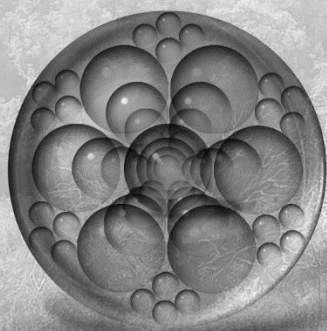




מחקר ועיון בחינוך המתמאי

איליון 5

מאי 2017

כתב עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי

עיצוב וצילום תמונת שער: תמי יהושע

עורכת:

ד"ר קרני שיר – שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):

ד"ר מארק אפלבוים	מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' דוד בן-חיים	מינהלת מל"מ – הטכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר הגר גל	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר אילנה לבנברג	האקדמית גורדון
ד"ר טלי נחליאלי	לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' משה סטופל	שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר אלכס פרידלנדר	מכון ויצמן למדע
ד"ר אמאל שריף-רסלאן	המכללה האקדמית הערבית לחינוך
פרופ' עטרה שריקי	אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' דינה תירוש	אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

עריכה לשונית:

יפעת פישר, מכללת שאנן
מרים מילשטיין, מכללת שאנן
עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:
תמי יהושע, מכללת שאנן

ISSN 2311-5483

Key title: Ktab-ha-'et « mehqar w-'iywn b-hiynwk matematiy »

כתב העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה



תוכן העניינים

3	דבר העורכת
6	מדור חדשות מתמטיות - נצה מובשוביץ-הדר, טכניון – מכון טכנולוגי לישראל
11	משוואות המכילות פרמטרים – תפיסות ושגיאות אופייניות של תלמידי תיכון ופרחי הוראה
29	יצירתיות מתמטית של תלמידים מבעד לעיני פרחי הוראה
51	פיתוח מיומנויות הוכחה בגאומטריה במהלך פעילות של פרחי הוראה כמעריכים וכמוערכים
82	מדור ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל
82	דברים לזכרו של פרופ' גדי מורן (1938-2016)
84	עבודת תזה לתואר שני במתמטיקה באוניברסיטת חיפה בהנחיית פרופ' גדי מורן
86	דברים לזכרו של פרופ' גדי מורן ז"ל (1938-2016)
88	לזכרו של פרופ' גדי מורן
92	לזכרו של פרופ' גדי מורן ז"ל
96	מדור המלצה על ספר
96	בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות
99	מדור הוכחות מעניינות
99	הצגת המדור
100	לקט תכונות גאומטריות מעניינות בליווי הוכחות המאפשרות ביצוע חקר תוך הצגת שימור
118	פתרון גאומטרי למשוואה ממעלה שלישית: $bx + x^3 = c$ על פי עומר אל ח'יאם
125	המתקבלות
137	מדור חוויות מכנס 2017
139	הנחיות למחברים

דבר העורכת

שרף.

במדור 'המלצה על ספר' מספרת ד"ר אילנה לבנברג על הספר 'בניות גיאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות'. ספר שעורכיו הם פרופ' משה סטופל, גב' קלרה זיסקין ופרופ' דוד בן-חיים.

במדור 'הוכחות מעניינות', שעורך פרופ' דוד בן-חיים, מוצגות הוכחות רבות ומעניינות מתחומים שונים של המתמטיקה.

את הגיליון החמישי חותם המדור 'חוויות מכנס' שבו מסופר על יום עיון בנושא חדשנות ויזמות בחינוך שהתקיים במכללת לוינסקי.

כפי שנכתב לעיל, נוסף למדורים השונים כולל כתב העת גם שלושה מאמרים מחקריים שהתקבלו לפרסום לאחר שעברו שיפוט עמיתים עיוור.

במאמר הראשון בכתב העת ד"ר בת שבע אילני וד"ר דינה חסידוב כותבות על האופן שבו תלמידים ופרחי הוראה תופסים משוואות המכילות פרמטרים, ועל שגיאות אופייניות וקשיים הבאים לידי ביטוי בפתרון משוואות מסוג זה.

המאמר השני מתאר מחקר של ד"ר חנה לב-זמיר וד"ר ענת לבב-ויינברג. המחקר שהן מתארות במאמר בדק את התפיסות המוקדמות



מובא לפניכם הגיליון החמישי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי". גיליון זה הוא הגיליון השני שיוצא בשנת

הלימודים תשע"ז, לאחר שבתחילת השנה יצא גיליון מיוחד בנושא למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית (להלן לינק לגיליון הקודם: http://shaanan.ac.il/?page_id=24077). הגיליון החמישי של כתב העת כולל שלושה מאמרים מחקריים וחמישה מדורים.

במדור החדשות המתמטיות, שכותבת פרופ' נצה מובשוביץ-הדר, מסופר על הייחודיות של המספר 7,825, על תגלית חדשה מעניינת באשר למספרים הראשוניים, ועל אלגוריתם לתכנון טיול באתרים לאומיים ב-48 מדינות שונות בארצות הברית, אלגוריתם פתוח שאפשר להשתמש בו גם לתכנון טיול במספר קטן יותר של אתרים.

המדור 'ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל' מוקדש לפרופ' גבי מורן ז"ל מאוניברסיטת חיפה, שנהרג בתאונה טרגית מצערת לפני כשנה. במדור מובאים דברים לזכרו שכתבו אותם פרופ' דוד בן-חיים וארבעה סטודנטים שהנחה: ד"ר שפיק חליפה, גזאלין פאזייה, עבדאללה עאסלה וד"ר כאמל

היה יוצא לאור, הם השופטים שלנו – חברי הקהילייה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי, שנרתמו למשימת השיפוט והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון ובשדרוג המאמרים המופיעים בגיליון. תודה גדולה לכולכם.

גיליון זה של כתב העת הוא הגיליון האחרון שאני עורכת. אני רוצה להקדיש את הפסקה האחרונה של דבר העורכת לפרופ' דוד בן-חיים, האיש שלפני כחמש שנים הגה את הרעיון של הוצאת כתב עת מחקרי בחינוך מתמטי שייצא בשפה העברית, ומאז ועד היום תורם מזמנו ומניסיונו העשיר כדי שכתב העת ימשיך לגדול ולהתפתח. דוד – נהניתי מאוד מהעבודה עמך, ולמדתי ממך רבות בחמש השנים שזכיתי לעבוד עמך. אני יודעת שתמשיך ללוות את כתב העת וסמוכה ובטוחה שהעורך הבא של כתב העת יזכה גם הוא ללמוד וליהנות מהעבודה המשותפת עמך.

קריאה נעימה ומוטיבה!

ד"ר קרני שיר

עורכת כתב העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי
ktav.et.rme@gmail.com

של פרחי הוראה הנוגעות לשאלה מהי יצירתיות מתמטית וכיצד אפשר להעריך אותה.

המאמר השלישי והאחרון הוא מאמרן של פרופ' אילנה לביא ופרופ' עטרה שריקי. מטרת המחקר המתואר במאמר זה היא לבחון את ההשפעות של פעילות שבה פרחי הוראה מתפקדים הן כמעריכים והן כמוערכים על התפתחות מיומנויות ההערכה שלהם בכלל, ועל התפתחות מיומנויות ההערכה שלהם באשר להוכחות בגאומטריה בפרט.

על הפקת כתב העת והבאתו לדפוס הופקדה תמי יהושע ועל העריכה הלשונית היו אחראיות יפעת פישר ומרים מילשטיין מההוצאה לדפוס "שאנן". הן וכל שאר חברי הצוות נרתמו יחדיו לעזרה בהוצאת כתב העת, ועל כך נתונה תודה והוקרה.

כמו כן, כפי שצינתי אף בעבר, הוצאת כתב עת דורשת תמיכה מוסדית ומימון ותודה רבה על כך להנהלת מכללת שאנן ולעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש, על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב העת.

אנשים אנונימיים שללא תרומתם כתב העת לא

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר, טכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

מדור החדשות בגיליון זה מכיל שלוש חדשות משנת 2016 המסתיימת בעת כתיבת שורות אלו. חדשות אלו הן כמובן רק חלק פעוט של המתרחש במתמטיקה השכם והערב. בשנים האחרונות מתווספים מעל 100,000 פריטים בכל שנה למאגר המידע המתמטי הבין-לאומי המנוהל בידי החברה המתמטית האמריקאית: MathSciNet – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info הם מתפרסמים בכ-1800 כתבי עת מתמטיים. רובם מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים.

מה מיוחד למספר 7,825?

אחת ההלצות המתמטיות הידועות היא שכל מספר טבעי הוא "מיוחד במינו". ההוכחה היא באינדוקציה (כמובן...). הנה כך: שלב הבדיקה – 1 הוא מיוחד. זה ברור מהרבה סיבות, אחת מהן, למשל, היא שזה המספר הטבעי היחיד שאיננו ראשוני, אבל איננו פריק. סיבה אחרת היא שהוא הפתרון היחיד למשוואה $n \times x = n$ לכל n טבעי, ויש עוד סיבות רבות וטובות. לא הכרחי, אבל קל למצוא סיבות לכך שגם 2 הוא מספר מיוחד במינו (למשל, בהיותו הזוגי הכי קטן, או הראשוני הזוגי היחיד ועוד). לא קשה למצוא סיבות גם לכך ש-3 הוא מיוחד, אבל נעבור לשלב השני של כל הוכחה באינדוקציה – שלב הנחת האינדוקציה והנובע ממנה. נניח שלכל אחד מהמספרים הטבעיים מ-1 עד n (כולל) ניתן למצוא סיבה אחת לפחות להיותם מיוחדים במינם ונוכיח שמכאן מתחייב $n+1$ גם הוא מספר מיוחד. הנה כך: אם תמצא לכך סיבה טובה – סיימנו. אם לא קיימת סיבה טובה לכך אזי $n+1$ הוא המספר הטבעי הכי קטן שאיננו מיוחד ו... בכך ייחודו. מכאן נובע, על פי אקסיומת האינדוקציה (החמישית באקסיומות של פיאנו), שכל מספר טבעי הוא מיוחד במינו. מ.ש.ל.

נשאר לכם הקוראים לחשוב מדוע זוהי הלצה ולא טענת אמת מתמטית קבילה.

וכעת יותר ברצינות, נעבור לשאלה – מה מיוחד למספר 7,825?

ובכן, כמו הרבה בעיות שנשארו פתוחות שנים רבות, העניין מתחיל משאלה פשוטה להבנה שנקראת 'בעיית השלוש הפיתגוריות' (שלושה פיתגורית היא שלושה של מספרים טבעיים a, b, c שעבורם מתקיים השוויון: $a^2 + b^2 = c^2$). נתחיל מהסוף: הבעיה נפתרה לאחרונה באמצעות מחשב והפתרון שפורסם בשלושה במאי 2016 נחשב להוכחה הכי "כבדה" שנוצרה בסיוע מחשב מאז ומעולם. מהי השאלה, ולמה הפתרון שלה מצריך כוח מחשוב כה גדול? ובכן –

נניח שיש לנו שני צבעים – כחול ואדום – והחלטנו לשם שעשוע לרשום כל אחד מהמספרים

הטבעיים באחד משני הצבעים, כך שלא תהיה אף שלשה פיתגורית ששלושת רכיביה רשומים באותו צבע. כלומר, אם למשל רשמנו את 5 ואת 12 באדום, אז את 13 נרשום בכחול. האם ניתן לעשות את זה? על החשיבות של מציאת פתרון לבעיה אפשר ללמוד משהו מכך שלפני למעלה מ-35 שנה, בשנת 1980, הציג המתמטיקאי פרופ' רונלד גרהאם מאוניברסיטת קליפורניה בסן-דייגו, שנחשב לאחד מעמודי התווך של פיתוח המתמטיקה הדיסקרטית בת זמננו, פרס של מאה דולר מכיסו לראשון שימצא פתרון לבעיה.

שלושה מתמטיקאים ומדעני מחשב, מרין הול מטקסס (Marijn Heule), אוליבר קולמן מבריטניה (Oliver Kullmann), וויקטור מארק מקנטאקי (Victor Marek) הוכיחו שעם המספרים מ-1 עד 7,824 אפשר לבצע את המשימה, אבל כשמתווסף גם 7,825 זה בלתי אפשרי. במקרה כזה תהיה לפחות שלשה פיתגורית אחת שכל רכיביה מופיעים באותו צבע.

מבחינה מתמטית עניין הצביעה הוא שולי כמובן. המשפט שהוכיחו שלושת החוקרים הנזכרים וזכו על כך בפרס המובטח וביוקרה רבה, קובע שקבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד 7,824 ניתנת לחלוקה לשתי תת-קבוצות זרות ("כחולים" ו"אדומים") כך שאף אחת משתי תת-הקבוצות לא מכילה אפילו שלשה פיתגורית אחת. ואילו את קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 ועד 7,825 אי אפשר להפריד לשתי תת-קבוצות כאלו. במילים אחרות, קיימת חלוקה לשתיים של קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 ועד 7,825, כך שלפחות באחת משתי הקבוצות יש שלשה פיתגורית אחת או יותר. יש להבין כי מההוכחה עבור 1 עד 7,825 נובע בהכרח שהדבר נכון לכל קבוצה של מספרים טבעיים מ-1 ועד N אם רק $N > 7,824$, שכן אותה חלוקה שקיימת למספרים עד 7,825 תורחב ותשמש להוכחה עבור ערך גדול יותר של N .

מהו מספר האפשרויות לרשום בשני צבעים שונים את כל המספרים הטבעיים בין 1 ל-2785? – זאת שאלה פשוטה בקומבינטוריקה שהתשובה עליה היא $2^{7,825}$, מספר עצום של אפשרויות (240 זה יותר מטריליון!). אבל החוקרים הצליחו להראות שלצורך הניתוח של בעית הקיום של שלשה פיתגורית שכל רכיביה צבועים באותו צבע, אפשר להסתפק בניתוח של טריליון אפשרויות בערך, שגם זה מספר לא קטן, ואותן הם בחנו באמצעות תוכנה ייחודית. יצירת ההוכחה העסיקה את מחשב-העל Stampede במרכז המחשבים המתקדם של אוניברסיטת טקסס במשך יומיים (זמן מחשב), שבמהלכם נוצרו 200 טרה-בייט של הוכחה שנדחסה ל-68 ג'יגה-בייט "בלבד". המאמר המתאר את ההוכחה פורסם בשלושה במאי 2016, התקבל לכנס בינלאומי במדעי המחשב המוקדש ל-Theory and Applications of Satisfiability Testing והתקיים בעיר בורדו בצרפת ביולי 2016, ושם זכה בפרס המאמר הטוב ביותר. באותו כנס גם הוענק פרסו של רונלד גרהאם למרין הול. כמו הרבה בעיות שנפתרו במתמטיקה לפני שנמצא לכך שימוש, יש מקום לחשוב שלפתרון הבעיה הזאת וגם לאמצעים להשגתו יימצאו שימושים בעתיד.

פרטים על ההוכחה אפשר לקרוא כאן: <https://arxiv.org/pdf/1605.00723v1.pdf>

<http://futurism.com/worlds-largest-math-proof-solved-and-it-takes-up-200-terabytes/>

ובעברית כאן: http://www.gadial.net/2016/07/12/boolean_pythagorean_triples/



מחשב-העל Stampede מאוניברסיטת טקסס שבעזרתו נפתרה בעיית השלשות הפיתגוריות הנחשבת ל"כבדה" ביותר מאז ומעולם (200 טרה-בייט)¹

המספרים הראשוניים לא חפסיקים לסקרן ולהפתיע



James Maynard²

המתמטיקאים העוסקים בתורת המספרים לא מניחים למחקר על המספרים הראשוניים. בנוסף למרוץ אחר מספר ראשוני גדול יותר ויותר שתואר בגיליון הראשון של כתב העת, הופיעה בגיליון הקודם (גיליון 4) חדשה מעניינת מחודש מרץ 2016 על 'הטייה בלתי צפויה בהתפלגות של מספרים ראשוניים עוקבים'. והנה בחודש יולי 2016 בכנס השנתי של האיגוד האירופאי של המתמטיקאים בברלין, זכה מתמטיקאי בריטי צעיר ושמו ג'יימס מיינארד (James Maynard), יליד 1987, בפרס יוקרתי, שהאיגוד הזה מעניק למתמטיקאים שעוד לא מלאו להם 30 שנה, על תגליתו:

יש אינסוף מספרים ראשוניים שהספרה 7 אינה מופיעה בהם.³

1. אחזור מתוך

http://www.nature.com/polopoly_fs/7.36783.1464349453!/image/_MG_7020sdp_web.png_gen/derivatives/landscape_630/_MG_7020sdp_web.png

2. By Petra Lein, Copyright is MFO [CC BY-SA 2.0 de], via Wikimedia Commons. Retrieved from [https://en.wikipedia.org/wiki/James_Maynard_\(mathematician\)](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Maynard_(mathematician))

3. Maynard, J. (2016). Primes with restricted digits. [arXiv:1604.01041](https://arxiv.org/abs/1604.01041) [math.NT]

זה אולי נראה כעניין צדדי וחסר חשיבות, אבל אותה הוכחה עצמה ניתנת ליישום לכל ספרה אחרת בין 1 ל-9 וזה כבר נשמע מעניין יותר. החשיבות האמיתית של ההוכחה של מיינארד נעוצה בכך שקשה מאוד לאתר מספרים ראשוניים בעלי תכונה מיוחדת ובמיוחד אם התכונה המיוחדת להם היא תכונה שקשה לאתר אותה בקרב כל המספרים השלמים. למספרים שלמים גדולים יש הרבה מאוד ספרות ובדרך כלל ייצוגם העשורי מכיל את כל 9 הספרות יותר מפעם אחת. לכן לאתר מספרים שלמים, לאו דווקא ראשוניים, שהספרה 7 (למשל) לא מופיעה בהם בכלל, היא משימה לא פשוטה. לא כל שכן קשה למצוא בין המספרים השלמים, מספרים ראשוניים שאין להם 7 בין ספרותיהם, ועל אחת כמה וכמה קשה להוכיח שיש אינסוף ראשוניים כאלה. כעת, משנמצאה הוכחה לכך, התקווה היא שטכניקת ההוכחה של תכונות נדירה מסוג זה עשויה להביא לידי פתרון של בעיות פתוחות קשות אחרות הנוגעות לראשוניים, כמו השערת **הראשוניים התאומים** על קיומם של אינסוף מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2, או **השערת רימן** על ההתפלגות שלהם.

עוד על חשיבות התגלית בשל הקשר בין מספרים ראשוניים לדפוסי-גלים אפשר לקרוא כאן:

<https://plus.maths.org/content/missing-7s>

ולסיום - אלגוריתם לתכנון טיולים



Randy Olson⁵

נסיים להפעם במשהו יותר קליל – תכנון מתמטי של הטיול הבא שלכם. זוכרים את בעיית הגשרים של קניגסברג שיצרה את תורת הגרפים? אוילר תהה בזמנו אם ניתן לתכנן טיול שבו עוברים על כל אחד משבעה הגשרים בעיר קניגסברג פעם אחת ורק אחת. שאלה דומה, אבל הרבה יותר מאתגרת, היא למצוא מסלול אופטימלי לטיול בכל המדינות של ארה"ב או לפחות ב-48 המדינות המחוברות ביניהן ביבשה משותפת.

את האתגר הזה הציבה טרייסי סטיידטר (Tracy Staedter), כתבת של Discovery News, בפני רנדי אולסון (Randy Olson), שסיים בשנת 2015 את לימודיו לתואר דוקטור באוניברסיטת פנסילבניה, אחרי שהתרשמה מאלגוריתם החיפוש שהוא פיתח לפתרון חידות "איפה אפי"⁴.

4. Olson, R. (2015, February 3). Here's Waldo: Computing the optimal search strategy for finding Wald [Web log post]. Retrieved from <http://www.randalolson.com/2015/02/03/heres-waldo-computing-the-optimal-search-strategy-for-finding-waldo>

5. אחזור באישור בעל האתר מתוך <http://www.randalolson.com>

כדי לעמוד באתגר הם הציבו שלושה כללים:

1. על המסלול לעבור לפחות פעם אחת בכל אחת מ-48 המדינות המחוברות ביניהן ביבשה משותפת.
2. העצירות תהיינה רק באתרים לאומיים.
3. הטיול ייעשה במכונית בלי לעזוב את גבולות ארה"ב.

טרייסי ארגנה רשימה של 50 אתרים, אחד בכל מדינה (כולל וושינגטון די.סי. ולא כולל הוואי ואלסקה) ושניים בקליפורניה,⁶ ורנדי נרתם לאיתור המסלול שייקח מינימום זמן נסיעה ומקסימום זמן להנאה מביקור באתרים. הוא מצא את כל 2450 מרחקי הנסיעה ברכב בין כל שניים מ-50 האתרים ברשימה של טרייסי, וניגש לפתרון הבעיה של מעבר מאחד לשני כך שסך כל הדרך יהיה קטן ככל האפשר. בעיה זאת מוכרת כ"בעיית הסוכן הנוסע".⁷

ליתר דיוק כדי לחשב את המסלול החסכוני ביותר מבחינת המרחק הכולל יש לבדוק 3×10^{24} אפשרויות, שזה מספר עצום שלא ניתן לביצוע בזמן חי אדם (גוגל נותנת מסלול בין 10 נקודות לכל היותר!). למרבה המזל בעיית הסוכן הנוסע נחקרה כבר לעומק ורנדי היה יכול להשתמש בידע העצום שקיים כבר בנושא זה וב"קיצורי דרך" שנותנים פתרון טוב למדי, אף כי אולי לא את הפתרון הכי טוב שקיים: ב-224 שעות נסיעה. המסלול הוא סגור, כלומר אפשר להתחיל בכל נקודה ולבלות חודשיים-שלושה בביקור בכל אחת מהתחנות. אפשר לראות את המסלול בבלוג של רנדי:

<http://www.randalolson.com/2015/03/08/computing-the-optimal-road-trip-across-the-u-s/>

אבל הדבר החשוב יותר הוא שרנדי מעמיד את האלגוריתם לרשות קוראי הבלוג שלו (בכתובת לעיל) וכל אחד יכול להשתמש בו לנתונים של הטיול שהוא מתכנן, כלומר במרחקי הדרך בין כל שתיים מהנקודות שבהן הוא רוצה לבקר, כדי למצוא מסלול אופטימלי מבחינת אורך הנהיגה וזמן הביקור.



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, וניהלה את המוזאון הלאומי למדע בחיפה. הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, וביניהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהפיקה הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית מסתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.

6. Staedter, T. (2015, March 9). How to Drive Across the U.S., Hitting Major Landmarks. See<er. Retrieved from <http://www.seeker.com/how-to-really-drive-across-the-us-hitting-major-landmarks-1769592276.html>

7. בעיית הסוכן הנוסע. (2004). בתוך ויקיפדיה. אוחר ב-13 בפברואר, 2017, מתוך https://he.wikipedia.org/wiki/הנוסע_הסוכן

משוואות המכילות פרמטרים - תפיסות ושגיאות אופייניות של תלמידי תיכון ופרחי הוראה

בת-שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חסדת הדרום, נתיבות
דינה חסידוב, המכללה האקדמית גליל מערבי, עכו

תקציר

במחקר זה בדקנו כיצד תופסים תלמידים ופרחי הוראה משוואות המכילות פרמטרים. המחקר נערך בקרב תלמידי תיכון (73) ופרחי הוראה (43) ובדק כיצד פותרים הנבדקים משוואות שבהן משתמשים באותיות שונות, כגון $a, b, x, y, \dots$, ונדרש בכל פעם לבודד אות אחת. מטרת המחקר היו לבדוק מהן הדרכים שבהן משתמשים הנבדקים, מהם הקשיים שבהם נתקלים בפתרון משוואות המכילות פרמטרים והאם יש הבדלים בין תלמידים לפרחי הוראה. המידע נאסף באמצעות שאלון, ריאיון ותצפיות פתוחות, ונעשו ניתוחים כמותיים ואיכותניים של הנתונים. נמצא כי משוואות המכילות פרמטרים הן קשות לפתירה. בממצאים אלה אובחנו מצבים מסוגים שונים שהשפיעו על ביצוע המשימות: האות שצריך להביע, הסידור של המשוואה וסוג המשוואה. כמו כן נמצאו הבדלים בין הביצועים של פרחי הוראה לביצועים של תלמידים. הממצאים שנציג במחקר זה יכולים להרחיב את גוף הידע שממנו ילמדו מורים על שגיאות תלמידים ומקורותיהן.

מילות מפתח: משוואות; פרמטרים; תלמידי חטיבה עליונה; פרחי הוראה; חינוך מתמטי; ידע מתמטי; קוגניציה ומתמטיקה; מושגים מתמטיים.

מבוא ורקע תאורטי

מערכת הסמלים במתמטיקה מאפשרת למתמטיקאי להשיג את רמת ההפשטה הנדרשת לפתרון בעיות כלליות. השימוש באותיות לסימון משתנים ופרמטרים הוא בסיס לשפה מדעית. משוואות אלגבריות המכילות נעלמים ופרמטרים מייצגות קבוצה של משוואות בעלות מבנה זהה, וכן צורות כלליות של קשרים כמותיים בין גדלים כלליים למיניהם. למשל, הנוסחה $y = 3x + b$ מייצגת משפחה של פונקציות לינאריות בעלות אותו שיפוע.

חשיבות רבה יש להתפתחות מערכת סמלים וסימבולים במתמטיקה בכלל ובאלגברה בפרט, והעיסוק בהם הוא בסיס להבנת האלגברה, האנליזה ותחומים נוספים. התפתחות הסמלים המתמטיים שהחלה באלגברה גרמה למהפכה בתחום, והיום אי אפשר לחשוב על המתמטיקה ללא משתנים ופרמטרים.

החשיבות הרבה של האלגברה מתבטאת במקום המרכזי שהיא תופסת בלימודי המתמטיקה הנלמדת בבית הספר. האלגברה הנלמדת בבית הספר כוללת אמצעים לפתרון בעיות ולתיאור קשרים ויחסים, והיא המפתח לאפיון ולהבנה של מבנים מתמטיים (Kieran, 2007). שיעור אלגברה בבית הספר מתמקד, בדרך כלל, בפרוצדורות הכלולות סמלים מתמטיים, לעתים אף ללא העמקה במשמעות.

לימוד פורמלי של אלגברה מתחיל בחטיבת הביניים – שלב שבו עוברים התלמידים מעיסוק במספרים לעיסוק באותיות – עיסוק הדורש חשיבה מופשטת. פלקסר (Flexer, 1984) מצא כי האלגברה היא אבן גוף לפני תלמידים בתחילת דרכם בלימודי תחום זה.

במחקרים אחרים שנעשו (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1982; Kieran, 2014; Witzel, Mercer, & Miller, 2003) נמצא כי ביצועם של תלמידים במשימות אלגבריות הוא נמוך, ולאחוז נכבד מהם היו קשיים תפיסתיים בתחום האלגברה, הנובעים מקושי מניפולטיבי של סימבולים מתמטיים בביטויים ובמשוואות. טעויות של תלמידים באלגברה קשורות, בין השאר, בדרך שבה הם תופסים את השינויים המושגיים במעבר מאריתמטיקה לאלגברה (Matz, 1980). תלמידים רבים מתקשים להכיר בכך שאות מייצגת מספר, והם אינם יודעים לעבוד עם הערכים הסימבוליים (Herscovics & Kieran, 1980).

נמצאו מחקרים מעטים העוסקים במושג הפרמטר ומשמעותו (Bloedy-Vinner, 1994, 1995, 2001; Furinghetti & Paula, 1994; Ursini & Trigueros, 2004).

אורסיני וטריחרוס (Ursini & Trigueros, 2004) מצאו כי השימוש בפרמטרים כדי לסמל הכללה היה קשה מאוד לתלמידים. גם במקרים שבהם הצליחו התלמידים לכתוב ביטוי אלגברי, הם לא היו מסוגלים להסביר את התפקידים השונים של האותיות בביטוי האלגברי. במחקר נמצא עוד כי כדי לעבוד עם הפרמטרים כראוי, רצוי שתהיה לתלמידים יכולת להבחין בין נעלמים ומשתנים. נמצא שיכולת הבחנה זו תלויה בהקשרים שבהם הוצגו הפרמטרים.

במחקרים בודדים אחרים עסקו החוקרים בפתרון משוואות המכילות פרמטרים. סדיווי (Sedivy, 1976) טען כי תרגילים ומשוואות המכילים פרמטרים קשים יותר לפתרון מתרגילים ובעיות המכילים מספרים. טענה דומה התקבלה גם מעדויות של מורים שמלמדים בבית הספר התיכון. סדיווי (שם) מציין שלמשוואות פרמטריות יש שימושים לא רק במתמטיקה אלא גם במדעים. לפיכך, הקושי שיש לתלמידים במשוואות המכילות פרמטרים מפריע ומכשיל גם במקצועות לימוד אחרים. לדעתו, בעיות עם פרמטרים בוחנות את הידע המתמטי של הפותר, ומאפשרות לגלות את נקודות החולשה שלו. יתרה מזו, בעיות כאלה מאבחנות אסטרטגיות שגויות וכשלים לוגיים של התלמיד.

דיוויס והנקין (Davis & Henkin, 1978) רואים חשיבות רבה בפתרון משוואות ריבועיות בכלל ומשוואות בעלות מקדמים פרמטריים בפרט. כמו כן הם מתארים כיצד הם מפרשים את הבנת הנושא. הם מציינים את המיומנויות המגוונות הנדרשות לפתרון משוואות ריבועיות, ודנים בסוגי ידע וצורות הבנה שהשגתם הכרחית. לטענתם, הבנה ופתרון משוואות ריבועיות עם פרמטרים את ההבנה של משוואות בכלל בקרב תלמידים.

סקמפ (Skemp, 1987) טען שלימוד הכללים ללא הסיבות מאפשר לתלמיד לתפקד בתוך מסגרת מוגבלת

מאוד, ולהתמודד עם בעיות סטנדרטיות בלבד. בלי הבנה של "מה לעשות" ו"מדוע", התלמיד לא יוכל להתמודד עם מטלות חדשות או מורכבות. ההבנה מאפשרת לו לטפל בכל אוסף נתונים בחופשיות ועל פי מטרות משתנות. ממצאי מחקר של פישביין ומוזיקנט (Fischbein & Muzicant, 2002) מעידים על כך שתלמידים למדו בעיקר בצורה פרוצדורלית, והם אינם מקשרים בזמן פתרון משוואות בין הידע המושגי לידע הפרוצדורלי.

במחקר זה נתמקד במשוואות המכילות פרמטרים, ועל כן נביא מהספרות דיון במושג "פרמטר". פרנקל (1942) אינו מזכיר את המושג פרמטר אבל בהגדרתו את ה"קבוע" הוא כנראה מתכוון לפרמטר:

אם סימן ידוע מסמן בתוך נושא מתמטי גודל, שערכו קבוע במשך כל הנושא, נאמר: הסימן מסמן (גודל) קבוע. במקרים רבים מסומן הקבוע ע"י אות ($a, b, \dots$); בזה יצוין שהגודל אמנם קבוע (מספר, נקודה וכו'), אבל לא משנה מהו הערך הקבוע הנידון (המוגבל פעמים לשדה מסוים וכו') (עמ' 243).

פרנקל מדגיש כי "לתכונה להיות 'גודל קבוע' או 'משתנה' אין אופי אובייקטיבי ומוחלט. הברירה בין שתי האפשרויות נמצאת במקרים רבים בידנו, כלומר תלויה במטרה שנשאף אליה" (עמ' 229).

כדי להבהיר סוגיה זו פרנקל מביא דוגמה מתחום הפיסיקה: חוק בویل-מריוט וג'י-לוסק $T = pv/R$. האם כאן p ו- v שניהם משתנים או רק אחד מהם משתנה ואיזה מהם?

התשובה תהיה: הדבר תלוי בדרך שבה הגענו אל היחס או במטרה שנתכוון אליה. מצד אחד, אם רוצים להדגיש את תלות הטמפרטורה T בנפח v ובלחץ p , אזי נקבל פונקציה בעלת שני משתנים: p ו- v . מצד אחר, אם נרצה לחקור את התהליך כאשר הלחץ קבוע ואינו משתנה במשך התהליך, אזי הנוסחה מביעה את תלות הטמפרטורה בנפח הגז, ואז p הוא קבוע ו- v הגורם המשתנה היחיד. במקרים אחרים p יהיה המשתנה היחיד ו- v יהיה קבוע אם נשאיר את נפח הגז קבוע במשך התהליך שבו משתנה הלחץ. לדברי פרנקל (שם):

במתמטיקה (לא כן בפיסיקה) נהוג לסמן את הקבועים באותיות הראשונות של האלפא-ביתא הרומי, או היווני: $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$, לעומת זאת את המשתנים ב- $x, y, z, u, \dots, w$. מובן שזה רק מנהג, אבל מנהג מועיל; פעמים ייתכן לנהוג אחרת (עמ' 227).

דקארט הנהיג לראשונה את מנהג זה במאה השבע-עשרה, כשעדיין הייתה הפרדה דיכוטומית בין המשתנה לפרמטר. השינוי במשמעות ובשימושים של המשתנה הביאו לידי כך שאותה אות יכולה לשנות תפקיד. לכן מציין פרנקל שזהו "מנהג" בלבד שניתן לשינוי. יש לזכור שהוא כתב זאת בשנות החמישים כאשר תכנית הלימודים במתמטיקה הייתה שונה לגמרי מהתכנית של ימינו. חומר לימודי שנלמד היום בתיכון נלמד אז באוניברסיטה, ולמדו אותו אנשים בעלי אוריינטציה מתמטית בלבד. לכן יש מקום לשקול האם גם היום רצוי להמשיך במנהג זה.

פורנגטי ופאולה (Furinghetti & Paula, 1994) ראו בפרמטר מושג "חמקמק" בגלל היותו, לדעתן, דו-משמעי: מצד אחד הוא משתנה כמו משתנה, ומצד שני הוא נעלם. הן לא ציינו שבנוסף להיותו משתנה ונעלם הוא גם משמש כקבוע.

הידיעה שאות נחשבת לפרמטר או משתנה אינה מובנת מהביטוי עצמו אלא מקביעה מסוימת. לעתים תוך כדי תהליך המשתנה הופך לפרמטר או הפרמטר הופך למשתנה. לדוגמה: מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (3,5) ושיפועו הוא 4.

שלבי הפתרון

- כותבים את המשוואה $y=ax+b$ שבה a ו- b הם הפרמטרים, ואילו x ו- y הם המשתנים.
- מציבים את הקבוע 4 במקום הפרמטר a ואת הקבועים 3 ו-5 עבור x ו- y בהתאמה. פותרים את המשוואה עבור המשתנה b (המשמש כאן כנעלם ובשלב קודם שימש כפרמטר).
- התהליך מסתיים כאשר מציבים את הערכים המספריים המתקבלים, כלומר הקבועים, במקום הפרמטרים a ו- b ומקבלים משוואה שבה x ו- y הם משתנים.

אילני (1997) הראתה שאותיות שונות נתפסות אצל תלמידים ופרחי הוראה כמייצגות משתנה בלבד, ואותיות אחרות כמייצגות פרמטרים בלבד. כל האמור לעיל מלמד על הקושי שיש בהבנת מושג הפרמטר ועל הצורך לבדוק כיצד פותרים משוואות המכילות פרמטרים. יש הסכמה רחבה לכך כי חשוב שמורים יכירו דרכי חשיבה נכונות ושגויות של תלמידים באשר לנושאים מתמטיים ומקורות אפשריים לשגיאות אופייניות. מודעות מסוג זה תורמת תרומה ניכרת להוראה (Karsenty, Arcavi, & Hadas, 2007). ממחקרים עולה שכאשר לתלמידים יש בעיות בנושא מתמטי כלשהו, לעתים בעיות דומות עולות גם בקרב מורים ופרחי הוראה (Almog & Ilany, 2012; Graeber, Tirosh, & Glover, 1989).

במאמר זה בחרנו להתמקד באופן שתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ופרחי הוראה לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה פותרים משוואות המכילות פרמטרים. תלמידים בבית הספר לומדים לפתור משוואות רגילות ומשוואות עם פרמטרים שבהן שולטת האות x כמשתנה שצריך להביע באמצעות האותיות a , b , c ...

הנבדקים קיבלו משוואות מגוונות באותיות מאותיות שונות ותרגילים מגוונים שבהם התבקשו לבטא אותיות שונות, כמו a , b , c ... באמצעות x , ותרגילים שבהם התבקשו לבטא את x באמצעות אותיות אחרות.

מטרות המחקר

מטרות המחקר היו לבדוק ולאתר קשיים של תלמידי תיכון ושל סטודנטים להוראה בפתרון משוואות פרמטריות ולענות על השאלות:

1. כיצד פותרים הנבדקים משוואות פרמטריות שבהן צריך להביע אותיות שונות?
2. מהן הדרכים שבהן משתמשים הנבדקים?
3. מהם הקשיים שבהם נתקלים הנבדקים בפתרון משוואות פרמטריות?
4. האם יש הבדלים בין תלמידים לפרחי הוראה? אם כן, מהם?

מתודולוגיה

סוגי המשוואות

במחקר זה נעסוק במשוואות פרמטריות "פשוטות" ובמשוואות פרמטריות "יישומיות". משוואות פרמטריות "פשוטות" הן משוואות המכילות פרמטרים שבהן עושים אלימינציה של המשתנה המבוקש, ובתהליך הפתרון נדרשים צעדים סטנדרטיים של פתירת משוואות ממעלה ראשונה או שנייה (דוגמאות בטבלאות 1 ו-3). במאמר זה נתייחס אל הידע הדרוש לפתירתן של משוואות אלה כאל ידע פרוצדורלי (אילני, 1997; Ilany & Hassidov, 2013, 2014).

משוואות פרמטריות "יישומיות" הן משוואות המכילות פרמטרים, והפתרון שלהן אפשרי לא רק על ידי אלימינציה אלא דורש גם יישום. נוסף לכך יש צורך להפעיל שיקול דעת לפני פתירת המשוואות הפרמטריות, כמו למשל, מציאת קשר בין פרמטרים. במקרים רבים לא נתקלו הנבדקים בהכרח בשאלות מסוג זה בעבר (דוגמאות בטבלה 4). במאמר זה נתייחס אל הידע הדרוש לפתירת בעיות מסוג זה כאל ידע מושגי.

אוכלוסיית המחקר

43 פרחי הוראה בשנים ג'ו-ד ללימודיהם להוראת מתמטיקה לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה בשלוש מכללות גדולות במרכז הארץ.

73 תלמידי כיתות י"ב ברמה גבוהה של לימודי מתמטיקה מארבעה בתי ספר תיכוניים מבוססים במרכז הארץ הנחשבים כבעלי רמת הוראה גבוהה במתמטיקה.

כלי המחקר

שאלון – נעשה שימוש בחלק משאלון שהכיל שש שאלות פרמטריות "פשוטות". במאמר נציג ממצאים של חמש שאלות פרמטריות "פשוטות": שלוש המכילות משוואות ממעלה שנייה ושתיים המכילות משוואות ממעלה ראשונה שבהן הפרמטר הוא ממעלה שנייה. השאלון הכיל גם שש שאלות פרמטריות "יישומיות". במאמר נציג ממצאים של שלוש שאלות כאלה. השאלון קיבל תיקוף ממומחים (אילני, 1997).

ראיונות – כדי להבין הבנה בלתי אמצעית את דרכי החשיבה של הנבדקים ולהתחקות אחריהן, רואיינו בריאיון סגור חמישה תלמידים ושישה פרחי הוראה. הראיונות עסקו באותם נושאים שהוצגו בשאלון. בניית הראיון נעשתה לאחר העברת השאלון וניתוחו כדי להבהיר ולחזק שאלות שהיו בשאלון.

תצפיות – בזמן העברת השאלון נערכו תצפיות פתוחות כדי לעקוב ולהתחקות בצורה בלתי אמצעית אחרי תגובות הנבדקים בתהליך פתרון השאלות.

עיבוד נתונים

כמותי – כולל טבלאות, התפלגויות ואחוזי הצלחה, מבחני χ^2 ומבחני t.

איכותני – נעשה באמצעות תצפיות בעת פתירת השאלונים, ניתוח ההסברים המילוליים של הפותרים לפי קריטריונים וקטגוריזציה ולפי ראיונות.

ממצאים

להלן יוצגו הממצאים שעלו מכל אחת מהשאלות שהיו כלולות בשאלונים מתוך שימת לב להבדלים בין

פרחי הוראה לתלמידים.

את הממצאים נציג לפי החלוקה של משוואות פרמטריות "פשוטות" ומשוואות פרמטריות "יישומיות". הטבלאות בסעיפים השונים מציגות אחוזי שגיאות ואחוזי הצלחה של הנבדקים במשימות השונות. הקטגוריות של שגיאות הנבדקים חולקו לשני סוגים: **שגיאות של חישוב ושגיאות שימוש באותיות**. האחרונות באו לידי ביטוי בהשמטת אותיות, בידוד האות הלא נכונה או הבעת האות באמצעות אותה אות עצמה (ראו דוגמאות בהמשך).

משוואות פרמטריות "פשוטות"

בחרנו להציג שלוש משוואות ממעלה שנייה בעלות מבנה דומה. בכל אחת מהן יש להביע את אחת האותיות באמצעות אותיות אחרות שונות ממנה.

טבלה 1: ניתוח משוואות פרמטריות "פשוטות" (תל=תלמידים, פ"ה=פרחי הוראה)

תלמידים		סוג המשוואה (דרך הפתרון)	אחוז הפותרים נכון	אחוז שגיאות חישוב	אחוז שגיאות שימוש באותיות	לא ענו	
n=7	פרחי n=4					תל	פ"ה
3	3						
השאלה	מספר						
בטאו את x (באמצעות a) במשוואה: $5x^2 + 8ax - 4a^2 = 0$	16	משוואה ממעלה שנייה, משוואה מסודרת	70 p=0.004	5	18 P=0.002	7	2
בטאו את c (באמצעות x) במשוואה: $c^2 + 3xc + 4x = 0$	1	משוואה ממעלה שנייה, משוואה מסודרת	63 P=0.001	1	33	3	2
בטאו את b (באמצעות x) במשוואה: $x^2 + 6bx + 5b^2 = 0$	9	משוואה ממעלה שנייה, משוואה לא מסודרת, צריך להביע את b באמצעות x .	28 43	0	66	4	16

השאלות בטבלה רשומות מהאחוז הגבוה יותר של הפותרים נכון אל האחוז הנמוך.

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$

המשוואות בשלוש השאלות בטבלה דומות במבנה: הן ממעלה שנייה ו"מסודרות" כמשוואה ריבועית. אולם בשאלה 16 ($5x^2 + 8ax - 4a^2 = 0$) מבקשים למצוא את x , אות הנתפסת על ידי תלמידים כמייצגת משתנה (אילני, 1997; Ilany, 1998), ואילו בשאלות האחרות מבקשים למצוא את c או את b , אותיות הנתפסות על ידי חלק מהנבדקים כמייצגות פרמטר (שם). בשאלות 16 ו-9 הפרמטר מופיע בחזקה שנייה ואילו בשאלה 1 הפרמטר מופיע בחזקה ראשונה.

מתוצאות המחקר מתקבל שעל שאלה 16 ענו טוב יותר מאשר על שאלות 1 ו-9. כלומר, נראה שסוג

האות השפיע על תשובות הנבדקים. המשוואה בשאלה 9 ($x^2 + 6bx + 5b^2 = 0$) דומה מאוד במבנה שלה למשוואות בשאלה 16, אולם בשאלה 16 התבקשו הנבדקים למצוא את x , ואילו בשאלה 9 התבקשו למצוא את b . התוצאות מראות שאחוז הפותרים נכון את שאלה 9 לעומת אחוז הפותרים נכון את שאלה 16 הוא בהפרש מובהק: 70% מתלמידים ענו נכון על שאלה 16 לעומת 28% שענו נכון על שאלה 9; 88% מפרחי ההוראה ענו נכון על שאלה 16 לעומת 43% שענו נכון על שאלה 9.

אחוז השגיאות הנובע משימוש באותיות גם הוא גבוה במידה ניכרת ומעיד על הפער בין הקבוצות באשר לשתי השאלות (66% שגיאות אצל תלמידים בשאלה 9 לעומת 28% שגיאות אצל תלמידים בשאלה 16; 36% שגיאות אצל פרחי הוראה בשאלה 9 לעומת 5% שגיאות אצל פרחי הוראה בשאלה 16). מהסברי הנבדקים בראיונות התברר שהאות שיש למצוא היא גורם משפיע על פתרון המשוואה. עוד גורם שהתגלה כמשפיע על פתרון המשוואה הוא סידור המשוואה.

חיזוק למשמעות של סידור המשוואה אפשר לראות בהשוואת תוצאות פתרון שאלות 9 ו-1. בשאלה 9 רשומה משוואה ($x^2 + 6bx + 5b^2 = 0$) הדומה במבנה למשוואה ($c^2 + 3xc + 4x = 0$) של שאלה 1, אך אינה מסודרת בסדר שבו פותרים בדרך כלל משוואה ריבועית כאשר רוצים להביע את b באמצעות x . כאן התקבלו התוצאות הנמוכות ביותר (28% תלמידים ו-43% פרחי הוראה פתרו נכון את המשוואה). הסיבות לכך הן כנראה הקושי בסידור המשוואה ובמציאת אות "לא מקובלת". בראיונות הוסבה תשומת הלב של המרואיינים לכך שיש להביע את b במשוואה בשאלה 9. אף שזה הודגש רוב המרואיינים הביעו את x . אחת המרואיינות (פרח הוראה) הביעה את x ואמרה: "את לא רוצה את x , את רוצה את b . באופן אוטומטי אני מוצאת את x , כי זו משוואה ריבועית". היא ניסתה להביע את b ואמרה: "אני לא יכולה למצוא את b . אני יודעת שיש אפילו שני פתרונות בגלל שיש $\Delta > 0$. אבל אני לא יכולה למצוא. אני חושבת שגם אי אפשר". בסוף הריאיון חזרנו אל השאלה ורשמנו את המשוואה $5b^2 + 6xb + x^2 = 0$ (במיוחד בסדר שונה ממה שהופיע בשאלון, הפעם כיוון שמחפשים את b , b^2 הופיע ראשון במשוואה). המרואיינת הביעה את b באמצעות x מידית ובלי כל בעיה. כלומר, במקרה זה סידור המשוואה באותיות – תהליך שהיא איננה רגילה אליו – הקשה עליה אף שאין לה קושי טכני בסידור משוואות. בשאלות אחרות שבהן נדרש הנשאל להביע את x במשוואה "לא מסודרת" היא פתרה בלי כל קושי. נוסף על כך היא הביעה גם אותיות שונות באמצעות x בלי כל קושי. לאחר הריאיון היא אמרה: "מעלה, אקפיד לתת לתלמידי להביע אותיות שונות, ובכל פעם לאו דווקא בסדר המקובל".

(הערה: סידור המשוואה בשאלה 9 הוא רק דרך אחת לפתור את המשוואה. דרך שנייה היא בהחלפת האותיות. כלומר, במקום b להציב את x , במקום x להציב את b , ולאחר שמוצאים את x צריך שוב להחליף את האותיות. יש לציין שבמחקר זה איש מהנבדקים לא השתמש בשיטה זו. שיטה שלישית היא להביע את x באמצעות b ורק לאחר מכן להביע את b באמצעות x . בשיטה השלישית השתמשו חלק מהנבדקים שפתרו נכון את השאלה).

האחוז הגבוה של השגיאות המאופיינות ב"שימוש באותיות" יכול לציין את הבעייתיות שיש לנבדקים בפתירת משוואות פרמטריות בעלות אותיות שונות.

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות

דוגמאות לשגיאות בשל שימוש באותיות בשאלה 1

בשאלה 1 (ראו טבלה 1) התשובה הנכונה היא: $c_{1,2} = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 - 16x}}{2}$.

בשאלה זו היה קושי לנבדקים לקבל תשובה "בלתי גמורה" מאחר שאת הביטוי שהתקבל בשורש אי אפשר להמשיך לפשט. בשל כך חלק מהנבדקים שרשמו תשובה נכונה מחקו את תשובתם. בטבלה 1 סומנו נבדקים אלה באחוז הפותרים נכון מאחר שההתייחסות הייתה לנבדקים שהביעו את c .

