שסביב לחלון. היא מופיעה בחזית הראשית של המבנה ובמקומות אחרים בבניין. נרחיב על התכונות הגאומטריות שלהם בפרק להלן.



(ג)



(ב)



(א)

איור 1: חפצים יהודיים מסורתיים

נבחן את התכונות הגאומטריות של החפצים המוצגים:

בתמונה א מוצגת קופסה של מגילה בצורת גליל (המכסה שמעוצב ככתר, מציג סימטריה סיבובית) בתמונה ב מוצג קישוט לספר תורה שבו שבעה עלים קבועים סביב גליל מרכזי, זו סימטריה סיבובית. בתמונה ג מוצגת חנוכייה שבה נוכל לראות סימטריה שיקופית. הספל הקטן הנשלף באמצע החנוכייה "שובר" את הנוף הסימטרי.

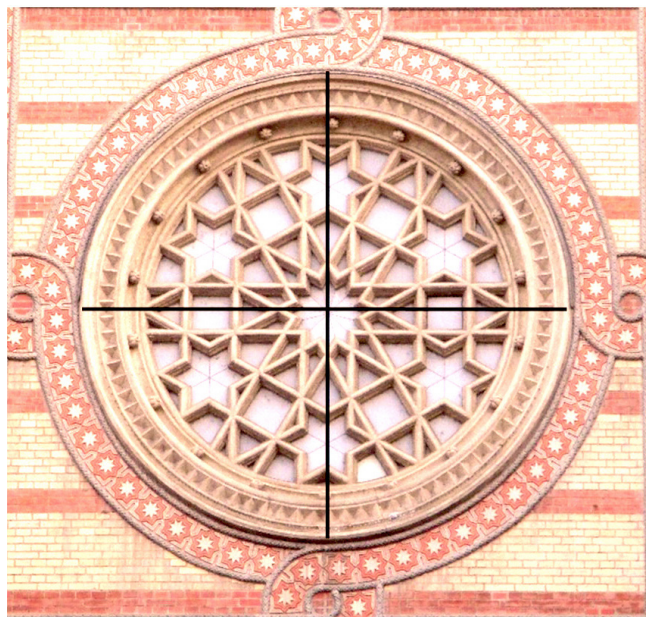
כותבי מאמר זה מלמדים במוסדות להשכלה גבוהה, ולמוסדות אלה בחמש השנים האחרונות מגיעים סטודנטים מהאוכלוסייה החרדית. רוב הבנים באוכלוסייה זו לא למדו מתמטיקה מלבד חישובים בארבע פעולות חשבון. בשנים הראשונות ללימודיהם הם עסקו בעיקר בלימודי יהדות מסורתיים; אצל הבנות הצעירות המצב אחר. במאמר זה אנו מתמקדים בלימודי המתמטיקה של הבנים.

בנים צעירים (או לא כל כך צעירים) רוצים ללמוד באקדמיה לקראת תארים אקדמיים. בשל מעט לימודי המתמטיקה שלמדו במסגרות החינוכיות, הם צריכים להשלים את הפערים שצברו. לפיכך לימודיהם מתחילים משנת השלמות (מכינה) במתמטיקה ובדיסציפלינות בסיסיות אחרות, ורק לאחר שנה זו והצלחתם במבחן המסכם, הם יכולים להתקבל ללימודים אקדמיים סדירים. כמובן, בתנאי שהם ממלאים את תנאי הקבלה הנדרשים. במהלך שנת מכינה זו קצב הלמידה צריך להיות אינטנסיבי למדי, ולכן נפתחו בארץ מסגרות לימוד מיוחדות בעבורם, בדרך כלל במוסדות קלסיים להשכלה גבוהה, מתוך התחשבות בצרכים הספציפיים של אוכלוסיית הסטודנטים החדשים.

אחד האתגרים החשובים ביותר של מורי אוכלוסיית סטודנטים אלה, הוא למצוא את הדרך "להבר" את התלמידים לחומר שיש ללמוד, כדי שלא יפסיקו את לימודיהם בשל חוסר מוטיבציה. אחד הרעיונות המרכזיים בהוראתם של תלמידים חרדים אלה הוא כמתואר בתוך מאמרם של דנא-פיקארד והרשקוביץ (Dana-Picard & Hershkovitz, 2018), להשתמש בחפצים ובבניינים יהודיים מסורתיים, שהם חלק מחיי היום-יום של התלמידים, כבסיס לעבודה מתמטית. נושא זה, המערב את התרבות הכללית של האוכלוסייה הלומדת, נחקר בידי החוקר הברזילאי ד'אמברוזיו (D'Ambrosio, 1985). הוא טבע שם לתחום המחקר הזה וקרא לו אתנומתמטיקה (D'Ambrosio, 1985). לא מדובר בנושא אתני במובן האנתרופולוגי אלא נושא בתרבות.

הקשר בין מתמטיקה לאסתטיקה מופיע בעבודות רבות כמו למשל בעבודתו של בורוויין (Borwein, 2007). הוא עסק ביופי המשפטים והתאוריות ובאלגנטיות של המשפטים וההוכחות, ועסק לעומק בדבר שהוא מכנה "האסתטיקה של המתמטיקה" כמעצבת את החוויה המתמטית. ברצוננו להדגיש כי היבט זה אינו מרכזי בעבודתנו זו. אין צורך למשוך את תשומת ליבם של התלמידים לאסתטיקה של יצירות האומנות שהם רואים, ולא לדון במוצאן היהודי של יצירות

אפשר גם לחלק את השרטוט לארבעה רבעים בקווים המודגשים באיור 4. הם קובעים שתי סימטריות שיקופיות, ומראים גם שלצורה יש סימטרייה סיבובית נוספת. אפשר לצייר רבע מהציור, ואז להשתמש בסיבוב סביב המרכז בזווית ישרה.



איור 4: ארבעה רבעים סימטריים

מההיבטים האחרונים אפשר לראות שאפשר להשתמש בטרנספורמציה סיבובית פעם או פעמיים, ולהשלים את העבודה באמצעות סימטרייה שיקופית.

חשוב לשים לב שהתמונה צולמה מהרחוב ולא במאונך לחלון, ולכן יש בתמונה עיוות הנובע מבעיה של פרספקטיבה. מעבודת הסטודנטים עלה שלא הייתה בעיה לעסוק בצורה בדרך נכונה, למרות בעיית הפרספקטיבה. עם זה כדי לבצע עבודה מתמטית מדויקת, סיפקנו לתלמידים תמונה מתוקנת ומדויקת כרקע לעבודה עם הסביבה הטכנולוגית שבה עבדנו – GeoGebra. הסטודנטים היו חופשיים להחליט אם להשתמש בתמונה המתוקנת או לא. כמה מהם השתמשו בתמונה ספציפית כדי לקבל "תמונה נכונה" כבסיס לעבודה שלהם.

תיאור עבודת הסטודנטים

המשימה: להשתמש בתוכנת GeoGebra ובכלים המתמטיים שנלמדו בקורס בגאומטריה אנליטית, כדי לבנות (לצייר) מחדש את החלון. התוצר המבוקש של עבודת הסטודנטים היה להגיש שני רכיבים: (א) קובץ GeoGebra עם התמונה של החלון שיצרו (בפועל; ב). מסמך מילולי שבו תיאור של החישובים המתמטיים. ביקשנו מהתלמידים לכתוב את כל השיקולים שהנחו אותם בעבודתם (לפרט גם שיקולים שגרמו להם לשנות את דרך העבודה).

בשלב זה אנו מתארים את העבודה שביצעו שלושה זוגות סטודנטים בדרכים מגוונות. בקורס השתתפו 20 סטודנטים מהמגזר החרדי בני 25 עד 45, רובם עם רקע אלמנטרי ביותר בלימודי מתמטיקה, טרם הגיעם ללימודים במוסד להשכלה גבוהה. נסמן את הזוגות באותיות A, B, C.