שגיאות נוספות

נבדקים שמצאו את x ולא את c (2% מפרחי הוראה); נבדקים שאמרו "אי אפשר למצוא את c כי הוא פרמטר" (5% מפרחי הוראה). c הוא פרמטר ולכן יכול להיות כל מספר; נבדקים שהביעו את c באמצעות c (4% מהתלמידים), למשל $c = \frac{-4x}{c} + 3x$; תלמידה שפתרה את שאלה 16 בלי כל בעיה, כתבה כאן: "אין לי שמץ של מושג" וכן נבדקים שהשמיטו את כל האותיות (2% מהתלמידים).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 9

נבדקים שמצאו את x ולא את b (11% מהתלמידים, 5% מפרחי הוראה); נבדקים שהביעו את b באמצעות b (6% מהתלמידים, 10% מפרחי הוראה), למשל $b = -\frac{x^2}{6x+5b}$; נבדקים שאמרו "אי אפשר" (16% מהתלמידים, 10% מפרחי הוראה), כי: "אי אפשר למצוא מכיוון שיש שני נעלמים ורק משוואה אחת", נימוק נוסף: "לא יכולים למצוא את b כי יש לנו משתנה נוסף x "; נבדקים שמצאו את x בהתעלמות מ- b : $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = 1, -5$ (3% מהתלמידים); נבדקים שהשמיטו חלק מהאותיות (6% מהתלמידים); נבדקים שאמרו " b הוא פרמטר לכן התשובה היא כל מספר" (2% מהתלמידים, 2% מפרחי הוראה).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 16

בשאלה 16 16% מהתלמידים ו-2% מפרחי ההוראה השמיטו את a מהתשובה הסופית, לדוגמה:

$$x_{1,2} = \frac{-8a+12a}{10} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = \frac{2}{5}$$

דוגמה נוספת

$$\frac{-8a+12a}{10} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = \frac{2}{5}$$

בכלליות אפשר לראות שפרחי הוראה פותרים טוב יותר מתלמידים.

להלן שתי שאלות הנראות כמשוואות ממעלה שנייה, אולם האות שצריך למצוא היא ממעלה ראשונה.

טבלה 2: ניתוח ממצאי משוואות פרמטריות "פשוטות"

תלמידים n=7 3 פרחי הוראה n=43		סוג המשוואה (מבחינת דרך הפתרון)	אחוז הפותרים נכון	אחוז שגיאות חישוב	אחוז שגיאות שימוש באותיות	לא ענו	
מספר השאל ה		השאלה	תל	פ"ה	תל	פ"ה	תל
5	בטאו את m במשוואה (באמצעות x): $7 - m = mx^2$	משוואה ממעלה ראשונה	88	67	3	0	29
			p=0.02			p=0.004	10
21	בטאו את x במשוואה (באמצעות a): $a^2(x-1)+1=-x-2ax$	משוואה ממעלה ראשונה אבל מזכירה משוואה ממעלה שנייה לא מסודרת. יש צורך בפתיחת סוגריים, כינוס איברים באמצעות a^2 (פרמטר שהועלה בחזקה) וסידור המשוואה. $a \neq -1$ יש מגבלה על a : וצריך לצמצם.	73	36	1	6	41
			*			p=0.00	14
							22
							7

* הנבדקים ביטאו נכון את x , אבל לא תמיד סיימו את התהליך. פירוט לכך מופיע בטבלה 3.

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$

בשאלה 5 התבקשו הנבדקים לבטא את האות m , אות הנתפסת על ידי חלקם כפרמטר (אילני, 1997). זוהי משוואה ממעלה ראשונה שתהליך הפתרון שלה אמור להיות פשוט, אולם רק 67% מהתלמידים השיבו נכונה ו-29% שגו בשגיאות הנובעות מאי-הבנת השימוש באותיות (דוגמאות לשגיאות מובאות בהמשך). אצל פרחי ההוראה 88% פתרו נכון, 10% שגו בשגיאות הנובעות משימוש לא נכון באותיות והאחרים שגו בשגיאות אחרות.

טבלה 3: פירוט ממצאי הנבדקים בשאלה 21 שביטאו נכון את x

אבל לא תמיד סיימו את התהליך

שאלה 21		אחוז הנבדקים שבודדו נכון $x = \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$	אחוז הנבדקים שביטאו את x נכון, צמצמו וציינו את תחום ההגדרה	אחוז הנבדקים שלא צמצמו ולא ציינו את תחום ההגדרה	אחוז הנבדקים שהציבו נכון. כתבו את תחום ההגדרה, אבל לא צמצמו	אחוז הנבדקים שהציבו נכון וצמצמו, אבל לא ציינו את תחום ההגדרה
תל	פ"ה	תל	פ"ה	תל	פ"ה	תל
27	73	1	19	8	30	5
						27
						19

בטאו את x
 $a^2(x-1)+1=-x-2ax$

	$p=0.0001$	$p=0.05$
--	------------	----------

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$

גם בשאלה 21 רשומה משוואה שהמשתנה שלה הוא ממעלה ראשונה. בשאלה זו נדרש למצוא את x , אות הנתפסת אצל רוב הנבדקים כמייצגת משתנה (אילני, 1997). המשוואה הנתונה מזכירה משוואה ממעלה שנייה והיא אינה משוואה "מסודרת". יש צורך בפתיחת סוגריים, בסידור המשוואה, בכינוס איברים באמצעות a^2 (פרמטר שהועלה בחזקה) ובביצוע טכניקה אלגברית, ובנוסף לכך יש מגבלה על a ($a \neq -1$). סדרת פעולות אלו על האותיות גרמה, כנראה, לשגיאות רבות במיוחד אצל התלמידים. רק 36% מהם ביטאו נכון את x באמצעות a . כלומר, התלמידים לא התייחסו לתחום ההגדרה ולצמצום ורשמו: $x = \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$ (פירוט נמצא בטבלה 3). לעומת זאת אצל פרחי ההוראה המצב היה טוב יותר: 73% מהם ענו תשובה נכונה. מניתוח הטעויות של הנבדקים נמצא כי 41% מהתלמידים לעומת 14% מפרחי ההוראה שגו שגיאות הקשורות באותיות.

מטבלה 3 עולה כי אחוז קטן ביותר מהנבדקים שביטאו נכון את x באמצעות a התייחסו גם אל תחום ההגדרה של הפתרון. חלק מהנבדקים שולטים רק בטכניקה האלגברית. תשובה מלאה ענו תלמידים בודדים (1%), ואחוז קטן ביותר של פרחי הוראה (19%).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 5

בשאלה 5 נדרש למצוא את m במשוואה: $7 - m = mx^2$ והתשובה הנכונה היא $m = \frac{7}{x^2+1}$.

תשובות שגויות לדוגמה:

- מצאו את x (3% מהתלמידים)
- ענו "אי אפשר" (10% מהתלמידים, 7% מפרחי הוראה)
- הפכו את המשוואה למשוואה ריבועית עבור m (3% מהתלמידים):

$$xm^2 + m - 7 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+28x}}{2x}$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+28x^2}}{2x^2} \quad \text{או:}$$

דוגמה נוספת

$$7 - m = mx^2 \Rightarrow mx^2 + m = 0 \Rightarrow m(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$x^2 + 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq -1$$

לכן תמיד נכון

הפתרון הנכון לשאלה 21

בשאלה 21 נדרש למצוא את x במשוואה $a^2(x-1)+1=-x-2ax$. התשובה הנכונה היא:

$$x = -\frac{a+1}{a^2+2a+1} = \frac{1}{a+1}, a \neq -1$$

ועבור $x=-1$, a יכול להיות כל מספר.

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 21

- 4% מהתלמידים הביעו את x באמצעות x , למשל:

$$a^2(x-1)+2ax+x+1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x-1)(x+1)}}{2(x-1)}$$

דוגמה אחרת:

$$x = \frac{-x(1+2a)}{a^2}$$

דוגמה נוספת

התלמידים רשמו $x = -2ax - a^2(x-1) + 1$ ואמרו "לכן אי אפשר לחלץ את x לבד".

- 6% מהתלמידים ו-2% מפרחי ההוראה הפכו את x ל- x^2 .
- 32% מהתלמידים ו-5% מפרחי ההוראה אמרו "לא יודעים".
- 3% מהתלמידים הביעו את a במקום את x .

משוואות פרמטריות "יישומיות"

בחרנו להציג שלוש שאלות המוצגות בטבלה 4. כדי לפתור את המשוואות האלה נידרש לבצע מספר שלבים, לבצע חקירה, וכמו כן הפתרון לא תמיד "נראה לעין".

טבלה 4: ניתוח שאלות פרמטריות "יישומיות" (תל=תלמידים, פ"ה=פרחי הוראה)

לא ענו	הציבו משוואה נכונה ולא סיימו או שגו בדרך	אחוז הפותרים נכון	סוג המשוואה (מבחינת דרך הפתרון) ודוגמאות לפתרונות	תלמידים פרחי הוראה n=73 n=43	שאלה מספר
תל פ"ה	תל פ"ה	תל פ"ה		השאלה	
32 27	19 40	49 33	צריך למצוא עבור איזה ערך של m , כלומר: $16m^2 - 4(m+3)(3m-2) = 0$ מסדרים את המשוואה: $4m^2 - 28m + 24 = 0$ לכן $m^2 - 7m + 6 = 0$, כלומר: ולכן $m_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2}$ $m_{1,2} = 1, 6$	מצאו לאלו ערכי m שני שורשי המשוואה מתלכדים: $(m+3)x^2 + 4mx + 3m - 2 = 0$	17
56 41	2 14	42 45	משוואה ממעלה שנייה, משוואה מסודרת, צריך למצוא עבור איזה ערכים של a ו- b , כלומר: $4a^2 - 4(a+b)(a-b) \geq 0$ לכן $4a^2 - 4a^2 - 4b^2 = 4b^2$ וזה תמיד אי שלילי	הוכיחו שלמשוואה $(a+b)x^2 + 2ax + a - b = 0$ יש לפחות שורש ממשי אחד לכל b ו- a	19
63 66	18 13	19 21	שתי משוואות אחת ממעלה שנייה, שאלה לא סטנדרטית, צריך להבין את הקשר בין שתי המשוואות. שני שלבים לפתרון: דרך א: הנגזרת של הפרבולה שווה לשיפוע הישר: $-2x + 6 = 2$ לכן $x = 2$ מאחר שעבור נקודת ההשקה שבה $x = 2$ מתקיים: $2x + c = -x^2 + 6x - 6$ לכן: $c = -2$ דרך ב: בנקודת ההשקה מתקיים: $2x + c = -x^2 + 6x - 6$ לכן: $x^2 - 4x + (c+6) = 0$ כדי שלמשוואה יהיה פתרון יחיד נדרש ש- $\Delta = 0$, לכן: $c = -2$ ולכן $16 - 4c - 24 = 0$	נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 6x - 6$ וישר מהצורה $y = 2x + c$ א. עבור איזה ערך של c ישיק הישר לפרבולה? (התוצאות ניתנו רק לסעיף א) ב. מה יקרה כאשר c גדול מהערך שמצאת בסעיף א? תן דוגמה אחת ל- c כזה. ג. מה יקרה כאשר c קטן מהערך שמצאת בסעיף א? תן דוגמה אחת ל- c כזה. ד. מה מאפיין את שלושת הישרים בסעיפים א, ב, ג? (או מה המשותף לשלושת הישרים?) התשובות בטבלה עבור סעיף א בלבד.	23

מתוצאות המחקר מתקבל שפחות מ-50% מהנבדקים פתרו נכון משוואות פרמטריות "יישומיות". אחוז גבוה ביותר של הנבדקים לא השיבו כלל על המשוואות "היישומיות". לדוגמה, בשאלה 23 66% מהתלמידים ו-66% מפרחי ההוראה לא ענו כלל. בקרב הנבדקים שענו תשובה שגויה נמצא שכל אחד מהם שגה שגיאה שונה. בחלק מהמקרים נמצא שפרחי ההוראה פתרו טוב יותר מהתלמידים.

דוגמאות לשגיאות של נבדקים

שאלות 17 ו-19 הן שאלות דומות: בשאלה 17 הפתרון הוא עם שוויון ומקבלים תוצאה מספרית. בשאלה 19 הפתרון מצריך טיפול באי-שוויון ובשני פרמטרים בו בזמן. נוסף לכך מקבלים פתרון "חיובי תמיד", כלומר מתקבל פתרון שאינו מספרי ולכן ייתכן שהוא אינו מובן תמיד לתלמידים. אחת מפרחי ההוראה כתבה:

"עברו מספר שנים טובות מאז שלמדתי את החומר, אז יש דברים שאני זוכרת, יש כאלה שניסיתי להסיק ממה שאני זוכרת ויש שאלות שפשוט אני לא יודעת איך להסתכל עליהם."

על שאלות 17, 19 ו-23 כתבה "לא זוכרת".

בשאלה 19 היא ניסתה לפתור:

$$D = (2a)^2 - 4(a+b)(a-b) = 4a^2 - 4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 = -4b^2$$

עכשיו צריך להוכיח ש- $c/a > 0$ - "אבל אני לא זוכרת איך להמשיך מכאן"

דוגמה לשגיאה של פרח הוראה בשאלה 17:

Handwritten work for problem 17. The equation is $x^2 - 4x + 3m - 2 = 0$. The student uses the quadratic formula: $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16m^2 - 4(m+3)(3m-2)}}{2(m+3)}$. They simplify the discriminant to $16m^2 - 12m^2 + 8m - 36m + 24 = 4m^2 - 28m + 24$. The final answer is $x_{1,2} = \frac{-4m \pm \sqrt{4m^2 - 28m + 24}}{2m+6}$.

דוגמה נוספת של פרח הוראה בשאלה 17:

Handwritten work for problem 17. The equation is $x^2 - 4x + 3m - 2 = 0$. The student uses the quadratic formula: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16m^2 - 4(m+3)(3m-2)}}{2(m+3)}$. They simplify the discriminant to $16m^2 - 12m^2 - 12m^2 + 24m + 24 = -4m^2 + 12m + 24$. The final answer is $x_{1,2} = \frac{-4m \pm \sqrt{-4m^2 + 12m + 24}}{2(m+3)}$.

חלק מהנבדקים ידעו שבשאלה 17 $\Delta = 0$ ובשאלה 19 $\Delta \geq 0$. אבל לא ידעו כיצד להמשיך.

תלמיד י"ב הלומד חמש יחידות מתמטיקה כתב כתשובה לשאלה 17:

בשאלה 23 סעיף א:

7% מהנבדקים ענו: $c = -6$ מכיוון ש- c במשוואה $y = -x^2 + 6x - 6$ שווה ל- (-6) .

3% מהנבדקים ענו: $c = 6$ מאחר ש- $y' = 2x + 6$

65% מהנבדקים לא ידעו בכלל איך להתמודד עם השאלה.

בסעיפים ב, ג, ד שבהם היה צריך להפעיל שיקולים לוגיים בלבד, רק כ-24% מהנבדקים ענו נכון.

אחת מפרחי ההוראה כתבה:

"הערה – אני כבר שכחתי את הפרבולות והמשוואות וזה בגלל המקצועות במתמטיקה שמלמדים אותנו."

סיכום ודין

במאמר זה הוצגו ממצאים הקשורים לשימוש במגוון אותיות בפתרון משוואות פרמטריות. באמצעות עיסוק במשוואות פרמטריות אפשר ללמוד על נקודות חולשה בידע של התלמידים במתמטיקה, וכמו כן מהטעויות אפשר ללמוד על אסטרטגיות שגויות.

הממצאים של המחקר הנוכחי לגבי **משוואות פרמטריות "פשוטות"** מראים כי בין 18% ל-66% מהתלמידים ובין 5% ל-36% מפרחי ההוראה ביצעו שגיאות בשימוש באותיות. במשוואות שבהן הופיעו גם אותיות שונות מ- x נתקלו הנבדקים השונים בקשיי פתרון, בעיקר כאשר נדרשו למצוא את הפתרון באמצעות אות אחרת מ- x . רוב הנבדקים הכירו את הטכניקות האלגבריות, אולם כאשר המשוואה לא הייתה "מסודרת" בצורה המקובלת, חלק נכבד מהם נתקל בבעיות בעת פתירתן (לדוגמה המשוואה $x^2 + 6bx + 5b^2 = 0$ שבה נדרש למצוא את b).

תוצאות המחקר מלמדות על הבדל מובהק בין פרחי ההוראה ובין תלמידים באחוזי ההצלחה ובביצוע שגיאות בפתרון המשימות. פרחי ההוראה פותרים משוואות פרמטריות "פשוטות" טוב יותר מאשר התלמידים. נמצא שיש הבדל מובהק בין האוכלוסיות בסוג השגיאה. תלמידים שוגים יותר מפרחי ההוראה בשגיאות הנובעות משימוש לא נכון באותיות.

במשוואות פרמטריות "יישומיות" פחות מ-50% מהנבדקים פתרו נכון. כמו כן התברר כי בחלק מהמקרים פרחי ההוראה פתרו טוב יותר מהתלמידים ללא הבדל מובהק. בשאלות אלו אין קושי טכני לתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ולפרחי הוראה, אבל הן מורכבות וצריך להפעיל שיקולים ומחשבה לפני פתירתן. סקמפ (Skemp, 1987) וכן פישביין ומוזיקנט (Fischbein & Muzicant, 2002) מעידים על כך שתלמידים למדו בעיקר בצורה פרוצדורלית, והם אינם מקשרים בזמן פתרון משוואות בין הידע המושגי ובין הידע הפרוצדורלי, ולפיכך החוקרים מדברים על החשיבות שבהבנה.

לדוגמה, שאלה 23 אינה מסובכת מבחינה טכנית, אך היא כנראה שאלה בלתי מוכרת לנבדקים. כ-65% מהם לא ענו על שאלה זו כלל וכלל. ייתכן שהדבר נובע מכך שזו הייתה השאלה האחרונה בשאלון, אולם נמצא שגם בראיונות האישיים לא ידעו הנבדקים לענות על השאלה. מתוך כך אנו מניחים שהתקבל חיזוק לגבי השגיאות והמסקנות שעלו מהתשובות של הנבדקים לשאלון, ולכך שהם לא ידעו כיצד לפתור את השאלה. ייתכן שהם אינם יודעים להתמודד עם שאלות מסוג זה, וכנראה חסרה לנבדקים הבנה מושגית שאותה היינו מצפים מתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ומפרחי הוראה לבית ספר על-יסודי. השגיאות שנעשו בתשובות על השאלה מעידות על חוסר הבנתה, כי אי אפשר לענות על שאלות מסוג זה בצורה טכנית. צריך להבין את השאלה, אפשר גם לשרטט אותה, מה שבהחלט יכול לעזור למצוא פתרון (אבל הנבדקים לא עשו זאת).

בכלליות נמצא כי אחוז הפותרים נכון משוואות פרמטריות "יישומיות" הוא נמוך מאחוז הפותרים משוואות פרמטריות "פשוטות". נוסף על כך, אחוז הנבדקים שלא השיבו כלל על המשוואות "היישומיות" הוא גבוה.

לסיכום, מחקר זה בדק את היכולת של תלמידי תיכון ופרחי הוראה לפתור ולהבין משוואות פרמטריות. נמצא שהקשיים של הנבדקים בפתרון משוואות פרמטריות נובעים כנראה מכך שהם עובדים בצורה טכנית, וחסרה להם ההבנה המושגית של משמעות פתרון המשוואה. הם לא מתעמקים במשמעות המשוואה ופתרונה, אלא ניגשים אוטומטית לפתור בלי לזהות את האות שצריך להביע ואת סוג המשוואה.

ממחקר זה אפשר ללמוד שמספר גורמים משפיעים על פתירת משוואות פרמטריות: האות שצריך להביע, הסידור של המשוואה וסוג המשוואה (פשוטה או יישומית).

הממצאים מלמדים על כך שבפתרון משוואות פרמטריות שוגים גם בשגיאות שבהן שוגים במשוואות בלי פרמטרים, כמו שגיאות חישוב, צמצום, העברה מאגף לאגף, תחום ההגדרה ועוד. נוסף לכך יש שגיאות ייחודיות למשוואות פרמטריות הקשורות לאותיות.

בדרך כלל משוואות עם פרמטרים קשות יותר לפתרון ממשוואות שאינן מכילות פרמטרים. זאת מאחר שבמשוואה עם פרמטרים ההתמודדות עם תהליך הפתרון כוללת גם את השלבים של פתרון משוואה רגילה נוסף להתמודדות עם הפרמטר, מה שמקשה על התהליך. חלק גדול מהנבדקים ניגשים לפתור את המשוואות הפרמטריות בצורה "אוטומטית" ואינם מפעילים שיקול דעת בכל שאלה. תוצאות דומות נמצאו אצל אילני ושמואלי (אילני ושמואלי, 2000; Ilany & Shmueli, 1998) שחקרו את נושא האוטומטיזם בקרב תלמידים ומורים בחטיבת ביניים.

השלכות המחקר

- מומלץ להגביר את מודעות התלמידים באמצעות שיח מתמטי לפתירת משוואות המכילות פרמטרים, לעורר דילמות, להדגיש את הדומה והשונה בין משוואות בלי פרמטרים למשוואות עם פרמטרים. כמו למשל, יש לשים לב לאות שצריך להביע אותה ולהקפיד על כך שלא נביע אותה באמצעות אותה אות עצמה. כמו כן רצוי לגוון את האותיות שבהן משתמשים הן כמשתנים והן כפרמטרים, מה שיגביר את הסיכוי שהתלמידים יהיו מקובעים פחות לאותיות מסוימות וירחיב את הבנת המושגים.
- כדאי שהמורים יקדישו תשומת לב מיוחדת להבהרת המושגים עצמם ולהבהרת הדומה והשונה ביניהם, ולא ילמדו אותם וישתמשו בהם רק בצורה טכנית. למשל, כאשר פותרים תרגילים שבהם משתמשים באותיות לסירוגין כמשתנה ופרמטר, יש להבהיר לעומק את השלבים השונים, ויש להתייחס לשימושים השונים של האותיות בכל שלב: משתנה, פרמטר או קבוע. חשוב לתת שאלות מהסוג שהרכבי (Arcavi, 1994) הציע:

נתונה הפונקציה הלינארית $y = mx + b$, x ו- y משתנים, m ו- b פרמטרים. כאשר מציבים ערכים עבור m ו- b מקבלים פונקציה מסוימת. מה קורה כאשר מציבים ערכים עבור x ו- y , למשל $2 = m3 + b$?

שאלות כאלה מחדדות את ההבדל בין תפקידי הפרמטרים לתפקידי המשתנים.

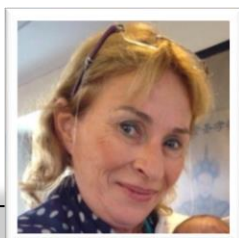
- מומלץ להציע לתלמידים להתנסות במשוואות דומות המופיעות באותיות שונות, ברמות סידור מגוונות, הוראות שונות וחזקות למיניהן. לתלמידים מתקדמים אפשר להציע בעיות המכילות משוואות פרמטריות "יישומיות". דוגמאות מופיעות אצל אילני (1997) ואילני וחסידוב (Ilany & Hassidov, 2013).
- ממצאי מחקר זה מלמדים על הצורך בהעמקת תחום הידע במשוואות פרמטריות. המלצתנו היא לערוך עוד מחקרים בתחום זה מאחר שהיכולת לפתור תרגילים המכילים פרמטרים משקפת ידע עמוק במתמטיקה, והעיסוק במשוואות פרמטריות עשוי להעמיק את ההבנה המתמטית ולעזור לתלמידים במיוחד באלגברה.

רשימת מקורות

- אילני, ב' (1997). תפיסת המושגים משתנה ופרמטר אצל תלמידי חמש יחידות מתמטיקה ופרחי הוראה (עבודת דוקטור). אוניברסיטת תל-אביב.
- אילני, ב' ושמואלי, נ' (2000). "אוטומיזם במציאת פתרון" אצל תלמידי חטיבת הביניים. **על"ה**, 25, 50-55.
- פרנקל, א"ה (1942). **מבוא למתמטיקה: בעיות ושיטות מן המתמטיקה החדשה** (כרך ראשון חלק ב). תל-אביב: מסדה.
- Almog, N., & Ilany, B., (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 347-364.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense, informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking – The case of parameter. In J. P. Ponte &

- J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88-95). Lisbon: University of Lisbon.
- Bloedy-Vinner, H. (1995). Analgebraic interpretation of algebraic expressions: Functions or predicates? In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 42-49). Ressifi: University of Ressifi.
- Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Carpenter, T. O., Corbett, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1982). Students' performance in algebra: Results from the national assessment. *School Science and Mathematics*, 82(6), 514-531.
- Davis, R. B., & Henkin, L. (1978). Inadequately tested aspects of mathematics learning. In *Testing, teaching, and learning: Report of a conference on research on testing* (pp. 83-97). Washington, D.C.: National Institute of Education.
- Fischbein, E., & Muzicant, B. (2002). Richard Skemp and his conception of relational and instrumental understanding: Open sentences and open phrases. In D. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Richard Skemp* (pp. 49-77). Flaxton, Queensland: Post Pressed Publishers.
- Flexer, B. K. (1984). Predicting eighth-grade algebra achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 352-360.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 368-375). Lisbon: University of Lisbon.
- Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Pre-service teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 95-102.
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580.
- Ilany, B. (1998). *The elusive parameter*. In *The 23rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 265). Stellenbosch: University of Stellenbosch.
- Ilany, B., & Hassidov, D. (2013). "Simple" & "not simple" parametric equations. In *The 37th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 70). Kiel: University of Kiel.
- Ilany, B., & Hassidov, D. (2014). Solving equations with parameters. *Creative Education*, 5, 963-968.
- Ilany, B., & Shmueli, N. (1998). "Automatism" in finding a "solution" among junior high school students. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 56-63). Stellenbosch: University of Stellenbosch.
- Karsenty, R., Arcavi, A., & Hadas, N. (2007). Exploring informal products of low achievers in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 26, 156-177.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27-32). Dordrecht: Springer Reference.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.

- Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 361-368). Bergen, Norway: Psychology of Mathematics Education.
- Sedivy, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 121-126.
- Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 121-131.



ד"ר דינה חסידוב

בוגרת אוניברסיטת חיפה (בשלושת התארים). חברת סגל בכיר במכללה האקדמית גליל מערבי, עד לאחרונה. מחקריה עוסקים בתפיסות שגויות של מורים וגננות בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובקדם יסודי ובמזידת הישגים בחשבון והערכתם בקרב תלמידים ביסודי ובגן הילדים. עוסקת בהכשרת מורים ומנחות להוראת מתמטיקה בגני ילדים, בשילוב טכנולוגיות חינוכיות בהוראה ולמידת מתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים ובשילוב טכנולוגיות חינוכיות בהשכלה הגבוהה.



ד"ר בת-שבע אילני

עוסקת במתמטיקה ובחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים ובאוניברסיטה הפתוחה. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, בייעוץ ובעריכה של חומרים וספרים המיועדים לגיל הרך, לבית-הספר ולהכשרת מורים למתמטיקה ואשר עוסקים בנושאים מגוונים. ביניהם הספרים: יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך: תאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות.

יצירתיות מתמטית של תלמידים

מבעד לעיני פרחי הוראה

חנה לב-זמיר, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון
ענת לבב-ויינברג, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון; בית ספר תיכון, סנור-כברי

תקציר

המחקר בדק את התפיסות המוקדמות של פרחי הוראה הנוגעות לשאלה מהי יצירתיות מתמטית וכיצד אפשר להעריך אותה. לצורך המחקר התבקשו 50 פרחי הוראה הנמצאים בהכשרה לקראת הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי לציין בכלליות כיצד לדעתם אפשר להעריך יצירתיות במתמטיקה. בנוסף לכך הם התבקשו לבצע הערכה כזו עבור תוצרים ספציפיים של תלמידים שונים. מניתוח הממצאים עולה כי כאשר ההתייחסות ליצירתיות מתמטית היא כללית, פרחי ההוראה חסרים ידע משותף (shared knowledge), דבר המתבטא בשונות רבה בתשובותיהם כמו גם בקשיי התנסחות. כאשר ההתייחסות היא לתוצרים מתמטיים ספציפיים, אפשר למצוא הסכמה רבה בדרך ההערכה תוך שימוש בנימוקים שאפשר לקשרם למושגים של גמישות ומקוריות. המחקר מלמד על חשיבות ההתנסות במשימות המעודדות יצירתיות כדי לפתח אצל פרחי ההוראה את הידע המשותף הנחוץ להערכת יצירתיות במתמטיקה.

מילות מפתח: מאפייני יצירתיות; הערכת יצירתיות; תפיסות פרחי הוראה; ידע משותף.

סקירת ספרות

יצירתיות מהי?

יצירתיות היא אחת מאותם מושגים שאמנם מרבים להשתמש בהם, אך לא קל להגדירם. אנו משתמשים במושג זה בתדירות, אולם מתקשים לנסח במילים למה באמת אנחנו מתכוונים (Henry, 2009). במחקר שנסקרה עד כה לא נמצאה הגדרה אחת ברורה ליצירתיות בהוראה בכלל, והגדרת היצירתיות בהוראה המתמטיקה בפרט (Lev-Zamir & Leikin, 2011). חוקרים רבים ביניהם פילוסופים, אנשים מתחום האמנות, פסיכולוגים ואנשי חינוך, ניסו להגדירה מתוך נקודות מבט למיניהן מתקופת יוון העתיקה ועד עצם היום הזה. סקירת הספרות בתחום היצירתיות מעלה יותר ממה הגדרות ופרשנויות רבות ומגוונות בנוגע למשמעותה ומהותה (Bolden, Harries, & Newton, 2010; Haylock, 1987; Mann, 2006). המחקרים בעשורים האחרונים מעידים על שינוי ביחס ליצירתיות – מתכונה מולדת שאי אפשר לפתח אותה לתכונה שאפשר ללמדה ולטפח (Silver, 1997). שינוי זה הביא לידי התעניינות מוגברת ביצירתיות מצד אנשי חינוך מתמטי הרואים חשיבות רבה בטיפוח תלמידים בעלי מיומנויות

חשיבה מסדר גבוה, ולא רק בעלי יכולת שליטה בביצוע אלגוריתם (למשל, Ball, Thames, & Phelps, 1997; Silver, 1997; Erynck, 2008). מחקר זה רואה בפיתוח יצירתיות מתמטית בכל תלמיד את אחת המטרות המרכזיות של החינוך המתמטי בבית הספר, וסבור שיצירתיות בהוראת המתמטיקה היא משמעותית לצורך השגת מטרה זו.

למורים בפועל ולמורים העתידיים יש תפקיד מרכזי בהאדרת המרכיבים היצירתיים אצל תלמידיהם (Mann, 2006; Silver, 1997) ועל כן חשוב ללמוד על תפיסותיהם באשר ליצירתיות בהוראת המתמטיקה. מחקר זה צמח מתוך ההנחה שבאמצעות למידה על תפיסות סטודנטים¹ להוראת המתמטיקה באשר ליצירתיות בהוראת המתמטיקה יהיה אפשר ללמוד כיצד לטפח אצלם תפיסות המביאות לידי הוראה יצירתית, וכיצד להכשירם להוראה המעודדת יצירתיות (Lev-Zamir, 2011). כיוון שאין הגדרה אחת ליצירתיות המחקר הנוכחי יתבסס על הערכת יצירתיות לפי שלושה מתוך רכיבי היצירתיות על פי טורנס, שיצירתיות בהוראה עשויה לטפחם (Torrance, 1967).

שטף (Fluency) – רכיב זה עניינו יכולת שליפת ידע סלקטיבית מתוך שימוש בידע בסיסי או ידע עולם; הכושר להיזכר במידע בתנאים מסוימים ולהביא לידי ביטוי יכולות וורבליות ורמות פירוט גבוהות מתוך התייחסות לפרטים רלוונטיים כדי לתאר את שטף הרעיונות ושטף האסוציאציות. שטף של תלמיד בעת פעילות מתמטית יתבטא במספר או בקצב הרעיונות העולים כתגובה לבעיה המתמטית, שטף ההסברים או מספר דרכי הפתרון שיציג לבעיה (Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Leikin, 2007; Silver, 1997; Torrance, 1967).

גמישות (Flexibility) – רכיב זה מאופיין ביכולת להתמודד עם בעיה בדרכים מגוונות ובהפקת פתרונות מגוונים (Leikin, 2007; Silver, 1997); יכולת לתכנן ולחקור בעיה בכיוונים שונים; יכולת שימוש באסטרטגיות מגוונות ויכולת לשנות כיוון בהפעלת שיקול דעת; יכולת להעמיק, לבחון את הפתרונות, ליצור בעיות חדשות (problem posing) ולהתמיד בחקר. הגמישות מתאפיינת בפתיחות לרעיונות, והכמיהה לפתרון ולהבנה גם אם הדבר קשה להשגה (Feldhusen, 2002; Plucker & Beghetto, 2004; Torrance, 1967). גמישות של תלמיד בעת פעילות מתמטית תתבטא בפתיחותו לפעול בכיווני חשיבה מסתעפים באמצעות העלאת שאלות או הצעת דרכי פתרון מגוונים.

מקוריות (Originality) – רכיב זה מאופיין בחשיבה ייחודית (Torrance, 1967); ביכולת ליצור רעיון חדש מתוך איחוד של רעיונות קיימים; יכולת לראות את הדברים בראייה שונה; להציג תשובות נדירות; לפרש עניין או חלק ממנו באורח שונה מהמקובל; להציג פתרון מקורי ובלתי צפוי או להעלות שאלה חדשה בעקבות זו שניתנה (Torrance, 1967).

חשוב לציין שלא כל המרכיבים חייבים להופיע בכל פעילות יצירתית, אך חלקם ראוי שיבואו לידי ביטוי, וראוי שהמורים יהיו מודעים לקיומם ויבחינו ביניהם (לב-זמיר, 2015). הוראה המכוונת ליצירתיות מעבר להיותה מאתגרת יש בה כדי לעורר בקרב התלמידים סקרנות, הנעה והנאה. יש בה גם כדי לטפח תלמיד מעורב, לתרום להבניית הידע המתמטי שלו, וחשוב לא פחות, לסייע להתפתחות הידע המתמטי והפדגוגי של המורה (Lev-Zamir, 2011).

1. במחקר זה הסטודנטים הם פרחי הוראה.

ידע מורים והשלכותיו על יצירתיות בהוראת המתמטיקה

חוקרים רבים, למשל לייקין (Leikin, 2007) וכן פלוקר ובגטו (Plucker & Beghetto, 2004) ראו בידע המורה את אחד היסודות שעליהם נבנית הוראה יצירתית. כדי שמורה יוכל לדון בעניינים ברעיונות לא שגרתיים של תלמיד, עליו "לגייס" את כל סוגי הידע שברשותו: **ידע תוכן מתמטי, ידע תוכן פדגוגי וידע קוריקולרי** (Shulman, 1986). ידע תוכן מתמטי ופדגוגי יאפשרו למורה לנווט דיון מתמטי כדי לבחון רעיון לא שגרתי, ואף להבנות ידע חדש על רעיון זה. כמו כן, סוגי ידע אלו יאפשרו זיהוי מהיר של תפיסה שגויה אצל התלמיד והתייחסות אליה, וזאת כדי להעמיק את ההבנה המתמטית שלו. הקשבה לרעיונות של תלמידים ולשאלות שהם מעלים מובילה את המורים לעתים למקום חדש שלא כתוב בספרי הלימוד. כדי "לתפוס" רעיון חדש של תלמיד על המורה להיות בעל ידע מתמטי וגמישות שיאפשרו לו להנחות שיח מתמטי בדרך שונה מהמתוכנן. הידע הקוריקולרי מאפשר למורה לקשור בדרך יצירתית ומושכלת בין נושאים שנלמדו בעבר ויילמדו בעתיד (Ma, 1999; Shulman, 1986).

חוקרים רבים רואים באמונות (beliefs) או תפיסות² (conceptions) סוג של ידע (Pajares, 1992; Scheffler, 1965) הקשור קשר הדוק לידע הפדגוגי ולעשייה בכיתה (בין אם תהיה זו הוראה מסורתית או הוראה המכוונת ליצירתיות). אמונות ותפיסות של מורים באשר ללימוד המתמטיקה ישפיעו על דרך ההוראה שלהם, על בחירת דרכי הלמידה, על בחירת הבעיות שהם מזמנים לתלמידים ועל דרכי ניווט השיח המתמטי (Pajares, 1992).

אמונות ותפיסות של מורים על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה

תומפסון (Thompson, 1984) ראה חשיבות רבה בהבנת הקשר בין תפיסות של מורים באשר למתמטיקה והוראת המתמטיקה והשלכותיהן על דרך ההוראה שלהם. במהלך 30 השנים שעברו מאז אמר את דבריו אלה, רבו המחקרים הבוחנים את סוגיית היצירתיות בהוראת המתמטיקה (Ervynck, 1991; Haylock, 1997; Mann, 2006; Silver, 1997). מספר מחקרים שפורסמו לאחרונה מוקדשים לתפיסות מורים על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה.

מחקרים ברחבי העולם מציגים ממצאים דומים באשר לתפיסות המורים באשר ליצירתיות בהוראה, הנשענות בעיקר על תוצרים מקוריים, על עצמאות הלומד, על כישורים בתחומי האמנויות המגוונים ועל עושר הדמיון. רבים מהם רואים בהוראת המתמטיקה תחום המזמן יצירתיות מצומצמת. מורים בבית הספר היסודי מאמינים אמנם בפיתוח יצירתיות במתמטיקה, עם זאת בפועל נראה כי מרבית ההוראה המעודדת יצירתיות באה לידי ביטוי בתחומי האמנויות: ציור, שירה וריקוד. נדיר עוד יותר לשמוע ממורים למתמטיקה בכיתות הגבוהות של בית הספר על תפיסות הרואות בהוראת המתמטיקה הזדמנות לטיפוח היצירתיות (Bolden et al., 2010; Plucker & Beghetto, 2004).

לב-זמיר ולייקין (Lev-Zamir & Leikin, 2011) מבחינות בשני סוגים עיקריים של תפיסות מורים באשר ליצירתיות בהוראת המתמטיקה: 1. תפיסות מורים מכוונות מורה – אלה קשורות לפעילות היצירתית של המורה ובאות לידי ביטוי בבחירת הפעילות, בעשיית התאמות לאוכלוסיית היעד ובתכנון

2. במחקר זה נשתמש במונחים: אמונות ותפיסות כביטויים לידע המורים.

מהלכה. בתפיסה זו יש עניין בידע מתמטי ובידע פדגוגי, והיא באה לידי ביטוי בדרך שבה המורה מדבר על העשייה שלו כמורה; 2. תפיסות מורים מכוונות תלמיד – אלה קושרות את הפעילות עם התלמיד: מימוניות שיוזקק להן, תוכנות שיפתח, שאלות שייתכן שיעלו, הידע המתמטי שיביא לידי ביטוי והיכולות שלו להתמודד עם הפעילויות. הבחנה זו תואמת במידה רבה את הבחנתם של בולדן ואחרים (Bolden et al., 2010) בין הוראה יצירתית הממוקדת יותר במורה ובתהליכי ההוראה לבין למידה יצירתית הממוקדת בתהליכי הלמידה ובתהליך היצירתי שחוזה התלמיד. המחקר הנוכחי מתמקד בעיקר בתפיסות המורים המכוונות לתלמיד.

בהתייחס למורכבות מלאכת ההוראה קגן (Kagan, 1992) וריימונד (Raymond, 1997) מפנים את תשומת הלב להבחנה בין יכולת המורה להציג את תפיסותיו ובין היכולת שלו לממשן בפועל. שני מצבים אלה עשויים להיות בשני מישורים שונים של אמונות המורים: אמונות ברובד עמוק ואמונות על פני השטח. במחקר של לב-זמיר ולייקין (Lev-Zamir & Leikin, 2013) נמצא שככל ששני הרבדים הללו קרובים יותר זה לזה, תהיה הלימה בין הצהרת המורה באשר ליצירתיות בהוראה ובין ההוראה בפועל. הלימה זו באה לידי ביטוי בעצמה רבה ככל שהיצירתיות של המורה מכוונת תלמיד.

מחקרן של שריקי ולביא (Shriki & Lavy, 2012) בחן תפיסות מורים בבתי ספר תיכוניים, וממצאיו מחזקים את הפער בין אמונותיהם המעידות על חשיבות טיפוח יצירתיות בקרב תלמידיהם, ועם זאת בפועל מציינים את גורם הזמן, הלחץ והידע הנוגע למבחנים החיצוניים, שבהם התלמידים אינם נדרשים להפגין יצירתיותם, עובדות המשמשות מכשול במימוש אמונותיהם.

תפיסות של פרחי הוראה על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה

ממחקרים שערכו בולדן ואחרים (Bolden et al., 2010) וגם פנאורה ופנאורה (Panaoura & Panaoura, 2014) על אודות תפיסות של סטודנטים באשר להוראת המתמטיקה אפשר ללמוד, כי רובם המכריע רואים במתמטיקה מקצוע שאינו מזמן יצירתיות, ועל כן טיפוחה בהוראה היא משימה קשה לביצוע. חלק מתפיסות אלה נבעו מתוך ניסיון חייהם בהיותם תלמידים. במהלך ראיונות עם הסטודנטים התברר שלמרות התפיסות שהביעו בשלב ראשון, הם ציינו את החשיבות שהם רואים בהוראה המכוונת לטיפוח היצירתיות ואת מידת החיוניות בהכשרה המכוונת להשגת מטרה זו כדי שיוכלו לטפח יצירתיות בתלמידיהם. ממחקר שערכה ברג (Berg, 2010) עולה שפרחי ההוראה רואים חשיבות במתן משימות המעודדות יצירתיות לתלמידים בעלי הישגים גבוהים בלבד. תפיסה זו עומדת בסתירה לתפיסה שיצירתיות נכונה וחיונית לכל תלמיד (Ball et al., 2008; Silver, 1997; Zazkis & Holton, 2009). רבים מהסטודנטים במחקרה של ברג (Berg, 2010) הציגו תפיסה הרואה בהצגת בעיות לא שגרתיות סיכון שעלול להביא לידי מצב שבו לא יצליחו לעמוד בדרישות תכנית הלימודים, ולכן מתוך רגש אחריות כלפי התלמידים יעדיפו להציג בעת ההוראה בעיות רוטיניות מספר הלימוד.

במהלך המחקר שערכו בולדן ואחרים (Bolden et al., 2010) היה אפשר לזהות בתפיסותיהם של פרחי ההוראה התייחסות ליצירתיות מכוונת מורה וליצירתיות מכוונת תלמיד. חשוב לציין, שתפיסות אלה הובעו בכלליות ולוו בקושי בהבאת דוגמאות ספציפיות. במרבית הדוגמאות שניתנו ליצירתיות התייחסו הסטודנטים למשמעות של הנאה ויצירת סקרנות שהוראה יצירתית מספקת, ופחות להקשר של יצירתיות

מתמטית המכוונת לטיפול חשיבה והבנת עקרונות מתמטיים. שלוש קטגוריות זוהו בתפיסותיהם:

א. תפיסות העוסקות בהוראה וכוללות שתי תתי-קטגוריה: א. שימוש יצירתי במקורות לפעילויות. עיקר הדוגמאות שהביאו היו מתחום הגאומטריה ומשחקים חשבוניים; א.2 דרכי הביצוע, יישום וקישור רעיונות ותכנים מתמטיים עם חיי יום-יום.

ב. תפיסות העוסקות בלמידה וכוללות שתי תתי-קטגוריה: ב.1 פעילויות המאפשרות לתלמידים לחקור דרכי פתרון אישיים ולגלותן, פעילויות המעודדות גילוי רעיונות מתמטיים מעבר לתרגול והצגת מענה צפוי לשאלות מתמטיות שגורות. הדוגמאות שהציגו להמחשת התפיסות הובאו מתחום הגאומטריה ושימוש יצירתי בארבע פעולות החשבון. מהדוגמאות שהביאו לא היה אפשר ללמוד על התהליך שבאמצעותו ניתן לטפח את היצירתיות בעזרת הפעילויות המוצעות, והדרך שבה המורה מעודד יצירת הכללות לרעיונות המתמטיים; ב.2 פעילויות שמטרתן לפתח גמישות בקרב התלמידים, פתרון בעיה בדרכים מגוונות ובחירת אסטרטגיה לפתרון המתאימה לסיטואציה הנתונה ולידע של התלמיד.

ג. תפיסות העוסקות ביצירתיות בדרכי הערכת התלמידים. הערכה באמצעות משימות העשויות להעיד על הבנה מושגית ופחות על יכולות פרוצדורליות, כלומר משימות הנדרשות לתכנים מתמטיים מגוונים.

על בסיס ניתוח דיון שנערך עם סטודנטים להוראת המתמטיקה שריקי (Shriki, 2010), וגם פנאורה ופנאורה (Panaura & Panaura, 2014) טוענים שהידע של הסטודנטים על אודות היצירתיות בהוראה אינו מספיק כדי לקיים דיון מעמיק בנושא. יש פער בין ההצהרות שלהם כשהם מתארים מאפייני יצירתיות בפעילויות ובין יכולתם להדגים פעילויות מסוג זה.

בולדן ואחרים (Bolden et al., 2010) ניתחו שאלונים וראיונות מובנים למחצה עם סטודנטים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי בנוגע לתפיסותיהם באשר ליצירתיות. הם הראו שתפיסות אלה צרות היקף ומקושרות בדרך כלל עם פעולה ספציפית של המורים. מהאמור לעיל נראה שעולם הידע של המורים כמו גם של פרחי הוראה על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה הוא בעיקר ידע אינטואיטיבי. ידע זה לא עבר תהליך של למידה קבוצתית שבעקבותיה נעשו עיבוד והמשגה של רעיונות.

קוב, סטפן, מק'קלין וגריבמאייר (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001) מרבים לדבר על חשיבות הלמידה הקבוצתית. לדבריהם, יש קשר הדוק בין הידע הנבנה על ידי הלומד היחיד ובין הידע הרחב הנבנה על ידי אינטראקציה עם הקבוצה. הדיון הקבוצתי יוצר תשתית לידע משותף – Shared knowledge – שבו התלמיד נדרש לחלוק עם הקבוצה את רעיונותיו, להסבירם ולהתייחס לרעיונות של אחרים. כל אחד מהשותפים תורם לכלל ונתרם מממנו בתהליך שבמהלכו נבנית שפה משותפת ומוסכמת בנושא (Herskowitz, Hadas, Dreyfus, & Schwarz, 2007). ממצא זה מעלה את ההשערה שלימוד פורמלי על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה כחלק מתהליך ההכשרה הוא חיוני לצורך הבניית ידע שיתופי בנושא. לימוד זה עשוי להביא לידי שינוי בידע של פרחי הוראה, ויאפשר להם שימוש בטריטוריה מוכרת מספרות המחקר ובקריטריונים מוסכמים בעת בחירה של משימה מתמטית וניתוח מאפייני היצירתיות שלה.

מאפייני חשיבות שמעודדות יצירתיות

המאפיינים של פעילויות שעשויות לתרום לפיתוח יצירתיות התלמיד הם רבים: התמודדות עם בעיות לא שגרתיות, בעיות פתוחות או בעלות דרכי פתרון רבות ומגוונות, פעילויות חקר, העלאת שאלות, פעילויות המזמנות שיח מתמטי עשיר, הסקת מסקנות ובניית הכללות (Ball et al., 2008; Jaworski, 1994). פעילויות מסוג זה כרוכות בלקיחת סיכון והתמודדות עם רעיונות לא מוכרים המזמנים שיתוף והתלבטות (Mann, 2006; Sriraman, 2009). המורה נדרש לבחור בחירה מושכלת במשימות הן מספר הלימוד והן מעבר לו. בבחירת המשימות עליו להיות מודע לפוטנציאל היצירתי הטמון בכל אחת מהן מתוך התחשבות במרכיבי היצירתיות על פי טורנס (Torrance, 1967).

ג'ורסקי (Jaworski, 1994) רואה באתגר המתמטי חלק מרכזי בתכנון הפעילות מעצם היותו מעורר סקרנות, דורש התמודדות ומחייב גיוס ידע רב כדי להתמודד איתו. בקרב אנשי החינוך המתמטי אין תמימות דעים באשר להגדרה מדויקת של המושג "בעיות אתגר". עם זאת, יש הסכמה שפתרון בעיות המזמנות פתרונות מגוונים או דרכי פתרון מגוונות מזמן לתלמידים חקר וכן נרחב להסקת מסקנות, לבניית הכללות ולהעלאת שאלות, כמו למה? ומה אם...? כמו כן תרומתן של בעיות מסוג זה רבה לפיתוח היצירתיות ולהרחבה הידע המתמטי של התלמיד והעמקתו (Jaworski, 1994; Herskovitz, Peled, & Littler, 2009; Zazkis & Holton, 2009).

ממחקר שערכה צ'יאו (Chiu, 2009) אפשר ללמוד כי המורים יודעים להבחין בין בעיות שגרתיות שאינן מזמנות יצירתיות ובין בעיות לא שגרתיות. המורים אפיינו את הבעיות מהסוג האחרון כבעיות שמאפשרות דמיון רב יותר, שאינן תלויות בפרוצדורה ספציפית לצורך פתרוןן, שדורשות בחינת אסטרטגיות לפעולה ומאפשרות פתרונות מגוונים. מאותו מחקר (Chiu, 2009) היה אפשר ללמוד כי מעבר לזיהוי הבעיות כשגרתיות ולא שגרתיות, אין למורים די כלים כדי להציג בעיות המעודדות יצירתיות, ובדרך כלל למרות הפוטנציאל היצירתי שזיהו בבעיות אלה, דרכי ההוראה שלהם לא זימנו את היצירתיות הטמונה בהן. חלק מהמורים ליוו את התלמידים באמצעות שאלות תומכות, הוסיפו פרטים חסרים בבעיה המקורית (ובכך סגרו אותה לתשובות אפשריות מגוונות), או אף הטילו ספק ביכולתם של התלמידים להתמודד עם בעיות ללא כל הנתונים הנדרשים, ולכן הנחו אותם שלב אחרי שלב.