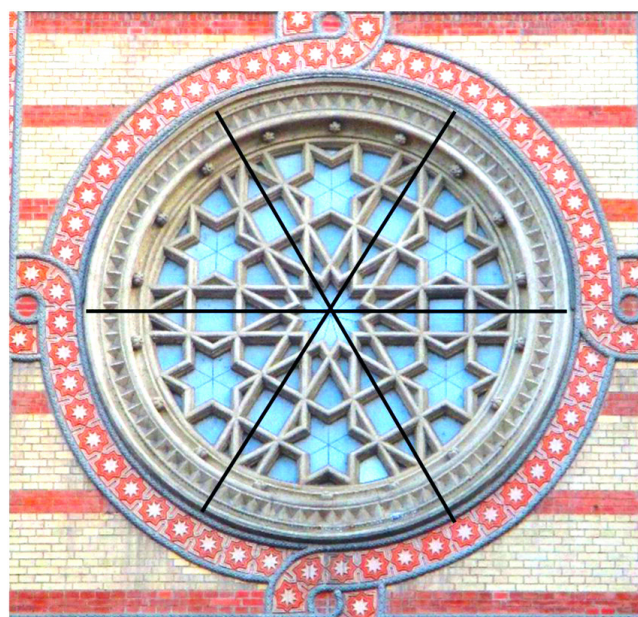
זוג A – בנייה נקודתית: זוג סטודנטים אלה השתמשו בתמונה שניתנה כרקע, הם סימנו נקודות שחשבו שהן החשובות ביותר לקבלת תמונה כמו באיור 5.



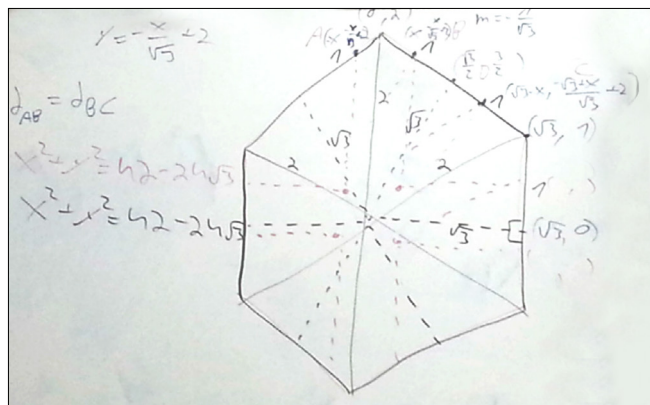
איור 2: הרוזטה - החלון האומנותי

התבוננות ראשונה ברוזטה מגלה את המאפיינים האלה:

- הרוזטה מתקבלת מ-1/6 שלה וטרנספורמציות סיבוב על המרכז בזווית של 60 מעלות.
- הקוטר המאונך של הרוזטה הוא ציר סימטרייה של החלון, כנזכר לעיל בקוטר מאונך וגם באחד מהקטרים המודגשים באיור 3.
- במרכז החלון יש משושה משוכלל שמרכזו הוא מרכז החלון.
- יש שישה זוגות של קווים מקבילים.
- אפשר לזהות צורות גאומטריות, כמו ריבועים, מעוינים, מגיני דוד וכדומה. כולם מוגדרים באמצעות זוגות של קווים מקבילים.
- בעזרת שילוב של צורות והיבטים שנצפו לעיל, אפשר לזהות אלמנטים המופיעים בקבוצות של 12.
- למעשה הציור מציג סימטרייה סיבובית: אפשר לבנות (לצייר) שישית מהתמונה בלבד, ולאחר מכן להשתמש בדרך איטרטיבית בטרנספורמציות סיבוב בזווית של 60 מעלות סביב המרכז. נדגים את זה באיור 3 באמצעות שלושת הקווים המודגשים.



איור 3: שישה חלקים סימטריים

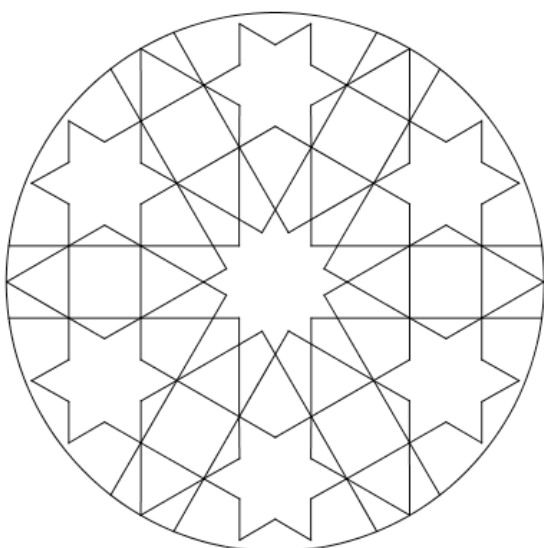


איור 7: רישום על הלוח במהלך הסברים בכיתה

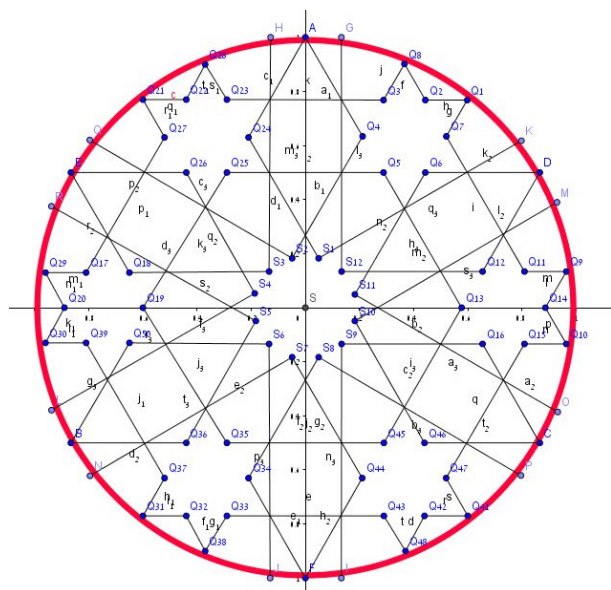
נציין כי עבודתם של זוג זה הוצגה בכיתה לפני שהסטודנטים האחרים הצליחו לבנות את התמונה.

התוצר הסופי של העבודה של זוג C שבוצע ב-GeoGebra מוצג באיור 8a.

איור 8b מציג את עבודתו של סטודנט אחר שעבד במסלול שונה במקצת.

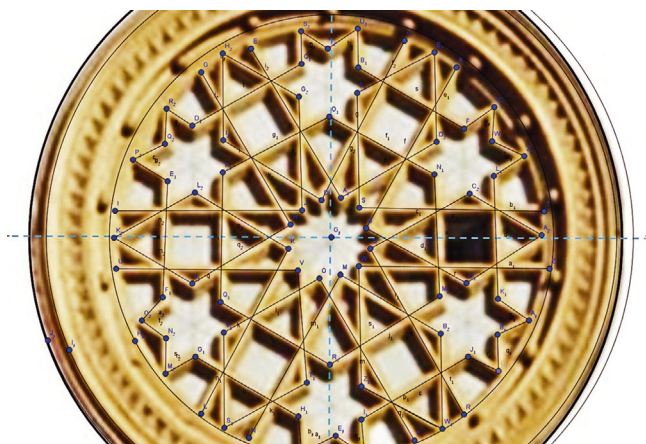


(א)