הכשרת מורים כמנונת טיפוח יצירתיות

מחקרים מלמדים על כך שפרחי ההוראה מגיעים לתכניות של הכשרת המורים עם תפיסות ואמונות שנבנו על התנסויותיהם הקודמות, ובמרבית המקרים לא חוו תהליכי למידה המכוונים לטיפוח היצירתיות, ולא רכשו כלים להערכתה (Bolden et al., 2010). באשר לתפיסותיהם של פרחי ההוראה נמצא פער בין הצהרותיהם על סוגי בעיות המזמנות יצירתיות ובין היכולת שלהם להציג דוגמאות לפעילויות כאלה. הידע ההצהרתי על אודות היצירתיות אינו מספיק. יש לקשור תאוריה ומעשה כדי ללמד את פרחי ההוראה לזהות את הפוטנציאל היצירתי במשימה, וכן להעלות את רמת המודעות שלהם למאפייני היצירתיות ולדרכי ההוראה המכוונות לפיתוחה (Panaoura & Panaoura, 2014; Shriki, 2010). נראה כי לפרחי ההוראה כמו גם למורים אין התנסות מוקדמת מספקת כדי שיוכלו לפתח יצירתיות של התלמידים (Bolden et al., 2010; Chiu, 2009; Panaoura & Panaoura, 2014; Shriki, 2010).

(2010). מורים ופרחי הוראה מאמינים שיש להציג לפני התלמידים משימות המכוונות לפיתוח היצירתיות, אך מרגישים בחוסר ידע בכל הקשור לבחירת המשימות ולדרכי הצגתן לתלמידים. נוסף לכך הם מביעים חשש שמא לא "יספיקו" ללמד את כל החומר הנדרש לפי תכנית הלימודים (Berg, 2010).

לב-זמיר (2016) עוסקת במחקרה במקומו של תהליך התנסות בהוראה מקדמת יצירתיות במהלך הכשרת הסטודנטים להוראת המתמטיקה. תאורטית הסטודנטים נחשפים למאפייני היצירתיות: שטף, גמישות, מקוריות, הרחבה ופירוש (Torrance, 1967), מעשית הם מתנסים בפתרון בעיות בעלות פוטנציאל לטיפוח היצירתיות. בהמשך להתנסות האישית שלהם בהיותם לומדים מתקיים דיון קבוצתי המאפשר יצירת ידע שיתופי (Shared knowledge), והסטודנטים מנתחים את אוסף דרכי הפתרון שהתקבלו מתלמידי בית ספר לאותה בעיה, תהליך שמאפשר בניית קשר בין תאוריה למעשה. הסטודנטים בוחנים את הידע המתמטי שלהם, אך גם את הידע של התלמידים באמצעות דרכי פתרון מגוונות לבעיה ספציפית ובונים את המשמעות של מאפייני היצירתיות. תהליך זה תורם להתפתחות הידע על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה. להתנסות שלהם במהלך הכשרתם להוראה, לדיונים המשותפים ולהבניית הידע השיתופי יש השלכות על התפיסות והאמונות שתתגבשנה לקראת היותם מורים בפועל (Lev-Zamir & Leikin, 2013; Bolden et al., 2010; Herskowitz et al., 2007; Levenson, 2013; Shriki, 2010).

מתוך האמור לעיל עולה כי על פרחי ההוראה להיחשף במהלך הכשרתם להגדרה אופרטיבית של יצירתיות, שתאפשר להם לפעול על פיה. הכרת מאפייני היצירתיות תאפשר לפרחי ההוראה ללמוד לנתח ולהעריך את הפוטנציאל היצירתי הטמון בכל משימה שיבחרו, כמו גם לדעת לאילו תוצרים עליהם לצפות מתלמידיהם. עליהם ללמוד כיצד אפשר להסב כמעט כל פעילות מתמטית לפעילות חקר עשירה ועמוקה המשלבת חקר וגילוי, הסקת מסקנות וניסוח הכללות, פיתוח יכולת של עשיית רפלקציה על הפעילויות הנבחרות והבחנה בין משימות מגוונות (לב-זמיר, 2015; Levenson, 2013). כדי שפרחי הוראה ילמדו לטפח את יצירתיות התלמיד, עליהם לזהות כיצד היצירתיות באה לידי ביטוי אצלו, ולשם כך הם זקוקים לדרכי הערכה של יצירתיות.

קריטריונים להערכת היצירתיות של תוצר התלמיד

בעשור האחרון נערכו מספר מחקרים המרחיבים את ביטוייה של היצירתיות ושל תפיסות על אודות היצירתיות בהוראת המתמטיקה לתהליכי הערכת היצירתיות של התלמידים. על בסיס הפתרונות המגוונים שהציגו מורים מומחים לכל בעיה אפשר להעריך את היצירתיות של התלמיד או הקבוצה על פי קריטריונים של שטף, גמישות ומקוריות שהפגינו בפתרונותיהם (Levav-Waynberg & Leikin, 2009; Leikin, 2012). לבב-ויינברג ולייקין (Levav-Waynberg & Leikin, 2012) פיתחו מודל המשתמש בקריטריונים אלה לצורך הערכת יצירתיות של תלמידים בפתרון בעיות גאומטריות בדרכים מגוונות (Multiple-Solution Tasks). לאחר מכן לייקין ולב (Leikin & Lev, 2013) השתמשו במודל דומה להערכת יצירתיות של תלמידים בעת התמודדות עם פתרון בעיות מתחומים מתמטיים מגוונים, תוך שהן בוחנות את דרכי הפתרון המגוונות הכוללים: שימוש בייצוגים וויזואליים, פתרונות

אריתמטיים, פתרונות אלגבריים ופתרונות המלווים בהסברים מילוליים.

אמנם המחקרים לעיל עסקו בהערכת היצירתיות של תלמידים בלבד, אך אפשר להשתמש במודל ההערכה שתואר בהם גם כדי להעריך את הפוטנציאל היצירתי של המשימה המתמטית עצמה. לא נמצאו מחקרים שמטרתם המפורשת הערכת פוטנציאל יצירתי של משימות המתמטיות.

הצעד הראשון לקראת בניית תכנית הכשרה לפרחי ההוראה שתפתח את הידע הנחוץ לטיפול יצירתי התלמיד ותספק כלים להערכת יצירתיות זו, הוא זיהוי התפיסות הנוגעות ליצירתיות מתמטית שאֵתן מגיעים פרחי הוראה ללימודי ההוראה והערכה. מיפוי תפיסות אלה עשוי לחדד את האבחנה במה תכנית ההכשרה צריכה להתמקד כדי לחנך דור חדש של מורים המעודדים יצירתיות מתמטית. בכך עוסק המחקר הנוכחי.

סתודולוגיה

מטרת המחקר הייתה לבחון את הידע המוקדם של פרחי הוראה בנושא יצירתיות בהוראת מתמטיקה בטרם נחשפו להוראה פורמלית של הנושא. ידע זה מתבטא בתפיסותיהם המוקדמות באשר ליצירתיות של תלמידים במתמטיקה והדרך שבה הם מציעים להעריך אותה.

שאלות המחקר

1. כיצד נתפסת יצירתיות התלמיד במתמטיקה בעיני פרחי הוראה?
2. דמיון ושוני בדרך שבה סטודנטים מעריכים יצירתיות של תלמידים במתמטיקה.
3. האם אפשר לזהות הלימה בין הערכה של יצירתיות עבור משימה ספציפית ובין הערכה כללית של יצירתיות התלמיד במתמטיקה?
4. באילו נימוקים משתמשים פרחי ההוראה כשהם מעריכים יצירתיות של תלמידים במתמטיקה, ואילו קריטריונים הם מציינים כדי לאפיין את הערכתם?

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 50 פרחי הוראה בתחום הוראת המתמטיקה לבית הספר היסודי. נתוני המחקר נאספו בשיעור הראשון של הסטודנטים בקורס ששמו "יצירתיות בהוראת המתמטיקה". הקורס נלמד במהלך שנת ההכשרה השנייה.

מהלך המחקר

שלב א': עם תחילת השיעור התבקשו הסטודנטים לענות אישית בכתב על שאלון פתוח שבדק את התפיסות המוקדמות שלהם על אודות יצירתיות במתמטיקה.

שלב ב': לאחר שמילא את השאלון התבקש כל סטודנט לבצע משימה מתמטית.

שלב ג': לאחר ביצוע המשימה המתמטית קיבל כל סטודנט דף שבו מתוארים הפתרונות של ארבעה תלמידים שונים למשימה שניתנה בשלב הקודם. כל סטודנט התבקש לדרג את ארבעת התלמידים לפי מידת היצירתיות שהפגינו ולנמק את שיקוליו.

כלי המחקר

השאלון: השאלון שניתן לסטודנטים בשלב א' של המחקר כלל שמונה שאלות (נוסח השאלון בנספח 1). מחקר זה יתמקד בתשובות על שאלה 5:

כיצד היית מציעה להעריך את מידת היצירתיות המתמטית של תלמיד? באילו קריטריונים להערכה היית משתמשת?

המשימה: המשימה שניתנה לסטודנטים בשלב ב' מתוארת באיור 1. משימה זו נבחרה כיוון שהיא עונה על הקריטריונים של משימה המאפשרת יצירתיות (Ball et al., 2008; Jaworski, 1994): היא פתוחה; בעלת תשובות נכונות רבות מאוד ולכן מאפשרת שטף; אפשר לספק לה תשובות מגוונות מאוד ושונות מהותית זו מזו ועקב כך יש מקום למקוריות רבה.

לפניכם המספרים:

2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 21, 25, 28, 49.

- בנו כמה שיותר קבוצות של ארבעה מספרים עם תכונה משותפת או כלל משותף.
- יש לתת לכל קבוצה שם המייחד את ארבעת המספרים שבקבוצה מיתר המספרים שברשימה.
- יש להשתמש בכל אחד מהמספרים לפחות פעם אחת.

איור 1: המשימה שניתנה בשלב ב'

דירוג פתרונות של ארבעת התלמידים

לפני הסטודנטים הוצגו פתרונותיהם של ארבעה תלמידים (איור 2) למשימה שהוצגה בשלב ב' (איור 1). הם התבקשו לדרג מ-1 עד 4 את מידת היצירתיות של כל תלמיד על סמך פתרונות אלה. דירוג 4 משמעו שהתלמיד היה יצירתי ביותר ואילו דירוג 1 משמעו שהתלמיד היה הכי פחות יצירתי מבין הארבעה. הסטודנטים התבקשו לנמק את שיקוליהם בהערכת היצירתיות. בחירת התשובות של ארבעת התלמידים כפי שהוצגו בפני הסטודנטים נעשתה לפי השיקולים הבאים (סדר הצגתן כאן הוא לפי דרגת יצירתיות עולה):

ים (תלמיד 2) השיב יחסית מעט תשובות (3 לעומת 5 שנתנו אחרים) וכולן היו מאותו הסוג: קבוצות של כפולות (שטף נמוך, גמישות נמוכה, ללא מקוריות³).

גל (תלמיד 1) השיב יותר תשובות אך משני סוגים בלבד (כפולות והכי קטן או הכי גדול) שמתוכם סוג אחד הוזכר על ידי כל השאר, וסוג שני אינו מצריך ידע מתמטי רב (שטף גבוה יותר, גמישות קצת יותר גבוהה, מקוריות נמוכה).

שי (תלמיד 3) השיב 4 תשובות שונות ומגוונות הדורשות ידע מתמטי (מספרים ריבועיים, הפרשים וכדומה) אך גם טעה בתשובה אחת (שטף נמוך יותר מגל, גמישות מרובה ומקוריות בידע המתמטי שהציג).

טל (תלמיד 4) השיב 4 תשובות שונות הדורשות ידע מתמטי, אך פחות מהידע שהפגין שי וגם השיב תשובה אחת שיצאה מתחום המתמטיקה (שטף וגמישות גבוהים, מקוריות חוץ-מתמטית).

3. מקוריות נקבעה מתוך היכרות עם המשימה ועם התשובות הנפוצות בקרב העונים עליה.

באמצעות הדירוגים שנקבעו לארבעת תלמידים אלה הייתה כוונה לבחון את ההתייחסות של הסטודנטים לרכיבים של שטף, גמישות ומקוריות מחד גיסא, ולבדוק מה התייחסותם למאפיינים של ידע מתמטי, ביצוע טעות אחת והכנסת תשובה שאיננה בעלת אופי מתמטי מאידך גיסא.

דרכי הניתוח

כדי לענות על שאלת המחקר בוצע ניתוח כמותי של דירוגי הסטודנטים את היצירתיות של התלמידים (איור 2). כמו כן בוצע ניתוח איכותי לנימוקים שכתבו הסטודנטים לדירוגים שקבעו וכן לתשובותיהם על שאלה 5 מהשאלון (נספח 1: שאלון פתיחה).

תלמיד 2

י"ם	שם הקבוצה – התכונה שמייחדת את הקבוצה	ארבעת המספרים שבקבוצה
1	כפולות של 5	25, 15, 10, 5
2	כפולות של 7	49, 28, 21, 7
3	כפולות של 3	21, 15, 9, 3
הדירוג:		

תלמיד 1

גל	שם הקבוצה – התכונה שמייחדת את הקבוצה	ארבעת המספרים שבקבוצה
1	כפולות של 5	25, 15, 10, 5
2	כפולות של 7	49, 28, 21, 7
3	כפולות של 3	21, 15, 9, 3
4	המספרים הכי קטנים ברשימה	2, 3, 4, 5
5	המספרים הכי גדולים ברשימה	49, 28, 25, 21
הדירוג:		

תלמיד 4

טל	שם הקבוצה – התכונה שמייחדת את הקבוצה	ארבעת המספרים שבקבוצה
1	המספרים הכי קטנים ברשימה	2, 3, 4, 5
2	מספרים דו ספרתיים שספרת העשרות קטנה מספרת האחדות	28, 25, 15, 49
3	מספרים שמסתיימים באות ע'	4, 7, 9, 49
4	כפולות של 5	25, 15, 10, 5
5	רצף של 4 מספרים עוקבים	2, 3, 4, 5
הדירוג		

תלמיד 3

שי	שם הקבוצה – התכונה שמייחדת את הקבוצה	ארבעת המספרים שבקבוצה
1	דו ספרתיים שספרת העשרות 2	28, 25, 21, 49
2	מספרים ריבועיים	4, 9, 25, 49
3	רצף של 4 מספרים שההפרש ביניהם 2	3, 5, 7, 9
4	רצף של 4 מספרים עוקבים	2, 3, 4, 5
5	כפולות של 5	25, 15, 10, 5
הדירוג		

איור 2: פתרונות של ארבעת התלמידים

ממצאי המחקר

האופן שבו תופסים פרחי ההוראה את יצירתיות התלמיד נבחן למעשה בשני מצבים: 1. כשאלה פתוחה ומופשטת: "כיצד היית מציעה להעריך את מידת היצירתיות המתמטית של תלמיד? באילו קריטריונים להערכה היית משתמשת?" 2. כשאלה קונקרטית: "לפניכם תוצרים של 4 תלמידים שענו על משימה

זו. דרגו אותם מ 1-4 בסולם היצירתיות: ציון 4 הוא הציון הגבוה ביותר ביצירתיות וציון 1 הוא הנמוך. נמקו את שיקולי החלטתכם."

התייחסות כללית להערכת יצירתיות מתמטית של תלמיד

על השאלה: "כיצד היית מציעה להעריך את מידת היצירתיות המתמטית של תלמיד? באילו קריטריונים להערכה היית משתמשת?" התקבלו תשובות רבות ומגוונות. התשובות השונות חולקו לשלוש קטגוריות עיקריות: האחת כללה תשובות שנגעו למאפייני התלמיד עצמו; השנייה נגעה למאפייני התוצר של התלמיד והשלישית נגעה לכלי הערכה – באילו נסיבות/סביבות אפשר להעריך יצירתיות בלי לספק את הקריטריונים להערכה. נוסף על כך יש לציין ששבעה סטודנטים לא השיבו כלל על שאלה זו.

מאפייני התלמיד עצמו כללו: ידע מתמטי והבנה, גמישות, חשיבה מקורית, מידת המוטיבציה והפעלתנות שמפגין בדרך כלל, סגנון העבודה שלו (טכני או חוקר) וגם היו שתיארו את המאפיינים האלה מתוך שימוש במושג היצירתיות עצמו. פירוט השכיחות של כל אחד ממאפיינים אלו ודוגמאות לציטוטים מכל סוג נמצאים בטבלה 1. בטבלה זו אפשר לראות שהמאפיין הדומיננטי שצוין (18 פעם) הוא ידע מתמטי והבנה, כלומר ככל שתלמיד יודע מתמטיקה ומבין אותה היטב, כך הוא נתפס כיצירתי יותר במתמטיקה בעיני רוב הסטודנטים. מרכיב הגמישות או המקוריות של התלמיד תפסו מקום מרכזי פחות (8 פעמים כל אחד).

חלק מהתשובות נגעו **למאפייני תוצר** התלמיד שייחשב כיצירתי במתמטיקה. מאפיינים אלו כללו גמישות או מקוריות שהתוצר מבטא, אבל חלק מהמשיבים (4) התייחסו גם ליצירתיות הפלסטית של התוצר, כלומר האם התלמיד בנה משהו או השתמש באבזורים. פירוט השכיחות של כל אחד ממאפיינים אלו ודוגמאות לציטוטים מכל סוג נמצאים בטבלה 1.

הקטגוריה השלישית כללה, למעשה, **התייחסות לסביבות הלמידה שבהן ניתן להעריך יצירתיות** ללא פירוט הקריטריונים של ההערכה עצמה. בין השאר הוזכרו מתן משימות פתוחות לתלמידים, הצגת התוצרים של המשימות לפני התלמידים, יציאה משגרת לימודים, עבודה בקבוצות, על סמך דיונים וחקר עצמאי או על סמך מבחן.

טבלה 1: קריטריונים להערכת יצירתיות של תלמיד

שכיחות	דוגמאות לציטוטים שייכים	מאפיינים	הקטגוריה
18	רעיונותיו מביאים לידי פתרון נכון יודע להסביר את דרך הפתרון יודע מעבר לנלמד בכיתה יכולת להקיש מידע קודם לתחומים חדשים, תובנות חדשות יודע להשתמש בכלים שקיבל לפתרון תרגיל על פי ההבנה של התלמיד/ הבנת החומר הצלחה במבחן	ידע מתמטי והבנה	מאפייני התלמיד עצמו בכלליות
8	בעל רצון לדעת עוד / מתעניין מידת העשייה בשיעור / מידת ההשתתפות / הקשבה פעילה	מידת ההשתתפות / עניין מוטיבציה	
8	פתוח לקבל דרכים שונות בוחר כמה אופציות מביא פתרונות מגוונים לכיתה	גמישות	
8	בעל רעיונות משלו חשיבה מחוץ לקופסה שובר מוסכמות	בעל חשיבה מקורית	
4	עד כמה הוא יצירתי הבנת החומר בדרך יצירתית	שימוש במושג יצירתיות להערכת יצירתיות	
3	האם עובד בדרך טכנית מבצע חקר	סגנון עבודה טכנית או אחרת	
1	לא פוחד ממתמטיקה	יחסו למתמטיקה	
7	פתרון שמקשר בין נושאים שימוש בדרכים שונות להסבר או לפתרון / פתרונות מגוונים	גמישות	מאפייני התוצר של התלמיד
6	פתרון בדרך שלא נלמדה בכיתה פתרון לא אלגוריתמי שימוש בדרכים לא מקובלות / לא שגרתיות תוצר מקורי ושונה	מקוריות	
4	שימוש באבזרים שונים למציאת פתרון בניית מודל / שרטוט	התייחסות ליצירתיות פלסטית	
7	מתן משימות פתוחות לתלמידים הצגת התוצרים של המשימות בפני התלמידים יציאה משגרת לימודים / סדנאות עבודה בקבוצות על סמך דיונים וחקר עצמאי		התייחסות לסביבת הערכה ולא לקריטריונים שלה
7	אין תשובה		אין תשובה

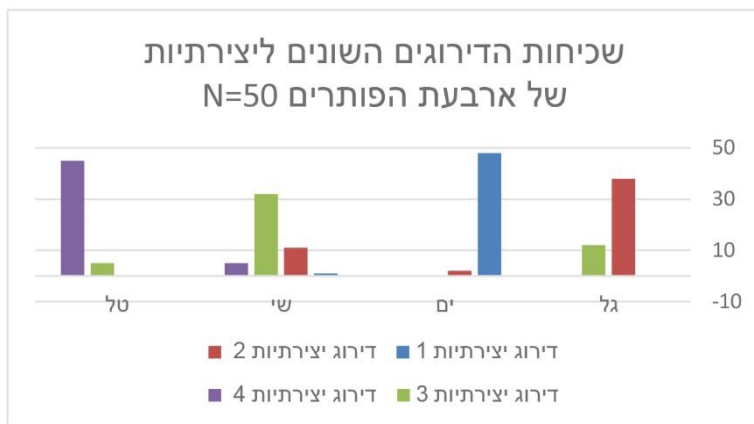
התייחסות ספציפית להערכת יצירתיות מתמטית של תלמיד

פירוט שכיחות הדירוגים שנתנו הסטודנטים למידת היצירתיות של ארבעת התלמידים מתואר בגרף 1. דירוג 4 ניתן לתלמיד שנחשב ליצירתי ביותר ודירוג 1 לתלמיד שנחשב ליצירתי הכי פחות.

מתוך גרף 1 אפשר ללמוד בכלליות ששני התלמידים שתשובותיהם היו מגוונות ומעמיקות פחות קיבלו את הדירוגים הנמוכים (ים וגל) ושני התלמידים בעלי התשובות המגוונות והדורשות ידע מתמטי רב

יותר קיבלו את הדירוגים הגבוהים ביצירתיות (שי וטל).

אפשר לראות עוד שהייתה תמימות דעים כמעט מלאה לגבי הדירוג: מתוך 50 הסטודנטים שנשאלו, 48 ציינו את ים כתלמיד הכי פחות יצירתי. כפי שאפשר לראות באיור 2 ים היה התלמיד שהציג מספר קטן ביותר של פתרונות שכולם מאותו הסוג (כפולות). שני הסטודנטים שלא דירגו אותו כך רשמו אותו כבעל דירוג 2 כלומר, היה ברור לכלל הסטודנטים שים איננו יצירתי בהשוואה לאחרים.



גרף 1: שכיחות דירוגי היצירתיות שניתנו לארבעת התלמידים

בדומה, 45 מתוך 50 הסטודנטים ציינו את טל כתלמיד היצירתי ביותר. חמשת הסטודנטים שלא דירגו את טל כתלמיד היצירתי ביותר רשמו אותו כבעל דירוג 3. לפיכך אפשר לומר על טל שהייתה תמימות דעים לגביו שהוא יצירתי בהשוואה לשלושת האחרים.

למעשה התלמיד שעורר מחלוקת גדולה ביותר היה שי: הוא הציג את אותו מספר תשובות כמו טל והן היו מגוונות. היו שני הבדלים עיקריים בין התשובות של טל לעומת התשובות של שי: שי טעה באחת התשובות ואילו טל הציג תשובה שאיננה מתחום המתמטיקה. מבדיקת הנתונים עולה ששני ההבדלים הללו יצרו יתרון לתפיסה של טל כיצירתי יותר.

כנראה שבשל הטעות של שי היו מי שסימנו אותו כבעל דירוג 1 או 2 (12 סטודנטים), ורק חמישה דירגו אותו כבעל דירוג 4, וזאת אף שכל ארבע תשובותיו הנכונות היו מגוונות והצריכו ידע מתמטי ברמה גבוהה, יחסית, לא פחות מתשובותיו של טל. כמו כן מתברר שהתשובה של טל שחרגה מתחום המתמטיקה הרשימה מאוד את הסטודנטים, וגרמה לרובם לציין תשובה זו כחשיבה מחוץ לקופסה, ולכן לדרג אותו כיצירתי ביותר אף שזו אינה יצירתיות מתמטית.

הנימוקים לדירוגים השונים

הסטודנטים התבקשו לנמק את הסיבות לדירוג שלהם. יש לציין שמתוך 50 הסטודנטים 14 לא סיפקו נימוקים לדירוגים שקבעו למרות הדרישה לכך. יש לשער שסטודנטים אלו פעלו באינטואיטיביות מבלי יכולת לנסח נימוק מדוע בחרו כפי שבחרו. גם אלו שסיפקו נימוקים לדירוגיהם השתמשו מדי פעם בנימוקים שכללו את המושג 'יצירתיות': "כי הוא ענה בצורה יצירתית".

הנימוקים השונים שניתנו לדירוגים קובצו לקטגוריות שסווגו לנימוקים שמסבירים מדוע תלמיד הוא יצירתי לעומת נימוקים המסבירים מדוע תלמיד איננו יצירתי. טבלאות 2 ו-3 מפרטות את סוגי קטגוריות הנימוקים שנמצאו עבור כל אחד משני סוגים אלו. גרף 2 מתאר את ההשוואה בין שכיחות הנימוקים לדירוג "יצירתי" לעומת שכיחות הנימוקים לדירוג "לא יצירתי".

נימוקים שנמצאו לדירוג תשובה כיצירתית הם: גמישות (30); מקוריות (21); פתרון חוץ-מתמטי (19); ידע מתמטי (19); יצירתיות (8); חשיבה ברמה גבוהה (5).

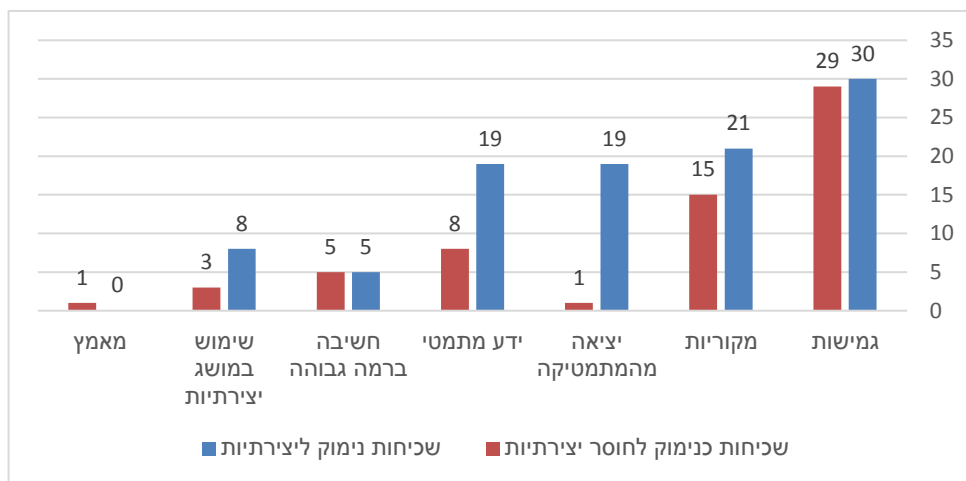
נימוקים לדירוג תשובה כלא יצירתית הם: אין גמישות (29); אין מקוריות (15); יש טעות (8); אין חשיבה ברמה גבוהה (5); לא יצירתי (3); חשיבה רק מתמטית (1); לא התאמץ (1).

טבלה 2: נימוקים לדירוג תשובת תלמיד כיצירתית

שכיחות	דוגמאות לציטוט נימוקים שייכים	הקטגוריה
30	גמישות מחשבתית ומחשבה חופשית	גמישות
	(הפותר) הסתמך על X (כמה) דברים / דרכי חשיבה / קריטריונים / עקרונות / קטגוריות	
	קבוצות שונות / מגוונות / לא מקובע	
21	חשיבה מחוץ לקופסה	מקוריות
	חשיבה מקורית	
	לא שגרתי	
	לא הייתי מוצאת תשובות כאלה בכל מקום	
19	(הפותר) יצא מגבול תכונות המספרים	תשובה חוץ-מתמטית
	לא רק בתחום (המתמטיקה)	
	לא קשור למתמטיקה	
19	הסתכל על מבנה המספר	אבחנה בעקרונות מתמטיים/ ידע מתמטי
	ער לקשרים בין מספרים	
	שם לב לספרות	
	חשב על ההפרשים	
	ידע (מתמטי) רב	
8	רמת יצירתיות גבוהה	שימוש במושג יצירתיות
	ענה בצורה יצירתית/ מחשבה יצירתית	
5	דורש חשיבה/ חשיבה מתמטית מפותחת	הפגנת חשיבה ברמה גבוהה
	הפעיל את המוח	

טבלה 3: נימוקים לדירוג תשובת תלמיד כלא יצירתית

הקטגוריה	דוגמאות לציטוט נימוקים שייכים	שכיחות
אין גמישות	אין גוון/ אין גמישות	29
	חוזר על עצמו	
	קיבעון/ חשיבה מקובעת	
	הסתמך רק על משהו אחד/ התייחס לפרמטר אחד בלבד	
לא מקורי	פשוט/ בסיסי / לא מיוחד/ מוכר	15
	קריטריון נראה לעין	
	אין חשיבה מחוץ לקופסה	
יש טעות	יש טעות	8
אין חשיבה מעמיקה	ללא חשיבה מעמיקה/ שטחי	5
שימוש במושג יצירתיות	אין חשיבה יצירתית	3
	לא יצירתי	
חשיבה תוך-מתמטית	חשב רק מתמטית	1
אין מאמץ	לא התאמץ	1



גרף 2: השוואה בין שכיחות הנימוקים לדירוג כיצירתי לעומת דירוג כלא יצירתי

בגרף 2 אפשר לראות שלגמישות ומקוריות, כמו לעומק החשיבה, יש משקל דומה כאשר מעריכים תוצר כיצירתי או כלא יצירתי. באשר לחשיבה חוץ-מתמטית – בעוד שזו הרשימה מאוד את המדרגים כנימוק ליצירתיות, הרי שלא הוצגה כמעט כלל כנימוק לחוסר יצירתיות. בדומה, הפגנת ידע מתמטי מרובה נחשבה כנימוק נפוץ (19) לדירוג יצירתי, אך לא צוינה כלל כנימוק לדירוג לא יצירתי. עם זאת היו שמונה סטודנטים שנימקו את היותו של שי יצירתי פחות מאחר שטעה באחת מחמש תשובותיו, אף שבכל הארבע האחרות הפגין ידע מתמטי ניכר.

דיון ומסקנות

המחקר המוצג יוצא מתוך הנחה שיש חשיבות רבה לזיהוי התפיסות הבסיסיות על אודות יצירתיות והערכתה שאֵתן מגיעים פרחי ההוראה במתמטיקה להכשרת המורים. זיהוי תפיסות אלו עשוי לסייע בטיפוח ובבניית תשתית לאמונות המעוגנות בידע פורמלי שיש בהן כדי לתמוך בהוראה המעודדת יצירתיות של התלמידים. הנחת המחקר הייתה לפי רוח דבריה של צ'או (Chiu, 2009), שלמורים יש בסיס לזיהוי והערכה של יצירתיות, אך חסרים להם כלים פורמליים לביצועה (Bolden et al., 2010). בעזרת ממצאי המחקר יהיה אפשר לבנות תכנית הכשרה שתקנה לפרחי ההוראה את הידע המשותף – Shared knowledge – (Herskowitz et al., 2007) הנחוץ להם כדי להעריך את היצירתיות המתמטית של תלמידיהם.

המחקר בחן כיצד הסטודנטים תופסים את הערכת היצירתיות המתמטית בשתי סיטואציות: האחת כאשר הם אמורים להתייחס לסוגיה בכלליות – כיצד אפשר להעריך יצירתיות מתמטית, והשנייה כאשר הם צריכים להתייחס לסוגיה בהקשר של משימה ספציפית המוכרת להם היטב (התנסו בה בעצמם).

כאשר פרחי ההוראה התייחסו להערכה כללית של יצירתיות מתמטית היה ברור מתשובותיהם שאין ביניהם הסכמה. כמה מההתייחסויות של פרחי ההוראה נגעו להערכת מרכיבי האישיות של התלמיד עצמו (50 התייחסויות), מקצתן נגעו למאפייני התוצר של התלמיד שייחשבו כמעידים על יצירתיות (17 התייחסויות), ומקצתן נגעו לאופי סביבת הפעילות שמאפשרת לבחון יצירתיות ללא הסבר כיצד (7 התייחסויות). היו גם שבעה סטודנטים שלא ענו על השאלה כלל. כיוון שרוב ההתייחסויות נגעו למאפייני האישיות של התלמיד, ניכר שרובם מבינים את היצירתיות כתכונה שמאפיינת את היחיד ולא כתגובה למשימה ספציפית.

בדומה לנטען אצל בולדן (Bolden et al., 2010) ולווינסון (Levenson, 2013) גם במחקר זה נמצאו פרחי הוראה שעבורם יצירתיות "מתחברת" לפעלתנות ואמונות יותר ולחשיבה מתמטית פחות, אך הם היו מעטים (4 התייחסויות). בדומה לשטרנברג ולוברט (Sternberg & Lubart, 1996) שהשתמשו במושגים של יכולות קוגניטיביות גבוהות לאפיון יצירתיות, חלק גדול ביותר מן הסטודנטים (18) זיהו יצירתיות מתמטית עם חשיבה וידע מתמטי. רכיבי יצירתיות אחרים זכו להתייחסות מועטה יותר (הוזכרו לכל היותר 8 פעמים). הייתה התייחסות מעטה למקוריות (פתרון שלא נראה בכיתה – 6 פעמים) או לגמישות (גיוון בפתרונות – 7 פעמים). אך כפי שטוענת לווינסון (Levenson, 2013) לא נעשה שימוש בטרמינולוגיה המקובלת בספרות המחקר. עם זאת, גם כאן באמצעות ההסברים שהם הביאו היה ברור שהסטודנטים התייחסו למאפייני גמישות ומקוריות.

היעדר טרמינולוגיה משותפת בהקשר של הערכת יצירתיות בלט בעיקר בממצא שסך הכול 11 משיבים לא ענו על השאלה "כיצד ניתן להעריך יצירתיות?" או השתמשו במושג "יצירתיות" כדי להעריך אותה: "נראה עד כמה הוא יצירתי". ממצא זה עולה בקנה אחד עם טענותיהם של שריקי (Shriki, 2010) ושל פנאורה ופנאורה (Panaoura & Panaoura, 2014) שהידע של הסטודנטים על אודות היצירתיות בהוראה אינו ברמה המאפשרת דיון בנושא.

מתוך תגובות הסטודנטים שהתבקשו להעריך יצירתיות על בסיס תוצרים ספציפיים של תלמידים לפי

משימה מוכרת, עולה כי יש הסכמה ביניהם שאיננה מתבססת על ידע פורמלי לגבי המאפיינים של יצירתיות. הדבר ניכר בדירוג כמעט אחיד של ארבעת התלמידים שפתרונותיהם הוצגו. הנימוקים הנפוצים ביותר לדירוג תלמיד כיצירתי היו קשורים בזיהוי הגמישות או המקוריות בתוצר שלו, ובדומה זיהוי תלמיד כלא יצירתי היה קשור בזיהוי חוסר גמישות או חוסר מקוריות בתוצר שלו. לפיכך, התפיסות המוקדמות של המורים עולות בקנה אחד עם הגדרת היצירתיות לפי טורנס (Torrence, 1967) וסילבר (Siver, 1997). פרחי הוראה אולי לא מסוגלים לתת הגדרה ברורה לפי מה הם מעריכים יצירתיות, אך כשהם נדרשים לעשות זאת ספציפית, יש להם תפיסה ברורה מה נחשב ליצירתי ומה לא נחשב כזה. המחקר הנוכחי מראה שאף שלסטודנטים אין ידע פורמלי על מאפייני יצירתיות ודרכי הערכה, יש להם יכולת אינטואיטיבית לזהות תוצרים יצירתיים של תלמידים. ממצא זה מצטרף לממצא של צ'או (Chiu, 2009) שלפיו המורים יודעים להבחין בין בעיות שגרתיות שאינן מזמנות יצירתיות ובין בעיות לא שגרתיות שמזמנות יצירתיות, אך היעדרו של ידע משותף מנע מהם להשתמש בטרמינולוגיה הקשורה לנושא כדי להסביר את קביעתם.

למרות קיומן של תפיסות בסיסיות אצל המורים לגבי הערכת יצירתיות, עדיין יש היבטים הדורשים חידוד והבהרה כדי שהמורים ידעו להעריך יצירתיות ולעודד את התפתחותה. על סמך ממצאי המחקר הזה מורים נותנים משקל יתר הן לחשיבה חוץ-מתמטית והן לטעויות מתמטיות. אין עדות בספרות למקום החשיבה החוץ-מתמטית בהוראת המתמטיקה. סביר להניח שהסיבה העיקרית שבעטיה התרשמו פרחי הוראה רבים כל כך מתשובה לא מתמטית כמו של טל (מספרים המסתיימים באות ע') ובזכותה דירגו אותו כיצירתי ביותר, היא שעד כה לא נחשפו לפעילויות שאפשרו מתן תשובה מסוג זה. בדרך כלל בעת פתרון בעיה מתמטית אין אפשרות לתת תשובה לא מתמטית, ולכן ההיתקלות בתופעה של יציאה מעולם המתמטיקה בעת עיסוק בבעיה מתמטית נתפסה בעיניהם כ"חשיבה מחוץ לקופסה". נוסף על כך חסרה לפרחי ההוראה האבחנה המסודרת בין יצירתיות כללית ליצירתיות ספציפית (מתמטית, במקרה דנן) שעליה מדברת לייקין (Leikin, 2009). בדומה לטענתה של שריקי (Shriki, 2010) גם ממחקר זה עולה שפרחי ההוראה חסרים ידע פורמלי והמשגה של יצירתיות, והבסיס להערכת היצירתיות שביצעו הוא אינטואיטיבי.

מפתיע למדי ההתייחסות של פרחי ההוראה לדירוג של שי שאחת מתשובותיו הייתה שגויה. אף שהתלמיד שי השיב עוד ארבעה פתרונות נכונים ברמת ידע גבוהה יחסית, דירגו אותו שיש פרחי הוראה במקום שני ומטה – מתחת לתלמיד גל שנתן פתרונות מעמיקים פחות מבחינה מתמטית, ואחרי טל שגם לו היו רק ארבעה פתרונות מתמטיים.

מתן משקל יתר לטעות כגורם שמוריד את דירוג היצירתיות של התלמיד נובע, כנראה, אף הוא מניסיונם המוקדם של פרחי ההוראה בהערכה של משימות סטנדרטיות סגורות. כאשר תלמיד מספק פתרון שגוי למשימה מתמטית בדרך כלל אין לפתרון כזה ערך רב. לעומת זאת, במשימה שהוצגה כאן היה אפשר לספק פתרונות מרובים לאותה שאלה, ולכן נכון היה להתעלם מהפתרון השגוי ולהתייחס לפתרונות הנכונים של התלמיד לאותה משימה. מתברר שחלק מפרחי ההוראה לא היו מסוגלים לעשות זאת. מסקנה מתבקשת על סמך ממצא זה היא שיש צורך לחשוף את פרחי ההוראה לסולם הערכה שונה, שבו חשוב להדגיש את ההתייחסות לחלקים הנכונים של הפתרון, בדומה לסולם ההערכה שהציעו לבב-ויינברג

ולייקין (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). כמו כן חשוב להדגיש את יתרונותיהם של פתרונות מרובים שנותן אותו תלמיד למשימה אחת, החושפים מידע מקיף יותר על ידע התלמיד ולא רק על טעויותיו.

נושא מעניין נוסף עוסק בהבדלים שבין נימוקים להערכת תלמיד כיצירתי לבין אלו שניתנו להערכת תלמיד לא יצירתי. לווינסון (Levenson, 2013) טוענת שקל יותר להגדיר גמישות על דרך השלילה: "אין קיבעון". במחקר הנוכחי נמצא שיש נימוקים שמופיעים בדומה על דרך החיוב והשלילה. לדוגמה: "יש גיוון בדרכי הפתרון" כסימן ליצירתיות לעומת "אין גיוון" כסימן לחוסר יצירתיות. הנימוקים השכיחים ביותר התקשרו להימצאות או להיעדר של גמישות ומקוריות. לעומת זאת יש נימוקים שהופיעו בעיקר על דרך החיוב (יציאה מהמתמטיקה). ממצא זה מחזק אף הוא את המסקנה שתפיסות המורים עולות בקנה אחד עם תפיסת היצירתיות לפי טורנס (Torrence, 1967) ולפי סילבר (Siver, 1997), תפיסה המעריכה יצירתיות באמצעות רכיבים של שטף, גמישות ומקוריות. יש לשער שנימוקים שמופיעים רק על דרך החיוב הם נימוקים שעליהם יש הסכמה רחבה פחות. מצד אחד, כאשר מסתכלים על פתרון מתמטי של תלמיד לא סביר לומר עליו שהוא לא יצירתי כי הוא לא יצא מתחום המתמטיקה. מצד אחר, היתקלות מפתיעה בפתרון לא מתמטי עשויה לגרום לנו להעריך את התלמיד כיצירתי אף שהיצירתיות שהפגין איננה מתמטית.

כאשר משווים בין ההתייחסות של פרחי ההוראה להערכת יצירתיות בכלליות ובין התייחסותם למשימה ספציפית אפשר לראות שההערכה הכללית מבחינה פחות בין יצירתיות ובין ידע והבנה מתמטיים, לעומת ההערכה הספציפית שבה יש יותר התייחסות לרכיבי גמישות ומקוריות וזיהויים. ההתייחסות הכללית לעתים מבלבלת בין פעילות המערכת חשיבה מתמטית מקורית ובין פעילות המערכת מניפולציות מוחשיות, כמו גזירה, צביעה או ציור. אין ספק שממצא זה מחדד את הצורך בהתנסות מעשית של פרחי ההוראה במשימות יצירתיות כבסיס לפיתוח כלים להערכת יצירתיות.

עצם ההתנסות בפעילות המעודדת יצירתיות מאפשרת לזהות מה יצירתי יותר ומה פחות (לב-זמיר, 2016), ולכן הייתה חשיבות לכך שפרחי ההוראה התנסו בעצמם בפתרון המשימה המתוארת בטרם התבקשו לדרג את תשובות ארבעת התלמידים. מבין כל תשובות התלמידים היו תשובות שעליהן לא חשבו פרחי ההוראה מראש שהובילו לתחושת הפתעה ומקוריות גם אם לא היו מתמטיות, ואילו תשובות נפוצות זכו ל"לזלזול". למעשה, עצם ההתנסות המשותפת במשימה יצרה ידע משותף בקרב פרחי ההוראה אף שלא נערך כל דיון בתוצרים. הדיבור התאורטי של פרחי ההוראה באשר להערכת יצירתיות לא נשען על ידע משותף (shared knowledge), וייתכן שזו הסיבה לאי-ההסכמה על דרכי ההערכה. מכאן החשיבות שבמהלך ההכשרה להוראה יוקנו לפרחי ההוראה כלים אופרטיביים משותפים להערכה תוך התנסות משותפת. כלים אלו יספקו תשתית ידע ודרכי הערכה ברורות.

לסיכום, המחקר הנוכחי עסק בקושי שיש להמשגה של יצירתיות (Henry, 2009), במחסור בכלים ברורים לניתוח מאפייני יצירתיות והערכתה. המחקר יצא מהנחה שבניית ידע משותף הנוגע להערכת יצירתיות מתמטית משליך על הבנת המטרה החינוכית של עידוד יצירתיות ועל יישום ההוראה המעודדת יצירתיות, על כל המשתמע מכך. משום כך נבדקה היכולת הבסיסית שיש לפרחי ההוראה להעריך

יצירתיות. עד כה לא נערכו מחקרים דומים.

המחקר מראה שהאינטואיציות הבסיסיות להערכת יצירתיות קיימות והן מתאימות לתפיסת היצירתיות של טורנס ושל סילבר (Torrence, 1967; Silver, 1997), אך נדרש חידוד שיאפשר תפיסה כללית של יצירתיות, ולא רק כתגובה למשימה ספציפית. יש צורך בשינוי תפיסות מוקדמות שהתאימו למשימות לא יצירתיות, כגון שינוי משקל ההתייחסות לטעות או לתשובה חוץ-מתמטית.

המחקר לא עסק בשלבים הבאים של הכשרת פרחי ההוראה לקראת הוראה שמעודדת יצירתיות: זיהוי משימות שמפתחות יצירתיות וניתוחן (לב-זמיר, 2016); אופן בחירת משימות המעודדות יצירתיות (Panaura & Panaura, 2014). המחקר גם לא בדק כיצד הקניית כלים להערכת יצירתיות ופיתוח ידע משותף (shared knowledge) משליכה על שלבים אלו. משום כך נחוץ מחקר המשך. יש לבחון כיצד משתמשים פרחי ההוראה בכלי ההערכה שרכשו כדי להעריך משימות מתמטיות ולזהות את הפוטנציאל היצירתי הטמון או חסר בהן.

רשימת מקורות

- לב-זמיר, ח' (2015). הפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיה לא שגרתית. בתוך א' גזית וד' פסקין (עורכים), **יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות** (עמ' 99-120). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- לב-זמיר, ח' (2016). בעיית חקר כמנוף לפיתוח יצירתיות. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי**, 3, 75-92.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Berg, D. (2010). Creative mathematics for all? A survey of preservice teachers' attitudes. *International Online Journal of Education Sciences*, 2(2), 308-309.
- Bolden, D. S., Harries, A. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143-157.
- Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(1), 55-79.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity: Advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.
- Feldhusen, F. (2002). Creativity: The knowledge base and children. *High Ability Studies*, 13(2), 179-183.
- Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59-74.
- Henry, J. (2009). Enhancing creativity with M.U.S.I.C. *Alberta Journal of Educational Research*, 5(2), 199-211.
- Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2007). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 41-68.
- Herskovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 255-271). Rotterdam: Sense Publishers.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.
- Kagan, D. M. (1992). Implications of research on teachers' beliefs. *Educational Psychologist*, 27(1), 65-90.
- Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 2330-2339). Cyprus: University of Cyprus.
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B.

- Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.
- Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 183-197.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(4), 311-333.
- Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(4), 269-291.
- Lev-Zamir, H. (2011). *Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions* (Doctoral dissertation). University of Haifa, Israel.
- Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research Mathematics Education*, 13(1), 17-32.
- Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying vs. Doing: Teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 295-308.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.
- Panaoura, A., & Panaoura, G. (2014). Teachers' awareness of creativity in mathematical teaching and their practice. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 4. Retrieved from <http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/4.curriculum/panaoura01/article.pdf>
- Plucker, J., & Beghetto, R. A. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 153-168). Washington, DC: American Psychological Association.
- Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5) 550-576.
- Scheffler, I. (1965). *Conditions of knowledge: An introduction to epistemology and education*. Chicago: Scott, Foresman.
- Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 159-179.
- Shriki, A., & Lavy, I. (2012). Teachers' perceptions of mathematical creativity and its nature. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceeding of 36th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 91-98). Taipei, Taiwan: PME.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 29(3), 75-80.
- Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41(1-2), 13-27.
- Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist*, 51(7), 677-688.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.
- Torrance, E. P. (1967). Scientific views of creativity and factors affecting its growth, creativity and learning. In J. Kagan (Ed.), *Creativity and learning* (pp. 73-91). Boston: Houghton Mifflin.
- Zazkis, R., & Holton, D. (2009). Snapshots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 92-111). Rotterdam: Sense Publishers.



ד"ר ענת לבב-ויינברג

מרצה בחוג לחינוך מתמטי במכללת אורנים ומורה למתמטיקה בחטיבה עליונה "סנור כברי". עבודת הדוקטורט שלה, בהנחיית פרופ' רוזה לייקין מאוניברסיטת חיפה, עסקה בפיתרון בעיות בגאומטריה בדרכים שונות כמעוף לפיתוח יצירתיות. תחום העניין העיקרי שלה הוא הכשרת מורים המכוונת לעידוד יצירתיות התלמיד.



ד"ר חנה לב-זמיר

עורכת כתב העת "מספר חזק 2000", בשנים 2010-2015. ראש החוג לחינוך מתמטי במכללת אורנים ומרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללה. כתבה כמה פרסומים בנושא מתמטי, ביניהם שני ספרים בשם "חשבון מהעיתון". תחום העניין המרכזי שלה הוא הכשרת מורים להוראת מתמטיקה עם דגש בפיתוח יצירתיות.

נספח 1

שאלון פתיחה: יצירתיות בהוראת המתמטיקה

ענו על השאלות הבאות, פרטו את תשובותיכם.

1. כיצד לדעתך באה לידי ביטוי יצירתיות מתמטית בהוראה?

2. מה מאפיין לדעתך שיעור יצירתי במתמטיקה?

3. מה מאפיין לדעתך מורה יצירתי למתמטיקה?

4. כיצד היית מציעה להעריך את מידת היצירתיות של מורה למתמטיקה? באילו קריטריונים להערכה היית משתמשת?

5. כיצד היית מציעה להעריך מידת היצירתיות המתמטית של תלמיד? באילו קריטריונים להערכה היית משתמשת?

6. מהי לדעתך משימה מתמטית שמעודדת יצירתיות אצל תלמידים?

7. באילו קריטריונים היית משתמשת להעריך את מידת התאמתה של משימה כמשימה המעודדת יצירתיות אצל תלמידים? אילו מרכיבים צריכים להיות בה לדעתך?

8. הביאי דוגמה לפעילות מתמטית הנחשבת בעיניך לפעילות יצירתית, ואפייני את היצירתיות בפעילות זו.

פיתוח מיומנויות הוכחה בגאומטריה במהלך פעילות של פרחי הוראה כמעריכים וכמוערכים

אילנה לביא, המכללה האקדמית עמק יזרעאל
עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון

תקציר

אחד ההיבטים של התפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה נוגע לפיתוח של מיומנויות הערכה. המטרה של המחקר הנוכחי היא לבחון את ההשפעות של פעילות שבה פרחי הוראה מתפקדים הן כמעריכים והן כמוערכים על התפתחות מיומנויות ההערכה שלהם, בכלל, ועל התפתחות מיומנויות ההערכה שלהם באשר להוכחות בגאומטריה, בפרט.

המחקר נערך במהלך קורס "שיטות הוראה" שבו יושמה בין השאר הגישה של הערכת עמיתים. שישה-עשר פרחי הוראה השתתפו במחקר. מניית הנתונים עולה כי במהלך שלבי ההתנסות בהערכת עמיתים פיתחו המשתתפים מיומנויות הקשורות בבחירת מערכת של קטגוריות להערכה ומתן משקל היחסי לכל קטגוריה לצורך הערכת העמיתים. במערכת הקטגוריות שנבחרה ניתן ביטוי לתפקידים ולמשמעות של הוכחה מתמטית, כפי שהם מופיעים בספרות המחקר. ברפלקציה שלהם על התהליך, פרחי ההוראה התייחסו להשפעה של הערכת העמיתים על הידע המתמטי שלהם, שנבעה מעצם החשיפה לדרכי פתרון שונות משלהם.

מילות מפתח: הערכת עמיתים; התפתחות מקצועית; משוב; פרחי הוראה; הוכחות גאומטריות; האסטרטגיה 'מה אם לא?'

הקדמה

נושאים רבים הקשורים בהיבטים של הוכחות במתמטיקה נחקרו במהלך שני העשורים האחרונים. בין אותם נושאים נמנים התפקיד של ההוכחה המתמטית בלימודי המתמטיקה (Hersh, 1993), קשיי תלמידים לכתוב הוכחות בכוחות עצמם (Moore, 1994), תפיסות תלמידים את המושג "הוכחה" (Harel & Sowder, 1998) ובנייה נכונה של הוכחות (Weber, 2001; Weber & Alcock, 2004). הנושא של הערכת הוכחות מתמטיות זכה לתשומת לב בלתי מספקת, במיוחד כאשר מדובר בנקודת המבט של תלמידים (Alcock & Weber, 2005; Mamona-Downs & Downs, 2005). הן מורים והן תלמידים חווים קשיים כאשר הם נדרשים להעריך את הנכונות של הוכחה מתמטית (Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003). אין ספק שמיומנויות הערכה נמנות על המיומנויות החשובות שיש לפתח בקרב פרחי הוראה במהלך תקופת ההכשרה שלהם, שכן הערכת תלמידים היא אחד התפקידים החשובים

של כל מורה. לכן עיסוק של פרחי הוראה בפעילויות הערכה, בכלל, והערכה של הוכחות מתמטיות, בפרט, חיוני לצורך זה.

החשיבות של הכשרת פרחי הוראה באשר לביצוע הערכה מושכלת נובעת, בין השאר, מהעובדה שהדרך שבה מורים מעריכים את תלמידיהם עשויה לחזק או לעכב את תהליך הלמידה של התלמידים. אי לכך, על המורים לבחור את דרכי הערכה בקפידה ולבחון האם הן תואמות את מטרות ההוראה שלהם. קיימות שיטות הערכה מגוונות בשדה החינוך, אחת מהן היא הערכת עמיתים. בהתאם לשיטה זו, הלומדים לוקחים בחשבון את הרמה ואת האיכות של התוצר או את הביצוע של לומד אחר בכיתתם (Topping, 2003). כאשר המשוב ניתן על ידי עמיתים לאחר מחשבה ובדרך חיובית, יש לו השפעות חיוביות על הלמידה ותרומה לצמצום מספר השגיאות. מלבד תרומה לעמיתים, הערכת עמיתים נמצאה ככלי יעיל לשיפור הידע האישי של המעריך (Boud, 2000) וכן להעלאת המוטיבציה ללמידה (Hanrahan & Isaacs, 2001).

בהיותנו מודעות לחשיבות של פיתוח מיומנויות הערכה של פרחי הוראה וליתרונות של הערכת עמיתים, אנחנו מאמינות שחשיפת פרחי הוראה לפעילויות של הערכת עמיתים בנושא של הוכחות (במקרה של המאמר הנוכחי, הוכחות בתחום הגאומטריה) יכולה לתמוך בהתפתחות המקצועית שלהם בהקשר זה. יתרה מזו, בפעילויות מסוג זה שבהן הסטודנטים מתפקדים הן כמעריכים והן כמוערכים, הם נחשפים לשני צדי המטבע. חשיפה כזאת יכולה להביא לידי העמקת התובנות שלהם על אודות החשיבות הן של המבנים המתמטיים (למשל, הוכחות גאומטריות) והן על אודות תהליך ההערכה עצמו.

במאמר זה מתואר מחקר שנועד לבחון את ההשפעות של שיתוף פרחי הוראה בהערכה של הוכחות בגאומטריה, הן כמעריכים והן כמוערכים, על פיתוח מיומנויות ההערכה ועל הידע המתמטי שלהם.

ממטרה זו נגזרו שאלות המחקר הבאות:

1. כיצד בוחרים פרחי הוראה את הקטגוריות שלפיהן הם מעריכים ומהם השיקולים שלהם במתן המשקל היחסי לכל קטגוריה במשימת ההערכה?
2. כיצד מגיבים פרחי ההוראה על משוב עמיתים שהתקבל על תוצרי עבודתם?
3. כיצד באים לידי ביטוי התפקידים והמשמעות של הוכחה מתמטית בתהליך ההערכה של הוכחות בגאומטריה?
4. מהי ההשפעה של חשיפת פרחי ההוראה לפתרונות של עמיתים על הידע המתמטי שלהם?

רקע תאורטי

הערכה יכולה להיות הערכה מסכמת או מעצבת. כאשר מדובר בהערכה מסכמת, תוצרי הלמידה מוערכים לאחר סיום התהליך. הערכה מעצבת, לעומת זאת, כרוכה במתן משוב תדיר וענייני במהלך הלמידה ומטרתה לסייע לתלמידים לתכנן את הלמידה שלהם, לזהות את נקודות החוזק והחולשה שלהם, ולכוון את הלמידה לאפיקים שיעזרו להם להתגבר על הקשיים שלהם (Boud, 2000). לפיכך, יש בכוחה של הערכה מעצבת לתמוך בלמידה משמעותית (Black & Wilam, 1998).

בהמשך מוצג רקע תאורטי תמציתי העוסק בתפקידים ובמשמעות של הוכחה מתמטית, הערכת עמיתים,

הערכת עמיתים באקדמיה והערכה של הוכחות מתמטיות.

המשמעות והתפקידים של הוכחה מתמטית

הוכחה היא שרשרת לוגית של טיעונים מתמטיים מוקפדים אשר מצביעים באופן חד-משמעי על האמת של טענה נתונה (Aigner & Ziegler, 1999). חוקרים שונים דנו בהרחבה במשמעות ובתפקידים של הוכחה במתמטיקה כמו גם בהוראת מתמטיקה (למשל, Bell, 1976; de Villiers, 1990, 1991; Hanna, 2000; Polya, 1954). בראש ובראשונה, תפקידה של הוכחה הוא לאמת או להפריך טענה נתונה, ובכך לשכנע באשר לנכונותה או לאי נכונותה. אולם להוכחה יכולים להיות גם תפקידים נוספים: הוכחה יכולה לספק תובנות באשר לשאלה מדוע טענה נתונה נכונה הוכחה כאמצעי להסבר ולספק בסיס לארגון של תוצאות שונות למערכת דוקטיבית של אקסיומות, מושגים ומשפטים (הוכחה כאמצעי ליצירת שיטתיות, סיסטמטיזציה). לעתים, במהלך חיפוש אחר הוכחה עשויות לעלות תוצאות נוספות, מה שהופך את ההוכחה כאמצעי לגילוי. להוכחה יש גם תפקיד חשוב בהיבט התקשורתי – יצירת שיח מתמטי ודיון על הידע המתמטי. מעבר לכך, עבור רבים עצם התהליך של חיפוש אחר הוכחה הוא אתגר אינטלקטואלי. בעשורים האחרונים, עם התפתחות הטכנולוגיה ושילובה במסגרת הוראת המתמטיקה ולימודה, חוקרים ואנשי חינוך רבים בוחנים את האופן שבו תלמידים תופסים את המושג "הוכחה" ואת תפקידי ההוכחה בסביבות ממוחשבות. לדוגמה, מחקרים שנעשו בהשתתפות תלמידים שלמדו בסביבות של גאומטריה דינמית (למשל, Chazan, 1993; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000; Laborde, 2000) מצאו שתלמידים נוטים לקבל טענה כטענת אמת על בסיס בדיקה של אוסף "גדול מאוד" של דוגמאות, וחשים שיש בכך תחליף להוכחה פורמלית של טענות.

בהתאם לסטנדרטים של המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM, 2000), חיוני לספק לתלמידים הזדמנויות לעסוק בפעילויות הקשורות להוכחות מתמטיות, ובתוך כך לפתח את מיומנויות השכליה (reasoning) שלהם (Schmidt et al., 2009), כמו גם את היכולת של תלמידים לבסס אמירה מתמטית שהם בטוחים בנכונותה ולשכנע אחרים בצדקת טיעוניהם. בהקשר זה, הראל וסוודר (Harel & Sowder, 1998) הטביעו את המונח "סכמת הוכחה" (proof scheme).

לאור האמור לעיל, כדי שפרחי הוראה יצליחו להעריך הוכחה מתמטית, על כל היבטיה, עליהם להיות מסוגלים לבחור את הקריטריונים המתאימים להערכה, כאלה שלוקחים בחשבון הן את התפקידים והן את המשמעות של הוכחה. חשיפת פרחי הוראה להערכה של הוכחה מתמטית הן כמעריכים והן כמוערכים, יכולה לסייע להם לפתח מיומנויות הערכה אלה.

הערכת עמיתים

בהקשר החינוכי, הערכה מוגדרת כתהליך שבו נמדדים התוצרים של תלמידים, שהם תוצאה של הידע והכישורים שלהם (Topping, 2003). הערכת עמיתים היא תהליך שבו לומדים מעריכים ביצועים של עמיתיהם, בהתבסס על רשימה של קריטריונים (McDowell & Mowl, 1996). השימוש בהערכת עמיתים מבוסס על ההנחה שעמיתים יכולים לזהות את השגיאות של עמיתיהם בקלות ובמהירות, ועל כך שקבוצה מגוונת וגדולה יותר של אנשים הפועלים כמעריכים יכולה לגלות חולשות ושגיאות רבות

יותר בעבודה (Falchikov & Goldfinch, 2000).

פעילויות של הערכת עמיתים יכולות להתבצע בדרכים שונות, בתחומים שונים של תכנית הלימודים ובמקצועות לימוד שונים. התוצר המוערך יכול להיות מסמך כתוב, פורטפוליו, הצגה מילולית, מבחן ועוד. הערכת העמיתים יכולה להיות בעלת אופי מסכם או מעצב, והמערכים והמוערכים יכולים להיות אדם יחיד, זוגות או צוותים (McDowell & Mowl, 1996).

ביטוייה של ההערכה הוא משוב. כאשר אדם מתבקש לתת משוב על איכות התוצר של אדם אחר (תלמיד או עמית), עליו להפעיל שיקול דעת, לבחון את התוצר בעין ביקורתית ולחפש שגיאות. כל אלו עשויים לפתח אצלו מיומנויות של בקרה עצמית (Bangert-Drowns, Kulik, Kulik, & Morgan, 1991; Paris & Paris, 2001; Newman, 1990; Paris & Paris, 2001). ההערכה עצמה יכולת להינתן כטקסט מילולי או כציון, וחשוב שתהיה מלווה בהנמקות. לאופן מתן המשוב יש חשיבות רבה. כאשר מספקים משוב, חשוב להיות מודעים להשפעתו על לומדים, ובפרט על האמונה של מקבל המשוב במסוגלותו להצליח ועל המוטיבציה שלו להמשיך וללמוד. חשיבותו של המשוב עולה כאשר הלומדים שותפים בהפקתו, כלומר כאשר הם מתנסים בהערכת עמיתים. התנסות זו תורמת לתחושת המסוגלות העצמית שלהם ומעצימה את אחריותם על למידתם (Bangert-Drowns et al., 1991; Butler & Winne, 1995; Kulhavy & Stock, 1989). בפרט, מתן משוב חיובי תחילה מקטין חרדה אצל המוערכים ומשפר את המוכנות שלהם לקבל גם משוב שלילי בהמשך. הערכת עמיתים יכולה להגביר עניין, ביטחון עצמי ואמפתיה כלפי אחרים, הן בהיבט של המעריך והן בהיבט של המוערך (Herndon, 2006).

תלמידים בגילאים שונים מגיבים באופן שונה למשוב מעמיתים או ממבוגרים, ונמצא שילדים צעירים נוטים לקבל פחות את התוקף של הערכה המבוצעת על ידי ילדים בגילם, ומעדיפים הערכה של מבוגרים. מצב זה משתנה ככל שמתבגרים (Cole, 1991).

במקרה של פרחי הוראה, הערכת עמיתים מתמקדת בדרך כלל בבדיקה האם תוצרי עבודה שהם עושים עומדים בדרישות (של קורס, למשל) וכמו כן במתן משוב בונה שכולל הצעות לשיפור (Herndon, 2006). הערכה כזאת היא משימה מורכבת שדורשת הבנה של מטרות המטלה שעליהם להעריך, ובחירה מושכלת של הקריטריונים המתאימים לצורך הערכה. כאשר מדובר בהערכת עמיתים מעצבת, שנועדה לסייע ללומד לשפר את תוצריו כחלק מתהליך הלמידה, על המעריך להאיר את עיני המוערך באשר לשגיאות ולתפיסות מוטעות שמצא בעבודה. תהליך זה של ההערכה יכול לסייע למוערך לזהות פערים שיש לו בידע ולתרום לצמצומם (Topping, 1998). ביצוע משוב על פי קריטריונים להערכה מסייע בהפנמתם של הקריטריונים ותורם לפיתוח מודעותם של הלומדים לתהליך הלמידה, תוך שהם מפתחים יכולת של ויסות עצמי ומיומנויות לומד עצמאי (Black & William, 1998). בהערכה המבוססת על מערכת של קריטריונים, המשוב יכול להתאמה או לחוסר ההתאמה של תוצר בהתייחס לקריטריון ההערכה (Tunstall & Gipps, 1996). הערכת עמיתים דורשת כישורים תקשורתיים וחברתיים, יכולת לבצע משה ומתן ודיפלומטיה (Riley, 1995). לפיכך, יש בכוחה של הערכת עמיתים לפתח כישורי עבודת צוות, ללמד כיצד לתת ולקבל ביקורת, להצדיק אותה ולדחות הצעות שאינן טובות (Marcoulides & Simkin, 1991). בהיבט האישי, הערכת עמיתים תורמת לקידום תחושת שייכות,

אחריות אישית ומוטיבציה ללמידה (Hanrahan & Isaacs, 2001), וכן לעלייה במעורבות האישית בלמידת התכנים (Falchikov & Goldfinch, 2000).

יש לציין, שלפי אקסו (Aksu, 2008), למורים רבים יש עמדות שליליות באשר לשימוש בשיטות הערכה אלטרנטיביות, כמו הערכה מעצבת, הערכת עמיתים או הערכה עצמית כיוון שהם הורגלו להיות מוערכים בשיטה המסורתית ואף נוצר אצלם קיבעון בעניין זה. גם במהלך תקופת ההכשרה שלהם, מורים אינם נחשפים מספיק לטכניקות הערכה אלו. לפיכך, יש חשיבות רבה לשילוב פעילויות של הערכה אלטרנטיבית, כמו הערכה מעצבת, הערכת עמיתים והערכה עצמית בתכניות להכשרת מורים (Aksu, 2008; Lovemore & David, 2006; McGatha, Bush, Rakes, 2009; Sluijsmans & Prins, 2006).

הערכת עמיתים באקדמיה

על אף היתרונות המיוחסים להערכת עמיתים במוסדות להשכלה גבוהה, הרי שגישה זאת מיושמת מעט בחינוך האקדמי (Zevenbergen, 2001). גטפילד (Gatfield, 1999) בחן את שביעות הרצון של סטודנטים באנגליה מהערכת עמיתים ומצא שרמת שביעות הרצון הייתה גבוהה. סטודנטים נטו לקבל הערכת עמיתים כשיטה מתאימה להערכה, הם ראו בה שיטה הוגנת והאמינו שראוי שהם יעריכו את עמיתיהם. באקדמיה, להערכת עמיתים, הן הערכה מסכמת והן הערכה מעצבת, יש יתרונות רבים במובן של העצמת הלומדים: התהליך תומך בפיתוח האוטונומיה ובפיתוח של מיומנויות חשיבה ברמות גבוהות, משפר את איכות הלמידה ומפתח את היכולת להעריך ולהצדיק את ההערכה (Topping, 1996, 1998). הוא גם מספק לסטודנטים הזדמנויות לניווט עצמי, לחזרה על החומר, לתרגול ולקבלת משוב (Falchikov & Goldfinch, 2000). כמו כן הוא מגדיל את היקף המשוב שסטודנטים מקבלים על עבודתם ומעודד אותם להיות אחראים על הלמידה שלהם (Race, 1998). מתוך ההערכה של עבודת עמיתים, סטודנטים באקדמיה מפתחים תובנות על אודות הביצועים האישיים שלהם, כמו גם את היכולת שלהם לבצע שיפוט בנושאים שיש להם חשיבות לחיים המקצועיים שלהם. באותו הזמן הם לומדים כיצד לראות בשגיאות הזדמנות ללמידה ולא כישלון בלבד. יתרה מזו, עיסוק בהערכת עמיתים מקדם את היכולת לתקשר ולדון ברעיונות ומשמש בסיס לקידום של שיח אקדמי (Berkencotter, 1995), ולהפקה של תוצרים טובים יותר (Reese-Durham, 2005).

עם זאת, הערכת עמיתים יכולה לחשוף בעיות שנוגעות לתוקף ולמהימנות, ואין ביטחון שהמשוב שניתן הוא מדויק ובעל ערך (Falchikov & Goldfinch, 2000). נראה שהסובייקטיביות שכרוכה במתן ציונים, מושפעת מהסטנדרטים השונים של נותני הציונים באשר למרכיבים שמהם יושפע הציון (Conway, 1993). גם כאשר ניתנים לסטודנטים קריטריונים להערכה ולמתן ציונים, עדיין יכולה להיווצר בעיה של סובייקטיביות. לדוגמה, זבנברגן (Zevenbergen, 2001) בדק הערכת עמיתים של פרחי הוראה במתמטיקה של פוסטרים שעיצבו עמיתיהם וגילה שבעלי הישגים גבוהים נוטים להעריך פחות עבודות של עמיתים מבעלי הישגים לימודיים נמוכים. גם המשובים שניתנו היו שונים. בעלי הישגים נמוכים נתנו משוב כללי, ולעומתם בעלי הישגים גבוהים נתנו משוב ענייני שהיה אפשר ללמוד ממנו ולהפיק לקחים.

חוקרים דיווחו גם על חסרונות שטמונים ביישום הערכת עמיתים (למשל Falchikov & Goldfinch,

(2000; Topping, 1998; Zevenbergen, 2001), וטענו שלעתים סטודנטים שהגישו עבודות לא טובות, התקשו לקבל מעמיתיהם משוב ששיקף את רמת עבודתם. פלצ'יקוב (Falchikov, 1995) מצא שתופעה זו שכיחה במיוחד בקרב קבוצות קטנות בעלות לכידות חברתית. בקבוצות כאלו סטודנטים סירבו להשתתף בתהליך הערכת עמיתים. נוסף על כך, במקרים שבהם לא היו קריטריונים ברורים להערכה, צצו בעיות של תוקף ומהימנות, והדיוק והערך של המשוב עמדו בסימן שאלה. לכן, אף שלהערכת עמיתים יכול להיות ערך מוסף ללמידה, יש להשתמש בה בזהירות ובכובד ראש.

הערכה של הוכחות במתמטיקה

באשר לחשיבות המשוב בתהליך ההערכה של הוכחה מתמטית, חנה ודה וילירס (Hanna & de Villiers, 2012) מצאו שהערכת עמיתים ומתן משוב מפורש על אודות בניית הוכחה מסייעים ללומדים לבצע רפלקציה על העבודה שלהם. תהליך החשיבה שמלווה את הניסיונות להבין את דרך החשיבה של האחר, מסייע ללומדים להתקדם בפתרון האישי שלהם. גם היישועמיתיו (Hsieh, Horng, & Shy, 2012) בדקו את ההשפעה של קבלת משוב על תהליך בניית הוכחה מתמטית ומצאו שקיימים חמישה מרכיבים התורמים לבנייה נכונה של הוכחה מתמטית, שאחד מהם עוסק בקבלת משוב מִידי תוך כדי בניית ההוכחה.

מבין המיומנויות שעל מורים למתמטיקה לפתח במהלך תקופת הכשרתם נמנות מיומנויות הערכה, בכלל, ומיומנויות של הערכת הוכחות במתמטיקה, בפרט. חוקרים מצאו שמורים ותלמידים חווים קשיים בתהליך ההערכה של הנכונות של הוכחות (Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003). באופן ספציפי יותר, קנות' (Knuth, 2002) מצא שמורים בתיכון נוטים לקבל הוכחות בגאומטריה כנכונות בהתאם לפורמט שלהן ולא דווקא בהתאם לתוכנן. כלומר, כאשר הוכחה הייתה רשומה במבנה של שתי עמודות – טענה ולצדה הצדקה שלה, בדרך כלל היא נחשבה לנכונה בלי לבדוק לעומק את תוכן הטענות והצדקתן. אף שמיומנויות הערכה הן בסיסיות להוראה יעילה, למורים יש הזדמנויות נדירות לעסוק בפעילויות הערכה במהלך הכשרתם ולאחריה (Webb, 2009). כדי לבחון האם מורים למתמטיקה יכולים להבחין בין הוכחות לטענות אמפיריות, החוקרים סטיליאנידס וסטיליאנידס (Stylianides & Stylianides, 2009) העסיקו קבוצה של מורים בתהליך שנקרא "בנייה-הערכה". בתהליך זה המורים התבקשו להוכיח טענה מתמטית נתונה ולאחר מכן החוקרים העריכו את העבודה שלהם. החוקרים מצאו שרק שלושה עד עשרה אחוזים החשיבו טיעון אמפירי כהוכחה מתמטית ראויה. יש לציין שתוצאות אלה סותרות תוצאות שהתקבלו במחקרים קודמים (Goetting, 1995; Martin & Harel, 1989) שבהם למעלה מ-50% של פרחי ההוראה ראו בטיעונים אמפיריים הוכחה תקפה מבחינה מתמטית.

מרבית ספרות המחקר העוסקת בהערכת עמיתים של תוצרים מתמטיים נותנת דעתה בנפרד לצד המעריך ובנפרד לצד המוערך או להערכה עצמית (Stylianides & Stylianides, 2009). במחקר זה אנחנו בודקות את ההשפעות של הערכת עמיתים על פרחי הוראה, שבו בזמן מתפקדים הן כמעריכים והן כמוערכים, על היכולת שלהם לפתח מיומנויות הערכה בהקשר של הוכחות בגאומטריה. ההנחה שלנו הייתה שחשיפת פרחי ההוראה להערכת עמיתים בהקשר של הוכחות בגאומטריה, שבה יתפקדו הן כמעריכים והן כמוערכים, תעזור להם לפתח מיומנויות הערכה ותרחיב את הידע המתמטי שלהם.

המחקר

בפרק זה נציג נתונים על אודות משתתפי המחקר, נתאר את הקורס שבו התבצע המחקר ואת שלבי המחקר השונים. כמו כן נציג את השיטות לאיסוף הנתונים וניתוחם.

משתתפי המחקר

שישה-עשר פרחי הוראה ממכללה אקדמית לחינוך השתתפו במחקר. קבוצת הסטודנטים הייתה הטרוגנית: תשעה היו סטודנטים סדירים בשנת הלימודים השלישית לתואר ראשון בהוראת מתמטיקה ומדעי המחשב או פיזיקה לתלמידי חטיבת ביניים ותיכון. ארבעה היו מורים למתמטיקה שהשלימו את תעודת ההוראה שלהם, לשניים מהם יש ניסיון הוראה של שנתיים ולשניים האחרים יש ניסיון של יותר מעשר שנים. שאר המשתתפים למדו בתכנית להסבת אקדמאים להוראת מתמטיקה.

קורס שבמסגרתו התבצע המחקר

הקורס הוא קורס שנתי העוסק בלימוד של שיטות הוראה. בסמסטר הראשון של הקורס פרחי ההוראה למדו ודנו בשיטות וגישות הוראה ללימוד נושאים מתמטיים שונים הנלמדים בחטיבה העליונה. בנוסף, הם למדו את העקרונות הבסיסיים של הערכת מבחן, בין השאר, כיצד לבחור מערכת של קטגוריות לצורך ההערכה, כיצד לבנות מחוון להערכה וכיצד להעריך משימות שניתנות לתלמידים. פרחי ההוראה לא עסקו בהערכה של הוכחות מתמטיות.

המחקר התבצע בסמסטר השני של הקורס. במהלך סמסטר זה עסקו פרחי ההוראה בעיקר בפעילויות חקר מתמטיות שבמסגרתן הם התבקשו להעלות בעיות, להוכיח את הבעיות שהועלו, ולהעריך עבודות של עמיתיהם. כיוון שתהליך העלאת בעיות ייצר בעיות מוכרות ולא מוכרות, פרחי ההוראה היו צריכים להעריך הן את הבעיות עצמן והן את ההוכחות לשני סוגי הבעיות: הוכחות לבעיות מוכרות (שהם עצמם הוכיחו) והוכחות לבעיות שלא היו מוכרות להם (הוכחות לבעיות שהיו תוצרים של פעילות העלאת הבעיות).

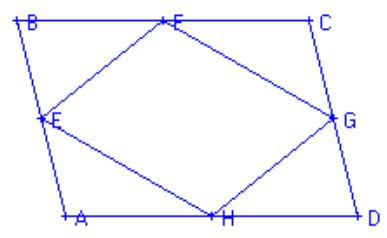
מהלך המחקר

המחקר בחן את ההיבטים השונים של התנסות הסטודנטים בפעילות חקר והערכה. הפעילות כללה עשרה שלבים שנמשכו לאורך סמסטר אחד. השלבים השונים של הפעילות מפורטים בטבלה 1, וכן מתוארות המשימות השונות שפרחי ההוראה התבקשו לבצע במהלך פעילות החקר ולהסביר כל אחת מהן. יש לציין שבמהלך התקופה שבה עבדו פרחי ההוראה על משימות ההערכה לא התקיימו דיונים כיתתיים בנושא. הדיון בתהליך כולו התקיים לאחר שפרחי ההוראה השלימו את הרפלקציה שלהם על התהליך כולו.

טבלה 1: שלבי פעילות החקר והערכת העמית

שלב	מטלה	הסבר
1	פתרון בעיה נתונה (איור 1)	פרחי ההוראה התבקשו לפתור בעיה נתונה שבה הם נדרשו להוכיח טענות שונות ולשלוח למרצה את פתרונותיהם באמצעות המייל.
2	ביצוע הערכת עמיתים. לצורך זה יש לבחור מערכת קריטריונים להערכה ולקבוע לכל קריטריון את משקלו היחסי, מתוך נימוק תהליך ההערכה שבוצע	כל פרח הוראה קיבל שני פתרונות של עמיתים לצורך הערכה והתהליך כולו היה אנונימי. פרחי ההוראה התבקשו להציע רשימת קריטריונים להערכה ולקבוע לכל אחד מהם משקל יחסי שעל בסיסו ייתן הציון הסופי על העבודה. כמו כן, הם התבקשו לנמק את בחירתם (הן של הקריטריון והן את משקלו). כדי לקבל טופס הערכה אחיד, התבקשו הסטודנטים למלא את הטופס שמופיע בנספח 1. לאחר בחירת מערכת הקריטריונים ומשקלם, הם התבקשו להעריך עבודות של שני עמיתים ולנמק את ההערכה שנתנו. טפסים אלו נשלחו במייל למורה הקורס.
3	רפלקציה על שתי הערכות שקיבל כל פרח הוראה	כל פרח הוראה קיבל באמצעות המרצה שני טפסי הערכה אנונימיים על עבודתו והתבקש לרשום רפלקציה על ההערכות שקיבל. כדי לקבל משוב מפורט ומקיף, פרחי ההוראה התבקשו להתייחס לשמונה שאלות שמופיעות בנספח 2 שנוגעות להיבטים השונים של ההערכות שקיבלו.
4	תוך שימוש באסטרטגיה "מה אם לא?" יש להציע בעיות אלטרנטיביות לבעיית הבסיס	פרחי ההוראה התבקשו להשתמש באסטרטגיה "מה אם לא?" (Brown & Walter, 1993) כדי להעלות בעיות על בסיס הבעיה הנתונה. אסטרטגיה זו מבוססת על הרעיון של שלילת אחד הנתונים של בעיה שיש בה בעיית בסיס והצעת אלטרנטיבות. תהליך זה מוביל ליצירת בעיה מתמטית חדשה שהסטודנטים מתבקשים לפתור אותה כחלק מפעילות חקר.
5-6	חזרה על שלבים 2-3	שלבים 2-3 חוזרים על עצמם, בהתבסס על התוצרים של השלב הרביעי.
7	פתרון הבעיה החדשה שבחר כל אחד	פרחי ההוראה פותרים את הבעיה החדשה שבחרו מבין כל הבעיות שהעלו, כולל פירוט הפתרונות והתלבטויות שעלו במהלך הפתרון.
8-9	הערכת עמיתים	תהליך של הערכת עמיתים בדומה למה שהתבצע בשלבים 2-3 חוזר על עצמו כאשר הפעם כל אחד מפרחי ההוראה מעריך בעיות חדשות שלא הכיר קודם לכן.
10	רפלקציה מסכמת על כל תהליך ההערכה	כל פרח הוראה מתבקש לרשום הערכה מסכמת ורפלקציה על כל התהליך של הערכת עמיתים שעבר הן כמעריך והן כמוערך.

בעיית הבסיס



חיבור נקודות האמצע של צלעות מקבילית יוצרות את המצולע EFGH.

1. מהו המצולע שהתקבל?
2. מהו היחס בין שטחו של EFGH לשטחו של ABCD?
3. מהו היחס בין ההיקף של EFGH להיקפו של ABCD?

איור 1: בעיית הבסיס

בחרנו בבעיה זו לשמש כבעיית הבסיס מהסיבות הבאות: א. פתרון הבעיה מחייב הוכחה ולא חישובים; ב. ניתן לפתור את הבעיה בדרכים רבות; ג. הבעיה יכולה לשמש כמקור עשיר לתהליך של העלאת בעיות; ד. הבעיה מופיעה בספרי הלימוד, ובכך מועבר המסר שאת תהליך החקר אפשר לבסס בקלות על בעיות זמינות.

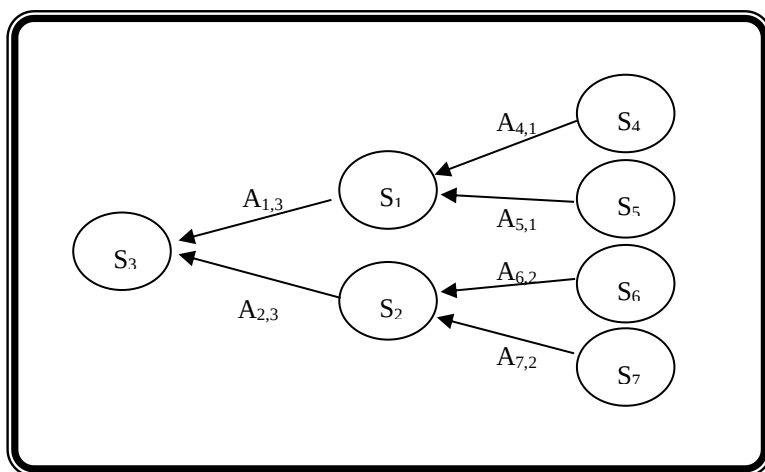
שיטות לאיסוף הנתונים וניתוחם

במהלך הסמסטר פרחי ההוראה השתתפו בשלוש מטלות של הערכת עמיתים: מטלה 1 בשלבים 2-3, מטלה 2 בשלבים 5-6, ומטלה 3 בשלבים 8-9. מטלה 1 ומטלה 3 היו דומות באופיין, שכן במטלות אלו כל סטודנט התבקש לבחור רשימה של קריטריונים, לקבוע משקל יחסי לכל אחד מהם, להעריך לפיהם שתי הוכחות גאומטריות שנכתבו על ידי עמיתיהם ולנמק את שיקוליו. המטלה השנייה הייתה שונה. במטלה זו הם התבקשו לרשום את נתוני הבעיה של בעיית הבסיס, להציע אלטרנטיבות רבות ככל האפשר לכל נתון שנשלל ולבחור נתון חדש אחד או יותר ליצירת בעיה חדשה לצורך פעילות החקר.

התהליך של הערכת עמיתים במטלות 1 ו-3 כלל את השלבים הבאים:

- א. בחירת מערכת קריטריונים להערכת ההוכחות הגאומטריות, קביעת משקל יחסי לכל קריטריון, ומתן נימוק לבחירה בכל קריטריון ומשקלו היחסי.
- ב. קביעת הציון שהתקבל בהתאם למערכת הקריטריונים והמשקלים שנבחרו, והוספת נימוק לכל ציון.
- ג. רפלקציה על תהליך ההערכה הן כמוערך והן כמעריך.

איור 2 מתאר את מערך ההערכה בתת-קבוצה מסוימת של פרחי ההוראה המסומנת כ- S_k . הסימון $A_{i,j}$ מציינ שהסטודנט S_i מעריך את העבודה של הסטודנט S_j . חשוב לציין שהמצב המתואר באיור 2 הוא להמחשה בלבד כדי להבין את מנגנון ההערכה. כלומר S_1 יכול גם להיות מוערך על ידי S_2 ו- S_3 . באיור זה לא באה לידי ביטוי העובדה שכל אחד מפרחי ההוראה מעריך בעצמו עבודה של שני עמיתים.



איור 2: תיאור סכמתי של תהליך ההערכה

כדי למנוע סירוב של הסטודנטים לקחת חלק בתהליך הערכת העמיתים, בדומה למתואר אצל פלצ'קוב (Falchikov, 1995), וכדי לחזק את מהימנות ההערכה, כל ההערכות נשלחו למרצת הקורס והועברו למוערכים באופן אנונימי.

הנתונים שנאספו כללו את התוצרים שהופקו בכל השלבים המפורטים לעיל. הנתונים שנאספו ממטלה 1 וממטלה 3 נותחו באמצעות ניתוח תוכן (Neuendorf, 2002) וניתוח אינדוקטיבי (Taylor & Bogdan, 1998), תוך התמקדות בהיבטים הבאים, הנגזרים משאלות המחקר המופיעות בפרק ההקדמה: א. קריטריונים להערכה: מאפייני הקריטריונים בהשוואה לתפקידים ולמשמעות של הוכחה מתמטית כפי שמופיעים בספרות המחקר.

- ב. ציונים ומשוב: השוואה בין שתי ההערכות שקיבלה כל עבודה.
- ג. רפלקציה על התהליך הן כמעריך והן כמוערך.
- ד. ההשפעה של הערכת עמיתים על הידע המתמטי של פרחי ההוראה.

ממצאים ודיון

כפי שצוין, כיוון שהיה הבדל באופי המטלות להלן נתמקד בהערכת העמיתים של המטלות שדמו זו לזו באופיין (מטלות 1 ו-3).

כדי לבחון את ההתפתחות של מיומנויות הערכה, בחנו את הפער בין שתי ההערכות שקיבלה אותה עבודה. הפער בין שתי ההערכות נוגע להבדלים בין מערכות הקריטריונים של שני מעריכים של אותה עבודה, לפער בין המשקלים היחסיים שניתנו לאותו קריטריון על ידי שני המעריכים, לפער בין הציונים שכל אחד מהמעריכים של אותה עבודה נתן ולהבדלים בין המשוב המילולי שניתן בכל הערכה. יתרה מזו, השוואת המשוב נעשתה כדי לבדוק האם טענות מצד המוערך מסוים על אודות אופן הבדיקה של עבודתו היו דומות לטענות שעלו מצד סטודנטים אחרים שהוערכו על ידי אותו סטודנט. בחרנו להשתמש

בקריטריונים אלו כיוון שצמצום הפערים שצוינו לעיל יכול להעיד על התפתחות מיומנויות ההערכה אצל פרחי ההוראה (Lavy & Yadin, 2010). בנוסף, השווינו בין ההערכה שנעשתה על ידי כל פרח הוראה (לדוגמה $A_{1,3}$) וההערכות שהוא עצמו קיבל, כפי שיפורט בהמשך. נוסף על כך, הקריטריונים שבחרו פרחי ההוראה הושו גם לקריטריונים שבחרו החוקרות לצורך הערכת המשימות. כל אחת מהחוקרות בחרה מערכת קריטריונים ולאחר דיון בהבדלים, הגיעו החוקרות למערכת שהייתה מוסכמת על שתייהן. לבסוף, הציונים שניתנו הושו להישגים האקדמיים של הסטודנטים. לא לכל הפערים נוכל להתייחס במסגרת הנוכחית.

בחירת הקריטריונים להערכה

בסך הכול 30 הערכות (שתיים מכל אחד מ-14 פרחי הוראה ואחת מכל אחד משני פרחי הוראה אחרים שלא לקחו חלק בפעילות הראשונה) התקבלו במטלות 1 ו-3. ניתוח הערכות אלו הראה שפרחי ההוראה השתמשו ב-12 קריטריונים שונים להערכה במטלה 1 ובשמונה קריטריונים במטלה 3 (ראה טבלה 2). חשוב לציין שאת הקריטריונים קבעו פרחי ההוראה באופן עצמאי ולא בחרו אותם מתוך רשימה של קריטריונים שניתנה להם מראש, וכאמור לא התקיימו דיונים בהקשר של הקריטריונים עד להשלמת המשימות.

מטבלה 2 עולה שבמטלה 1 נקבעו 12 קריטריונים הנוגעים להיבטים שונים של הוכחה, ובמטלה 3 קבעו פרחי ההוראה 6 קריטריונים מתוך 12 הקריטריונים שהוצעו במטלה 1, וכן קבעו 3 קריטריונים נוספים, אשר נגעו לאופי הבעיה שאת ההוכחה שלה התבקשו להעריך (קריטריונים 13-15). בטבלה 2 מופיע גם שיוך הקריטריונים שנקבעו על ידי פרחי ההוראה להיבטים הקשורים להוכחה, כפי שהם מופיעים בספרות המחקר. על שיוך זה נרחיב בהמשך.

טבלה 2: קריטריונים להערכה שבחרו פרחי ההוראה במטלות 1 ו-3

היבטים של הוכחה	קריטריון הערכה	מטלה 1		מטלה 3	
		שכיחות (%)	משקל ממוצע (AW) וסטיית תקן (SD)	שכיחות	משקל ממוצע (AW) וסטיית תקן (SD)
אימות	1. מבנה הוכחה שגרתי	11 (68.75%)	AW=30 SD=10.44	11 (68.75%)	AW=21.81 SD=6.81
	2. פתרון נכון	14 (87.5%)	AW=36.32 SD=17.41	14 (87.5%)	AW=36.53 SD=14.34
	3. שגיאות חישוב	1 (6.25%)	AW=10		
תקשורת	4. ציטוט נכון של משפטים גאומטריים	5 (31.25%)	AW=29 SD=11.93		
	5. פתרון קל ומובן	5 (31.25%)	AW=12.2 SD=10.2	12 (75%)	AW=10.7 SD=8.3
	6. הוספת תרשים ברור של הבעיה	5 (31.25%)	AW=13 SD=6.7	3 (18.75%)	AW=10 SD=0
	7. שימוש ברור במונחים מתמטיים	2 (12.5%)	AW=10	3 (18.75%)	AW=10 SD=0
	8. הסברים נוספים לטיעונים	2	AW=27.5		

היבטים של הוכחה	קריטריון הערכה	מטלה 1		מטלה 3	
		שכיחות (%)	משקל ממוצע (AW) וסטיית תקן (SD)	שכיחות	משקל ממוצע (AW) וסטיית תקן (SD)
		(12.5%)			
סיסטמטיזציה	9. ארגון הגיוני וברור	4 (25%)	AW=15 SD=7.07		
	10. ניסוח של מסקנות נכונות	1 (6.25%)	AW=25	11 (68.75%)	AW=22.27 SD=8.33
	11. קישור בין תחומים שונים במתמטיקה	2 (12.5%)	AW=27.5		
אתגר אינטלקטואלי	12. מתן ההוכחה הקצרה ביותר	1 (6.25%)	AW=10		
	13. הוכחה שמבירה את הקשרים בין הנתונים			9 (56.25%)	AW=17.7 SD=5.65
סיסטמטיזציה	14. הוכחה המובילה להרחבה/הכללה			10 (62.5%)	Average=20 SD=10.27
	15. הוכחה לא שגרתית לבעיה מעניינת			1 (25%)	AW=20
אתגר אינטלקטואלי					

בטרם נדון בכל אחד מהקריטריונים נאמר שאף שחלה ירידה במספר הקריטריונים שנבחרו במטלה 1 לעומת מטלה 3, הרי שחל גידול משמעותי במספר פרחי ההוראה שבחרו את הקריטריונים 5 ו-10 (השורות הצבועות באפור). בהמשך נראה שניתן להסביר הבדלים אלו באופי השונה של המטלות. כזכור, בעוד שבמטלה 1 פרחי ההוראה התבקשו להעריך הוכחה לבעיה שהם בעצמם פתרו קודם לכן, הרי שבמטלה 3 הם התבקשו להעריך בעיה שלא הייתה מוכרת להם. כפי שמעידים על כך במילים דומות חמישה פרחי הוראה ברפלקציה שלהם על ביצוע מטלה 3:

כאשר קראתי את ההוכחה שרשם אחד מבני הכיתה לא הצלחתי לעקוב אחר דרך החשיבה שלו, כי הבעיה לא הייתה מוכרת לי. לכן כללתי את הקריטריון הזה [5] ברשימת הקריטריונים שלי.

באשר לקריטריון מספר 10, אחד מפרחי ההוראה רשם:

הבעיה אותה הייתי צריך להעריך הייתה די מפתיעה והיה לי חשוב לבדוק האם מי שרשם אותה הגיע למסקנות המופיעות בסופה באופן ברור ונכון.

מטלה 2 עולה שקריטריון 2 ("פתרון נכון") וקריטריון 1 ("מבנה הוכחה שגרתית") היו קריטריוני ההערכה השכיחים ביותר מבין הקריטריונים שהוצעו בשתי המטלות גם יחד. הקביעה של קריטריון 2 כקריטריון הערכה על ידי מרבית פרחי ההוראה מצביעה על המודעות שלהם באשר לחשיבות של תפקיד האימות בהקשר של הוכחה מתמטית (de Villiers, 1990; Hanna, 2000). קריטריון 1 עוסק במבנה של הוכחה. המספר הגבוה יחסית של פרחי הוראה שבחרו בקריטריון זה הן עבור מטלה 1 והן עבור מטלה 3 עולה בקנה אחד עם ממצאי המחקר של קנוט' (Knuth, 2002), אשר לפיו מורים נוטים לאשר את

התוקף של הוכחה גאומטרית בעיקר על פי המבנה שלה.

הקריטריונים: "ציטוט נכון של משפטים גאומטריים" (קריטריון 4), "פתרון קל ומובן" (קריטריון 5), "הוספת תרשים של הבעיה" (קריטריון 6), "שימוש ברור במונחים מתמטיים" (קריטריון 7) ו"הסברים נוספים לטיעונים" (קריטריון 8) עוסקים בתפקיד ההוכחה בהקשר של תקשורת. בעוד שקריטריונים 4, 5 ו-7 מנוסחים בניסוח כללי, קריטריונים 6 ו-8 ספציפיים יותר. בקריטריון 5 לא מצוין באילו דרכים אפשר להשתמש כדי להפוך הוכחה לברורה יותר. לעומת זאת, קריטריונים 6 ו-8 עוסקים במרכיבים ספציפיים שעשויים לסייע בהבנת ההוכחה.

הקריטריונים: "ארגון הגיוני וברור" (קריטריון 9), "ניסוח של מסקנות נכונות" (קריטריון 10) ו"קישור בין תחומים שונים במתמטיקה" (קריטריון 11) עוסקים בסיסטמטיזציה. שבעה פרחי הוראה הכירו בחשיבות של בחירת קריטריונים שעוסקים במבנה הסיסטמטי של הוכחה במטלה 1, לעומת 11 שהכירו בכך במטלה 3. נראה שגידול זה אף הוא קשור להבדלים בין מטלה 1 למטלה 3, הבדלים שהביאו את פרחי ההוראה לידי תובנה שקל יותר לעקוב אחר המהלך של הוכחה מתמטית לבעיה לא מוכרת כאשר ההוכחה רשומה באופן שיטתי.

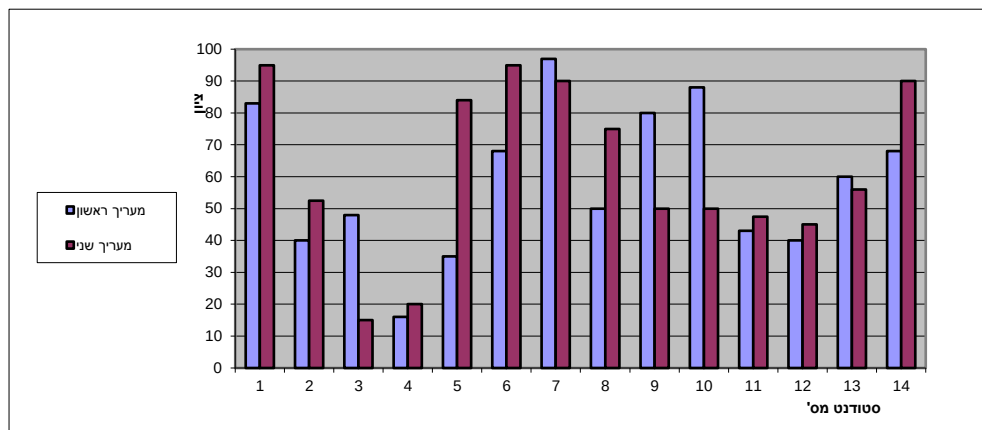
במטלה 1, פרח הוראה אחד כלל את הקריטריון "מתן ההוכחה הקצרה ביותר" (קריטריון 12). קריטריון זה קשור לאתגר אינטלקטואלי. גם במטלה 3 פרח הוראה אחד בלבד התייחס לאתגר האינטלקטואלי (קריטריון 15).

באשר לתפקיד התקשורת בהוכחה, במטלה 3 פרחי ההוראה בחרו ב"הוספת תרשים ברור לבעיה" (קריטריון 6) ו"שימוש ברור במונחים מתמטיים" (קריטריון 7) בשכיחות דומה לזאת שבה בחרו במטלה 1. אכן, כפי שצינו דה וילרס (de Villiers, 1990) וחנה (Hanna, 2000), תקשורת של ידע מתמטי היא מבין התפקידים המרכזיים של הוכחה מתמטית. כדי להקל על התקשורת של טיעונים מתמטיים, בכלל, ועל הוכחות גאומטריות, בפרט, חשוב להוסיף תרשימים ולעשות שימוש נכון במונחים מתמטיים. השינוי המשמעותי ביותר חל בהתייחסות לתפקיד הסיסטמטיזציה של הוכחה. אחד-עשר פרחי הוראה בחרו בקריטריון 10 "ניסוח מסקנות נכונות", לעומת אחד בלבד שהציע את הקריטריון במטלה הראשונה.

הקריטריונים שהתווספו במטלה 3 היו: הוכחה שמבהירה את הקשרים בין הנתונים (קריטריון 13), הוכחה המביאה לידי הרחבה או הכללה (קריטריון 14), והוכחה לא שגרתית לבעיה מעניינת (קריטריון 15). קריטריון 13 התווסף בשל הצורך של פרחי ההוראה להבין תחילה את הבעיה החדשה, שלא הכירו קודם לכן, ובנוסף גם את ההוכחה שלה. קריטריון 14 התווסף בעקבות ההתנסות של פרחי ההוראה בהעלאת בעיות (שלב 4 המתואר בטבלה 1). יש לציין, ששלב זה הביא לידי תחרות סמויה בין פרחי ההוראה באשר להעלאת של "בעיה מקורית" ו"בעיה מעניינת", ובפרט בעיה נחשבת למקורית או למעניינת אם היה אפשר להכליל אותה. הדיון בהקשר זה חורג מהמאמר הנוכחי.