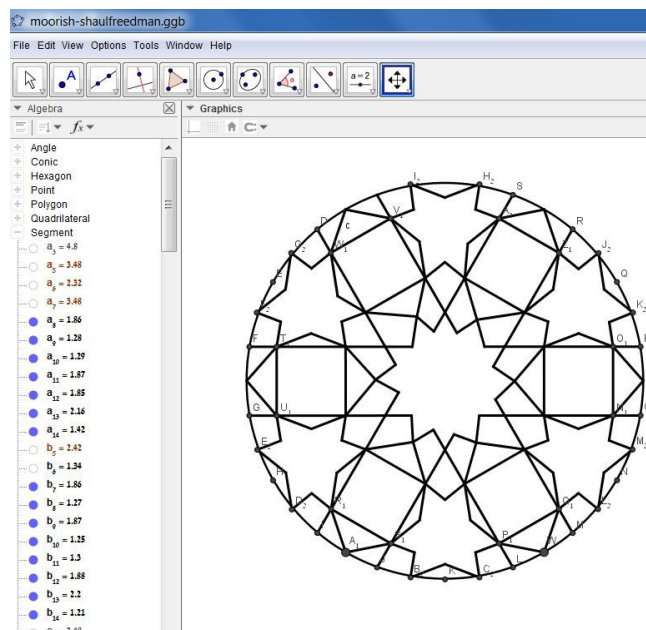
(ב)

איור 8: ביצועים מדויקים



איור 5: בניית תמונה בעזרת סימון נקודות עם GeoGebra

זוג B ביצעו עבודה מעורבת: הם התחילו בזיהוי נקודות ספציפיות, ולאחר מכן הוסיפו קווים באמצעות הכלי לבניית קווים בתוכנה. כמה מהם שקלו להוסיף קווים מעוקלים. הצויר שהם יצרו נראה דומה מאוד לתמונה המקורית. עבודתם מוצגת באיור 6. כמו כן כדאי לשים לב (בפינה השמאלית העליונה של האיור) שסטודנטים אלו השתמשו גם בפקודות כלליות יותר המשמשות לבניית מצולעים למיניהם (ריבועים, משושים, וכדומה).



איור 6: בניית תמונה בעזרת נקודות, קווים ומצולעים

חשוב לציין כי זוג B ביצעו את החישובים למציאת הפונקציות המתאימות לקווים בדרך ידנית – מצאנו לכך עדות בקובצי הורד שסיפקו.

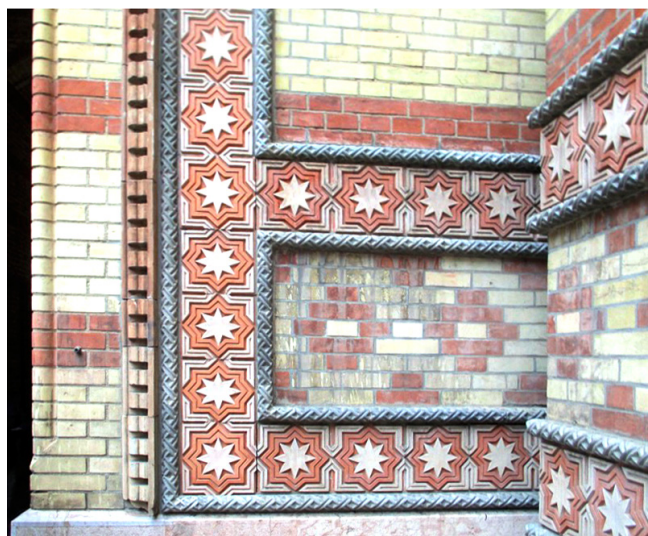
זוג C – שימוש רב בתכונות גאומטריות: זוג זה של סטודנטים בנה את הרוזטה עם GeoGebra לאחר ניתוח מעמיק של הגאומטריה המופיעה בתמונת החלון. הם הצביעו תחילה על המשושה שנמצא באמצע החלון והראו כיצד אפשר לקבל את החלק החיצוני של התמונה מהחלק הפנימי באמצעות טרנספורמציות גאומטריות אלמנטריות. לאחר מכן הם בנו את האלמנטים הפנימיים של התמונה והסתייעו בכלים של גאומטריה אנליטית מתאימה, כמו משוואות של קווים, משוואות של מעגלים, נקודות חיתוך בין קווים ומעגלים שזיהו וכן הלאה. איכות עבודתם גרמה למורה לבקש מהסטודנטים לתאר את עבודתם לפני שאר הסטודנטים; אחד מהם אזור אומץ והסביר עליה. איור 7 מראה כמה משרטוטי התומכים בהסברים.