מתן ציונים בהתאם למערכת הקריטריונים

באיור 3 ובאיור 4 מוצגים הציונים שניתנו לכל סטודנט על ידי שני עמיתים, במטלה 1 ובמטלה 3, בהתאמה. כזכור, כיוון שבמטלה 1 היו שני פרחי הוראה שאת עבודתם העריך רק עמית אחד, הנתונים על אודותיהם אינם כלולים באיור 3. במטלה 3 ניתנו שתי הערכות לכל 16 פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר.



איור 3: ציוני עמיתים על מטלה 1

עבור כל סטודנט (1-14), העמודה הכחולה מייצגת ציון שנתן לו אחד המעריכים, ואילו העמודה הסגולה מייצגת את הציון שנתן לו המעריך השני. מאיור 3 נראה שקיים פער לא קטן בין הציונים שנתנו לאותה עבודה שני מעריכה (פער ממוצע: 19.5 סטיית תקן: 14.61). הפער הגדול יכול להעיד על כך שלפרחי ההוראה לא היה ניסיון קודם בביצוע מטלה דומה, ולכן כל אחד התייחס אליה בהתאם לפרשנות האישית שלו, הן מבחינת הקריטריונים שאותם בחר לצורך ההערכה, והן מבחינת המשקל היחסי השונה שניתן לכל קריטריון.

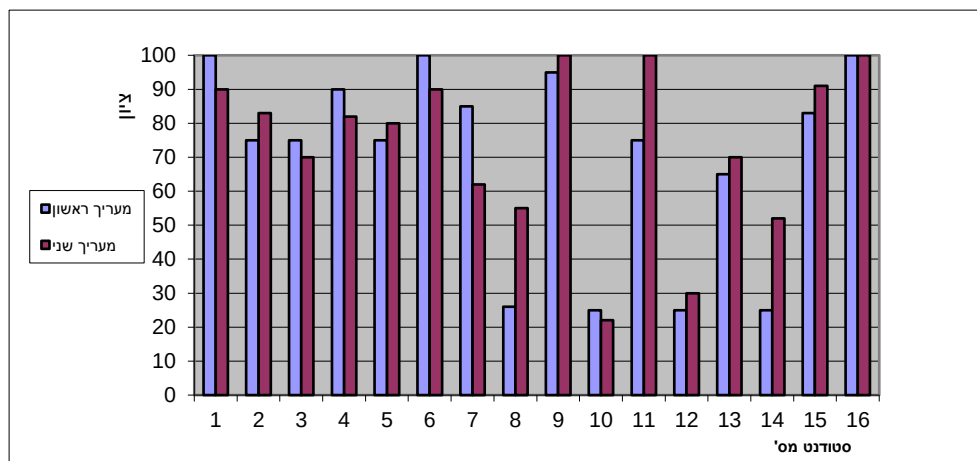
יתרה מזו, גם לאחר שפרחי ההוראה קבעו קריטריונים להערכת הוכחה ואת משקלם היחסי, עדיין נתקלו בקושי לתת ציון, על רקע חוסר הניסיון הכללי שלהם בהערכת תוצרים. בהקשר זה, להלן שתי אמירות מייצגות מתוך הרפלקציות של פרחי ההוראה:

רות: "אחרי שקבעתי את המשקל היחסי של כל קריטריון, עדיין זו הייתה החלטה קשה – האם לתת נקודות על החלקים הנכונים בהוכחה או שלהוריד נקודות מהציון הכללי על טעויות?"

יוסף: "יכולתי לראות מהעבודה שהפותר ידע את הפתרון. התשובה הסופית הייתה נכונה, אבל השיטה שבה השתמש לא הייתה ברורה לי. מכיוון שאחד הקריטריונים שלי היה 'פתרון מובן', תהיתי האם עלי לתת נקודות על הפתרון ולהוריד על שיטת הפתירה. היה לי קשה לתת ציון נמוך כי הרגשתי שהוא יודע."

גם רות וגם יוסף (שמות בדויים, כמו גם שאר השמות המופיעים בהמשך) עוסקים בטכניקת מתן הציונים

עצמם. בהינתן משקל מסוים לקריטריון כלשהו, משקל זה ניתן במלואו כאשר הפתרון עומד במלואו בתנאי הקריטריון. הבעיה מתעוררת כאשר ההוכחה המוערכת עומדת בחלקה בתנאי הקריטריון, ואז נשאלת השאלה איזה חלק מהמשקל היחסי יש לתת, וכיצד: האם לנקוט בשיטה של "מעלה-מטה" (להוריד מהמשקל המקסימלי ניקוד על שגיאות) או להפך (לתת ניקוד רק על החלקים הנכונים). לפי דבריו של יוסף תהליך זה נעשה קשה יותר כאשר המעריך חש שהמוערך מבין ויודע, אך לא מצליח לתרגם זאת לפתרון מדויק ונכון.



איור 4: ציוני עמיתים על מטלה 3

איור 4 מציג את ציוני העמיתים על מטלה 3. הפער הממוצע הוא 11 וסטיית התקן היא 9.35. השוואת ערכים אלו לערכים שהתקבלו במטלה 1 מראה מגמה של התכנסות. הפער בין הציונים שנתנו שני עמיתים לאותה עבודה הצטמצם במידה ניכרת, מה שיכול להעיד על כך שפרחי ההוראה פיתחו את כישורי ההערכה שלהם (Lavy & Yadin, 2010). יש לציין, שהתפתחות זו חלה באופן ספונטני, שכן לא נערכו על כך דיונים עם הסטודנטים במהלך ההתנסות, אלא רק עם סיומה.

השוואת הציונים שניתנו הן במטלה 1 והן במטלה 3 עם ההישגים האקדמיים של המעריכים מראה שבעלי הישגים נמוכים נוטים לתת ציונים גבוהים יותר ממעריכים בעלי הישגים גבוהים. ממצא זה תואם את הממצאים של זבנברגן (Zevenbergen, 2001) שתוארו לעיל. הסיבות לכך לא נחקרו במסגרת המחקר הנוכחי.

רפלקציית פרחי ההוראה על המשובים

למשוב יש השפעה מכרעת על הלמידה (Hattie & Timperley, 2011). לכן, כחלק מתהליך ההערכה, התבקשו פרחי ההוראה לעשות רפלקציה על המשוב שהם נתנו כמעריכים ועל המשוב שהם קיבלו כמוערכים (ראה שלבים 3, 6, 10 בטבלה 1).

ניתוח תוכן (Neuendorf, 2002) העלה שני סוגים עיקריים של משוב:

1. משוב שמורכב מהסימנים הבאים: 'V' – עבור הוכחה נכונה; 'V' – עבור הוכחה נכונה חלקית; 'X' –

– עבור הוכחה לא נכונה.

2. משוב מילולי, שאפשר לסווגו הן לפי האופי שלו והן לפי תוכנו.

משוב מורכב חסימים

במטלה 1 נתנו שני פרחי הוראה משוב שהיה מורכב מסימנים בלבד. לדוגמה:

יעל: "אחת העבודות שהייתי צריכה להעריך הייתה כל כך טובה אז רק סימנתי 'V' בסופה, כמו שאני רגילה לראות במבחנים שלי."

כאשר מורים מעריכים את עבודות התלמידים שלהם והפתרונות נכונים, רבים מהם רגילים להוסיף את הסימן 'V' בסוף העבודה. לכן כיוון שתלמידים רגילים לקבל משובים כאלה, הם פועלים באופן דומה גם כפרחי הוראה. בהקשר זה, טבע לורטי (Lortie, 1975) את המושג "apprenticeship of observation" שמתאר מצב שבו פרחי הוראה מגיעים ללימודיהם לאחר שבילו שנים רבות כתלמידים הצופים בהתנהגות של המורים שלהם. לפי לורטי (שם), חניכות זו משפיעה על התנהגויות ועל רבות מהתפיסות המוקדמות של פרחי הוראה, ואחד הביטויים לכך הוא דבריה של יעל.

חשוב לציין שכאשר פרחי ההוראה נתקלו בהוכחה נכונה חלקית או הוכחה שגויה, הם הוסיפו נימוקים להערכות שנתנו ולא הסתפקו בסימון בלבד.

משוב מילולי

בסעיף זה נפרט על אודות משוב מילולי, ונתמקד באופי ובתוכן של המשובים המילוליים שניתנו על ידי פרחי ההוראה.

אופי המשוב

אופי המשוב נוגע לסוגיות כגון:

- ניסוח ההסברים – ניסוח על דרך החיוב או השלילה, בקצרה או באריכות, בכלליות או בספציפיות.
- חיזוקים – משוב הכולל חיזוקים חיוביים במקרים שבהם הטענות הכלולות בהוכחה היו נכונות.
- משובים שכללו הצעות או רמזים לפתרונות אלטרנטיביים כאשר ההוכחה לא הייתה נכונה, או הנחיות כיצד להתקדם החל מנקודה מסוימת.

בהמשך נציג אמירות מייצגות מרפלקציות פרחי ההוראה באשר לסיווג המוצע, הן כמוערכים והן כמעריכים. טונסטל וגיפס (Tunstall & Gipps, 1996) ביצעו מיון של משובי הערכה וכמה מהסוגים שהם מצאו דומים לאלה שמצאנו, ולהלן מוצגים הסוגים הדומים שנמצאו: משוב מילולי או לא מילולי; חיובי או שלילי; משוב שמבוסס על קריטריון מסוים.

משוב המנוסח בניסוח חיובי או שלילי

מנקודת המבט של המוערך:

דוב: "אחת ההערכות שקיבלתי הייתה שלילית. אינני מתווכח עם התוכן אך אני חושב שאם הדברים היו מנוסחים בצורה חיובית ולא שלילית הייתי יכול לקבל אותה יותר."

אך כמעריך:

דוב: "...ואז הסתבר לי שהנימוקים שאני צירפתי להערכות שעשיתי לא היו טובים יותר. עכשיו אני מבין טוב יותר את החשיבות של הנימוק שנילווה להערכה ולציון."

מנקודת המבט של מוערך, דוב נותן דעתו לאופן הניסוח של הנימוק (חיובי או שלילי) ומשתף בקשיים שהיו לו בקבלת משוב המנוסח שלילי. הוא אינו חולק על התוכן של ההערכה אלא על אופן הניסוח של המשוב, וטוען שקשה יותר לקבל ביקורת שלילית כתובה. בהמשך, הוא נזכר שלמעשה פעל באופן דומה כאשר הוא עצמו ביצע הערכת עמיתים ומתן משוב דומה. למעשה, החוויה אישית שלו כמוערך העלתה את המודעות שלו לחשיבות של אופן ניסוח המשוב למוערכים אחרים (כלומר, כאשר הוא עצמו בתפקיד המעריך).

משוב קצר או כללי, מפורט או ספציפי

מנקודת המבט של מוערך:

אלה: "...למרות שהציון שקיבלתי היה גבוה, לא הייתי מרוצה כיוון שהנימוק שניתן היה כללי ורדוד והותר בי הרגשה שהעבודה שלי לא טופלה ברצינות..."

וכמעריכה:

אלה: "בהערכות שאני ביצעתי עשיתי כמיטב יכולתי להצדיק כל ציון שנתתי באריכות ובזהירות."

כמוערכת אלה נותנת דעתה למשוב הכללי שניתן להערכה שקיבלה על עבודתה שהשאיר בה רושם שהמעריך לא בדק את עבודתה בכובד ראש הרצוי, ואילו בהיותה מעריכה היא פעלה אחרת. גם במקרה זה, הפער בין שני המשובים גרם לתחושת תסכול.

רועי: "הציון שקיבלתי באחת ההערכות של עבודתי לא היה גבוה אך כיוון שהוא היה מנומק היטב עד לפרטים הקטנים, הרגשתי שהציון שקיבלתי מוצדק."

רועי, לעומת זאת, מדווח על חוויה אחרת שבה הוא מתאר מצב שבו למרות הציון הנמוך שקיבל, הוא לא נשאר בתחושה שעבודתו לא נבדקה כראוי, כיוון שהנימוקים שליוו את הציון היו מפורטים ומקובלים על דעתו. משוב מהסוג שרועי קיבל יכול לסייע לפרחי הוראה להבין שאפשר לראות בשגיאות הזדמנות

ללמידה ולא לראות בהן כישלון בלבד, כאשר ההתייחסות לשגיאות באה ממקום של רצון לתמוך בלומד (Race, 1998).

משוב הכולל הצעות לשיפור הפתרון המוצע

מנקודת המבט של המוערך:

דינה: "באחת ההערכות שקיבלתי היה כתוב: 'הפתרון מאורגן היטב, אך חסרות הצדקות לטענות הראשונה והרביעית'. הערות יותר ספציפיות היו יכולות לסייע לי לתקן את ההוכחה שלי."

מנקודת מבט של מעריך:

דינה: "במשך תהליך ההערכה מצאתי בהוכחה מספר נקודות חולשה. היו בה מספר טענות לא מנומקות, היו קפיצות לוגיות בהוכחה אשר הקשו עלי את הבנתה. מתן ציונים לא מנומקים לא עוזר לסטודנט להבין היכן שגה, ולכן כשאני הערכתי את ההוכחה נימקתי כל דבר."

ברפלקציה שלה כמוערכת, דינה מציינת שהערות המעריך לא הכילו הנחיות שהיו יכולות לסייע לה לתקן את עבודתה, וטוענת שהיא פעלה אחרת כמעריכה. תסכול מעין זה שחוותה דינה חזר על עצמו אצל פרחי הוראה אחרים שחשו שעבודתם לא קיבלה טיפול דומה לזה שהם העניקו לעבודות שבדקו.

משוב הכולל הערות מעודדות או פוגעניות

מנקודת המבט של מוערך:

יעל: "שמחתי לקבל את ההערה: 'עבודה מצוינת! נהניתי לקרוא את עבודתך'."

רות: "חשתי נפגעת כאשר קיבלתי את ההערה: 'חזרי על החומר הלימודי הרלבנטי והשלימי את הפתרון שלך. עברי שוב על השלבים השונים בפתרון והוסיפי נימוקים לכל טענה'. אפשר היה לרשום את זה בצורה מעודדת יותר."

מנקודת מבט של מעריך:

יעל: "אחת העבודות שהערכתי הייתה טובה מאוד ואני רק סימנתי 'V' בתחתית העבודה. אחרי שקיבלתי בחזרה את העבודה שלי, הבנתי שהייתי צריכה לפעול בדרך אחרת, לפחות להגיד כמה מילים טובות."

רות: "קראתי שוב ושוב את הנימוקים שצירפתי להערכות שעשיתי כדי למנוע מצב שבו המוערך יחוש פגוע."

ברפלקציה שלה, הן כמעריכה והן כמוערכת, יעל מזכירה היבט נוסף הנוגע לאופי של המשוב, שהוא האם לכלול במשוב חיזוקים, ואומרת שהיא הייתה גאה לקבל שבחים על עבודתה המצוינת, אך היא נזכרת שהיא לא פעלה כך כמעריכה. לעומתה, רות התלוננה על ההערות הבוטות שקיבלה מהמעריך של

עבודתה, הערות אשר העבירו מסר ברור על אודות אי-בקיאותה בחומר הנלמד. רות עצמה כותבת שזוהרה מאוד מלנהוג באופן דומה.

כל הרפלקציות לעיל דנות בהיבטים מגוונים הנוגעים לאופי של המשוב המילולי שליווה את הציונים שנתנו פרחי ההוראה לעמיתיהם. חלק מפרחי ההוראה דיווחו על אופי שונה של משוב שנתנו כמעריכים לעומת זה שקיבלו כמוערכים. אחרים דיווחו על מקרים שבהם נתנו משוב דומה לזה שקיבלו, אולם לאחר קריאת המשוב שקיבלו, הם הבינו בדיעבד ששגו. כמוערכים, הם עסקו בעיקר בהיבטים רגשיים של המשוב. לדוגמה, הם התייחסו לכך שקיבלו משובים כלליים וקצרים, מה שהשאיר בהם תחושה שעבודתם לא נבדקה ברצינות הראויה. החוסר בחיזוקים חיוביים או החוסר במתן הצעות לתיקון הוכחות שגויות השאירו בהם תחושה של תסכול. כאשר הם פעלו בו בזמן הן כמוערכים והן כמעריכים, ניתנה להם ההזדמנות להתעמת עם המשוב שהם עצמם נתנו, ובכך לפתח תובנות על אודות מגוון היבטים הקשורים להערכה, ובפרט מתן משוב מפורט ובונה, כזה המכבד את המוערך.

תוכני המשוב

תוכן המשוב נשען על היבטים הקשורים לתפקיד של הוכחה בגאומטריה ומשמעותה: 1. פתרון נכון; 2. פתרון מובן; 3. ציטוט נכון של משפטים בגאומטריה; 4. הוספת שרטוט ברור שמתאר את הבעיה; 5. שימוש ברור במונחים מתמטיים; 6. הוספת הסברים לטענות; 7. ניסוח של מסקנות נכונות; 8. קישוריות בין תחומי מתמטיקה שונים.

ניתוח הרפלקציות של פרחי ההוראה על המשובים על פי תוכנם, הראה כי הם באו לידי ביטוי בעיקר מנקודת המבט של מעריך.

פתרון נכון

אלה: "קודם כל אני צריכה לבדוק שההוכחה שעלי להעריך נכונה מבחינה מתמטית."

אלה, כמו רבים מפרחי ההוראה (בשתי המטלות), הייתה מודעת לעובדה שמעל הכול הוכחה מתמטית צריכה להיות נכונה. ממצא זה תואם את הספרות המקצועית שטענה שהתפקיד המרכזי של ההוכחה הוא לאשר נכונות של טענה (Bell, 1976; de Villiers, 1990, 1991; Hanna, 2000; Polya, 1954), כלומר קריטריון האימות.

הוכחה חובנת

דינה: "לא יכולתי להבין את מהלך ההוכחה של אחת מהעבודות אותן הערכתי, לא משנה כמה פעמים קראתי אותה. בסופו של דבר פניתי למרצה שתעזור לי להבין את ההוכחה."

במטלה 1, חמישה פרחי הוראה כללו קריטריון זה (קריטריון 5) ברשימת הקריטריונים שלפיהם בחרו להעריך במשימת הערכת עמיתים, ואילו 12 פרחי הוראה כללו קריטריון זה ברשימת הקריטריונים להערכה במטלה 3. הסבר אפשרי לתופעה זו נוגע לכך שבמטלה 1 כל פרחי ההוראה פתרו תחילה את הבעיה בעצמם וכאשר התבקשו להעריך פתרון של אחרים שהיה שונה מהפתרון שלהם, הם נתקלו

בקושי להבינו. במטלה 3 כל פרח הוראה התמקד בבעיה אחרת, ולכן הם ניסו להבין תחילה את הבעיה הנתונה, בלי שיהיה להם בראש פתרון מוקדם שלה. כדי להבין את ההוכחה שמישהו כתב, ההוכחה צריכה להיות רשומה בצורה מובנת. קריטריון זה נמצא בקטגוריה 'תקשורת'.

ציטוט נכון של משפטים גאומטריים

רות: "במקרים שנתקלתי בציטוט של משפטים גאומטריים שלא היה מדויק, כיוונתי את המוערך לחומר התאורטי המתאים."

חמישה פרחי הוראה כללו קריטריון זה ברשימת הקריטריונים להערכה במטלה 1, ואילו אף לא אחד כלל קריטריון זה ברשימת הקריטריונים להערכת ההוכחה במטלה 3. ניתן לשער שיש לכך קשר לעובדה העולה מתוך הרפלקציות של פרחי ההוראה שלפיה קביעת הקריטריונים להערכה נעשתה לאחר שהם קראו את ההוכחות. אי-הימצאותו של קריטריון זה ברשימת ההערכה של מטלה 3 מעיד על כך שמסיבה כלשהי הם לא חשבו שהוא נחוץ, וייתכן שהיו ממוקדים יותר בניסיון להבין את הלוגיקה של ההוכחה עצמה, תוך התעלמות מציטוט מדויק. כדי להבין זאת לעומק, יש צורך במחקר נוסף. קריטריון זה קשור לקטגוריה 'תקשורת', כיוון שכדי לשכנע אחרים שהוכחה נכונה, אדם צריך לבסס את טענותיו בתוספת ציטוטים של משפטים גאומטריים שתומכים בהוכחה.

הוספת שרטוט ברור שמתאר את הבעיה

דן: "כאשר היה חסר שרטוט באחת ההוכחות, רשמתי למוערך ששרטוט ברור של הבעיה היה יכול לעזור לי להבין טוב יותר את ההוכחה שלו."

כשליש מפרחי ההוראה כללו קריטריון זה ברשימת הקריטריונים שלהם להערכת העמיתים, הן במטלה 1 והן במטלה 3. ממצא זה מפתיע, כיוון שבמהלך לימודי הגאומטריה מורים מדגישים את החשיבות של הוספת שרטוט ברור המתאר את הבעיה. לכן ציפינו שיותר פרחי הוראה יבחרו בקריטריון זה. עם זאת, נראה שמכיוון שמרבית פרחי ההוראה צרפו שרטוט כחלק אינטגרלי מהבעיה או ההוכחה, הרי שההתייחסות לשרטוט הייתה "טבעית", ולא הורגש צורך בקביעת קריטריון ייחודי לעניין זה. ההבנה של הוכחה על ידי אחרים הופכת לקלה יותר כאשר מצורף להוכחה שרטוט ברור שמתאר אותה, ולכן אפשר לשייך גם קריטריון זה לתקשורת.

שימוש ברור במונחים מתמטיים

גילה: "קשה מאוד לעקוב אחר המהלך של הוכחה שרשומה רק באמצעות מונחים מתמטיים. צריך להוסיף הסברים כדי להפוך אותה לקריאה יותר."

פרחי הוראה מעטים הוסיפו קריטריון זה לרשימת הקריטריונים להערכה שלהם בשתי המטלות. כיוון שאפשר לרשום הוכחה גאומטרית הן באופן פורמלי באמצעות שימוש במונחים מתמטיים, והן באופן לא פורמלי באמצעות שימוש במילים, ושתי הדרכים מקובלות על מורים – מרבית פרחי ההוראה לא הכירו בחשיבות של הוספת קריטריון זה למערכת הקריטריונים שלהם. אפשר לכלול גם קריטריון זה

בקטגוריה של תקשורת, שכן אחת המטרות המרכזיות של הוכחה היא לתקשר עם אנשים אחרים בקהילה המתמטית, שבמקרה הנוכחי היו העמיתים לכיתה.

הסברים נוספים לטיעונים

רונית: "נהניתי לקרוא את אחת ההוכחות, כיוון שכל צעד בהוכחה היה מנומק הן על ידי המשפטים המתמטיים הרלבנטיים והן על ידי הסברים נוספים."

רק שני פרחי הוראה כללו קריטריון זה ברשימת הקריטריונים להערכת מטלה 1 ואף לא אחד כלל זאת במטלה 3. כיוון שפרחי ההוראה קראו את ההוכחות שהתבקשו להעריך ולא מצאו אותן ברוב המקרים קשות להבנה, הם לא כללו קריטריון זה ברשימה שלהם. הסברים מפורטים לטיעונים מסייעים לקורא להבין טוב יותר הוכחה שכתבו אחרים, ולכן אפשר לשייך זאת לקטגוריה 'תקשורת'.

ניסוח מסקנות נכונות

אלה: "שני הדברים הראשונים שהיו חשובים לי בהוכחה שהייתי צריכה להעריך זה שקודם כל המסקנות בכל שלב תהיינה גם נכונות וגם מבוססות מבחינה מתמטית."

בעוד שרק פרח הוראה אחד כלל קריטריון זה ברשימת הקריטריונים שלו להערכת מטלה 1, 11 פרחי הוראה עשו זאת במטלה 3. כפי שצוין קודם לכן, שתי המטלות היו שונות באופיין. במטלה 1 התבקשו פרחי ההוראה להעריך בעיה שהם פתרו בעצמם קודם לכן, ולכן המסקנות הנובעות מבעיה זו היו להם ברורות וידועות. לעומת זאת, במטלה 3, שבה כל אחד התמקד בהוכחה של בעיה שונה, המעריכים לא הכירו את הבעיות שהיה עליהם להעריך ולכן קריטריון זה נראה להם חיוני לצורך הערכה, כיוון שבאמצעותו התאפשר להם להעריך את התוקף ואת הנכונות המתמטית של הבעיה שלא הייתה מוכרת להם. אפשר לשייך קריטריון זה לסיסטמטיזציה, כיוון שאחת התכונות הנדרשות מהוכחה היא הגעה למסקנות נכונות.

קישוריות בין תחומי מתמטיקה שונים

דן: "אחת ההוכחות שבדקתי הייתה ממש מקורית. היא כללה רעיונות שחיברו בין האלגברה והגאומטריה. זה גרם לי לתהות איך אנשים חושבים. היה לי קל לתת ציון גבוה להוכחה כזו."

שני פרחי הוראה בלבד כללו קריטריון זה, שאפשר לסווגו לקטגורית הסיסטמטיזציה של הוכחה, ברשימת הקריטריונים שלהם. כאמור, ברפלקציות של פרחי ההוראה על כל התהליך רבים מהם הודו שהם קראו תחילה את ההוכחות ורק לאחר מכן בחרו את הקריטריונים להערכה. במבט לאחור, רבים מהם סברו שהיה צריך לפעול באופן שונה. "יש לשפוט את ההוכחה לפי קריטריונים שנקבעים מראש ולא אחרת". בחירת מערכת הקריטריונים אחרי קריאת ההוכחה יכולה להסביר מדוע דן ופרח הוראה נוסף כללו את קריטריון הקישוריות במערכת הקריטריונים שלהם. אלמלא דן היה נתקל בהוכחה זאת, ניתן לשער שלא היה מעלה את הקריטריון של קישוריות בין תחומים.

לסיכום, כל הרפלקציות של פרחי ההוראה על התוכן של המשובים היו מנקודת המבט של המעריך. כפי שאפשר לראות בטבלה 2, פרחי ההוראה עסקו בהיבטים שונים של הוכחה גאומטרית, כגון אימות, תקשורת וסיסטמטיזציה.

ההשפעות של הערכת העמיתים על העבודה המתמטית של פרחי ההוראה

ברפלקציות של פרחי ההוראה על הערכת העמיתים לאחר מטלה 1, רבים מהם נתנו את דעתם להשפעה של ההערכה על הידע המתמטי שלהם משתי נקודות מבט: ראשית, חשיפה לפתרון שהיה שונה מהפתרון שלהם במטלה 1, גרמה להם להבין שהבעיה ניתנת לפתרון בדרכים שונות. שנית, צפייה בפתרון שהוא יעיל ואלגנטי יותר מהפתרון שלהם, גרמה להם לבצע חשיבה מחודשת על הבעיה ולחפש כיצד אפשר לשפר את הפתרון שלהם. במטלה 3 תהליך ההערכה אפשר לפרחי ההוראה להיחשף לבעיות חדשות ומגוונות, ומתוך כך להרחיב את הידע המתמטי שלהם. בדרך כלל, את משימות הערכה מבצע המורה שהידע המתמטי שלו מלכתחילה נרחב יותר משל תלמידיו ולכן תהליך ההערכה נעשה לעתים קרובות כלאחר יד (Hansen, 1991; McMillan & Forsyth, 1991). במחקר שלנו המצב היה שונה – פרחי ההוראה פועלים בו בזמן הן כמעריכים (בתפקיד ה"מורה") והן כמוערכים (בתפקיד ה"תלמידים"). בהיותם בתפקיד המורה, הם התוודעו לאסטרטגיות פתרון שאפשרו להם להיחשף לרעיונות מתמטיים חדשים שהם לא חשבו עליהם קודם לכן. רייס-דורהם (Reese-Durham, 2005) תיאר מצב זה, וטען שבזמן ביצוע הערכת עמיתים סטודנטים מגלים תובנות על אודות הפתרונות שלהם עצמם, וכמו כן הם מפתחים את יכולת השיפוט שלהם בהקשר לתוצרים של אחרים. יכולת כזאת נחשבת למיומנות חשובה בחיים המקצועיים.

כפי שציינו 13 פרחי הוראה במילים דומות:

רונית: "כאשר קראתי את אחת ההוכחות שהיה עלי להעריך התרשמתי מהפשטות שלה. זה גרם לכך שהיה קל מאוד לעקוב אחר מהלך ההוכחה, ובמשך הקריאה של ההוכחה חשבתי לעצמי מדוע אני לא יכולתי לעשות זאת באותו אופן."

לחשיפה לרעיונות של אחרים הייתה השפעה עוצמתית יותר במטלה 3, שבה כל פרח הוראה התבקש להעריך שתי בעיות חדשות שהיו שונות לחלוטין זו מזו. תהליך זה אפשר לפרחי ההוראה להרחיב ולהעמיק את הידע המתמטי שלהם, כפי שהזכירו שבעה פרחי הוראה במילים דומות:

רות: "כאשר קראתי את הבעיות של עמיתי במטלה השלישית זה גרם לי לחשוב על החשיבה האנושית המגוונת ועל העושר שבמתמטיקה. תהיתי כיצד חברים לכיתה עם ידע דומה לשלי העלו רעיונות כל כך מעניינים ושונים ממה שאני בחרתי."

דן: "אחרי המטלה השלישית הבנתי שזו הייתה משימת לימוד שונה. במקום ללמוד גאומטריה בדרך הרגילה למדתי מתמטיקה דרך עיסוק בפעולת הערכה שהייתה יותר אינטנסיבית ומעניינת עבורי – זה היה שונה ומלמד יותר."

כדי להיות מסוגלים להעריך את הפתרונות של עמיתיהם ולשפוט את מידת הנכונות של ההוכחות, שישה פרחי הוראה דיווחו על כך שהיו צריכים לחזור על החומר הרלוונטי. מצב זה גרם לשלושה מהם לחוש

ספק באשר ליכולת שלהם להעריך נכונות של הוכחה מתמטית:

גילה: "במטלה השלישית הייתי צריכה להבין בעיות חדשות שלא הכרתי ולהעריך את ההוכחות שלהן. היו שם משפטים שלא זכרתי, ולכן לא הייתי בטוחה בנוגע לנכונות המתמטית שלהם. לא בטוח שאני בעמדה לשפוט כל הוכחה מתמטית שהיא."

ברפלקציה שלה, גילה מזכירה מצב בעייתי שבו המעריך לא מחזיק בידע המתמטי הנדרש כדי לשפוט נכונות של פתרון מוצע. במקרים ספורים פרחי הוראה פנו למרצה כדי שתסייע להם, והמרצה הפנתה אותם למקורות מתאימים. בעיה מעין זו יכולה לחזור על עצמה כאשר תלמידי בית ספר עוסקים בפעילויות הערכה, אך במקרה הנוכחי בשל מעורבותם של פרחי הוראה בעל ידע מתמטי רחב יותר מזה של תלמידים, הבעיה לא הייתה שכיחה.

הערכה של מטלה 1 לעומת הערכה של מטלה 3 - התנסות פרחי ההוראה

לאחר סיום מטלה 3 ביקשנו מפרחי ההוראה לעשות רפלקציה על כל התהליך ולתת את דעתם להערכות שנתנו לעמיתיהם ולהערכות שקבלו מהעמיתים. ברפלקציות שלהם נגעו פרחי ההוראה בשלושה נושאים עיקריים: בחירת מערכת הקריטריונים להערכה, התנסות כמעריך והתנסות כמוערך.

בחירת מערכת הקריטריונים להערכה

למעלה משני שלישי של פרחי ההוראה דיווחו על כך שנתקלו בקשיים בבחירת מערכת הקריטריונים במטלה 1, ותלו את הסיבות לקשיים אלו בחוסר הניסיון שלהם בפעילות דומה. כפי שאמרו במילים דומות:

רות: "התקשיתי להחליט האם הקטגוריות צריכות להתייחס לשיטת ההוכחה, לטכניקה, לדרך המחשבה או אולי לפתרון הסופי... איך לתת להם משקל? מי מהם יותר חשוב? למי מגיע משקל גבוה יותר?"

מציטוט זה ניתן ללמוד על כך שפרחי ההוראה לא היו בטוחים באשר לאופי של מערכת הקריטריונים – מה הם אמורים להעריך? הם גם גילו היסוס באשר למשקל היחסי שראוי לתת לכל קריטריון, בידיעה שמשקל גבוה מציין את החשיבות היחסית של אותה קטגוריה. היו שטענו שהמשקל של הקריטריון "מעביר מסר", כלומר, "אם מורה רוצה לחנך את התלמידים שלו לעבוד בדרך מסוימת, הוא צריך לתת לזה ביטוי בהערכה שלו את עבודתם".

על אף הקשיים שדיווחו עליהם פרחי ההוראה, ניכר שבשתי מטלות ההערכה הם עסקו בתפקידים ובמשמעות של הוכחה לצורך בחירת מערכת הקריטריונים שלהם. במטלה 1 הם בחרו 12 קריטריונים העוסקים בתפקידים ובמשמעות של הוכחה, ואילו במטלה 3 נבחרו רק 9 קריטריונים. כפי שצוין לעיל, בשתי המטלות פרחי ההוראה דיווחו על כך שמערכת הקריטריונים נבחרה לאחר שקראו את ההוכחות שהיה עליהם להעריך. התנהלות זו יכולה להסביר מדוע חלק מהקריטריונים המופיעים במטלה 1 לא מופיע במטלה 3 (לדוגמה קריטריון 3). בחינת כל ההוכחות שניתנו להערכה במסגרת מטלה 3 מראה

שהבעיות שהעלו פרחי ההוראה לא כללו ערכים מספריים, ולכן המעריכים לא מצאו חשיבות בהוספת קריטריון שעוסק בטעויות חישוב. באשר לקריטריונים 8, 9 ו-11 תהינו מדוע הם לא נכללו ברשימת הקריטריונים של מטלה 3. הסבר אפשרי נוגע לכך שהם לא מצאו במטלה 3 מרכיבים הקשורים לקריטריונים אלה.

לאחר השלמת מטלה 3, לא נמצאו סימוכין ברפלקציות של פרחי ההוראה לכך שהם נתקלו בקשיים בבחירת מערכת הקריטריונים. ממצא זה, נוסף לממצא שהוזכר באשר לצמצום הפער בין שתי ההערכות, יכול להעיד על התפתחות ספונטנית של מיומנויות הערכה בהקשר של בחירת מערכת קריטריונים.

פרחי ההוראה בתפקיד מעריכים

פרחי ההוראה עסקו ברפלקציות שלהם במשוב שהם נתנו לעמיתיהם. פרחי ההוראה שדיווחו על כך ששינו "לטובה" את המשוב שלהם במטלה 3 לעומת המשוב שנתנו במטלה 1, היו אלה שקיבלו משוב מפורט על עבודתם או משוב תומך, שהיו שונים במידה ניכרת מזה שהם עצמם נתנו לעמיתיהם כאשר שימשו בתפקיד המעריכים. כפי שציינו חמישה פרחי הוראה במילים דומות:

אלה: "אחרי שקראתי את המשוב על עבודתי, שהיה מפורט וכלל רמזים לשיפור, הבנתי שהמשוב שאני נתתי לא היה יעיל. לכן במטלה השלישית השקעתי מאמצים לתת משוב מפורט וטוב יותר."

במקרים שבהם היה מצב הפוך, כלומר המשוב שנתן מעריך נתפס על ידו כבעל ערך רב יותר במידה ניכרת מאשר משוב שניתן לאותו מעריך כמועריך, תגובת פרח ההוראה העידה על חוסר שביעות רצון ואף על תסכול. תגובות אלה מעידות על צפייה לקבל משוב הדומה במאפייניו למשוב שהם עצמם נתנו. חוויית האכזבה לנוכח פער המשובים גרמה לפרחי ההוראה להפנים את החשיבות של המשוב, כפי שכתבו ארבעה פרחי הוראה במילים דומות:

רות: "בהערכה שנתתי עשיתי את המקסימום להצדיק את הציון שנתתי ולמרות שהעבודה שלי לא טופלה באופן דומה, אני עדיין מאמינה שהערכה של סטודנטים צריכה להיעשות ברצינות כיוון שהם יכולים ללמוד הרבה מהמשוב שהם מקבלים."

מהרפלקציות של פרחי ההוראה אחרי מטלה 3 אפשר ללמוד שתלונות על אודות האופי של המשוב הפכו לנדירות. מכך ניתן להסיק שפרחי ההוראה פתחו מודעות לנזק שמשוב דל או שלילי יכול לגרום למועריך.

פרחי ההוראה בתפקיד מוערכים

קבלת משוב מפורט ובעל ערך לעומת משוב בוטה ודל גרמה לשני סוגים של תגובות אצל פרחי ההוראה כמוערכים, בהתאמה: פרחי הוראה שקיבלו משוב מפורט ובעל ערך שיבחו את המשוב וציינו את יתרונותיו הן בהקשר של למידה והן בהיבט הרגשי. שלושה פרחי הוראה אמרו במילים דומות: "המשוב המפורט שקיבלתי עזר לי להבין מדוע הציון שקיבלתי הוא נמוך ולקבל אותו. יותר מזה, זה נתן לי הרגשה שהתייחסו לעבודה שלי ברצינות". לעומת זאת, כאשר היה מדובר במשוב דל או בוטה הוא נתפס

על ידי פרחי ההוראה כהתייחסות רשלנית ולא מכבדת כלפי המוערך, תגובתם למשוב מעין זה כמוערכים הייתה של תסכול ואכזבה. הם פירשו משוב בוטה כחוסר סובלנות של המעריך כלפי החולשות והקשיים שבאו לידי ביטוי בהוכחות שרשמו, וכפי שציין אחד מהם: "ביטויי חוסר הסובלנות באחד המשובים שקיבלתי השאירה בי את הרושם שלסטודנט שהעריך אותה לא הייתה כל אמפתיה לקשיים שלי".

הרפלקציות שנכתבו לאחר מטלה 3 לא הכילו תגובות על משוב בוטה. נראה שחשיפת פרחי ההוראה לתהליך הערכת עמיתים הן כמוערכים והן כמעריכים עימת אותם עם נקודות החוזק ונקודות התורפה של ההערכה והמשוב הנלווה לכך, וסייע להם לפתח רגישות לאופי של המשוב.

עם זאת, יש לסייג ולומר שרוב המשובים שניתנו במטלה 1 נוסחו בדרך מנומסת ולא פוגענית. ברפלקציות של פרחי ההוראה על כל התהליך, רבים מהם עסקו בבעייתיות של התפקיד הדואלי שלהם כמעריכים את עמיתיהם וכמוערכים על ידם. בהתאם לעדויות של פרחי ההוראה, המודעות שלהם לסיטואציה הדואלית הנחתה אותם לתת משוב זהיר ואחראי, ולא להיות פוגעניים, אך כנגד זה להפנות את תשומת לב המוערכים לשגיאות בהוכחות שהעריכו אותן. ממצא זה תואם לממצאיו של פלצ'קוב (Falchikov, 1995) העוסקים בקשיים שיש לסטודנטים להעריך את חבריהם, ובמיוחד בקבוצות חברתיות קטנות ומגובשות.

לסיכום, מהממצאים ניתן לראות שפרחי ההוראה בחרו קריטריונים להערכה שעוסקים בתפקידים ובמשמעות של הוכחה מתמטית, כגון: מבנה הוכחה שגרתית, פתרון נכון, שגיאות חישוב, ציטוט נכון של משפטים גאומטריים, פתרון קל ומובן, הוספת תרשים ברור של הבעיה, שימוש ברור במונחים מתמטיים, הסברים נוספים לטיעונים, ארגון הגיוני וברור, ניסוח של מסקנות נכונות, קישור בין תחומים שונים במתמטיקה, מתן ההוכחה הקצרה ביותר, בעיה מוגדרת היטב, הצעות להרחבה או הכללה ובעיה מעניינת. כמו כן הם נתנו משקל לכל קריטריון בהתאם לחשיבות היחסית שייחסו לו. ממטלה 1 למטלה 3 נצפתה ירידה במספר הקריטריונים, ונראה שאפשר לייחס זאת לשוני בין מאפייני שני המטלות. במילים אחרות, פרחי ההוראה בחרו להעריך הוכחות באמצעות קריטריונים שהם תלויי מטלה, ולא באמצעות קריטריונים קבועים כלשהם. הירידה בפער שבין ההערכות של אותה משימה מראה על התפתחות במיומנות ההערכה של פרחי ההוראה (Lavy & Yadin, 2010), למרות הזמן הקצר שחלף בין שתי המטלות. מהרפלקציות של פרחי ההוראה על תהליך ההערכה ניתן ללמוד על כך שהעיסוק שלהם בהערכת עמיתים עזר להם לפתח את המודעות שלהם באשר לחשיבות של התפקידים והמשמעות של הוכחות בגאומטריה וכן לפתח רגישות באשר למאפייני המשוב שהם נותנים כמעריכים. רגישות זאת אף היא מעידה על כך שפיתחו מיומנויות הערכה שלהם (Lovemore & David, 2006; McGatha et al., 2009; Sluijsmans & Prins, 2006): בהתייחסותם למשוב מנקודת מבט של מעריך, עולה שפרחי ההוראה התמקדו בעיקר בקטגוריות שלפיהן הם העריכו את עבודת עמיתיהם. כאמור, קטגוריות אלה היו קשורות לתפקידים ולמשמעות של הוכחה גאומטרית. לעומת זאת מנקודת מבט של מוערך, המיקוד היה בעיקר באופי של המשוב ובסגנון הכתיבה שלו. מכאן אפשר ללמוד על החשיבות הרבה של חשיפת פרחי הוראה לשני צדי המטבע של הערכה, ולצורך זה ניתן ליישם את הגישה של הערכת עמיתים.

עוד עולה מהרפלקציות שלהערכת העמיתים הייתה תרומה גם בהיבט של העמקת הידע המתמטי: פרחי

ההוראה נחשפו לדרכים שונות של פתרון וביצעו חשיבה מחודשת על הפתרונות שלהם עצמם, וכן נחשפו למגוון בעיות שלצורך הערכת ההוכחות שלהן נדרשו לעתים לחזור על המשפטים הגאומטריים. כל אלה הובילו את פרחי ההוראה לגלות תובנות על אודות התוצרים המתמטיים שלהם (Berkencotter, 1995).

הערות לסיכום

כיוון שנושא הקריטריונים להערכת הוכחות לא נדון עם פרחי ההוראה בטרם ההתנסות, וממצאי המחקר העלו שהם בחרו קריטריונים להערכה שעוסקים בתפקידים ובמשמעות של הוכחה מתמטית, נראה שיש להם ידע קודם שעמו הם מגיעים ללימודי ההכשרה שלהם, המבוסס על ניסיון העבר שלהם בכתיבת הוכחות מתמטיות. לפיכך ראוי לבסס את לימוד הנושאים הקשורים להערכת הוכחות מתמטיות על הידע המוקדם של פרחי ההוראה. הממצאים גם מצביעים על כך שעצם העיסוק בהערכת עמיתים ומתן הזדמנות לבחון היבטים תכניים ורגשיים הקשורים להערכה הן מההיבט של המעריך והן מההיבט של המוערך תומכים בהתפתחות ספונטנית של תובנות באשר להערכה בכלל, ולהערכה של הוכחות לטענות גאומטריות בפרט. במחקר המשך מוצע לבחון את היתרונות והחסרונות של דיונים כיתתיים שוטפים המלווים את הפעילות שתוארה לעיל.

לבסוף, נציין שעל סמך ההתנסות העלו פרחי ההוראה לדיון כיתתי שני נושאים מרכזיים: (1) סוגיות הקשורות ליתרונות ולחסרונות של שימוש בקריטריוני הערכה גנריים קבועים מראש לעומת קריטריונים שהם ספציפיים וייעודיים למאפייני המשימה שתוצריה מוערכים; (2) היתרונות והחסרונות של מועד קביעת הקריטריונים במקרה שאינם גנריים: לפני החשיפה לתוצרים או לאחריה. במחקר המשך מוצע לאפשר לפרחי הוראה לברר סוגיות אלה באופן מעשי, ולבחון את ההשלכות שיש לכך על התפתחות כישורי הערכה של תוצרים מתמטיים.

רשימת מקורות

- Aigner, M., & Ziegler, G. M. (1999). *Proofs from the book*. New York: Springer-Verlag.
- Aksu, H. H. (2008). A study on the determination of secondary school mathematics teachers' views on alternative assessment. *Humanity & Social Sciences Journal*, 3(2), 89-96.
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Bangert-Drowns, R. L., Kulik, C. C., Kulik, J. A., & Morgan, M. (1991). The instructional effects of feedback in test-like events. *Review of Educational Research*, 61(2), 213-238.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Berkencotter, K. (1995). The power and perils of peer review. *Rhetoric Review*, 13(2), 245-248.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, 5(1), 7-74.
- Boud, D. (2000). Sustainable assessment: Rethinking assessment for the learning society. *Studies in Continuing Education*, 22(2), 151-167.
- Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflection and applications* (pp. 16-27). Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum Associates.

- Butler, D. L., & Winne, P. H. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of educational research*, 65(3), 245-281.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 24(4), 359-387.
- Cole, D. A. (1991). Change in self-perceived competence as a function of peer and teacher evaluation. *Developmental Psychology*, 27(4), 682-688.
- Conway, R., Kember, D., Sivan, A., & Wu, M. (1993). Peer assessment of an individual's contribution to a group project. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 18(1), 45-56.
- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, South Africa*, 24, 17-24.
- de Villiers, M. (1991). Pupils' need for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras, South Africa*, 26, 18-27.
- Falchikov, N. (1995). Peer feedback marking: Developing peer assessment. *Innovations in Education and Training International*, 32(2), 175-187.
- Falchikov, N., & Goldfinch, J. (2000). Student peer assessment in higher education: A meta-analysis comparing peer and teacher marks. *Review of Educational Research*, 70(3), 287-322.
- Gatfield, T. (1999). Examining student satisfaction with group projects and peer assessment. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 24(4), 365-377.
- Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). University of Maryland, College Park.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, 44(1-2), 127-150.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 1-10). Dordrecht: Springer.
- Hansen, A. J. (1991). Establishing a teaching/learning contract. In C. R. Christensen, D. A. Garvin, & A. Sweet (Eds.), *Education for judgment: The artistry of discussion leadership* (pp. 123-135). Boston: Harvard Business School.
- Hanrahan, S. J., & Isaacs, G. (2001). Assessing self- and peer-assessment: The students' views. *Higher Education Research and Development*, 20(1), 53-70.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2011). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Herndon, C. (2006). Peer review and organizational learning: Improving the assessment of student learning. *Research & Practice in Assessment*, 1, 8-13.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- Hsieh, F. J., Horng, W. S., & Shy, H. Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 279-304). Dordrecht: Springer.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

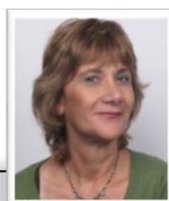
- Kulhavy, R. W., & Stock, W. A. (1989). Feedback in written instruction: The place of response certitude. *Educational Psychology Review*, 1(4), 279-308.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 151-161.
- Lavy, I., & Yadin, A. (2010). Team-based peer review as form of formative assessment – The case of systems analysis and design workshop. *The Journal of Information Systems Education*, 21(1), 85-98.
- Lortie, D. C. (1975). *School-teacher: A sociological study*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lovemore, J. N., & David, K. M. (2006). Efficacy of college lecture and student peer collaborative assessment of in-service mathematics student teachers' teaching practice. *The Mathematics Educator*, 16(2), 35-42.
- Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 24 (3-4), 385-401.
- Marcoulides, G. A., & Simkin, M. G. (1991). The consistency of peer review in student writing projects. *Journal of Education for Business*, 70(4), 220-223.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of pre-service elementary teachers. *Journal for research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- McDowell, L., & Mowl, G. (1996). Innovative assessment: Its impact on students. In G. Gibbs (Ed.), *Improving student learning through assessment and evaluation* (pp. 131-147). Oxford: The Oxford Centre for Staff Development.
- McGatha, M. B., Bush, W. S., & Rakes, C. (2009). The effects of professional development in formative assessment on mathematics teaching performance and student achievement. *Journal of Multidisciplinary Evaluation*, 6(12), 32-43.
- McMillan, J. H., & Forsyth, D. R. (1991). What theories of motivation say about why learners learn. *New Directions for Teaching and Learning*, 45, 39-52.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- Neuendorf, K. A. (2002). *The content analysis guidebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Paris, S. G., & Newman, R. S. (1990). Developmental aspects of self-regulated learning. *Educational Psychologist*, 25(1), 87-102.
- Paris, S. G., & Paris, A. H. (2001). Classroom applications of research on self-regulated learning. *Educational Psychologist*, 36(2), 89-101.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press.
- Race, P. (1998). Practical pointers in peer assessment. In S. Brown (Ed.), *Peer assessment in practice* (pp. 113-122). Birmingham: SEDA.
- Reese-Durham, N. (2005). Peer evaluation as an active learning technique. *Journal of Instructional Psychology*, 32(4), 338-343.
- Riley, S. M. (1995). Peer responses in an ESL writing class: Student interaction and subsequent draft revision. *Dissertation Abstracts International*, 56, 3031.
- Schmidt, D., Baran, E., Thompson, A., Koehler, M. J., Punya, M., & Shin, T. (2009). Examining preservice teachers' development of technological pedagogical content knowledge in an introductory instructional technology course. In I. Gibson, R. Weber, K. McFerrin, R. Carlsen, & D. Willis (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2009* (pp. 4145-4151). Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs written as texts: Can undergraduate tell whether

- an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-36.
- Sluijsmans, D. M. A., & Prins, F. (2006). A conceptual framework for integrating peer assessment in teacher education. *Studies in Educational Evaluation*, 32(1), 6-22.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof construction and evaluation, *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253.
- Tunstall, P., & Gipps, C. (1996). Teacher feedback to young children in formative assessment: A typology. *British Educational Research Journal*, 22(4), 389-404.
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1998). *Introduction to qualitative research methods* (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Topping, K. (1996). *Effective peer tutoring in further and higher education*. Birmingham: SEDA.
- Topping, K. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research*, 68(3), 249-276.
- Topping, K. J., & Ehly, S. W. (Eds.). (1998). *Peer-assisted learning*. Mahwah N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Topping, K. J., & Ehly, S. W. (2001). Peer assisted learning: A framework for consultation. *Journal of Educational and Psychological Consultation*, 12(2), 113-132.
- Topping, K. (2003). Self and peer assessment in school and university: Reliability, validity and utility. In M. Segers, F. Dochy, & E. Cascallar (Eds.), *Optimising new modes of assessment: In search of qualities and standards* (Vol. 1, pp. 55-87). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Webb, D. C. (2009). Designing professional development for assessment. *Educational Designer*, 1(2), 1-26.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119.
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in Mathematics*, 56(2-3), 209-234.
- Zevenbergen, R. L. (2001). Peer assessment of student constructed posters: Assessment alternatives in preservice mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(2), 95-113.