בנקודה m. עכשיו נגדיר נקודה M' על L' כך שהטרנספורמציה הממפה כל נקודה M לנקודה M' במשוואה זו תיקרא כאן אפינית. הקו L הוא הציר, והמספר הממשי k הוא היחס האפיני.

אפשר לראות בקלות כי האפיניות עם אותו ציר יוצרים חבורה אבלית של טרנספורמציות במישור. נזכיר כי טרנספורמציות אחרות שהיו בשימוש לעיל (סיבובים וסימטריות שיקופיות) הם אלמנטים של קבוצות קלסיות של טרנספורמציות במישור.

נתבונן באיור 9. נוכל לראות מסגרות שמקשטות את הקירות החיצוניים של בית הכנסת דוהאני. כל מסגרת בנויה מאריחים, וכל אחד מהם הוא תמונה של אחר בהזזה. כל אריח יכול להיות מתואר כעשוי משלושה חלקים:

- ריבוע חיצוני.
- שני כוכבים חומים, זה בתוך זה, בעלי שמונה קודקודים, כל כוכב מתקבל באמצעות סיבוב ב-90 מעלות של שני ריבועים.
- כוכב לבן בעל שמונה קודקודים בתוך שני הכוכבים הנזכרים לעיל.



איור 9: המסגרת על החזית: ריבועים ו"ריבועים דחוסים"

בחלק השמאלי התחתון מופיעים שלושה אריחים שונים במקצת בין האחרים. הם לא ריבועיים אלא מלבניים, ומראים צורה כללית דומה בכל זאת לאריחים הריבועיים. הם התקבלו מהריבועיים באמצעות טרנספורמציה אפינית. בעצם קיימות כמה דרכים לתאר את זה בנוסחאות מתמטיות.

אחת הדרכים היא בהתייחסות לישר התחתון של האריח כציר האפיניות והכיוון המאונך לו.

הסטודנטים לא למדו את הנושא הזה בקורס בגאומטריה אנליטית. כמה מהם ילמדו טרנספורמציות המישור בקורס אחר.

לבסוף, ברצוננו להזכיר שוב את המסגרת שבאיור 2. מסביב לרוזטה עצמה היא בנויה כמעגל. בשביל זה האומן השתמש באותם הריבועים שתיארנו לעיל, כך הוא מעניק דוגמה יישומית של קירוב מעגל בעזרת מצולע משוכלל. אבל המסגרת העגולה הזאת מכילה גם

אנו מבקשים לציין שהתוצאה החשובה ביותר של פעילות זו הייתה ההתלהבות שהביעו הסטודנטים במהלך עבודתם. ניכר היה המאמץ שהשקיעו הן בעבודה בנייר ועיפרון והן בעבודתם בטכנולוגיה. כל זוג בחר בפרופורציות אחרות של זמן לכל אחד משני חלקי העבודה.



עבודה מתמטית מסוג זה שבה הסטודנטים נדרשים לבנות בעזרת "ישומן מתמטי אלמנט מוכר, מאפשרת ליישם ידע מתמטי פורמלי בקשרים חדשים, מאפשרת "לחבר" את המתמטיקה לתחומים אחרים ומאפשרת דיון עם הסטודנטים על דרכי פתרון מגוונות.



ההתלהבות הכללית לא הביאה את כל הסטודנטים לידי ביצוע הפעילות בזמן, אבל גם הסטודנטים שהחמיצו את המועד האחרון להגשת העבודה, ביקשו רשות להגיש את עבודתם במועד מאוחר.

לאחר הפעילות התקיימו גם דיונים עם המורים, שהתפרשו מעבר להיבט המדויק של בניית צורה בכלים מתמטיים. בשל פעילויות מסוג זה היה אפשר לזהות התעניינות רבה יותר של הסטודנטים במתמטיקה. התחזק אצלם העניין לניתוח אלמנטים אדריכליים אחרים הקיימים בבתי כנסת.