פרופ' עטרה שריקי

מרצה במכללת אורנים במסגרת התואר הראשון ושני, ועוסדת בראש פרויקט המצוינות של המכללה בשיתוף עם קרן טראמפ. מחקרה כיום מתמקדים בתחום היצירתיות המתמטית, סוגיות הנוגעות ללידה מרחוק ותהליכים הקשורים ליצירת קהיליה מקצועית של מורים למתמטיקה.



פרופ' אילנה לביא

בוגרת הוראת המדעים במתמטיקה בטכניון. תחומי המחקר שלה הם: התפתחות מקצועית של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה וחקר קשיי לומדים בהבנת מושגים מדעיים (במתמטיקה ובמדעי החשב). פרסמה מאמרים רבים בנושאים אלו.

נספח 1

שלב 1: מסמך הערכה לעבודה

שם המעריך: _____ תאריך: _____
מספר המוערך _____

קריטריון	המשקל המקסימלי של הקריטריון ונימוק	הציון שלי עבור הקריטריון	נימוק לציון שנתתי

הערות כלליות למוערך:

נספח 2

שלב 2: הערכת עמיתים

שם המוערך: _____ תאריך: _____

חלק ראשון: היחס שלי כלפי ההערכה שקיבלתי

האם ההערכה שקיבלת נתנה לך משוב בונה שסייע לך לשפר עבודתך?

האם ההערכות הכילו הערות בוטות? אם כן, תאר את אופיין.

האם ההערכות שקיבל איפשרו לך להבין את הבעייתיות של פתרוןך בדרך שונה?

אילו חלקים של ההערכות גרמו לך לבדוק שוב את פתרוןך ומדוע?

אילו חלקים של ההערכות לא גרמו לך לבדוק שוב את פתרוןך ומדוע?

האם היו בקריטריונים שלפיהם הוערכה עבודתך שלא חשבת עליהם בעצמך אם כן, תאר את אותם קריטריונים אותם החלטת ל'אמץ' ומדוע?

חלק שני: ההערכה שנתתי לעמיתי בכיתה

האם השתתפותך בהערכת עמיתים גרמה לך לשנות את הפתרון שלך? מדוע?

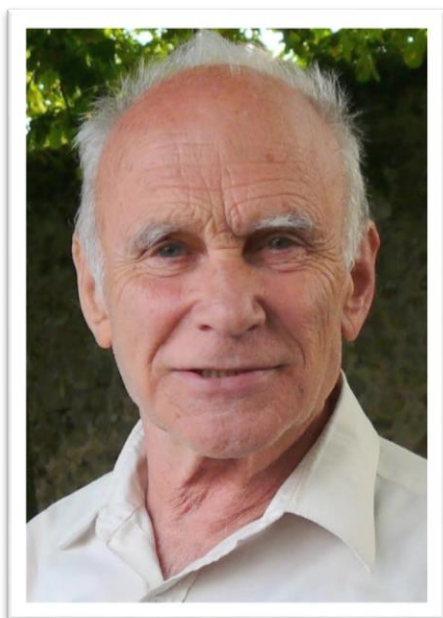
תאר את ההתלבטויות שלך במהלך תהליך ההערכה.

מדור מאורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל

דברים לזכרו של פרופ' גדי מורן (1938-2016)

דוד בן-חיים, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה;

מינהלת מל"ס - טכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה



פרופ' גדי מורן היה מתמטיקאי ומרצה למתמטיקה באוניברסיטת חיפה והטביע את חותמו בעת עבודה מאומצת, ברוכה ורבת שנים הן בתחום המתמטי הטהור והן בתחום החינוך המתמטי, באמצעות הנחיה של סטודנטים לתואר שני ושלישי המשולבים בשני התחומים, המתמטי והחינוך-מתמטי.

גדי נולד בקיבוץ יגור בשנת 1938 ולאחר שירותו הצבאי התקבל ללימודי כימיה באוניברסיטה העברית בירושלים. שנה לאחר מכן, ובד בבד עם לימודיו במחלקה לכימיה התקבל ללימודי תואר ראשון במחלקה למתמטיקה באותו מוסד. עם סיום לימודיו לתואר שני בכימיה פסיקלית התקבל ללימודי דוקטורט במתמטיקה. את עבודת הדוקטורט שלו בתורת הקבוצות הוא כתב בהדרכת פרופ' עזריאל הלוי ועליה הוא קיבל תואר דוקטור מטעם האוניברסיטה העברית בשנת 1972.

בין השנים 1972-1975 שהה גדי בגרמניה ובארה"ב לצורך עבודת הפוסט-דוקטורט ועם שובו ארצה הצטרף לסגל ההוראה בחוג למתמטיקה באוניברסיטת חיפה עד לפרישתו בשנת 2006.

במרוצת השנים גילה גדי עניין בתחומים מתמטיים רבים ומגוונים ובין השאר הוא עסק בתורת הקבוצות, לוגיקה מתמטית, תורת הגרפים, טופולוגיה ואלגברה.

בד בבד ולצד עשייתו המתמטית הענפה, התעניין גדי רבות בחינוך מתמטי. בחלוף הזמן הוא גיבש לעצמו

משנה סדורה למחצה בתחום, שאותותיה ניכרים היטב בעבודות המאסטר והדוקטורט שהנחה בעצמו, או בשיתוף עמיתים מתחום החינוך המתמטי. לי אישית נפלה הזכות בחלקי להנחות עם גדי כמה סטודנטים.

הכרתי את פרופ' מורן לראשונה כאשר חזר ארצה מחו"ל בשנת 1975 בהיותי סטודנט לתואר שני במתמטיקה ובחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. הוא התגלה לי כמרצה מעולה ואכפתניק מכל סטודנט וסטודנטית שנכחו בהרצאותיו. כבר אז הוא היה אמפטי לכל אחד ואחת ואף התעניין בשורשיהם המשפחתיים.

במרוצת השנים היו לנו הרבה שיחות על מתמטיקה וחינוך. ניכר שהיה לו אכפת מאוד מרמת החינוך המתמטי ובפרט בתחום הגאומטריה. הוא רצה מאוד להנגיש חומרי למידה וספרים שהכילו בעיות יפות ומעניינות בגאומטריה בעיקר לתלמידי בית הספר התיכון. לכן למרות עיסוקיו הרבים במתמטיקה גבוהה, הוא ניאות להנחות סטודנטים לתואר שני ושלישי במתמטיקה המשולבת בחינוך מתמטי ותמיד הנושאים היו נושקים גם לרמה התיכונית.

גדי היה איש ארץ ישראל היפה, אהב לטייל ולצלם ולבקר חברים ואף אצל סטודנטים שלו בעת ההנחה שלהם, וגם שמר עמם על קשר הרבה שנים לאחר מכן. אני מאמין שהוא חרש את הארץ לאורכה ולרוחבה בטילים רגליים, מתוך עניין בהיסטוריה של כל מקום ובאנשים שישבו בו באותה עת. לצערי, הוא נהרג בתאונה מצערת מאוד, בעת שהשתאה ממזג אוויר חורפי גשום וסוער בתחילת ינואר 2016 – במלוא כוחו ועם תכניות לרוב.

להלן מופיעות כתבות של ארבעה סטודנטים שהנחה, ובהן הם מעלים דברים לזכרו וגם מדווחים בקצרה על עבודות התזה שלהם. שלושה מהם היו סטודנטים לתואר שני ואילו הרביעי היה סטודנט לתואר שלישי.



פרופ' דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי Michigan State Univ בחינוך מתמטי.
ראש מינהלת מל"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.

עבודת תזה לתואר שני במתמטיקה באוניברסיטת חיפה בהנחיית פרופ' גדי מורן

עבדאללה עאסלה, מנהל בית ספר יסודי, עראבה

נושא התזה: טרנספורמציות גיאומטריות ושימושיהן
כותב התזה: עבדאללה עאסלה
מנחה: פרופ' גדי מורן
שנת פרסום: 2002

הקדמה

למדתי אצל פרופ' גדי מורן ז"ל שני קורסים: קורס גאומטריה אנליטית וסמינריון בגאומטריה. היחס של פרופ' גדי לסטודנטים היה יחס טוב, יחס של כבוד, ובייחוד היחסים ביני ובין גדי. כשהתחלתי את לימודי תואר שני, ניגשתי לגדי ושאלתי אותו אם הוא מוכן להנחות אותי לעבודת תזה, כיוון שגדי הכיר אותי מהקורסים שלמדתי אצלו. הוא נענה בחיוב לבקשתי, היות והייתי סטודנט רציני. כיוון שגדי התעניין גם בתחום המתמטי הטהור וגם בתחום החינוך המתמטי, נראה לי שהוא הסכים להנחות אותי כדי להרחיב את תחום ההתעניינות שלו בעיקר לכיוון החינוך המתמטי. עם הזמן, היחסים ביני ובין גדי בלימודי התואר השני התחזקו יותר, כי למדתי אצלו גם סמינר מתקדם. גם בלימודי הקורס וגם בהנחיה נוצר יחס הדוק מאוד ביני ובין גדי. אפשר לומר שהיחסים שנוצרו בינינו היו יחסי חברות יותר מיחסי סטודנט ומנחה, וזה קידם מאוד את לימודי התואר ועבודת התזה שלי, כך שסיימתי את התואר עם עבודת התזה לאחר שנתיים. גדי גם אהב להכיר הסטודנטים שלו עם בני משפחותיהם וזה מה שהיה לי. הוא ביקר אצלי בכפר ובבית הספר שלימדתי בו, היינו משוחחים טלפונית ונפגשים מדי פעם בפעם גם על ההנחיה וגם על דברים אחרים, כמו ביקוריו ביישוב שלי, עראבה. היחסים בינינו התהדקו לאחר אירועי אוקטובר בשנת 2000, שבאחד מהם נהרג בן דוד שלי. גדי ידע שזה קרוב משפחה, ולכן צלצל אליי כדי להביע את תנחומיו.

עבודת התזה שלי נכתבה בשנים שבהן הותר לתלמידי תיכון לגשת לבגרות במתמטיקה, או לבחור לעשות פרויקט במתמטיקה. עבודת התזה שלי שימשה כמקור מידע לתלמידי תיכון ולמורים לעניין עבודת הפרויקט. לאחר שסיימתי את התואר, הקשר בינינו נמשך עד שגדי נפטר. הוא שאל אותי פעמים רבות על עבודת הגמר שלי ואם אני, או מישו מתלמידי התיכון, או המורים השתמשו בה כמקור מידע לעבודתם ואיך הדבר עזר לתלמידים ולמורים.

גדי ז"ל התאפיין ביהסו הידידותי כלפי הסטודנטים שלו, ולכן מותו הוא הפסד גדול לאקדמיה, וכמובן גם למשפחתו.

על עבודת התזה לתואר שני

עבודת התזה לתואר שני נכתבה בהנחייתו של פרופ' גדי מורן ז"ל בשנים 1999-2002.

עבודה זו התרכזה בשני נושאים מרכזיים:

החלק הראשון היה על טרנספורמציות גאומטריות והשימוש המתמטי שלהן, הן ברמה תיכונית והן ברמה אקדמית. הטרנספורמציות שבהן התרכזה העבודה היו בעיקר טרנספורמציות מקבילות, טרנספורמציות סטיריוגרפיות וטרנספורמציות מרכזיות.

החלק השני של עבודה זו עסק בנושא גאומטריה היפרבולית.

טרנספורמציות גאומטריות אלה משמשות כלי להוכחת משפטים גאומטריים שונים ופתרון תרגילים גאומטריים רבים המתבססים על טרנספורמציות גאומטריות. מקור מידע זה שימושי לסטודנטים באקדמיה הלומדים קורסי גאומטריה. כמו כן, העבודה שימשה (במיוחד בשנים שנכתבה) כמקור מידע בסיסי לתלמידי תיכון מצטיינים במתמטיקה, שבחרו לכתוב עבודת חקר במתמטיקה במקום בחינת בגרות.

גם הנושא של גאומטריה היפרבולית שימש מקור מידע לסטודנטים באקדמיה ולתלמידי תיכון שבחרו לעשות עבודות חקר ופרויקטים, כך שבעבודה הוצגו האקסיומות של הגאומטריה האוקלידית ושל הגאומטריה ההיפרבולית וההבדל בין שתי הגאומטריות.



עבדאללה עאסלה

בוגר תואר ראשון עם תעודת הוראה במתמטיקה ותואר שני בחינוך מתמטי מאוניברסיטת חיפה. בעל תואר שני נוסף במנהל ובמנהיגות בחינוך מאוניברסיטת תל-אביב. כיום סטודנט לתואר שלישי בהוראת המתמטיקה באוניברסיטת בן-גוריון בנגב. עד שנת 2015 היה מורה ורכז למתמטיקה בבית ספר תיכון בשפרעם ומגיש לבחינות בגרות, מעריך בחינות בגרות ומדריך למתמטיקה מטעם משרד החינוך ומכון ויצמן. מאז שנת 2015 מנהל בית ספר יסודי בעראבה.

דברים לזכרו של פרופ' גדי מורן ז"ל (1938-2016)

שפיק חליפה, הסכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה;

אורנים - הסכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון

פרופ' גדי מורן האמין בכל מאודו, שעל המתמטיקאי לגלות בין השאר מעורבות בתהליך הכשרת מורי המתמטיקה. ומשכך, מן הראוי להקנות להם השכלה מתמטית רחבת היקף (שאותה הוא נהג לכנות "תרבות מתמטית") וזאת כדי שתלמידיהם יזכו בבוא היום בחלק ממנה. בייחוד הוא סבר שנכון יהיה להתמקד בגאומטריה כי חש שקרנה דועכת והולכת. רבות צוטט כמי שאמר שבמקום להוכיח עוד משפט במתמטיקה, כיאה וכמצופה ממתמטיקאי, חשוב לא פחות שהוא יחשוף את המשחרים לפתחו לתכנים מתמטיים עתירים הטומנים בחובם יופי ומשמעות כאחד. בעיקר צריך להכיר להם את אושיות הקלסיקה המתמטית ששקעו בתהום הנשייה או שהועם זוהרן מסיבות כאלה ואחרות.

למזלי הרב, פרופ' מורן ניאות להנחות אותי בעבודת הדוקטורט שלי במתמטיקה ובחינוך מתמטי (עם פרופ' דוד בן-חיים). החלק המתמטי של עבודת הדוקטורט שלי על הקוטרניונים הוא דוגמה קלסית למשנתו של גדי. מטרתו הייתה הרחבת יריעת ההיכרות עם מתמטיקה מתקדמת והנגשתה לעוסקים בהוראת המתמטיקה. בעת עבודה זו שהייתה רחבת ממדים, בחרנו בנושא רחב זה: "הקוטרניונים, מהם? תולדותיהם ומקצת משימושיהם". עזרתו הכבירה של גדי הבטיחה את בהירותו של "אגם הקוטרניונים" כדי לאפשר למי שפוקד אותו להגיע בנקל אל מצולותיו. בהנחייתו הדקדקנית היה לאל ידי להקפיד על הצגה ברורה, פרטנית וממצה, המובנת גם לקורא בעל ידע בסיסי בנושא.

במהלך הכתיבה נתגלה לפנינו מקור לא אכזב של תכנים עשירים, שמן הראוי היה לפתחם ולשלבם בהוראת המקצוע הן במכללות אקדמאיות לחינוך המכשירות סגל הוראה והן בבתי ספר תיכוניים המכשירים תלמידים בלימודי מתמטיקה ברמה גבוהה.

כחלוץ בתחום, העברתי במקום עבודתי (במכללה הערבית לחינוך, חיפה) קורס "למידה והוראה בסביבה מתקשבת", שבו ערכו הסטודנטים היכרות ראשונית עם הקוטרניונים. הסביבה הטכנולוגית שהועמדה לרשותם כללה "מחשבון קוטרניוני" המופעל דרך אתר ברשת האינטרנט ותכנה סימבולית בשם Matlab שעושה חישובים ותכנות באמצעות קוטרניונים. הקורס נמשך סמסטר שלם ובמהלכו הסטודנטים הכירו את תכונותיה הבסיסיות של אלגברת הקוטרניונים. יתרונותיה של הסביבה סייעו לתלמידים באימות גנרי לתכונות המתמטיות וחסכה מהם עיסוק בחישובים ארוכים ומעייפים.

הסביבה של הקורס סייעה ללומדים לעמוד על האנלוגיה למספרים המרוכבים לרבות אפקט הסיבוב של הכפל בתוך המרחב התלת-ממדי. כפרויקט סיום המחזיו מסיימי הקורס את הסיבוב על ידי הצמדה בקוטרניון. מניסיון צנוע זה נמצאנו למדים, שאפשר בהחלט לשלב נושאים בהוראה ובלבד שהדבר נעשה בהדרגה ובסביבה מתאימה. עוד נוכחנו לדעת, שאין מקום "להירתע" מכמות החומר הנדרש ואין הכרח ללמד תחילה את כל החומר המתמטי על בוריו כתנאי מוקדם להמחשת המושגים שלצדו אפשר

לעשות זאת במשולב על סמך ארגון יעיל של התכנים ושימוש מושכל בסביבה עתירת טכנולוגיה. מתוך ניסיון ראשוני זה, אנו סבורים שיש מקום להעביר השתלמויות המיועדות לחשוף את המורים בחטיבה העליונה לנושאים מתקדמים הנושקים למתמטיקה התיכונית לשם הכללה, הרחבה והעמקה. אין הכרח להקיף את כל תוכן העבודה, ודי לקחת חלקים נבחרים כבסיס ליחידות הוראה מובנות.

נציין כי העבודה כללה לפחות שני חידושים מתמטיים:

1. דרך קצרה המודרכת על ידי אינטואיציה גאומטרית ל"גילויים" של הקוטרניונים. דרך זו מוליכה גם לאוקטוניונים ולמשפט פרוביניוס המפרט מהן האלגבראות הנורמיות הממשיות הקיימות.
2. קבלת הקשר של הצמדה בקוטרניון כסיבוב במרחב בדרך חדשה, הנגזרת מהיכרות עם כל הצגות הקוטרניון כמכפלת שני "קוטרניונים טהורים".

וכמו כן פרק חדש במתכונת יחידת לימוד:

3. פרק על מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת ברמה תיכונית ועל-תיכונית שיכול לשמש כפרק המשך לנושא הווקטורים הנלמד בחט"ע.

כתיבת פרק זה נגזרה באופן טבעי מן השימוש הנרחב במכפלות אלה באלגברת הקוטרניונים. חשיבות פרק זה היא גם בהשתייכותו לגאומטריית המרחב התלת-ממדי – פרק הזקוק לחיזוק במערכת החינוך. פרק זה פותח צוהר להרבה יישומים אחרים ומגוונים. לדוגמה, אפיון המצב ההדדי של שלושה מישורים למשל, אינו בבחינת הרחבה לשם ההרחבה, הוא מיועד להביא לידי חיזוק התובנה המרחבית בקרב התלמידים. העיסוק בארבעון במרחב הוא בבחינת המחשה לכך שאפשר לפתחו ולהרחיבו.

עבודה זו ממזגת תרומה להרחבת היריעה המתמטית בעבור העוסקים במתמטיקה, מורים ותלמידים כאחד, עם העמקה בנושאים המתעוררים מהרחבה זו. מתוך האלגברה בחרנו כאמור בנושא הקוטרניונים כנושא הממזג חידוש (מה מעבר למרוכבים?), היסטוריה (כיצד מתגלים נושאים כגון זה?) ומשמעות גאומטרית (סיבובים במרחב והרכבתם על רקע האלגברה של הקוטרניונים).

כמו כן, בחלק של החינוך המתמטי נערכה יחידת הוראה בנושאים גאומטריים שראוי להרחיבם: המכפלה הווקטורית ועמה שיפור האינטואיציה והתפיסה התלת-ממדית לרבות הצגת דרכים מקוריות לפתרון שאלות בגאומטריית המישור ושאלות בווקטורים מתוך בחינות הבגרות.

הנחת העבודה הייתה, שהרחבה מעין זו מעמתת את קהל היעד עם תכנים עשירים ובעלי משמעות שיעמידו לפניהם קשת רחבה של נושאים, ומתוכם יוכלו לבצע עבודות חקר שירחיבו ויעמיקו את אופקיהם.

עלי לציין, שבמהלך הזמן נוצרו בינינו יחסים קרובים בשל התעניינותו של גדי בי ובמשפחתי ולאחר סיום התואר שלי, נמשך הקשר ואף התחזק. הכרתי את אשתו ובני משפחתו ואף היו לו (עם אשתו) ביקורים אחדים בביתי בדלית אל-כרמל. הוא יחסר לי מאוד כמנטור מתמטי וכחבר למקצוע ומעבר לכך, יהי זכרו ברוך.



ד"ר שפיק חליפה

בוגר החוג למתמטיקה באוניברסיטת חיפה (תואר ראשון, שני ושלישי). מרצה למתמטיקה והוראת המתמטיקה ומדריך פדגוגי במכללה האקדמית הערבית לחינוך ובמכללת אורנים.

לזכרו של פרופ' גדי מורן

גזאלין פאזייה, בית ספר תיכון הגליל, נצרת

הצטערתי מאוד לשמוע על מותו הפתאומי והטרגי של פרופ' גדי מורן, המנחה שלי בעבודת הגמר לקבלת תואר מוסמך מאוניברסיטת חיפה. המנחה שלי גדי, שהערכתי והערצתי מאוד. הוא הנחה אותי בנאמנות ובסבלנות, בעידוד מתמיד ותמיכה שלא נעצרה בשום מקום וזמן.



פרופ' גדי מורן, המרצה הגאון, שאהב את המתמטיקה ששכנה בלבו, היה מנחה מכל הלב, שדאג להצלחתי כסטודנטית ושמר על קשר טוב שלא נקטע. אף פעם אחת לא היססתי להרים טלפון ולשאול על מה שעלה לי בראש ותמיד נעניתי בשמחה. גדי יושב אתי שעות רבות, העיר והאיר באופן בלתי מתפשר ותרם מידע משלו.

הוא התייחס אלי בכבוד, ניחם אותי באבדן אמי ז"ל. תמיד התעניין במקור המשפחה שלי, בכפר שבאתי ממנו, בשפה הערבית בפרט ובכל השפות בכלל.

גדי מורן היה אדם צנוע וטוב לב, עם חיוך שהאיר את פניו, היה חביב על כל מי שהכיר אותו, אהב את הסטודנטים שלו שהעריצו אותו מאוד, ולא ויתר על נוכחותם במסיבת סיום עבודתו באוניברסיטה.

גדי מורן אהב מאוד את הטבע, סיפר לי תמיד על טיוליו בארץ ובעולם, ומחלון החדר שלו באוניברסיטה היה עומד ואומר לי: "תסתכלי, אני רואה את חוף עתלית".

גדי, לעולם לא אשכח אותך ואזכור אותך לכל החיים כמנחה ומורה דרך, באהבה, הערכה, הערצה וכבוד. **יהי זכרו ברוך.**

להלן מופיע תקציר מעבודת הגמר שלי בחינוך מתמטי בהנחייתו של פרופ' גדי מורן: "**פרקים בגיאומטריה השיקוף**".

גאומטריה זו, שעיקר התפתחותה במאתיים-שלוש מאות השנים האחרונות, עוסקת בתכונות של צורות הנשמרות על ידי **שיקופים במכדרים** (ספירות) במרחב, ובמקרה הדו-ממדי שבו נתרכז – במישור – על ידי **שיקופים במעגלים**.

תקוותי היא שעבודה זו תשרת מספר מטרות: ראשית, תאפשר למורים היכרות עם פרק יפהפה

בגאומטריה. שנית, גיבוש פרקים מרתקים בגאומטריה שישמשו תלמידי תיכון מעוניינים ומתקדמים אם בשימוש עצמי אם בחוגים חברתיים.

גאומטריית השיקוף תורמת בפישוט צורות, בפתרון בעיות גאומטריות, בגילוי עובדות גאומטריות חדשות, בהוכחות משפטים ובחקירת יישומים פרקטיים מגוונים.

העבודה נוגעת בנושאים הבאים:

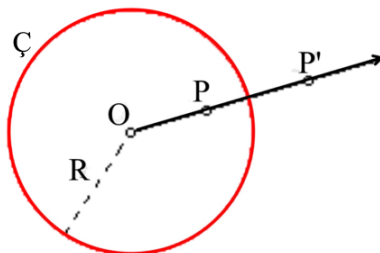
- מבוא ובו רקע היסטורי, העתקות במישור האוקלידי והרחבת המישור האוקלידי למישור השיקוף.
- נושאים בגאומטריית השיקוף וביניהם:

1. מושגים בסיסיים, כגון אלומות מעגלים לסוגיהן (היפרבולית, פרבולית, אליפטית).
2. יישומים הכוללים משפטים ידועים וחשובים, כגון משפט פוירברך, מעגל אפולוניוס.
3. היכרות עם חברות טרנספורמציות של המישור האוקלידי (איזומטריות ודמיונות) והצגתן במישור הזהה לו – מישור גאוס המרוכב.
4. הצגת טרנספורמציות השיקוף במעגל במישור גאוס המורחב, כבסיס להיכרות עם החבורה הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים (המסומנת בעבודה זו באות G). זיהוי חבורה זו כחבורת העתקות מביום ומביום-צמודות.

טרנספורמציות השיקוף במעגל ככלי מתמטי התגבשה בעיקר במאה השנים שבין 1750 ל-1850. קוסטר (Coxeter, 1980) ייחס את המצאתה במהדורה השלישית של ספרו "Introduction to Geometry" לג'קוב שטיינר (Jacob Steiner) ב-1828.

שיקוף במעגל מחליף את פנים המעגל עם חוצו

יהי $\mathcal{C}$ מעגל עם מרכז O ורדיוס R . אם P נקודה במישור שונה מ- O , השיקוף של הנקודה P ביחס למעגל $\mathcal{C}$, היא הנקודה P' במישור על הקרן $[OP)$, המקיימת: מכפלת המרחקים של P ו- P' מ- O שווה ל- R^2 . כלומר $OP \cdot OP' = R^2$.

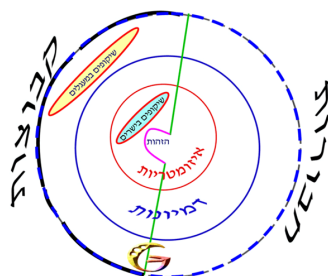


טרנספורמציות השיקוף במעגל $\mathcal{C}$ Inversion in $\mathcal{C}$ היא העתקה חד-חד ערכית של הקבוצה $\pi \setminus \{O\}$ על עצמה (π המישור האוקלידי), מסומנת $R_{\mathcal{C}}$ ומשמרת:

- $\mathcal{C}$
- הקרן מ O , וכן כל הישרים דרך O (ללא O).

נרחיב את המישור האוקלידי למישור השיקוף $\pi^* = \pi \cup \{O_\infty\}$ על ידי ההגדרה: $O' = O_\infty$ ו- $O_\infty' = O$.

- השיקוף של P' הוא P עצמה, כלומר העתקה זו היא אינוולוציה (involution) של π^* (בדומה לשיקוף של המישור האוקלידי בישר).
- החבורה G הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים מכילה תת-חבורות וקבוצות של טרנספורמציות כמתואר להלן:



נכיר חבורות וקבוצות אלו בשלב העבודה והן טרנספורמציות השיקוף במעגל. העבודה כללה:

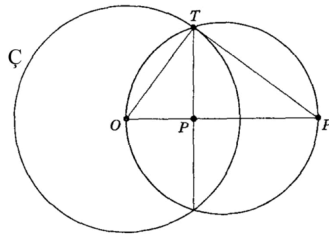
- א. רקע מתמטי – האיזומטריות והדמיונות
- ב. הגדרה ובניות בסרגל ובמחוגה
- ג. תכונות יסודיות של טרנספורמציות השיקוף במעגל:
 - שימור מעגרים
 - שימור ניצבות מעגרים
 - שימור מידת הזווית בין מעגרים נחתכים
- ד. מושגים קשורים למעגלים:
 1. חזקה של נקודה ביחס למעגל
 2. ציר ניצב עבור שני מעגלים
 3. אלומות מעגלים/מעגרים
- ה. יישומים:
 1. הוכחות של משפטים (כמו משפט Ptolemy, Pappus, Feuerbach)
 2. סרגולים
 3. בעיות בנייה
- ו. השיקוף במעגל במסגרת המישור המרוכב:

- הצגת חבורות המישור האוקלידי – איזומטריות ודמיונות – כפעולות אלגבריות במספרים מרוכבים.
- פונקציות ליניאריות וליניאריות צמודות שמתבררות כזהות לדמיונות ישירים ומהפכים בהתאמה.
- חבורת הטרנספורמציות G הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים, כאשר העתקות $mobius$ הן תת-חבורה שלה

בניות השיקוף של נקודה P ביחס למעגל נתון ζ בעזרת סרגל ומחוגה

בנייה 1

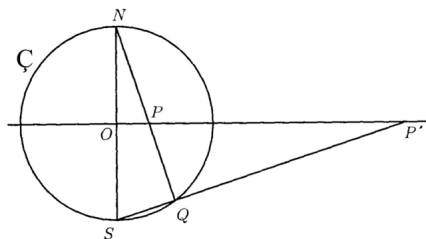
תהינה P, P' שתי נקודות על אותה קרן מ- O , בתוך ζ , P' בחוץ. אזי P שיקוף של P' ב- ζ אם ורק אם נקודת ההשקה T של משיק דרך P' ל ζ הנה נקודת חיתוך של האנגל- P ב- O , $l(O, P') = l(O, P)$ עם ζ .



$$(*) \triangle OPT \sim \triangle OTP'$$

בנייה 2

תהינה P, P' שתי נקודות על אותה קרן מ- O , בתוך ζ , P' בחוץ. תהינה S, N נקודות החיתוך של האנגל לקרן זו ב- O עם ζ . אזי P שיקוף של P' ב- ζ אם ורק אם הישר $l(S, P')$ ניצב לישר $l(N, P)$.



$$\triangle PON \sim \triangle \Leftrightarrow SOP' \cdot OP \cdot OP' = R^2 \text{ ומתקיים } \triangle SQN \sim \triangle SOP'$$



גזאלין פאוזייה

בוגרת תואר ראשון בהוראת מתמטיקה ומדעי המחשב מטעם הטכניון, תואר שני בחינוך ומתמטיקה מאוניברסיטת חיפה. מורה למתמטיקה בבית ספר תיכון הגליל נצרת.

לזכרו של פרופ' גדי מורן ז"ל

כאמל שרף, סרצה ומדריך פדגוגי במתמטיקה

התייחסות אישית לגדי ז"ל

מותו של המנוח גדי מורן (ז"ל) נפל עלינו כרעם ביום בהיר, ויצר מצב של צער ויגון כיוון שגדי נחשב אצלנו כחלק מהמשפחה. תמיד נפגשנו אצלו במשרד, או אצלנו בבית בכפר חורפיש. כמעט בכל פעם שביקר אצלנו, הוא היה דואג לערוך סיור רגלי באזור. בכל פעם שביקר אצלנו בבית, היה פונה לכל אחד ואחד בשמו עם חיוך לבבי ואכפתי. היה חשוב לו לשמוע ולהתעניין בפרטי פרטים על מצבו של כל אחד מאתנו, הן במישור המשפחתי, הן הבריאותי והן החברתי. נוסף לכך, היה חשוב לו להתעניין בלימודים ובעבודה של כל אחד מבני המשפחה. כמובן, היה חשוב לו לדאוג לכל אחד ואחת מהמשפחה, ועם הזמן הפך גדי להיות האח הגדול במשפחה.

כאדם שאיבד אח קצין בעל דרגה גבוהה במלחמת של"ג הראשונה, אני יודע וזוכר מה זה שכול. אי לכך, לאחרונה חזרה לי הטראומה כשנפטר אחי גדי ז"ל. ידעתי שאיבדתי אדם יקר ללבי, כך שתמיד נזכור אותו כאדם חכם, חייכן, בעל חוש הומור, אוהב לטייל בכלל ובטבע בפרט, בעל נשמה טובה, עם לב יהודי רחום, אדם שתמיד עזר לזולת. הוא ידע לתמוך במשפחתו, ועם זאת, ידע לדאוג לכל מכריו וביניהם לי ולמשפחתי. אכן, פרופ' גדי מורן חסר לנו בהווה, ובוודאי יחסר לנו המון בעתיד. נזכור אותו תמיד לטובה ולעד. יהי זכרו ברוך.

על הקשר שלי עם גדי מורן ז"ל

למזלי, כסטודנט אצלו נפלה בחלקי ההזדמנות ללמוד אצלו קורסים במתמטיקה לתואר ראשון בשנים 1977-1979 באוניברסיטת חיפה ובמכללת אורנים. דרכו אהבתי את מקצוע המתמטיקה: אלגברה מופשטת, אלגברה ליניארית, גאומטריה וחדו"א. מאז נרקמו בינינו יחסים אישיים ומשפחתיים טובים מאוד.

בשנת האלפיים התחלתי ללמוד לתואר שני במתמטיקה טהורה במסלול אישי באוניברסיטת חיפה. נפל בחלקי כי פרופ' גדי מורן (ז"ל) עם פרופ' דוד בן-חיים (ראש מינהלת מל"מ וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן), שיזכה לחיים ארוכים, יהיו המנחים שלי בעבודת התזה בשם "נושאים נבחרים בגאומטריה של המישור ובהוראתם". פרופ' דוד בן-חיים הנחה אותי בחלק הראשון של התזה בתחום "החינוך המתמטי", ופרופ' גדי מורן (ז"ל) הנחה אותי בחלק השני של התזה בתחום "המתמטיקה הטהורה – גאומטריה". בין השאר החלק השני של התזה עסק הן במשפטים מתקדמים על אודות מקומות גאומטריים במישור והוכחתם, והן בישרים ונקודות מיוחדות במישור.

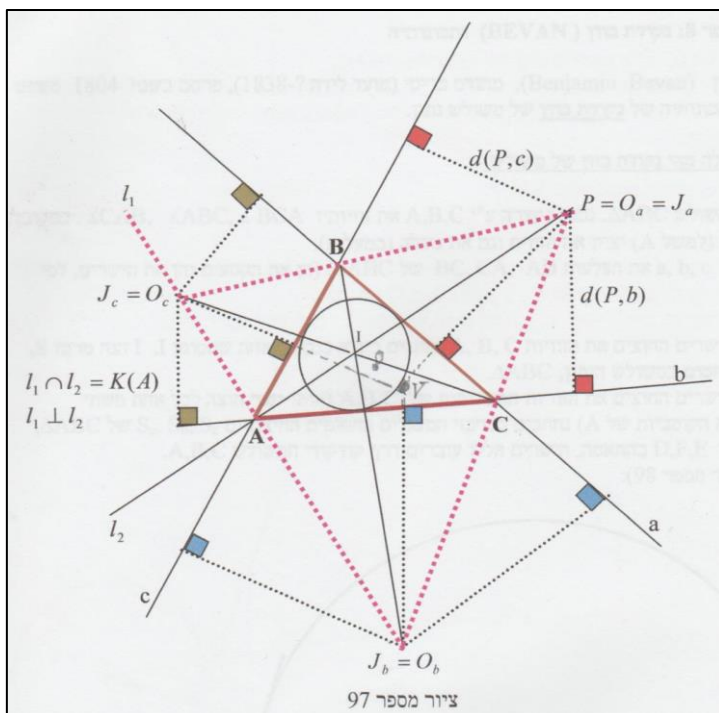
אני זוכר שפרופ' גדי הציע והציג לפניי שאלות חקר מאתגרות והוכחת קיום נקודות מאתגרות. אציין כאן נקודה מעניינת אחת ושמה "נקודת בוון". עליי לציין שהוא לא השאיר אותי בודד במערכה, בעת שהייתי מתלבט באיזה כיוון לנקוט במהלך החקר וההוכחות. אף הוא היה בודק את מהלכי, מלווה אותי

צעד אחר צעד ומחזק אותי מורלית בעת כתיבת עבודה התזה. בד בבד נתן לי פרופ' דוד בן-חיים את ההנחיה המתאימה, התומכת והמאתגרת מבחינה עניינית ומקצועית.

המנוח פרופ' גדי מורן הציב לפניי שאלות מאתגרות בגאומטריה שלא היה להן פתרון או הוכחה בדרך האוקלדית (הסינתטית) וביקש ממני לפתור אותן. אכן הצלחתי למלא את רצוני ועמדתי בהצלחה ובכבוד במשימות המאתגרות שהציב לפניי. אחת המשימות שהתבקשתי למלא הייתה ללמוד לעומק ולרוחב את "ישר אוילר". בהמשך הטיל עליי שאלה (רעיון חדש) שאחרים לא הבחינו בה ואף לא הוכיחו אותה והיא: "האם כל ישר במישור הוא ישר אוילר?". ואכן לאחר תקופת התנסות והשקעה מרובה, הצלחתי לחקור ולהוכיח שאכן כל ישר במישור הוא "ישר אוילר". לאחר זאת העלה פרופ' גדי מורן את הרף וביקש ממני לחקור את "נקודת בוון במשולש" שעדיין היה אפשר לעמוד על קיומה, אך בלי הוכחה על תכונותיה ושל המשפטים הנלווים לה. יש לציין שהאדם שגילה את נקודה בוון הייחודית במשולש, היה מהנדס יהודי בריטי בשם בנג'מין בוון (Benjamin Bevan, 1773-1833). הוא הלך לעולמו ולא הספיק להוכיח את קיומה.

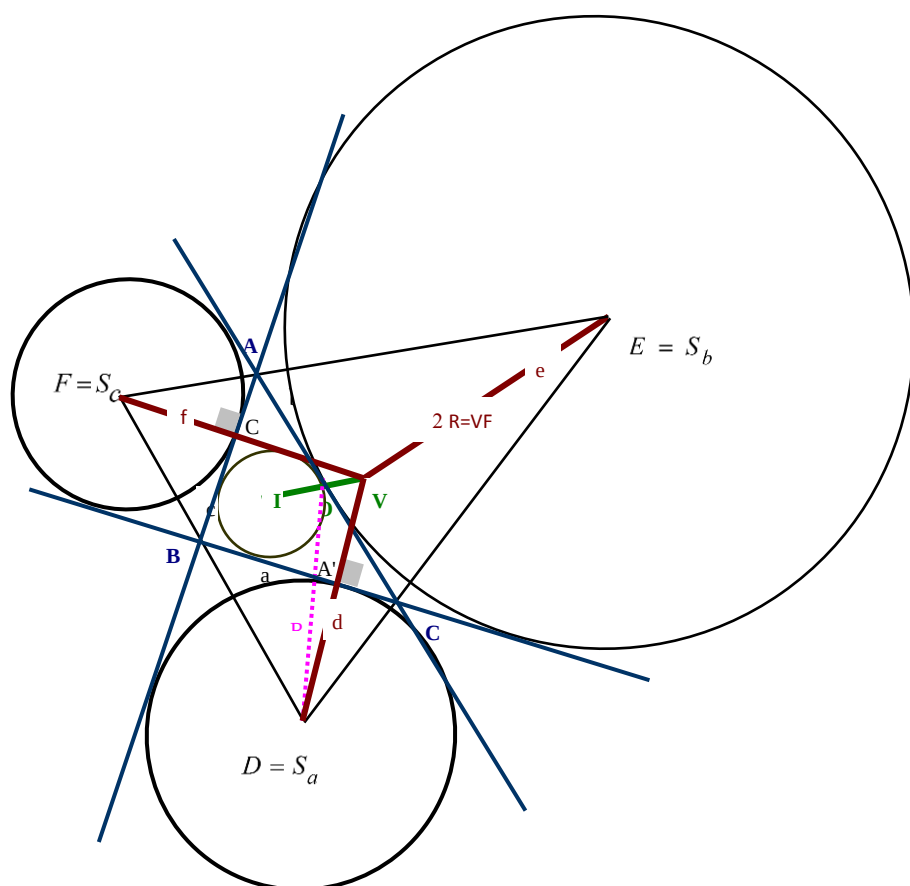
מידע על נקודת בוון אפשר למצוא בתוך:

Gutierrez, A. (2007). *The Bevan point*. Retrieved from
<http://agutie.homestead.com/files/bevanpoint1.html>



הסימונים

- I מרכז המעגל החסום ב- $\triangle ABC$.
 - O מרכז המעגל החוסם את $\triangle ABC$.
 - R רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$.
 - V מרכז המעגל החוסם את $\triangle DEF$.
- a, b, c הישרים BC, CA, AB של המשולש ABC, לפי ההקשר.
- d, e, f ישרים הניצבים לישרים a, b, c דרך D, E, F בהתאמה.
- A', B', C' נקודות החיתוך של d, e, f עם a, b, c בהתאמה.



I מרכז מעגל החסום במשולש ABC , V נקודת ביוון ושלושת המעגלים שמרכזיהם F, E, D החסומים במשולש מבחון.

חשפט בון

מתקיימות שלשת הטענות הבאות:

I. הישרים d, e, f עוברים דרך V.

II. O היא אמצע הקטע VI.

III. רדיוס המעגל החוסם את משולש בוון $\triangle DEF$ של $\triangle ABC$ הנו $2R$.

אכן פרופ' דוד בן-חיים ופרופ' גדי מורן ז"ל נתנו לי את הגיבוי, ההכוונה והעזרה לכתיבת המצגת המצביעה על הוכחות המשפטים לעיל. ונוסף על כך, הם השתתפו עמי בדאגה לבדיקה שנמשכה חודשים רבים במדיה ובכול הרשתות. הבדיקה עסקה בשאלה "האם יש הוכחות כלשהן הדומות להוכחות שלי הנזכרות לעיל?", ותוצאותיה הראו על שלילה (אין הוכחות בדומה להוכחות שלי על "נקודת בוון" ועל "שאלת אוילר"). על כל זה ועל התמיכה המקצועית והמסיבית של שני המנחים, הוקרתי והקדשתי את עבודת התזה למענם:

הכרת תודה

בפאסית, חצוני להביע את תודתי והוקרתי העמוקה לפני
המנחים שלי, פרופ' גדי מורן - אוניברסיטת חיפה ופרופ'
דוד בן-חיים - הטכניון. על עצמתם בהכנת העבודה
הנוכחית, על תמיכתם ואסירותם, שהתעלמה בעיני
בהכוונתם בהנחיית העבודה בכתיבה מדעית ובאיוח, על
הייעוץ המקצועי שהעניקו לי בכל שלבי החקירה ובכל
שלבי כתיבת העבודה.

ידידי היקר, גדי מורן, לצערנו אינך יותר עמנו, אך תמשיך להיות בלבנו. נמשיך לזכור אותך בכבוד ובאהבה לעד. יהי זכרך ברוך.

תנחומינו למשפחת מורן היקרה ושלא תדעו יותר צער לעולם.



ד"ר כאמל שרף

בוגר תואר ראשון במתמטיקה-פיזיקה ותואר שני במתמטיקה טהורה מאוניברסיטת חיפה. בוגר תואר
שלישי בחינוך מאוניברסיטת Saint Petersburg State.
מרצה ומדריך פדגוגי במתמטיקה ומנהל פרויקט אקדמיה כיתה.

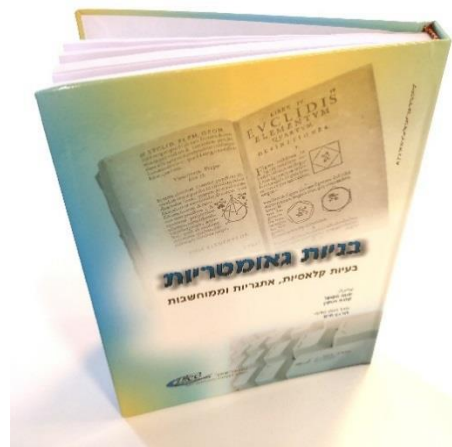
מדור המלצה על ספר

בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות

אילנה לבנברג, האקדמית גורדון, חיפה

על הספר

הספר "בניות גאומטריות" יצא לאור בשלהי תשע"ה, בהוצאת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך בחיפה. עורכי הספר הם פרופ' משה סטופל וגב' קלרה זיסקינד עם פרופ' דוד בן חיים שהיה גם היועץ המדעי. בזכות יזמתם התעשרנו באחד הספרים המיוחדים ללומדי הגאומטריה ולאובהיה. בפתח הספר יש שלוש חוות דעת של בכירי המתמטיקאים, פרופ' דניאל הרשקוביץ, פרופ' שלמה וינר וד"ר אבי סיגלר. כל השלושה, בשפתם המיוחדת, משבחים את תוכני הספר ואת חשיבותו הן ללומדים והן למלמדים גאומטריה.



נושא הבניות ההנדסיות נעלם מתכנית הלימודים ומבחינת הבגרות עוד בשנות

התשעים של המאה הקודמת, אך הוא שב בשנים האחרונות אט-אט ותופס את מקומו החשוב בלימודי הגאומטריה.

כל העוסקים בהוראת המקצוע, מבית הספר התיכון ועד למוסדות להשכלה הגבוהה, יודעים ומכירים בחשיבות הנושא של בניות הנדסיות ומברכים על שובו לתכנית הלימודים. בעיות בנייה אינן רק אתגר ללומד, הן כוללות בתוכן גם חקירה ולפתרון נדרש ידע והבנה של משפטים והוכחות. המורכבות של נושא הבניות היה ידוע כבר לאבותיה הראשונים של הגאומטריה, וגם הם ראו בנושא זה אתגר מחשבתי ומקור לפיתוח החשיבה הלוגית.

נושאי הספר ותכניו

הספר כולל תשעה פרקים ולמעשה מוביל אותנו מן הקל אל הכבד בנושא הבניות ההנדסיות. הפרק הראשון עוסק בבניות באמצעות סרגל ומחוגה, ויש בו הצגה של בניות יסוד, וכן בניות יסודיות מתקדמות שמספקות את המסד החשוב ביותר לצורך ההתקדמות לשלבים הבאים.

הפרק השני מוליך אותנו אל האתגר של בניות מתוך שימוש בכלי שרטוט אחד מתוך השניים, כלומר באמצעות מחוגה בלבד או באמצעות סרגל בלבד. פרופ' סטופל מציג בפרק זה בניות עם מחוגה בלבד, בהתבסס על דברי מסקרוני

הפרק החמישי והגדול בהיקפו מחזיר אותנו לשלוש הבעיות הקלסיות של העולם העתיק, שעמן התמודדו מתמטיקאים למעלה מ-3000 שנה. את הפרק כתב ברוסית מר ויקטור פרסולוב ותרגמה אותו גב' קלרה זיסקינד. ארבעת חלקיו של פרק זה מציגים את "הכפלת הקובייה", "חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים" ו"תרבוע העיגול". פרט לסקירה ההיסטורית הרחבה מוצגות לפני הקוראים גם ההוכחות השונות שנכתבו לאורך הדורות. כמו למשל, במאה הרביעית לפנה"ס על ידי מניכמוס ואפולטון, וגם מתמטיקאים במאות הראשונות לאחר הספירה. הבניות המגוונות והעשירות בכל שלוש הבעיות, בהצגת הרקע ההיסטורי, מביאות את הקוראים לידי עושר מחשבתי ויצירתי של גדולי המתמטיקאים מהתקופות השונות וממקומות אחרים בעולם. לדוגמה, בנייתו של עיגול השווה בשטחו לריבוע מתואר כבר בספר הודי עתיק המוקדש לבניית מזבחים בשם "שולבה סוטרא" והבנייה המוצגת שם מספקת קירוב טוב לפתרון הבעיה. את הפרק הזה סוגר החלק הרביעי הדן באי-הפתירות של שלוש הבעיות, באמצעות מחוגה וסרגל. כמו כן, נעשית ההבחנה בין הסיבות לאי-הפתירות של שתי הבעיות "הכפלת הקובייה" ו"חלוקת הזווית לשלושה חלקים שווים", לאי-הפתירות של הבעיה השלישית "תרבוע העיגול" (עמ' 192).

הפרק השישי שכתבה גב' קלרה זיסקינד – טרילוגיה עתיקה בעקבות ספרו של ויקטור פרסולוב – מכוון כולו בבעיה של חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים. וזאת מתוך הצגת פתרונות שונים עם "הקלות" מסוימות. לדוגמה, סרגל שעליו מסומנת מידה מסוימת (על פי היפוקרטס במאה החמישית לפנה"ס) או שימוש במכשירים מכניים שונים, שהולבשו על מחוגה ונקראים "טריסקטורים" (מחלק זווית לשלושה חלקים שווים) כמו של הרמס

האיטלקי משנת 1797, כי: "כל בעיה שאפשר לבנות באמצעות סרגל ומחוגה אפשר לבנות גם באמצעות מחוגה בלבד". בהמשך, על סמך פונסלה הצרפתי וההוכחה של שטיינר השווייצרי: "שכל הבניות ניתנות לביצוע באמצעות סרגל ומחוגה ניתנות לביצוע גם באמצעות סרגל בלבד, בתנאי שבמישור השרטוט נתון לפחות מעגל אחד שמרכזו מסומן", מוצגות בניות עם סרגל בלבד. ההגבלה לכלי שרטוט אחד הופכת כל בנייה לאתגר מחשבתי וביצועי מורכב הדורש יישום ושילוב מושכל של משפטים והבנה עמוקה של הבנייה ההנדסית.

הפרק השלישי של פרופ' דוד בן-חיים עוסק בקשר בין בניות לממוצעים מתמטיים. זהו הפרק המציג את הקשר החשוב כל כך בין הידע של מושג "ממוצע" וביטוי האלגברי לייצוג הגאומטרי שלו. בפרק זה נוכל למצוא את שלושת הממוצעים: החשבוני, ההנדסי וההרמוני, וכן הוכחות שונות לסדר הגודל ביניהם. תחילה מודגם סדר זה בעזרת הוכחה אלגברית, אחר כך בעזרת חשבון דיפרנציאלי וכמובן גם בדרך גאומטרית. פרופ' דוד בן-חיים מדגים את האפשרויות המגוונות להצגתו של מושג אלגברי ואת השילוב המופלא בין תחומיה השונים של המתמטיקה.

הפרק הרביעי של ד"ר דוד פרייברט עוסק בפתרון משוואות באמצעות סרגל מידה ומחוגה. בפתח הדברים מוזכר ההיבט ההיסטורי של פתרון משוואות ריבועיות עוד אצל היוונים. מאחר שההתמקדות בהוראת המשוואות הריבועיות היא בעיקר בנוסחה האלגברית או בייצוג הגרפי, יש חשיבות רבה ביותר גם לכל אותם הייצוגים הגאומטריים שבדרך כלל לא זוכים לחשיפה. כמו למשל הקשר בין מקדמיה של משוואה ריבועית לבעיית בנייה, שבה יש לבנות מלבן שהיקפו נתון ושטחו שווה לשטח ריבוע (עמ' 93).

יישום מרהיב של משפט שטיינר לטרפז ומתמקדים, בעקבות שטיינר, בבניות שונות באמצעות סרגל בלבד. כמו כן, הכותבים מדגישים את חשיבותן של בניות הנדסיות הן מן ההיבט ההיסטורי והן מן ההיבט ההוראתי בבתי ספר העל-יסודיים ובמוסדות להכשרת מורים. כעורכים, הם מציינים את תפקידה החשוב של הטכנולוגיה בהוראת הנושא, הן ככלי ויזואלי המסייע להבנתם של משפטים והן ככלי לביצוע פעילויות חקר שונות.

לסיכום

הספר מציג תוכני ידע מגוונים בנושא הבניות בגאומטריה, מתוך שילוב ישן וחדש יחדיו. הכותבים והעורכים הפכו נושא קשה ובלתי נגיש ללומדים רבים, למודגם, מוסבר ו"בנוי" בבהירות ועם הוכחות מוצקות. כל אחד מפרקי הספר מכיל תוכני ידע ורעיונות דידקטיים נהדרים, שהמלמדים במוסדות השונים יוכלו ליישםם ולבצעם הלכה למעשה.

בנימה אישית, במסעי הארוך לתוך מאות הבניות המוצגות בספר מרתק זה, לקחתי לתשומת לבי את החשיבות שיש להצגת הבניות המגוונות ש"מאירות" את תכניה של האלגברה. הכוונה לאותה האלגברה הנלמדת כמנותקת מן הייצוג הגאומטרי. הבניות הגאומטריות הן "הגשר" המתאים והנכון ליצירת קשר זה.

(Hermes) ב-1883. פרק זה מציג נדבך היסטורי וגאומטרי נוסף, בחיפוש שנמשך לאורך הדורות אחר הפתרון לבעיה העתיקה.

בפרק השביעי מציגה גב' קלרה זיסקינד סקירה היסטורית של בניית מצולעים משוכללים. החל בידע שכבר היה בתקופה היוונית לבנייתם של מצולעים שמתקבלים מהכפלה של מספר צלעות של מצולע משוכלל אחר, וכלה בתגליתו של גאוס לבניית מצולע משוכלל בן 17 צלעות. הוכחה ניצחת להיכרות עם בניית מצולעים משוכללים יש לנו בכל האורנמנטים בתקופות השונות.

בפרק השמיני קופצים ד"ר רות סגל וד"ר יניב ביטון למאה העשרים ואחת ומציגים שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת לביצוע בניות גאומטריות. חזרתן של הבניות ההנדסיות לתכנית הלימודים בחטיבת הביניים הביאה עמה גם את הקדמה, בעזרת שילובן של תכנות דינמי שונים. אלה מאפשרות ליצור קשר בין מניפולציות אלגבריות לייצוגים גאומטריים. בפרק זה יש אחת-עשרה משימות בנייה, כמו למשל המשימה השמינית העוסקת בביצוע חלוקת משולש לשני חלקים שווי היקף ושווי שטח. משימה זו מביאה את הלומדים גם לידי העמקה בתכנים אלגבריים, וכן מציגה את הערך המוסף שיש לכלי הטכנולוגי בחיפוש אחר דרכים לביצוע הבנייה והצדקת נכונותה.

בפרק התשיעי, בפרק האחרון של הספר, מציגים פרופ' משה סטופל ופרופ' דוד בן-חיים



ד"ר אילנה לבנר

ראשת התכנית לתואר מוסמך בהוראה (M.Teach) במכללה האקדמית "גורדון" בחיפה ומרצה בכירה למתמטיקה ולחינוך מתמטי. תחומי מחקרה העיקריים הם בנושאים הקשורים להכשרת מורים למתמטיקה, להוראת גאומטריה ולבחינות הבגרות במתמטיקה.

מדור הוכחות מעניינות

הצגת המדור

דוד בן-חיים, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה;

מינהלת סל"ס - טכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

בגיליון השלישי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך המתמטי", נפתח מדור חדש בשם "מדור הוכחות מעניינות". מדור זה לא הופיע בגיליון הרביעי כיוון שהגיליון היה גיליון מיוחד בנושא "למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית".

בגיליון זה המדור כולל שלושה מאמרים:

המאמר הראשון הוא של ד"ר רותי סגל, ד"ר אבי סיגלר ופרופ' משה סטופל, ומציג בעיות מתחום הגאומטריה בליווי הוכחות המאפשרות ביצוע חקר מתוך הצגת המושגים החשובים של שינוי ושימור. במאמר זה מוצגות תשע משימות שונות, כאשר ניתנת הוכחה מפורטת לכל אחת מהן (במקרים אחדים יותר מדרך אחת) ובליווי שימושים ביישומים דינמיים, המאפשרים בדרך ויזואלית לבצע ולהדגים את רעיון השינוי ולהיווכח בשימור תכונות מסוימות. המשימה הראשונה היא משימת המשך לאחת המשימות שהוצגו בגיליון השלישי. עליי לציין שאכן המשימות הן מעניינות מאוד ומותאמות לשימוש הן בהכשרת מורים והן בהוראה בעל-יסודי.

המאמר השני הוא של ד"ר ויקטור אוקסמן ופרופ' משה סטופל, ועוסק בהתפתחות של בעיות חקר המשלבות בין בניות הנדסיות ובין התכונות המיוחדות של הצורות המתקבלות. בעת הוראה של פרחי הוראה למתמטיקה בעל-יסודי, הסטודנטים מתנסים בבניות הנדסיות (גאומטריות) ונחשפים לתכונות מיוחדות שנתגלו במאות השמונה-עשרה והתשע-עשרה, כגון משפט נפוליאון ומשפט ואן האובל. נוסף על כך, הסטודנטים מתוודעים גם למושגים של שינוי ושימור במתמטיקה. כפי שהוצג במאמר הראשון במדור זה, גם כאן החומר מוצג באמצעות משימות, יישומים דינמיים והוכחות מפורטות דיין של התכונות המתגלות, וכמובן חשובה גם ההפניה למקורות המידע בספרות המקצועית.

המאמר השלישי הוא של גב' אסמאא עבד אל חלים וד"ר מוחמד אבו חאמד ממכללת סכנין. הוא עוסק

בפתרון גאומטרי למשוואה ממעלה שלישית $x^3 + bx = c$ על פי עומר אל ח'יאם. המאמר מפרט את השימוש הראשוני של הגאומטריה האלגברית שבאמצעותה נתן עומר אל ח'יאם פתרון גאומטרי לכל המשוואות ממעלה שלישית. כמקרה פרטי, השיטה מודגמת לגבי המשוואה ממעלה שלישית $x^3 + bx = c$.

הערה: ברצוני לבקש מכל קוראי כתב העת לתרום למדור הזה מניסיונם וממאגרי המידע שלהם, הוכחות מעניינות ובעיות מתחומים מגוונים במתמטיקה.

לקט תכונות גאומטריות מעניינות בליווי הוכחות המאפשרות ביצוע

חקר תוך הצגת שימור

רות סגל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה;

אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון

אבי סיגלר, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה

משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; האקדמית גורדון, חיפה

הקדמה

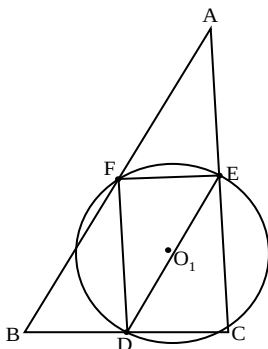
החל מהגיליון השלישי של כתב העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי (ינואר 2016), נעשה מאמץ שבכל גיליון יופיע מדור שעוסק במשפטים ובבעיות גאומטריות מעניינות המציגות תכונות מיוחדות, ורובן לא מוכרות לעוסקים בחינוך מתמטי ובעיקר לפרחי ההוראה. מאחר שהמשפטים, הבעיות והתכונות מבליטים את יופייה ואת עושרה של המתמטיקה, תובאנה ההוכחות המתמטיות הנדרשות וכן תינתן התייחסות לחקר התכונות בעזרת תכנה גאומטרית ממוחשבת.

במאמר הנוכחי מוצגות תשע משימות שונות, ולמשימה האחרונה שבהן מובאות ארבע הוכחות שונות כדי להדגיש שהמתמטיקה בנויה מענפים שונים המשתלבים זה בזה. חשוב להדגיש כי משפט או תכונה גאומטרית מייצגים תכונת שימור. כל אחת מהמשימות מייצגת לפחות תכונת שימור אחת (סטופל וחריר, 2005; Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2017).

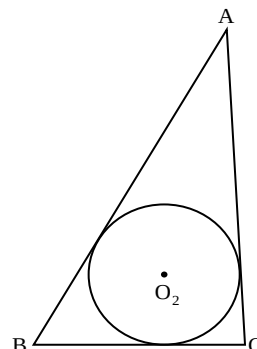
משימה א'

האם מעגל אוילר והמעגל החסום במשולש נחתכים, משיקים, או זרים זה לזה?

במאמרם של סיגלר וסטופל (2016) הופיעה הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים" לאי-השוויון של אוילר: $R \geq 2r$ – הקשר שבין הרדיוס R של המעגל החסום משולש לרדיוס r של המעגל החסום בו.



איור 1



איור 2

באיור שהופיע במאמרם של סיגלר וסטופל (2016, עמ' 151), נראה מעגל O_2 משיק מבפנים למעגל O_1 והקורא מתלבט בשאלה האם זה מקרי, או שתכונה זו קיימת תמיד. שאלה זו נבדקה בעזרת יישומון ג'אוג'ברה עם גרירת קדקודי המשולש ΔABC , ונראה שאכן המעגלים תמיד משיקים זה לזה, ומיקום נקודת ההשקה משתנה עם גרירת קדקודי המשולש.

עובדה זו סקרנה אותנו מאוד, בייחוד כשידוע ששימוש בתכנה דינמית הוא לכל היותר "הוכחה למחצה" (סטופל ובן-חיים, 2014; Stupel & Ben-Chaim, 2013), ועל כן נעשה מאמץ להוכיח אותה באופן פורמלי כמקובל בהוכחה מתמטית.

כהקדמה להוכחה, יוצג **מעגל תשע הנקודות** (Coxeter & Greitzer, 1967, pp. 20-21), הן כהעשרה והן כבסיס המסייע להוכחה.

מעגל **תשע הנקודות** נקרא בשם "**מעגל אוילר**" או "**מעגל פיירבך**", העובר במשולש כלשהו דרך תשע הנקודות האלה:

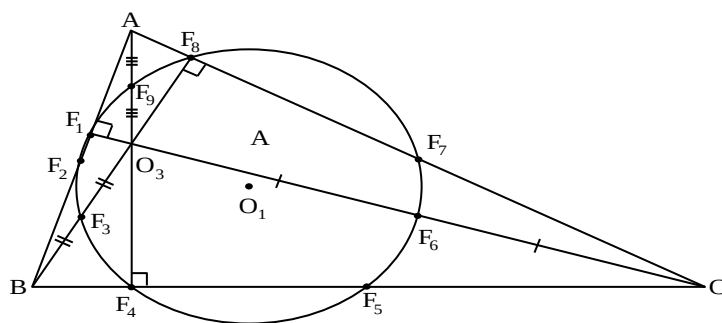
שלושת אמצעי הצלעות.

שלושת עקבי הגבהים, כלומר הנקודות שבהן הגבהים נפגשים עם הצלעות.

שלושת אמצעי הקטעים המחברים בין קדקודי המשולש לנקודת מפגש הגבהים.

מעגל תשע הנקודות עבור משולש כלשהו ΔABC נראה באיור 3. תשע הנקודות הן:

$$F_2, F_5, F_7, F_1, F_4, F_8, F_3, F_6, F_9$$



איור 3

חשוב לציין שמרכז מעגל תשע הנקודות נמצא על "ישר אוילר", שעובר דרך נקודת מפגש התיכונים, מפגש הגבהים ומפגש האנכים האמצעיים. אורכו של רדיוס מעגל תשע הנקודות

שווה למחצית אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔABC , היות שהמשולש ΔFED שקדקודיו הם אמצעי הצלעות של המשולש ΔABC (ראה איור 1) דומה למשולש ΔABC עם יחס דמיון של 1:2.

הוכחה

מסמנים את זוויות המשולש $\triangle ABC$ ב- α , β , γ (כנראה באיור 4).

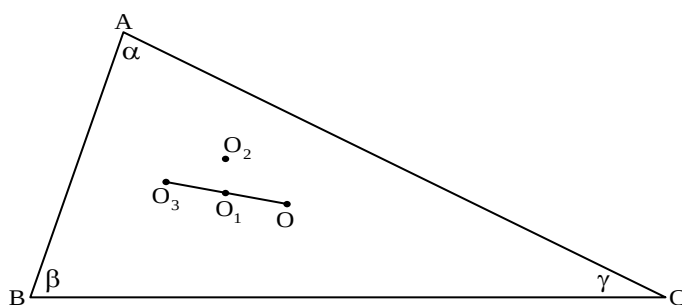
מסמנים את מרכזי המעגלים:

O_1 – מרכז המעגל החוסם את משולש $\triangle DEF$ (מרכז מעגל תשע הנקודות של אוילר).

O_2 – מרכז המעגל החוסם במשולש $\triangle ABC$ ורדיוסו r .

O_3 – נקודת מפגש הגבהים במשולש $\triangle ABC$.

O – מרכז המעגל החוסם את משולש $\triangle ABC$ ורדיוסו R .



איור 4

כפי שנראה באיור 4.

לפי גראס (Gras, 2014) ידוע כי: $(OO_3)^2 = R^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$ (1)

ידועה נוסחת אוילר (שם): $(OO_2)^2 = R(R - 2r)$ (2)

ידועה נוסחת המרחק בין נקודת מפגש הגבהים למרכז המעגל החוסם (שם):

$$(3) \quad (O_2O_3)^2 = 2r^2 - 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

כמו כן ידוע, שמרכז מעגל אוילר הוא נקודת אמצע הקטע המחבר

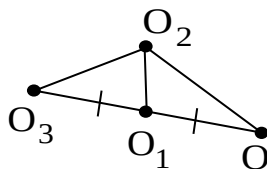
את מרכז המעגל החוסם ונקודת פגישת הגבהים (Coxeter &)

(Greitzer, 1967, pp. 20-21), כנראה באיור 5.

על כן, המרחק בין מרכז מעגל אוילר למרכז המעגל החוסם

במשולש $\triangle ABC$ הוא O_1O_2 , או במילים אחרות, אורך התיכון

במשולש $\triangle O_2O_3O$.



איור 5

שימוש בנוסחה המבוססת על כך שסכום ריבועי אורכי אלכסוני

מקבילית שווה לסכום ריבועי אורכי צלעותיה, מאפשר פיתוח נוסחה לחישוב אורך תיכון במשולש על-פי אורכי צלעותיו:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

על פי נוסחה זו: $(O_1O_2)^2 = \frac{2(OO_2)^2 - 2(O_2O_3)^2 - (OO_3)^2}{4}$

עם הצבת הערכים של $(OO_3)^2$, $(OO_2)^2$, $(O_2O_3)^2$ כפי שמופיעים ב-(1), (2), (3) מקבלים:

$$(O_1O_2)^2 = \frac{R^2 - 4Rr + 4r^2}{4} = \left(\frac{R - 2r}{2}\right)^2$$

מכאן ש- $O_1O_2 = \frac{R}{2} - r$.

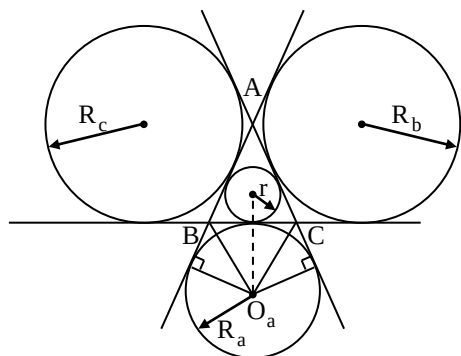
המסקנה מתוצאה זו היא, שהמרחק בין מרכז מעגל אוילר למרכז המעגל החסום שווה להפרש הרדיוסים שלהם, ולכן הם משיקים מבפנים.

שימוש ביישומון דינמי 1: מצורף קישור ליישומון ג'אוג'ברה המאפשר לראות את השקת המעגלים עבור משולש $\triangle ABC$ תוך שינוי ערכי צלעותיו. עבור כל מצב של קדקודי המשולש מופיעים על צג המחשב ערכי r ו- R , היחס ביניהם וערכי רדיוס המעגל העובר דרך אמצע הצלעות.

Link 1: <https://www.geogebra.org/m/z9fvJ6T6>

חשימה ב'

הוכחת קשרים בין הרדיוסים של המעגלים החסומים מבחוץ למשולש והמעגל החסום במשולש



איור 6

נתון משולש $\triangle ABC$ כלשהו בעל צלעות a , b , c ו- R שבו חסום מעגל בעל רדיוס r .

יהיו R_a , R_b , R_c הרדיוסים של המעגלים המשיקים מבחוץ לצלעות a , b ו- c בהתאמה, וכן משיקים להמשכי הצלעות, כנראה באיור 6.

יש להוכיח:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \quad (1)$$

$$R_a + R_b + R_c \geq 9r \quad (2)$$

בשלב הראשון נמצא קשר בין כל אחד מהרדיוסים המשיקים למעגל מבחוץ לשטח המשולש $\triangle ABC$.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO_a} + S_{\Delta ACO_a} - S_{\Delta BO_aC} = \frac{c R_a}{2} + \frac{b R_a}{2} - \frac{a R_a}{2} =$$

$$= \frac{R_a}{2}(c + b - a) = \frac{R_a}{2}(a + b + c - 2a) = R_a(P - a)$$

$$R_a = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - a} \quad \text{כלומר:}$$

$$R_b = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - b} \quad , \quad R_c = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - c} \quad \text{גם כאן מקבלים:}$$

מכאן:

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{(P - a) + (P - b) + (P - c)}{S_{\Delta ABC}} = \frac{P}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{r} \quad (1)$$

(2) ידוע הקשר בין הממוצע החשבוני לממוצע ההרמוני של שלושה מספרים חיוביים

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \text{: (Mogilevsky & Stupel, 2016)}$$

מכאן:

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{9}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}} = 9r$$

עוד תוצאה שאפשר להוכיח:

$$\frac{P}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (3)$$

כאשר P הוא חצי היקף משולש ΔABC , ו- h_a, h_b, h_c הגבהים שלו.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2}$$

מקשר זה נובע:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S_{\Delta ABC}} \quad , \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S_{\Delta ABC}} \quad , \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$$

מכאן:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{P}{S_{\Delta ABC}}$$

שימוש ביישומון דינמי 2: הוכן לינק ליישומון דינמי המאפשר לראות את קשר (1) – הקשר בין רדיוס המעגל החסום בתוך המשולש לרדיוסים של המעגלים החסומים מחוץ למשולש ולהמשכי

צלעותיו. ביישומון אפשר לגרור את קדקודי המשולש ובכך לשנות את אורכי צלעותיו ולראות שהקשר בין הגדלים של הרדיוסים נשמר.

Link 2: <https://www.geogebra.org/m/TueeM84U>

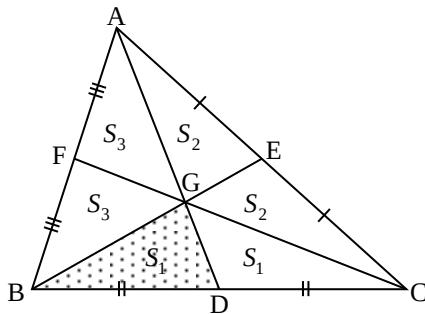
חשיפה ג'

תיכונים במשולש - שימור שטח יחסי

התיכונים במשולש מחלקים את שטחו לשישה משולשים שווים-שטח (ראה איור 7).

הוכחה

בהסתמך על המשפט: תיכון במשולש מחלק את שטחו לשני משולשים שווים-שטח, ניתן לסמן שטחים שווים, כנראה באיור 7. מכאן שמתוך הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים", מוכיחים את הנדרש.



איור 7

$$\left. \begin{array}{l} S_1 + 2S_3 = S_1 + 2S_2 \Rightarrow S_2 = S_3 \\ S_3 + 2S_1 = S_3 + 2S_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S$$

$$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S}{6S} = \frac{1}{6} \quad \text{משווין שטחים זה נובע:}$$

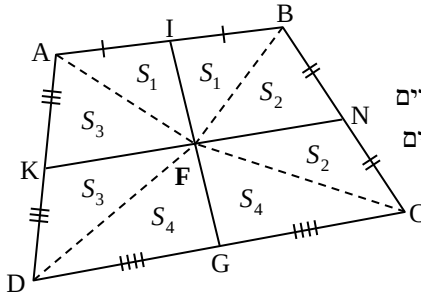
שימוש ביישומון דינמי 3: הדגמת שימור השטח היחסי בין שטח משולש $\triangle BGD$ לשטח המשולש $\triangle ABC$, כאשר גוררים את קדקודיו של המשולש המקורי ומשנים בכך את אורכי צלעותיו.

הערה: אפשר להשתמש בתכונה שהתיכונים במשולש מחלקים את שטחו לשישה משולשים שווים שטח, כדי להוכיח את המשפט: התיכונים במשולש מחלקים את זה את זה ביחס של 2:1.

Link 3: <https://www.geogebra.org/m/hR7AZu6Y>

חשימה ד'

שימור שוויון סכום שטחים



איור 8

במרובע קמור כלשהו ABCD, שבו העבירו ישרים המחברים אמצעי צלעות נגדיות, אזי סכום השטחים של זוג מרובעים נגדיים, שווה לסכום השטחים של הזוג השני של המרובעים הנגדיים. גם כאן מובאת הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים", כנראה באיור 8.

הוכחה

$$S_{KAIF} + S_{GCNF} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

$$S_{KDGF} + S_{IBNF} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

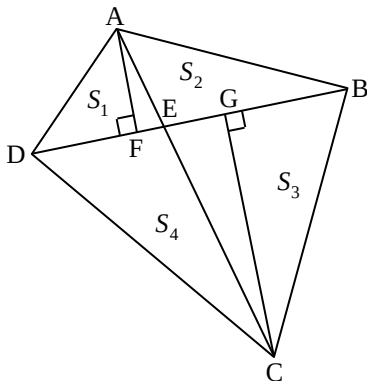
הערה: התכונה נשמרת גם במרובע קעור שבו הישרים המחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות (GI ו-KN) נחתכים בתוך המרובע הנתון.

שימוש ביישומון דינמי 4: הוכן יישומון המדגים את **שימור** הקשר שבין סכום שטחי המרובעים עם גרירת קדקודי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וצורתו.

Link 4: <https://www.geogebra.org/m/ynqufSqf>

חשימה ה'

שימור שוויון מכפלת שטחים של משולשים



איור 9

במרובע קמור כלשהו העבירו את האלכסונים, הנחתכים בנקודה E.

התקבלו 4 משולשים ששטחיהם מסומנים ב- S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ,

S_4 , כנראה באיור 9.

יש להוכיח: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

הוכחה

הורדת גבהים לאלכסון DB: $AF \perp BD$, $CG \perp BD$

סימון: $EB = y$, $DE = x$, $AF = h_1$, $CG = h_2$

$$S_1 = \frac{x \cdot h_1}{2}, S_2 = \frac{y \cdot h_1}{2}, S_3 = \frac{y \cdot h_2}{2}, S_4 = \frac{x \cdot h_2}{2}$$

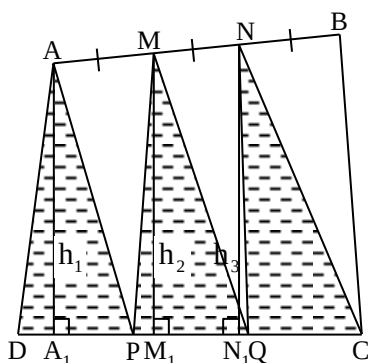
$$\left. \begin{array}{l} S_1 \cdot S_3 = \frac{x \cdot y \cdot h_1 \cdot h_2}{4} \\ S_2 \cdot S_4 = \frac{x \cdot y \cdot h_1 \cdot h_2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

שימוש ביישומון דינמי 5: הוכן יישומון המדגים את **שימור** הקשר שבין מכפלת שטחי משולשים הנוצרים מאלכסוני המרובע, עם גרירת קדקודי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וצורתו.

Link 5: <https://www.geogebra.org/m/HrmeXvmF>

חשימה ו'

שטחים שיש בהם סדרה חשבונית



איור 10

במרובע כלשהו ABCD חילקו זוג צלעות נגדיות לשלושה חלקים שווים וחיברו אותם בקווים ישרים, כנראה באיור 10 (AM=MN=NB, DP=PQ=QC).

התקבלו שלושה מרובעים ששטחיהם:

$$S_1 = S_{\square AMPD}, S_2 = S_{\square MNQP}, S_3 = S_{\square NBCQ}$$

יש להוכיח שהשטחים הללו משמשים סדרה חשבונית, כלומר: $S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2$.

הוכחה

מהנקודות A, M ו-N מורידים אנכים לישר DC.

מכאן מקבלים שהמרובע ANN_1A_1 הוא טרפז ישר

זווית שבסיסיו $h_1 = AA_1$ ו- $h_3 = NN_1$, ובו $h_2 = MM_1$ הוא קטע אמצעים, ולכן:

$$h_1 + h_3 = 2h_2$$

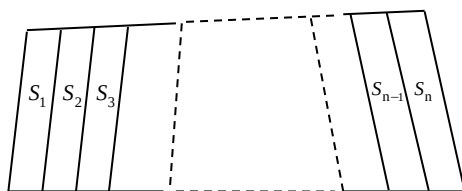
היות שבסיסי המשולשים שווים באורכיהם: $DP=PQ=QC$, הרי ששטחי המשולשים המקווקווים

באיור 10 מקיימים: $2S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle NCQ}$, כלומר שטחי המשולשים משמשים סדרה

חשבונית. באותה דרך מוכיחים ש- $2S_{\triangle MNQ} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle NBC}$.

משני הקשרים נובע ש- $S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2$.

מסקנה מהתכונה



איור 11

אם מחלקים שתי צלעות נגדיות של מרובע כל אחת ל- N קטעים שווי אורך, מקבלים "סורג" מסדר $N \times 1$ כמתואר באיור 11. השטחים של מרובע זה $S_1, S_2, \dots, S_n$ משמשים סדרה חשבונית, בהסתמך על התכונה שהוכחה.

כאשר N מספר אי-זוגי, השטח של המרובע האמצעי ביחס לשטח המרובע המקורי הוא $\frac{1}{N}$.

כאשר N מספר זוגי, ישנם שני מרובעים במרכז המרובע המקורי. סכום השטחים שלהם ביחס לשטח המרובע המקורי הוא $\frac{2}{N}$.

להדגמת תכונה זו הוכנו שני יישומונים עבור N אי-זוגי ועבור N זוגי שבהם אפשר לשנות בסרגל את ערכו של N ולקבל את השטח היחסי של המרובע האמצעי (או שני המרובעים האמצעיים). כמובן שממבט ראשון התוצאה מפתיעה, אך חשיבה עמוקה מראה שזוהי תכונה של סדרה חשבונית.

שימוש ביישומון דינמי 6: הוכן יישומון המדגים את **שימור** השטח היחסי של שטח המרובע המרכזי (או השטח היחסי של שני המרובעים המרכזיים) ביחס לשטח של המרובע החיצוני. השטח היחסי נשמר גם כאשר גוררים את קדקודי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו.

Link 6: <https://www.geogebra.org/m/wAJNM38F>

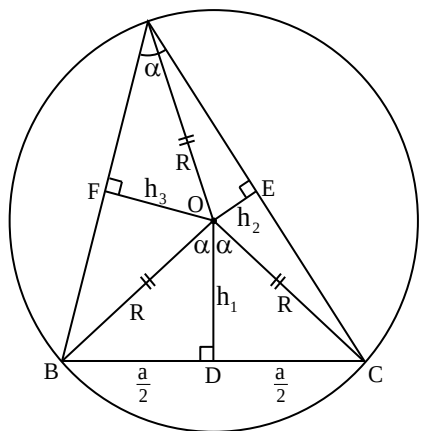
מידע נוסף על שטחים ושימור תכונות כאשר מרובע מתפתח לסריג אפשר למצוא במאמרם של סגל, טופל וסיגלר (Segal, Stupel, & Sigler, 2016).

חשיפה ז'

שימור סכום גבהים במשולש חסום במעגל

משולש ABC שאינו קהה-זווית חסום במעגל (O, R) . ממרכז המעגל O מורידים אנכים h_1, h_2, h_3 לצלעות המשולש, כנראה באיור 12.

עבור משולש כזה מתקיים: $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש.



איור 12

תכונה זאת ידועה בשם משפט קרנוט – Carnot's theorem (Eves, 1972, pp. 256, 262;) (Honsberger, 1985, p. 25).

הוכחה

ממשולש $\triangle OBD$ מקבלים: $h_1 = R \cos \alpha$ ובאותו אופן: $h_2 = R \cos \beta$ ו- $h_3 = R \cos \gamma$.
מכאן: $h_1 + h_2 + h_3 = R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$ מתוך שימוש בזהויות טריגונומטריות נקבל
עבור הביטוי $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$:

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

מכאן:

$$R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = R + 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

ידוע שאחד מהביטויים השונים עבור הרדיוס החסום r הוא: $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ (גורן, 1989, עמ' 192).

$$h_1 + h_2 + h_3 = R + r \quad \text{מכאן:}$$

שימוש ביישומון דינמי 7: [Link 7: https://www.geogebra.org/m/N6zFTUVT](https://www.geogebra.org/m/N6zFTUVT)

היישומון מאפשר לגרור באופן דינמי את כל אחד מקדוקדי המשולש ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וזוויותיו. כמו כן אפשר לשנות את רדיוס המעגל החוסם R . בכל שלב, מופיעים על המסך הערכים האלה:

α, β, γ זוויות המשולש

h_1, h_2, h_3 אורכי הגבהים

R, r רדיוס המעגל החוסם ורדיוס המעגל החסום

$$h_1 + h_2 + h_3 \quad \text{סכום אורכי הגבהים}$$

$$R + r \quad \text{סכום אורכי הרדיוסים}$$

שאלה: האם הקשר $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$ מתקיים גם עבור משולש קהה-זווית?

התשובה: שימוש ביישומון מראה שעבור משולש קהה-זווית, הקשר אינו נשמר.

נשאלת השאלה: מה שונה ממשולש חד-זווית למשולש קהה-זווית? איזה שימור ניתן לקבל במקרה זה? ההסבר לכך הוא שבמשולש קהה-זווית, מרכז המעגל החוסם נמצא מחוץ למשולש, ולכן גובה אחד לצלעות (זה שיורד ממרכז המעגל אל הצלע שמול הזווית הקהה) נמצא כולו מחוץ למשולש. עבור זווית $\alpha > 90^\circ$, הגודל $h_1 = R \cos \alpha$ מקבל ערך שלילי, ועל-כן השוויון אינו מתקיים.

במקרה זה, מתקיים הקשר הבא:

$$-h_1 + h_2 + h_3 = R + r$$

משימה ח'

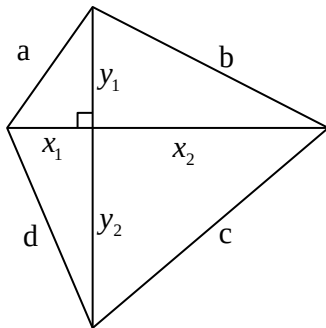
שימור סכום ריבועי צלעות נגדיות במרובע

במרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה, אזי צלעות המרובע מקיימות את הקשר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

ראה איור 13.

הוכחה

ההוכחה מסתמכת על שימוש במשפט פיתגורס בארבעת המשולשים ישרי הזווית שיצרו האלכסונים.

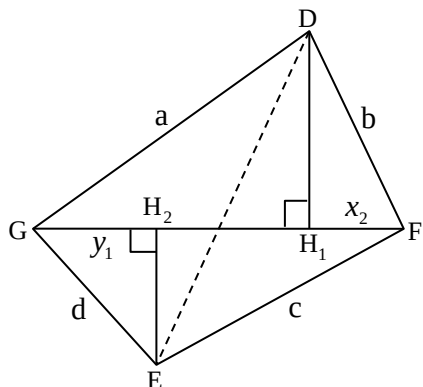


איור 13

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = a^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = a^2 - c^2 \quad \left. \begin{array}{l} x_2^2 + y_1^2 = b^2 \\ x_1^2 + y_2^2 = d^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = b^2 - d^2 \quad \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

במרובע שבו אלכסוניו מאונכים, מתקיים: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

האם קיום של תנאי זה מבטיח שאלכסוני מרובע יהיו מאונכים?



איור 14

כן. קיימת הוכחה שאכן זה תנאי הכרחי ומספיק. כלומר, גם המשפט ההפוך נכון.

הוכחת המשפט ההפוך

נתון שצלעות המשולש מקיימות את הקשר הבא:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

יש להוכיח כי $DE \perp GF$ (כלומר הנקודות H_1 ו- H_2 מתלכדות).

מורידים אנכים DH_1 ו- EH_2 ומסמנים את הקטעים

שנוצרו על GF באופן הבא (ראה איור 14):

$$GH_1 = x_1, H_1F = x_2, GH_2 = y_1, H_2F = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

אפשר לרשום בצורה: $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$.

לפי משפט פיתגורס במשולשים $\triangle GDH_1$ ו- $\triangle DH_1F$, באמצעות הצלע המשותפת DH_1 מקבלים:

$$a^2 - b^2 = x_1^2 - x_2^2 = d^2 - c^2$$

לפי משפט פיתגורס במשולשים $\triangle GEH_2$ ו- $\triangle EH_2F$, באמצעות הצלע המשותפת EH_2 מקבלים:

$$d^2 - c^2 = y_1^2 - y_2^2 = a^2 - b^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2 \quad \text{מכאן:}$$

מתוך שימוש בנוסחת הכפל המקוצר, מקבלים: $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

נחבר את שני השוויוניים:

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \quad (\text{השוויון האחרון שהתקבל})$$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \quad (\text{סימון הקטעים על GF})$$

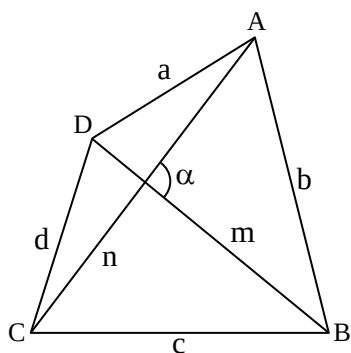
מקבלים: $x_1 = y_1$ ולכן הנקודות H_1 ו- H_2 מקיימות את

הקשר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, כלומר אלכסוני המרובע ניצבים זה לזה.

הוכחת המשפט ההפוך בדרך נוספת

לפי משפט הקוסינוסים למרובע כלשהו שצלעותיו הן a, b, c ,

d ואלכסוניו m ו- n נחתכים בזווית α (איור 15), קיים:



איור 15

$$(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2) = 2mn \cos \alpha$$

במקרה שקיים: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, מקבלים: $\cos \alpha = 0$, כלומר $\alpha = 90^\circ$ והאלכסונים מאונכים זה לזה.

הערה: אפשר לפתח את משפט הקוסינוסים למרובע מתוך שימוש במשפטי הקוסינוסים לכל אחד מארבעת המשולשים המרכיבים את המרובע ולחבר ביניהם.

משפט הקוסינוסים למרובע הוא:

$a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) = 2AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$ ועל ידי הצבת $\alpha = 90^\circ$ מקבלים את הקשר בין צלעות המרובע.

חשימה ט'

קיום מרחק קבוע השווה להפרש צלעות משולש המקיימות סדרה חשבונית

בכל משולש שאורכי צלעותיו מהווים סדרה חשבונית שהפרשה d המרחק בין נקודת חיתוך התיכונים לנקודת חיתוך חוצי-הזוויות הוא $\frac{d}{3}$.

היישומון לחקר דינמי של התכונה

בשלב הראשון נעשה שימוש ביישומון שאפשר להגיע אליו באמצעות לינק 8.

שימוש ביישומון דינמי 8:

Link 8: <https://www.geogebra.org/m/vNYfHaKY>

ביישומון ישנם שני סרגלים:

הסרגל הראשון מאפשר לשנות את האורך a של הצלע BC ובהתאמה קובע את אורכי הצלעות AB ו-AC. הסרגל השני מאפשר לשנות את הגודל d – הפרש הסדרה החשבונית ובכך לשנות את אורכי הצלעות המשולש.

בכל שלב מופיעים על המסך ערכי a ו-d וכן האורך של הקטע HG – המרחק בין הנקודה H – נקודת החיתוך של חוצי-הזוויות לנקודה G – נקודת החיתוך של התיכונים. מיקום הנקודות H ו-G עבור כל משולש מופיע בתוך המשולש. כאשר d=0, המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות והנקודות H ו-G מתלכדות.

גרירת נקודת הקדקוד C מזיזה את מיקום המשולש על-גבי המסך. גרירת נקודת הקדקוד B מסובבת את המשולש סביב הקדקוד C.

הפתעה

התכונה של $GH = d/3$ מפתיעה מאוד, כי לדוגמה בשלושת המשולשים בעלי אורכי הצלעות הבאות בס"מ: (10, 13, 16), (132, 135, 138), (2269, 2272, 2275), אורכי הצלעות משמשים סדרה

חשבונית עם הפרש $d=3$. המשולשים שונים בזוויותיהם – ככל שאורכי צלעות המשולש גדולים יותר, הזווית הקטנה בכל אחד מהם גדולה יותר, ולמרות זאת המרחק בין נקודת חיתוך חוצי-הזוויות לנקודת חיתוך התיכונים נותר 1 ס"מ!!!

הוכחה סטנדרטית

דרך א': מתוך שימוש בהנדסה אנליטית ובטריגונומטריה על סמך נוסחה למרחק בין שתי נקודות מסמנים:

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) את שיעורי קדקודי המשולש.

$AB = a - d$, $AC = a + d$ ו- $BC = a$ את צלעות המשולש.

יהא AD אנך לבסיס, ומסמנים: $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

כנראה באיור 16 שבו המשולש ממוקם במערכת צירים.

מתוך שימוש במשפט פיתגורס במשולשים $\triangle ABD$

ו- $\triangle ADC$ מוצאים את שיעורי הנקודה A:

$$x_A = \frac{a}{2} - 2d, \quad y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}$$

תהא הנקודה M נקודת חיתוך התיכונים ולפי נוסחה ידועה מקבלים את שיעוריה:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3a - 4d}{6}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}$$

בונים את חוצי-הזווית $\angle B$ ו- $\angle C$ הנחתכים בנקודה P (ראה איור 16).

בעזרת הנוסחה הטריגונומטרית למחצית זווית:

$$\tan \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{a + 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}$$

לפי משולש $\triangle ABD$ מוצאים:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a - 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}$$

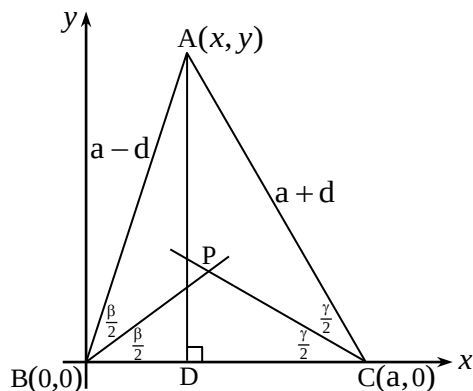
לפי משולש $\triangle ACD$ מוצאים:

$$y_{BP} = \frac{a + 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}} \cdot x$$

מכאן משוואת הישר BP:

$$y_{CP} = \frac{2d - a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}} \cdot (x - a)$$

משוואת הישר CP:



איור 16

$$x_P = \frac{a-2d}{2}, y_P = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}{6} \quad \text{מכאן מוצאים את שיעורי הנקודה P:}$$

$$MP = \frac{d}{3} \quad \text{לפי שיעורי הנקודות M ו-P ולפי נקודת המרחק בין שתי נקודות, מוצאים:}$$

דרך ב': על ידי שימוש בגאומטריה אוקלידית ובטריגונומטריה.

תהא הנקודה P נקודת פגישת חוצי-הזווית ונקודה M נקודת פגישת התיכונים, כנראה באיור 17.

יהא BD גובה לצלע AC.

$$BD = a \sin \gamma$$

יהא $MN \perp AC$, ועל כן,

$$MN = \frac{1}{3} BD = \frac{a \sin \gamma}{3}$$

החסום במשולש $\triangle ABC$, ולכן לפי נוסחה ידועה: $PK \perp AC$ הוא רדיוס המעגל

$$r = \frac{S_{\triangle}}{p} = \frac{(a+d) \sin \gamma}{3}$$

$$CK = \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{2(a+d) \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{3}$$

לפי החלוקה של התיכונים, $NL = \frac{1}{3} DL$

$$DN = \frac{2}{3} DL = \frac{2}{3} (CD - CL) = \frac{2}{3} (a \cos \gamma - \frac{a+d}{2})$$

$$CN = CD - DN = a \cos \gamma - \frac{2}{3} (a \cos \gamma - \frac{a+d}{2}) = \frac{a \cos \gamma + (a+d)}{3}$$

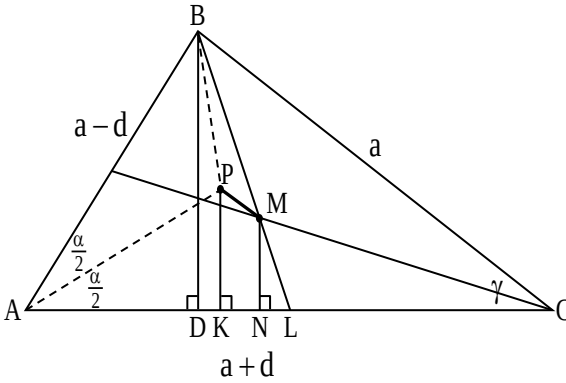
$$NK = CK - CN = \frac{d \cos \gamma}{3}$$

מתבוננים בטרפז KMPN, כנראה באיור 18.

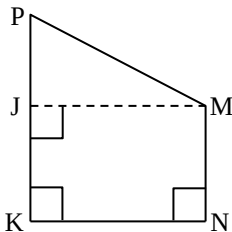
$$MJ = NK = \frac{d \cos \gamma}{3}$$

$$PJ = PK - MN$$

$$MP^2 = PJ^2 + MJ^2 = \frac{d^2}{9} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

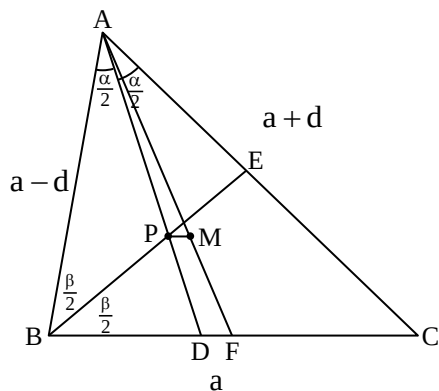


איור 17



איור 18

$$MP = \frac{d}{3}$$



איור 19

הוכחה האלגנטית

תוצג הוכחה בעזרת גאומטריה אוקלידית יהיו AD ו- BE חוצי-זוויות הנחתכים בנקודה P.

יהא AF תיכון (BF = FC) ועליו הנקודה M, נקודת מפגש התיכונים, כנראה באיור 19.

לפי משפט חוצה-הזווית במשולש $\triangle ABC$,

$$\frac{BD}{a - BD} = \frac{a - d}{a + d} \Rightarrow BD = \frac{a - d}{2}$$

לפי משפט חוצה-הזווית במשולש $\triangle ABD$,

$$(*) \frac{AP}{PD} = \frac{a - d}{BD} = 2$$

לפי תכונת חיתוך תיכונים במשולש, $(**) \frac{AM}{MF} = 2$

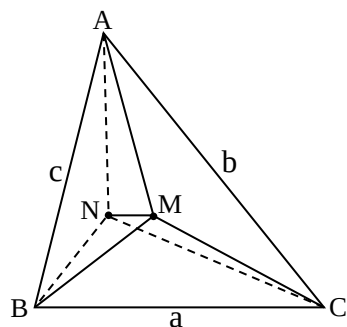
על פי (*) ו- (**) מקבלים: $\frac{AP}{PD} = \frac{AM}{AF} = 2 \Rightarrow PM \parallel DF$

$$DF = BC - (BD + CF) = \frac{d}{2}$$

לפי יחס הדמיון בין המשולשים $\triangle APM$ ו- $\triangle ADF$ מקבלים:

$$\frac{PM}{DF} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{d}{3}$$

הוכחה בעזרת נוסחאות של קשרים בין מרחקי מיוחדות במשולש



איור 20

הוכחה המבוססת על נוסחת אוילר ונוסחאות נוספות. לפי אוילר קיימת נוסחה כללית המקשרת בין מרחקי נקודת מפגש התיכונים M לקדקודי המשולש ובין מרחקי נקודה כלשהי N בתוך המשולש לקדקודי המשולש עם המרחק MN שבין שתי הנקודות (סימון המרחקים נראה באיור 20).

לפי סיגלר, סגל וסטופל (Sigler, Segal, & Stupel, 2016)

הנוסחה היא:

$$(*) AN^2 + BN^2 + CN^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MN^2$$

ידועות הנוסחאות למרחקים לקדקודים על פי אורכי הצלעות (שם).

$$(**) AN^2 + BN^2 + CN^2 = \frac{bc(b+c-a) + ac(a+c-b) + ab(a+b-c)}{a+b+c}$$

$$(***) AN^2 + BN^2 + CN^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

לפי הסימון (כנראה באיור 20), $BC = a$, $AC = a + d$, $AB = a - d$, בקשרים $(**)$ ו- $(***)$ ולאחר קבלת ערכיהם ב- $(*)$, מצטמצם הערך של a ומקבלים $d^2 = 9MN^2$, או $MN = \frac{d}{3}$.

סיכום

על אף שחלפו מאות שנים מאז שהגאומטריקנים הקדמוניים החלו לגלות תכונות גאומטריות מיוחדות, ואחריהם המשיכו באותה דרך דורות רבים של מתמטיקאים שגילו עוד תכונות, גם היום עדיין אפשר להמשיך ולמצוא בשדה העשיר של הגאומטריה, תכונות חדשות שמאתגרות את העוסקים בתחום ובכך מעצימים את יופייה של הגאומטריה, שמשמשת ענף מרכזי של המתמטיקה.