לסיכום, ברצוננו להזכיר כי כמורים הייתה לנו הפתעה כפולה. מצד אחד, זוגות A ו-B לא זיהו אלמנטים מתמטיים בתמונה, הם עסקו בסימון נקודות ובמתיחת קווים. לעומתם, זוג C עבדו בדרך מתמטית שמתאימה לדרכו של שיראלי (ראו Schiralli, 2007 בקטע הקודם): הם ניתחו את הצורות לסוגיהן ואת הקשר ביניהן והשתמשו בהן. הם היו מסוגלים לדמיין אפשרויות ולהתחבר לתמונות המגוונות. אפשר לראות זאת במיוחד בשימוש שלהם במשושה המרכזי, ולאחר מכן בסימטריה סיבובית בזווית של 60 מעלות. הממצא שסטודנטים רבים לא זיהו דפוסים (כלומר סימטריות וסיבובים) נבע מכך שמושגים אלה לא נלמדים בקורסים שלהם, אינם מופיעים בסילבוס הקורס הנוכחי, ומהפרדה הקלסית בין קורסים למיניהם. הסטודנטים לא חשבו על שימוש בידע רלוונטי מקורס אחר. ממצא זה מוכיח את הצורך לעודד מורים לבנות גשרים יעילים בין הקורסים למיניהם, ולהשתמש בידע המתמטי בכללותו ולא להפריד אותו לשדות נפרדים (ראו Dana-Picard, 2004).

עבודה מתמטית מסוג זה שבה הסטודנטים נדרשים לבנות בעזרת יישומן מתמטי אלמנט מוכר, מאפשרת ליישם ידע מתמטי פורמלי בקשרים חדשים, מאפשרת "לחבר" את המתמטיקה לתחומים אחרים ומאפשרת דיון עם הסטודנטים על דרכי פתרון מגוונות, חידוד הנושאים המתמטיים שהם מתבססים עליהם, להשוות בין דרכי הפתרון המגוונות הן בהיבט המתמטי והן בהיבטים של יעילות תהליך הפתרון. עוד הזדמנות שבה אפשר להשתמש בדרך עבודה זו היא לעודד את הסטודנטים להציג בעיות משלהם לחבריהם ובכך לעודד הן הצגת בעיות והן פיתוח יצירתיות (Singer & Voica, 2015).

חסגרות וטרנספורמציות אפיניות

לבסוף ברצוננו להציג עוד תכונה גאומטרית המופיעה על קירות בית הכנסת דוהאני (ראו איור 9). הטרנספורמציות האלה לא נמצאות בדרך כלל בסילבוס של קורס קלסי בגאומטריה אנליטית, אבל אפשר לכלול אותן בהרחבת הסילבוס עבור סטודנטים מתקדמים או מתעניינים.

הגדרה: יהי L קו נתון במישור ו-k מספר ממשי. דרך כל נקודה M במישור עובר קו יחיד, L' אורתוגונלי ל-L; הקו L' חותך את L

- Dana-Picard, T., & HersHKovitz, S. (2018). A glimpse at mathematics in Jewish traditional artefacts. *Symmetry: Culture and Science*, 29(2), 307-317. doi:10.26830/symmetry_2018_2_307
- Dana-Picard, Th. (2004). [Three-fold activities for discovering conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic](#). In J. Böhm (Eds.), *Proceedings TIME-2004* [CD]. Linz: bk teaware Schriftenreihe.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). [Adding it up: Helping children learn mathematics](#). Washington, DC: National Academy Press.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. New York: J. Wiley.
- Naor, A., & Perl, A. (2015). Introduction. In A. K. Szemerédi (Ed.), *Art in the life of mathematicians* (pp. 1-7). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Pierce, R., & Stacey, K. (2010). [Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software](#). *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1-20. doi:10.1007/s10758-010-9158-6
- Schiralli, M. (2007). The meaning of pattern. In N. Sinclair, D. Pimm, & W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity* (pp. 239-279). New York, NY: Springer.
- Schwartz, J. (1989). Intellectual mirrors: A Step in the direction of making schools knowledge-making places. *Harvard Educational Review*, 59 (1), 51-62. doi:10.17763/haer.59.1.t8n120v0j4265w46
- Sequin, C. H. (2017). Reverberating echoes: Contemporary art inspired by traditional Islamic art. *Journal of Mathematics and the Arts*, 11(2), 114-127. doi:10.1080/17513472.2017.1326082
- Singer, F. M., & Voica, C. (2015). [Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity?](#) In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing from research to effective practice* (pp. 141-174). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4614-6258-3_7
- Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of culture: Theory and practice of plane pattern analysis*. Seattle, Washington: University of Washington Press.
- Werner, A. (1962). What is Jewish art? *Judaism*, 11(1), 32-43.

ארבעה אלמנטים מעוקלים חדשים: מעגלים בקוטר קטן יותר שיכולים להיות הבסיס לפעילויות מתמטיות אחרות. כאן הריבועים עברו טרנספורמציה כך שאפשר לחשוב על האריחים החדשים כחסומים בתוך גזרה. בזכות המבנה של חבורה הטרנספורמציות השונות זו מזו במישור, הדוגמה המוצגת כאן עשויה לשמש דוגמה פרקטית בשני קורסים אחרים לפחות, תחילה בגאומטריה אנליטית מתקדמת, ולאחר מכן באלגברה המופשטת.

הערות לסיוכום

נאור ופרל (Naor & Perl, 2015) ציינו כי היחסים בין מתמטיקה לאומנויות אינם סימטריים, שכן "לאורך ההיסטוריה אומנים תלויים במתמטיקה, ואילו למיטב ידיעתנו, אף מתמטיקאי מעולם לא השתמש באומנות כדי ליצור מתמטיקה".

קרווי (Crowe, 2001) ציין את השינויים במישור בקשרים תרבותיים מסוימים, כמו בתרבות אפריקה, בתרבות דרום אמריקה, בתרבות אי הפידג' וכדומה. בהקשר זה נזכיר גם את ספרו המשותף עם ושבון (Washburn & Crowe, 1988).

המצב שהצגנו במאמר זה אינו שייך לשני הקשרים: כאן גם היצירה וגם המושגים המתמטיים היו קיימים מראש, ובחירת חלון בית הכנסת דוהאני באה מתוך כוונת המורים למשוך את תשומת ליבם של הסטודנטים לפתח את העניין שלהם במתמטיקה באמצעות פריט אומנותי של חיי היום-יום שלהם. זהו יישום של פסוק מקראי (משלי כב 6): "תִּנְהַךְ לְעֵצֶר עַל פִּי דֹרְכּוֹ גַם פִּי יִזְקֶיךָ לֹא יִסּוּר מִמֶּנָּה". הסטודנטים שראינו גילו עניין במתמטיקה, ולפחות כמה מהם כמו הזוג C פיתחו מיומנויות מתמטיות חדשות. כמובן, תלמידים אחרים בכיתה זכו בלמידה מעניינת מעבודתם של הזוג C.

כאמור, הסטודנטים שהיו מעורבים בכיתה היו צעירים חרדים. המחברים מנהלים כעת ניסוי דומה עם תלמידים צעירים יותר.

רשימת מקורות

- Borwein, J. (2007). Aesthetics for the working Mathematician. In N. Sinclair, D. J. Pimm, W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity* (pp. 21-40). New York, NY: Springer.
- Crowe, D. W. (2001). [Symmetries of culture](#). In R. Sarhangi (Ed.), *Bridges: Mathematical connections in art, music, and science: Conference proceedings 1998* (pp. 1-20). Arkansas City, Ks: Gilliland.
- D'Ambrosio, U. (1985). [Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics](#). *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.