למעשה, כל תכונה מאפיינת פעולה של שימור מתוך שינוי ולמעשה מייצגת משפט בגאומטריה. פעילות החקר מתאימה לסטודנטים להוראת מתמטיקה בקורס מתקדם בגאומטריה במישור. כמו כן אפשר לשאול שאלות בסגנון: "מה יקרה אם נתון אחד יופחת או יתווסף?", "מה יקרה אם ישנו את...?", "האם גם המשפט ההפוך נכון?" ועוד.

כמקובל בעולם הנוכחי המשופע בכלים טכנולוגיים, אפשר ללוות את הפעילות בשימוש בתכנה גאומטרית ממוחשבת המאפשרת להעלות השערות מסוימות ובדיקה דינמית מידית כדי לאשר את נכונותן. במידה שהחקר הדינמי אישר את נכונות ההשערה, אז נדרשת הוכחה פורמלית כמקובל במתמטיקה.

הבעת תודה:

כותבי המאמר מביעים תודה והערכה למר עידן טל על הכנת היישומונים בג'יאולברה התורמים להשבחתו של המאמר.

רשימת מקורות

- גורן, ב' (1989). **טריגונומטריה (4 ו-5 יחידות לימוד)**. תל אביב: מישלב.
- סטופל, מ' וחריר, ש' (2005). התנהגות מתמטית בעלת גוון של שימור. **על"ה**, 35, 72-79.
- סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי**, 1, 80-106.
- סיגלר, א' וסטופל, מ' (2016). הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי**, 3, 145-154.
- Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2017). Variance-and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *Far East Journal of Mathematical Education*, 16(4), 371-418. doi: 10.17654/ME016040371

- Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Eves, H. W. (1972). *A survey of geometry* (Rev. ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Gras, M. N. (2014). Distances between the circumcenter of the extouch triangle and the classical Centers of a triangle. *Forum Geometricorum*, 14, 51-61.
- Honsberger, R. (1985). *Mathematical gems* (Vol. III). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Mogilevsky, R., & Stupel, M. (2016). Using the wonder of inequalities between averages for mathematics problems solving. *The Educational Research and Reviews*, 11(9), 932-944.
- Segal, R., Stupel, M., & Sigler, A. (2017). Surprising geometrical properties that are obtained by transforming any quadrilateral into a lattice. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 11(1). Retrieved from <https://php.radford.edu/~ejmt/>
- Sigler, A., Segal, R., & Stupel, M. (2016). The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1226-1243. doi: 10.1080/0020739X.2016.1164347
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(2), 129-161.



ד"ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד"ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה. מרצה במכללת אפרתה. פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.



פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים. מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים. פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל. עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.



ד"ר רותי סגל

בוגרת תואר ראשון במתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת חיפה, תואר שני בחינוך מתמטי באוניברסיטת ירושלים ותואר שלישי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. לימדה מתמטיקה בבתי ספר תיכוניים כ-26 שנים, כיהנה כמדריכה ארצית למתמטיקה בחטיבה העליונה במשך 14 שנים. כיום מרצה במכללת שאנן ובמכללת אורנים. חוקרת בנושאים: התפתחות של קהילות למידה של מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה, התפתחות

פתרון גאומטרי למשוואה חמלה שלישית: $x^3 + bx = c$

על פי עומר אל ח'יאם

אסמאא עבד אל חלים, מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה, סכנין

מוחמד אבו חאמד, מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה, סכנין;

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

חבוא

מתחילת המאה התשיעית, הופיעה תורת האלגברה בין דפי ספרו של מוחמד בן מושה אל ח'ואריזמי "כתאב אל גבר ולמוקבלה" – ספר ההשלמה והאיזון, וזו הייתה מולדתו של הענף המתמטי החדש שנקרא אלגברה. גם נגלה הפוטנציאל של תורה זו בכך שאפשרה לקשר בין האלגברה לגאומטריה. קשרים אלה גרמו להיווצרותם של מספר תחומים חדשים במתמטיקה, שבהם האלגברה מיושמת בצורה טבעית בנושאים הקלסיים מיוון העתיקה, כמו תורת המספרים וגאומטריה (ראשד, 2011). רושדי ראשד המתמטיקאי, הפילוסוף וההיסטוריון המצרי, מראה כי האלגברה של אל ח'ואריזמי התפתחה בשני כיוונים ראשיים (ראשד, 2010; ראשד וזאדה, 2005): כיוון חישובי, למשל חשבון פולינומים, וכיוון גאומטרי שמסמן את תחילתה של הגאומטריה האלגברית, ובו נדון במדור זה.

המדען עומר אל ח'יאם ותרומו

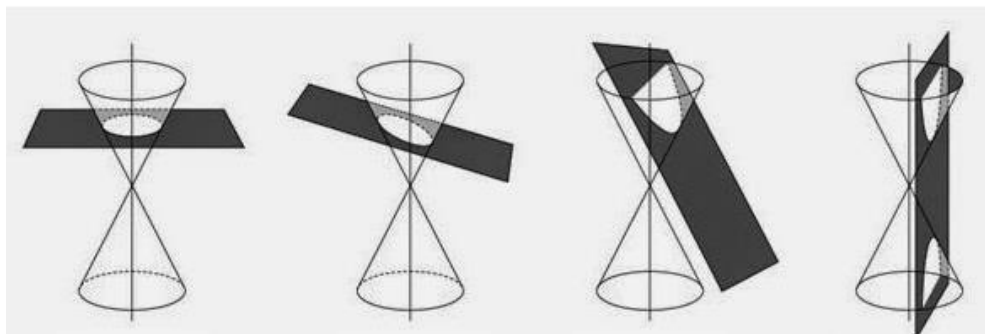
שמו המלא ע'יאת' אל דין אבו אל פתוח עומר בן אברהמים אל ח'יאם (غياث الدين أبو الفتوح عمر بن ابراهيم الخيام), נולד בעיר ניסאבור (1048-1131) בצפון איראן. נוסף להיותו מתמטיקאי היה גם בקיא באסטרונומיה ופילוסופיה.

במדור זה אנו נתמקד באחת מעבודותיו של עומר בנושא אלגברה. עבודה זו נחשבת לתחילתה של הגאומטריה האלגברית ובה עומר נותן פתרון גאומטרי לכל המשוואות ממעלה שלישית. בתחילת חיבורו הצהיר עומר כי לא הוא ולא מי שהיה לפניו הצליחו לפתור משוואה ממעלה שלישית בצורה אלגברית טהורה (לא גאומטרית) והוא קיווה כי בעתיד יבוא מישהו ויעשה זאת. ואכן, לאחר ארבע מאות שנה, במאה השש-עשרה, הצליחו האיטלקים קרדאנו וטרטגליה (Burton, 2011) לגלות נוסחה אלגברית סגורה. כמו כן ציין עומר במבוא לחיבורו כי כל קורא של החיבור חייב להבין בנושאים המוכללים בשני הספרים: היסודות של אוקלידס והקונוסים של אפולוניוס. דבר זה יכול להעיד על השפעה של המסורת היוונית העתיקה על המדע הערבי באותה התקופה.

בחיבורו של עומר הוא מציין 25 משוואות ממעלה שלישית ומטה לפי דרגה, מספר גורמים ומקומם של גורמים אלו במשוואה. לכל 25 משוואות אלו מוצג פתרון גאומטרי. חשוב רק לציין כי באותה התקופה עדיין לא היה נהוג להשתמש במספרים שליליים, ולכן כל המקדמים הם מספרים חיוביים.

חתכים קונים

חתך קוני הוא עקום המתקבל בחיתוך בין מישור מרחבי לקונוס שבסיסיו הם מעגלים. בהתאם למצב ההדדי בין המישור לציר ובסיס החרוט מתקבלים ארבעה עקומים שונים, כפי שמתואר באיור 1.



מעגל

אליפסה

פרבולה

היפרבולה

איור 1: חתכים קונים

אלה המשוואות הקנוניות עבור החתכים הקונים בצורתם המודרנית במישור הקרטזי:

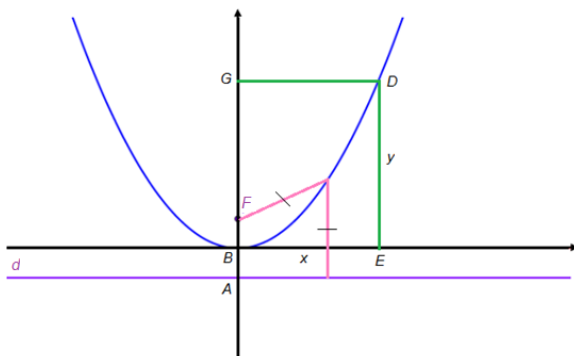
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{אליפסה:}$$

$$y = ax^2 \quad \text{פרבולה: (נרחיב עליה במדור זה).}$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{מעגל:}$$

פרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות במישור שמרחק כל אחת מהן מנקודה נתונה F (המוקד) שווה למרחקה מישור נתון d (המדריך) (איור 2).



- מאז ימי יוון העתיקה היה נהוג להציג את משוואת הפרבולה בדרך הבאה: $BE^2 = AB \cdot DE$ (ראה איור 2) (Katz, 2014). כפי שנראה בהמשך, זו הצורה ששמשה גם את עומר אל ח'יאם.
- אם נסמן $AB = \sqrt{b}$ נקבל את משוואת הפרבולה בצורתה המודרנית:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{b}} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{b} \cdot y$$

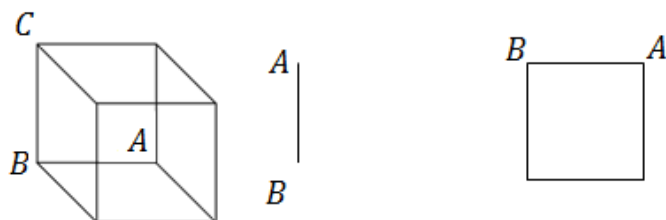
וזה ברור מאיור 2, כי $DE = y$, $BE = x$

תיאור הבנייה הגאומטרית עבור המשוואה $ax^3 + bx = c$

משוואה 13 היא משוואה אלגברית ממעלה שלישית המכילה שלושה גורמים: $x^3 + bx = c$, כאשר המקדמים b ו- c הם מספרים ממשיים חיוביים. המספר 13 הוא המספר הסידורי שקבע עומר כאשר סידר ומיין את 25 המשוואות ממעלה שלוש ומטה. המשוואה 13 היא הראשונה בששת המשוואות ממעלה שלוש שמכילות רק שלושה גורמים (ראשד וזאדה, 2005).

הצגה גאומטרית לנעלם x ולמקדמים b, c

אפשר להציג את הנעלם וחזקותיו x^3, x^2, x בגדלים גאומטריים כמו אורך קטע, שטח ריבוע ונפח קובייה בהתאמה. כדי לשמור על ההומוגניות במשוואה 13, המקדם b מייצג שטח של אובייקט מישורי, והמקדם c מייצג נפח של אובייקט מרחבי. לכן אפשר לבנות בסרגל ובמחוגה ריבוע בעל צלע AB המקיים $AB^2 = b$, ותיבה בעלת בסיס AB^2 וגובה BC המקיימת $AB^2 \cdot BC = c$. ראה איור 3.



איור 3

הבנייה הגאומטרית

עומר אל ח'יאם הצליח לפתור את המשוואה: $x^3 + bx = c$ בדרך גאומטרית בחיתוך שני חתכים קונים: מעגל ופרבולה. נציג לפניכם כעת את הבנייה על פי עומר אל ח'יאם.

נתון: $x^3 + bx = c$ כך ש- $b, c > 0$

נבנה בסרגל ובמחוגה שני קטעים AB ו- BC המקיימים: $AB^2 = b$ ו- $AB^2 \cdot BC = c$ כפי שתיארנו קודם.

הבנייה:

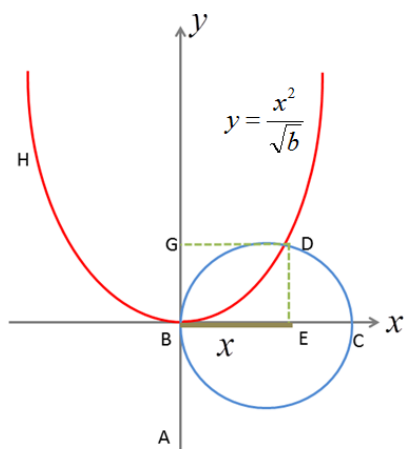
1. נצייר פרבולה שמשוואתה

$$(x^2 = \sqrt{b} \cdot y) \Leftrightarrow BE^2 = AB \cdot BG$$

על ידי המחוגה השלמה לציור חתכים קונים (ראשד, 2008).

2. נצייר מעגל בעל קוטר BC כפי שמופיע באיור 4, כך שהפרבולה והמעגל נחתכים בנקודות D ו- B .

3. מנקודה D נוריד שני אנכים DE ו- DG על הצירים x ו- y בהתאמה.



איור 4

נוצר לנו מלבן $BGDE$ שבו $BG = ED, DG = EB$

משפט:

הקואורדינטה הרוחבית $BE = x$ עבור נקודת החיתוך D , היא פתרון משוואה 13, כלומר מתקיים:

$$BE^3 + b \cdot BE = c. \quad (\text{ראה איור 4}).$$

נוכיח שלוש טענות עזר לפני הוכחת המשפט העיקרי.

למה 1: לפי הבנייה ואיור 4 מתקיימים היחסים $\frac{BE}{ED} = \frac{BE}{BG} = \frac{AB}{BE}$.

הוכחה:

מאחר שנקודת החיתוך D נמצאת על הפרבולה לכן היא מקיימת:

$$BE^2 = AB \cdot BG$$

$$: BE^2 = AB \cdot BG / (BE \cdot BG)$$

$$\frac{BE}{BG} = \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{BE}{ED} = \frac{BE}{BG} = \frac{AB}{BE}$$

$$BG = ED \quad \text{כי}$$

מש"ל

למה 2: לפי הבנייה ואיור 5, מתקיים היחס $\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$.

הוכחה:

לפי איור 5, מתקיים $\angle BDC = 90^\circ$ (זווית היקפית על קוטר BC). במשולש $\triangle BDC$ נסמן $\angle CBD = \alpha$ ולכן $\angle BCD = 90^\circ - \alpha$

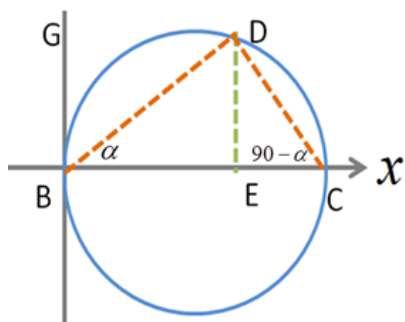
ומהבנייה עולה כי $DE \perp BC$ ולכן מתקיים:

$$\angle EBD = \angle EDC = \alpha$$

נקבל כי המשולשים $\triangle BED \sim \triangle DEC$ דומים, ומהדמיון מקבלים את היחס:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{DE}{EC}$$

מש"ל



איור 5

$$\text{למה 3: מהבנייה מתקיים } \frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EC}$$

יש לשים לב כי זו הפעם הראשונה שבה מופיעה החזקה השלישית של הצלע BE .

הוכחה:

לפי למה 1 ולמה 2 מתקיים:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{ED}{EC} \quad \cdot \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{ED}{EC}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED} \quad \text{ומלמה 1 מתקיים:}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{BE}{ED} \quad \text{נקבל:}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EC}$$

מש"ל

הוכחת המשפט:

$$\text{על פי למה 3} \quad AB^2 \cdot EC = BE^3 \quad / + (AB^2 \cdot BE)$$

$$AB^2 \cdot EC + AB^2 \cdot BE = BE^3 + AB^2 \cdot BE$$

$$\text{ומאחר ש-} \quad BE + EC = BC \quad (\text{כנראה בציר 4})$$

$$\text{נקבל} \quad AB^2 \cdot BC = BE^3 + AB^2 \cdot BE$$

$$\text{ולפי בניית המקדמים:} \quad AB^2 \cdot BC = c \quad \text{ו-} \quad AB^2 = b$$

$$\text{מקבלים בסוף:} \quad c = BE^3 + b \cdot BE \Leftrightarrow c = x^3 + bx$$

מש"ל

ומכאן הסיק עומר אל ח'יאם כי משוואות מטיפוס 13 תמיד ניתנות לפתרון בחיתוך בין מעגל לפרבולה.

ניתוח מודרני

ההוכחה של אל ח'יאם היא הוכחה קונסטרוקטיבית ואין בה שום אינדיקציה על איך מקבלים את שני החתכים הקוניים (ראשד, 2010). מעניין לדעת כיצד ראה עומר אל ח'יאם כי המעגל והפרבולה אכן יכולים לפתור את המשוואה.

אבן אל הייטם, שחי כמה דורות אחרי אל ח'יאם, פתר את אותה משוואה בחיתוך בין פרבולה להיפרבולה

ואת זה קל לראות ישירות, כי משוואה 13 שקולה ל- $x^2 + b = \frac{c}{x}$ עכשיו נלך בכיוון ההפוך, נתחיל ממשוואה 13 ונראה איך אפשר לקבל את המעגל והפרבולה של אל ח'יאם.

$$x^3 + bx = c \quad / \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^4 + bx^2 = cx \quad / : b$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{b} + x^2 = \frac{c}{b}x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{b}} \right)^2 + x^2 = \frac{c}{b}x$$

נגדיר פרבולה $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ ונקבל,

$$\Leftrightarrow -\frac{c}{b}x / y^2 + x^2 = \frac{c}{b}x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{c}{b}x + y^2 = 0$$

ועל ידי השלמה לריבוע מלא נקבל את המעגל:

$$\left(x - \frac{c}{2b} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2b} \right)^2$$

ועכשיו ברור יותר מדוע פתרון משוואה 13 מתקבל על ידי חיתוך של המעגל שמרכזו $\left(\frac{c}{2b}, 0 \right)$ ורדיוסו $\frac{c}{2b}$, והפרבולה $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$.

היום אנו יודעים כי למשוואה אלגברית מהטיפוס של משוואה 13 יש שורש ממשי יחיד שהוא אותו שורש שמצא אל ח'יאם ושני שורשים מרוכבים צמודים, כל עוד שהמקדמים הם מספרים ממשיים. באמצעות ההוכחה המוצגת אפשר גם ללמוד על התפתחותו של המדע הערבי תחת חסות הח'ליפות האסלאמית, ולהתבונן באסלאם באותה תקופה כדת המעודדת מדע, תרבות ושילוב של הידע החדש עם הידע היווני וההודי שקדם לידע זה.

גישתו הגאומטרית של אל ח'יאם לפתרון משוואה 13 הוצגה לתלמידי כיתה י'. ראשית, התלמידים ניסו לפתור את המשוואה בכלים האלגבריים שהם מכירים, ולאחר שלא הצליחו, הוצגה לפניהם דרך הפתרון של אל ח'יאם שהפתיעה אותם גם כדרך לפתור את המשוואה שלא הצליחו לפתור, וגם כשילוב של גישה גאומטרית בפתרון משוואה.

הכרת תודה

אנו מודים לד"ר ופיק היבי, ראש החוג למתמטיקה במכללת סכנין, על התמיכה, העידוד והחסות בהשלמת המאמר הזה.

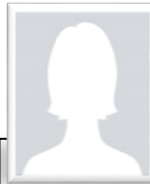
רשימת מקורות

- ראשד, ר' (2008). **אעמאל אל שגזי אל ריאדיה: הנדסת אל מכרוטאט ונד'רית אל אעדאד פי אל כרן אל עאשר אל מילאדי** (מ' אל חוג'ירי, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.
- (راشد، ر. (2008). **أعمال السجزي الرياضية: هندسة المخروطات ونظرية الأعداد في القرن العاشر الميلادي**. (محمد يوسف الحجيرى، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).
- ראשד, ר' (2010). **ריאדיאת אל ח'וארייזמי: מאסיס עלם אל ג'בר** (נ' פארס, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.
- (راشد، ر. (2010). **رياضيات الخوارزمي: تأسيس علم الجبر** (نقولا فارس، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).
- ראשד, ר' (2011). **דראסאת פי תאריך אל עלום ופלספתיה**. בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.
- (راشد، رشدي (2011). **دراسات في تاريخ العلوم العربية وفلسفتها** (ط1). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).
- ראשד, ר' וחדה, ב"ו (2005). **ריאדיאת עומר אל ח'יאם** (נ' פארס, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.
- (راشد، ر. وبيجان وهاب زاده. (2005). **رياضيات عمر الخيام** (نقولا فارس، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).
- Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics: An introduction* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.



מוחמד אבו אחמד

בוגר אוניברסיטת חיפה במתמטיקה טהורה.
עם תואר שני במתמטיקה טהורה ותואר
שלישי במתמטיקה יישומית בטכניון. מרצה
במכללת סכנין ובטכניון בחוג למתמטיקה.
עובד במחקר בתחום המתמטיקה היישומית
ובפרט בתופעת הדיפוזיה הלא נורמלית, עם
חוקרים מהטכניון. פרסם מספר מאמרים
בכתבי עת בין-לאומיים בתחום מתמטיקה
יישומית ופיזיקה.



אסמאא עבד אלחלים

בוגרת מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה,
במסלול מתמטיקה יסודי. מורה למתמטיקה
בבית ספר יסודי.

התפתחות בעיית חקר המשלבת

בין בניות הנדסיות ובין התכונות המיוחדות של הצורות המתקבלות

ויקטור אוקסמן, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; מכללת הגליל המערבי, עכו
משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; האקדמית גורדון, חיפה

הקדמה

יש בבניות ההנדסיות, פרט להיותן אמצעי להכנת צורות שונות, הזדמנות ליישום של ידע ומשפטים שנרכשו במהלך הלימוד של גאומטריה אוקלידית. יש בעיות הנדסיות שמבחינת הקושי שלהן, משמשות אתגר למתמודד עמן ועל כן מחייבות חשיבה יצירתית ומציאת דרכי פתרון בלתי שגרתיות התורמות לפיתוח החשיבה.

בקורס אקדמי של פרחי הוראה למתמטיקה, שחלקו עסק בבניות הנדסיות, החל מהשימוש בכלי הבנייה המסורתיים: סרגל ומחוגה, וכלה בבניות הנדסיות המבוצעות בעזרת תכנת גאומטריה דינמית, נתבקשו הסטודנטים להתמודד עם חקר הצורות המתקבלות מתוך ביצוע שינויים בנתוני המשימה. כשבחקר התקבלה תכונה מסוימת בצורה שנבנתה, נדרשה הוכחה פורמלית מושלמת לנכונותה.

חשימה א' - בנייה כלפי חוץ של משולשים שווי-צלעות על צלעותיו של משולש כלשהו

משימת החקר הראשונה הייתה בניית משולשים שווי-צלעות כלפי חוץ על צלעות של משולש כלשהו, ומציאת המרכז של כל אחד מהם על סמך בנייתם (מפגש תיכונים, או חוצי-זוויות או גבהים או אנכים אמצעיים כי מדובר במשולש שווה-צלעות שבו נקודות אלו מתלכדות). עם חיבור שלושת המרכזים, נתבקשו הסטודנטים לקבוע את סוג המשולש שהתקבל.

כיוון שכל סטודנט בנה לבדו משולש מקורי בעל צלעות באורך שונה מזה של עמיתו, ההפתעה הייתה שאצל כל אחד מהם התקבל משולש המרכזים הוא משולש שווה-צלעות.

בשלב זה הוצגה הבנייה על ידי יישומן של גאוג'ברה, והובלטה בבירור התכונה של משולש המרכזים. גרירת קדקוד המשולש המקורי שינתה את גודלו של המשולש והדגימה את העובדה שעבור כל משולש, משולש המרכזים שמתקבל הוא שווה-צלעות.

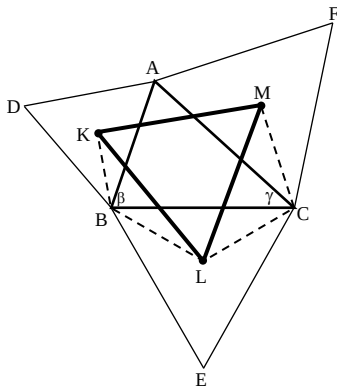
תכונה זו נקראת **משפט נפוליון** (Coxeter, 1969; Coxeter & Greitzer, 1967; Eddy & Fritsch, 1994; Pappas, 1989, p. 57), והיא מיוחסת לקיסר צרפת נפוליון בונפרטה (1769-1821).

שימוש ביישומון דינמי 1: אפשר לגרור את קדקודי המשולש המקורי ולראות שעבור כל משולש מתקבל משולש המרכזים ΔKLM הוא משולש שווה צלעות.

Link 1: <https://www.geogebra.org/m/X6bHWTr9>

כעת נדרשו הסטודנטים למצוא הוכחה מתמטית לתוצאה שהתקבלה, בכל דרך שיחפצו. לרוב הבעיה עצמה אינה מוכרת, וההוכחה שלה מחייבת שליטה בכלים מתמטיים שונים. מבין ההוכחות שמצאנו, תוצג כאן הוכחה המשתמשת בכלים טריגונומטריים, החל ממשפט הקוסינוסים וכלה בזהויות טריגונומטריות.

הוכחה של משפט נפוליון – קבלת משולש שווה-צלעות



איור 1

המשולש המקורי הוא $\triangle ABC$ וצלעותיו הן: a, b, c .

שלושת המשולשים השווה-צלעות הם:

$\triangle ACF$, $\triangle CBE$, $\triangle ABD$ ו- M , ומרכזיהם בהתאמה הם M ,

L ו- K , כפי שנראה באיור 1.

לפי שהנקודות L ו- K הם מרכזי המשולשים, נובע:

$$\angle CBL = \angle ABK = 30^\circ, \quad BL = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad BK = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad CM = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש BKL מקבלים: איור 1

$$KL^2 = BK^2 + BL^2 - 2 \cdot BK \cdot BL \cdot \cos(\beta + 60^\circ) = \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3} \cdot \cos(\beta + 60^\circ)$$

בדומה לכך, על פי משולש CML מקבלים:

$$ML^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3} \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)$$

יש להוכיח כי $KL^2 = ML^2$.

$$c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta + 60^\circ) = b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma + 60^\circ) \quad \text{נשאר להוכיח את השוויון:}$$

$$c^2 - b^2 = 2a[c \cdot \cos(\beta + 60^\circ) - b \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)] \quad \text{או:}$$

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma \quad \text{על ידי שימוש במשפט הסינוסים מקבלים:}$$

יש להוכיח את השוויון הבא:

$$\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = 2 \sin \alpha [\sin \gamma \cdot \cos(\beta + 60^\circ) - \sin \beta \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)]$$

$$\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = \sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta) \quad \text{על ידי שימוש בזהות טריגונומטריות, ידוע כי:}$$

$$\sin \alpha = \sin(\gamma + \beta) \quad \text{ועל ידי שימוש בזהות במשולש:}$$

נשאר להוכיח כי: $\sin(\gamma - \beta) = 2[\sin\gamma \cdot \cos(\beta + 60^\circ) - \sin\beta \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)]$

מטפלים באגף ימין על ידי שימוש בנוסחת המעבר ממכפלה לסכום ומקבלים:

$$2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \beta + 60^\circ) + \sin(\gamma - \beta - 60^\circ) - \sin(\beta + \gamma + 60^\circ) - \sin(\beta - \gamma - 60^\circ)] = \\ = \sin(\gamma - \beta - 60^\circ) - \sin(\beta - \gamma - 60^\circ) = 2\sin(\gamma - \beta) \cdot \cos(-60^\circ) = \sin(\gamma - \beta)$$

כלומר הוכחנו: $KL=LM$

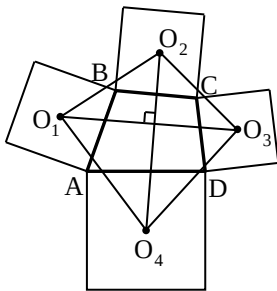
בדומה מוכיחים ש- $KL=KM$ ועל-כן המשולש KLM הוא משולש שווה-צלעות.

הערות:

- ניתן להוכיח כי המשפט נכון גם עבור המקרה שבונים את המשולשים שווי-הצלעות כלפי פנים.
 - שטחו של המשולש המקורי שווה להפרש שבין שטח משולש המרכזים כשהמשולשים נבנים כלפי חוץ ובין שטח משולש המרכזים כשהמשולשים נבנים כלפי פנים.
- התוצאה המפתיעה של משימת בניית המשולשים עוררה את השאלה האם אפשר להגיע להכללה מהסוג להלן:

כאשר בונים כלפי חוץ על צלעותיו של מצולע כלשהו, בעל n צלעות, מצולעים משוכללים כל אחד בעל n צלעות, האם מרכזיהם ימשו קדקודים של מצולע משוכלל? לשם מטרה זו נתבקשו הסטודנטים לבצע משימות המשך.

משימת המשך



איור 2

על צלעותיו של מרובע כלשהו יש לבנות בעזרת סרגל ומחוגה ריבועים כלפי חוץ, לחבר את מרכזיהם, ולהסיק מסקנה באשר לצורתו של מרובע המרכזים (ראה איור 2).

השאלה הייתה, האם צורתו של מרובע המרכזים הוא ריבוע? הבנייה הראתה שמרובע המרכזים אינו ריבוע.

בשלב זה נשאלו הסטודנטים האם המסקנה האחרונה נכונה גם למרובעים מיוחדים, כגון ריבוע, מלבן, מעוין, מקבילית, דלתון, דלתון קעור, טרפז שווה-שוקיים, טרפז ישר-זווית.

כמו כן, הם התבקשו להתייחס לאורכי אלכסוני מרובע המרכזים והזווית שביניהם.

הבניות של המרובעים המיוחדים הניבו תשובות מעניינות:

- עבור מקבילית מתקבל שמרובע המרכזים הוא ריבוע.
- לכן גם עבור ריבוע, מלבן ומעוין, מרובע המרכזים הוא ריבוע.
- עבור טרפז שווה-שוקיים מתקבל דלתון.

- עבור דלתון (כולל דלתון קעור) מתקבל טרפז שווה-שוקיים.

בשלב זה כשההתפעמות מהתכונה המרהיבה רבה, נאמר לסטודנטים שמדובר במשפט ידוע של המתמטיקאי הדגול ואן האובל שפורסם לראשונה ב-1878: **Van Aubel's theorem** (de Villiers, 1998; Wells, 1991, p. 11; Yaglom, pp. 95-96).

הסטודנטים נדרשו להוכיח בדרך גאומטרית שאכן מתקבלות הצורות לעיל, ולחשב את אורך הצלע של מרובע המרכזים עבור מקבילית. נתקבלו ההוכחות הגאומטריות בלא קשיים מיוחדים, ועבור מקבילית בעלת צלעות באורך a ו- b וזווית חדה α , מתקבל שאורך הצלע של ריבוע המרכזים הוא:

$$t = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab \sin \alpha}$$

עבור מלבן בעל צלעות באורך a ו- b , אורך הצלע של ריבוע המרכזים הוא:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} (a+b)$$

עבור מעוין בעל צלע באורך a וזווית חדה α , אורך צלע ריבוע המרכזים הוא:

$$t = a \sqrt{1 + \sin \alpha}$$

עבור ריבוע בעל צלע באורך a , אורך צלע ריבוע המרכזים הוא:

$$t = a \sqrt{2}$$

באשר לשאלה על אלכסוני מרובע המרכזים, נמצא שהם שווים ומאונכים.

שימוש בתכנה דינמית

כדי להמחיש באופן דינמי את השינוי המתקבל בצורתו של מרובע המרכזים, הוכן יישום דינמי של הבנייה בעזרת Geogebra.

שימוש ביישומון דינמי 2: היישומון מאפשר חקר דינמי של משפט ואן-האובל.

[Link 2: https://www.geogebra.org/m/Zv4ygDaz](https://www.geogebra.org/m/Zv4ygDaz)

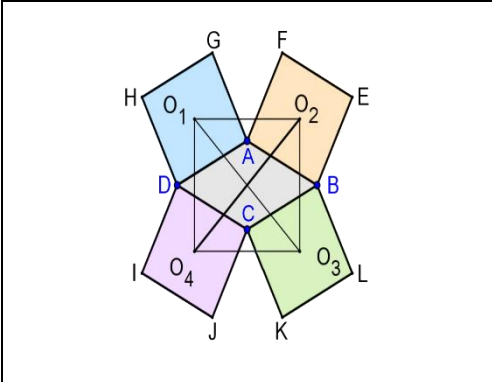
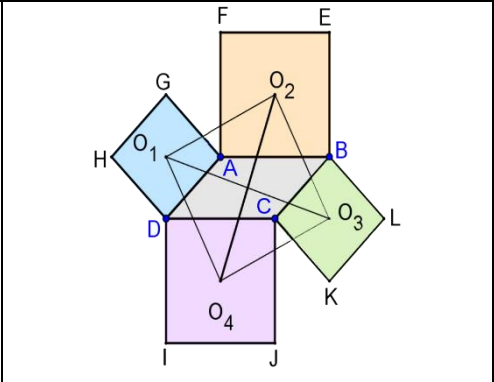
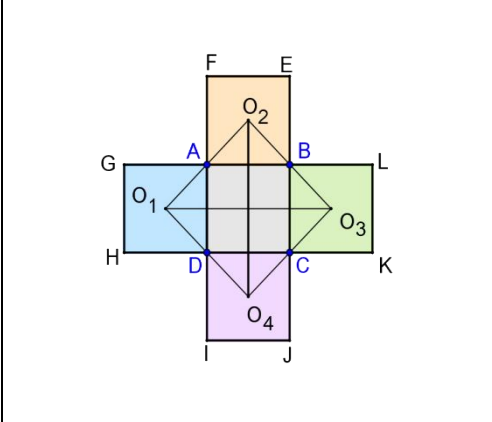
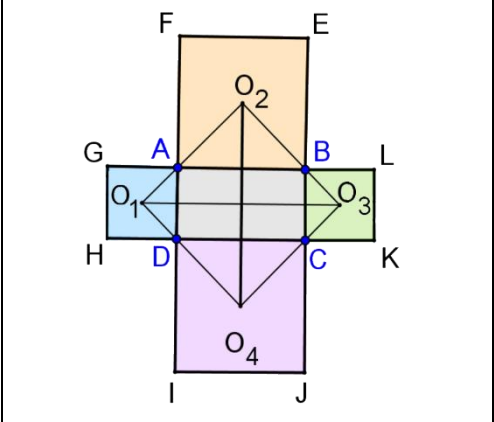
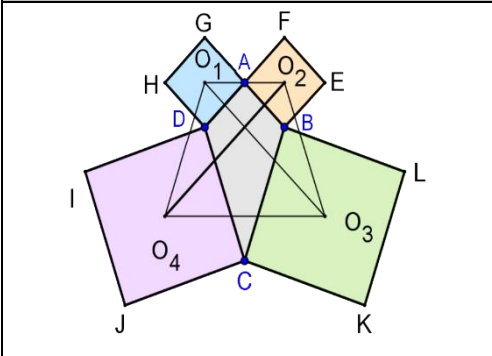
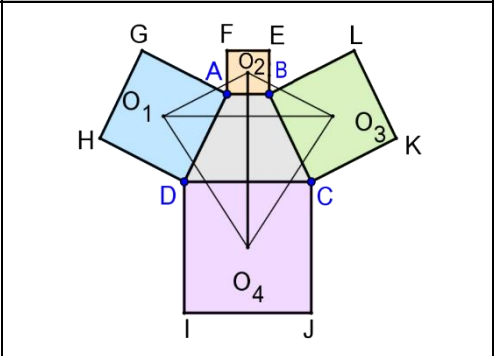
בעזרת היישום אפשר לגרור את כל אחד מארבעת הקדקודים של המרובע המקורי ולראות את השפעת שינוי צורתו על צורת מרובע המרכזים. בכל מצב, אורכי צלעות המרובע המקורי, אורכי אלכסוני מרובע המרכזים וכן הזווית ביניהם (90°) מופיעים על דף השרטוט של היישום.

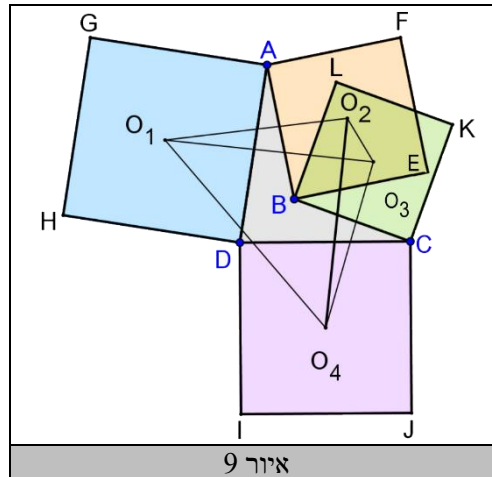
רשת הקווים המופיעה על המסך של יישומון דינמי 2 כרקע למישור השרטוט מאפשרת בניית מרובעים מיוחדים.

בשונה מהשימוש בכלי השרטוט המסורתיים, בעזרת התכנה הדינמית אפשר להדגים בלי קושי את הבנייה עבור מרובע מקורי קמור או קעור, ולראות שגם במקרים אלו נשמרות התכונות של אלכסוני מרובע המרכזים.

כמו כן, גם במקרה של ניוון המרובע המקורי למשולש.

להלן צורות מרהיבות שהתקבלו למרובע המרכזים עבור מקרים מיוחדים על ידי שימוש בתכנה גאומטרית דינמית.

	
איור 4	איור 3
	
איור 6	איור 5
	
איור 8	איור 7



איור 9

יופייה של המתמטיקה מתגלה כאשר מתבררים השימור והשינוי הבאים:

כאשר ABCD מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע – מרובע המרכזים הוא ריבוע.

כאשר ABCD טרפז שווה-שוקיים – מרובע המרכזים הוא דלתון.

כאשר ABCD דלתון – מרובע המרכזים הוא טרפז שווה-שוקיים.

צורות ייחודיות אלו נראות באיורים 3-8.

התכונות $O_1O_3 = O_2O_4$ ו- $O_1O_3 \perp O_2O_4$ נשמרות גם כאשר המרובע ABCD הוא קעור (ראה איור 9).

כמו כן, התכונות לעיל מתקיימות כאשר הריבועים נבנים כלפי פנים.

הוכחת חשימת מרובע הריבועים

כפי שכבר צוין, ההשראה לחקירת בעיית מרובע הריבועים הייתה בעיית בניית המשולשים, שהניבה תוצאה מפתיעה של קבלת משולש שווה-צלעות.

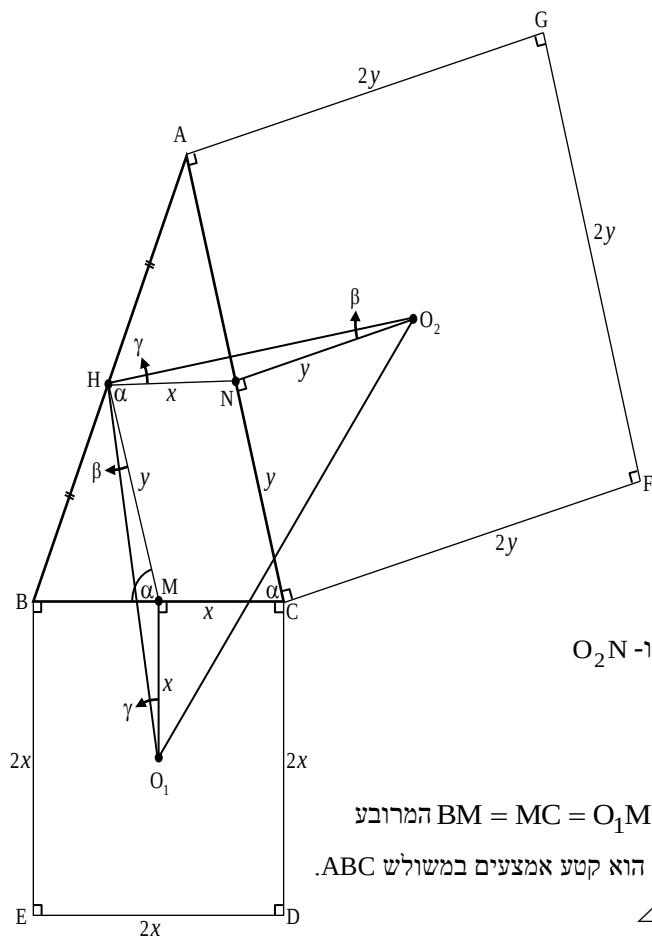
כיוון שהבעיה לא הייתה מוכרת, היא נחקרה תחילה על ידי בנייה בכלים מסורתיים ולאחר מכן על ידי שימוש בתכנה גאומטרית דינמית. התכנה הדינמית אפשרה לשנות באופן שוטף את אורכי צלעות המרובע ולמעשה שימשה סמן בולט למציאת התכונה המרכזית של מרובע המרכזים – אלכסונים שווים באורכם וניצבים זה לזה. חשוב לציין שגם לאחר שהתכנה הדינמית הציגה את אורכי האלכסונים והזווית ביניהם והתבררה התכונה, הרי שאין להסתפק בכך ולראות בזאת כהוכחה לנכונות התכונה. ייתכן מצב שעבור בחירת אורכי צלעות מסוימות התכונה לא תתקיים. במאמרים קודמים (סטופל ובן-חיים, 2014, עמ' 97; Stupel & Ben-Chaim, 2013a), הודגש שהתוצאה הנראית מהשימוש בכלי הטכנולוגי הממוחשב, היא לכל היותר יכולה להיחשב כ"הוכחה למחצה", וחייבת להינתן הוכחה מתמטית פורמלית כמקובל.

לאחר חיפוש הבעיה במקורות רבים (ספרים ומאמרים), היא נמצאה בספרו של ויקטור פרסולוב

(ברוסית) שאף מביא הוכחה לתכנה המיוחדת של מרובע המרכזים תוך שימוש בכלי של סופרפוזיציה של סיבובים. תלמידים ואף מורים רבים אינם מיומנים בשימוש בפעולת סיבוב להוכחת בעיות גאומטריות, ובפרט שעבור הבעיה המוצגת, פעולת הסיבוב מקשה על הבנת הפתרון בשל הגדלת צפיפות הקווים שבאיור.

מסיבה זו מוצגות במאמר שתי הוכחות שונות למשימה, בכלים מתמטיים שתלמידי תיכון יכולים להשתמש בהם כי יש להם את הידע והמיומנות המתאימים. בהזדמנות זו הוכחו משפטי עזר ונעשה שימוש במשפט הקוסינוסים למרובע, דבר המוסיף ידע לתלמידים. הוכחות בדרכים שונות מבליטות את יופייה של המתמטיקה וכתחום המשלב ענפים רבים (סטופל ובן-חיים, 2014, עמ' 97; Stupel & Ben-;97). (Chaim, 2013a, 2013b).

הוכחה בדרך גאומטרית שאלכסוני מרובע המרכזים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה



בשלב המקדים להוכחה, יינתן משפט עזר.

משפט עזר

נתון משולש כלשהו ABC, שעל שתיים מצלעותיו בונים כלפי חוץ ריבועים.

תהא הנקודה H אמצע הצלע AB, O_1 ו- O_2 מרכזי הריבועים ACDE ו-BCFE בהתאמה, כנראה באיור 10.

מסמנים את אורכי צלעות הריבועים ACDE ו-BCFE

ב- $2x$ ו- $2y$ בהתאמה. מהנקודות

O_1 ו- O_2 מורידים אנכים O_1M ו- O_2N

לצלעות המשולש.

מתקבל:

$BM = MC = O_1M = x$, $AN = NC = O_2N = y$
HNCM הוא מקבילית, והקטע HN הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

$\angle NCB = \angle HMB = \angle NHM = \alpha$

המשולשים $\triangle O_1MH$ ו- $\triangle O_2NH$ חופפים לפי צ.ז.צ.

איור 10

מהחפיפה נובע: $HO_1 = HO_2$, כלומר המשולש ΔO_1HO_2 הוא משולש שווה-שוקיים.

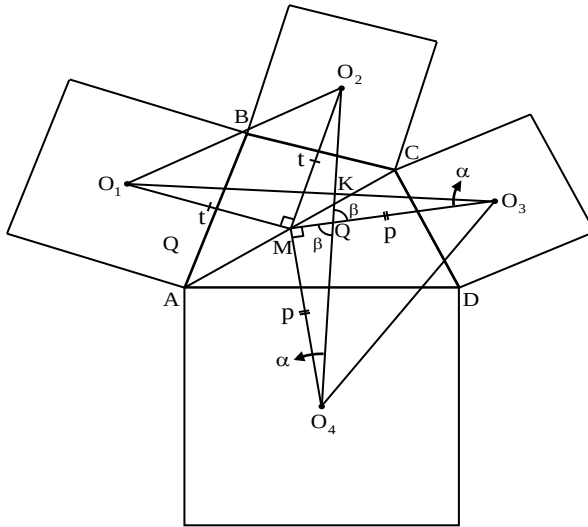
מהחפיפה נובע גם:

$$\Delta HO_1M \text{ במשולש } \angle HO_2N = \angle O_1HM = \beta, \angle O_2HN = \angle HO_1M = \gamma$$

$$\angle O_1HO_2 = 90^\circ \text{ ולכן } \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \text{ מתקבל:}$$

ההוכחה של תכונת אלכסוני מרובע המרכזים

מעבירים את האלכסון AC במרובע ABCD ומסמנים את נקודת האמצע שלו ב-M.



איור 11

מחברים את הנקודה M עם מרכזי הריבועים ומתקבלים שני משולשים: ΔO_1MO_2 ו- ΔO_3MO_4 (כנראה באיור 11), שהם משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים, כפי שהוכח במשפט העזר.

$$\text{מסמנים: } MO_3 = MO_4 = p$$

$$MO_1 = MO_2 = t \text{ (ראה איור 11).}$$

מכאן נובע שהמשולשים ΔO_1MO_3

ו- ΔO_2MO_4 חופפים לפי צ.ז.צ.

$$\text{מהחפיפה נובע: } O_1O_3 = O_2O_4$$

מסמנים ב-K את נקודת החיתוך של אלכסוני מרובע המרכזים (לא בהכרח נמצאת על האלכסון AC),

ומסמנים ב-Q את נקודת החיתוך של MO_3 ו- O_2O_4 .

מחפיפת המשולשים נובע גם כי:

$$\angle O_4QM = \angle O_2QO_3 = \beta, \angle O_1O_3M = \angle O_2O_4M = \alpha$$

$$\text{מתקבל ש- } \angle O_1KO_4 = 90^\circ$$

בשלב זה אפשר גם לחשב את ריבוע אורכי צלעות מרובע המרכזים:

$$O_1O_2^2 = 2t^2$$

$$O_3O_4^2 = 2p^2$$

$$O_1O_4^2 = t^2 + p^2 - 2tp \cdot \cos \angle O_1MO_4$$

$$O_2O_3^2 = t^2 + p^2 - 2tp \cdot \cos \angle O_2MO_3$$

$$\angle O_1MO_4 + \angle O_2MO_3 = 180^\circ \text{ כיוון ש-}$$

$$O_2O_3^2 = t^2 + p^2 + 2tp \cdot \cos \angle O_1MO_4 \text{ מקבלים:}$$

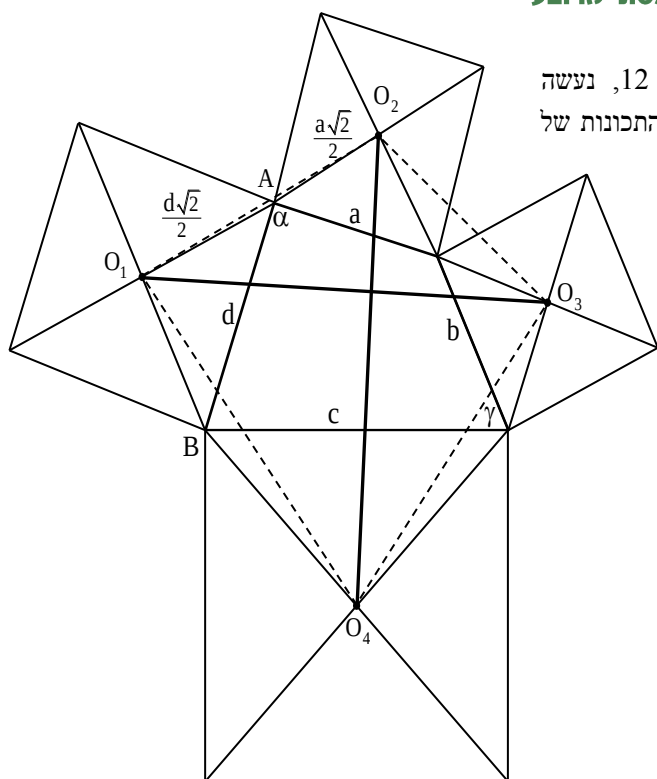
$$O_1O_2^2 + O_3O_4^2 = O_1O_4^2 + O_2O_3^2 \text{ מכאן מתקבל שוויון של סכום ריבועי צלעות נגדיות:}$$

וכפי שהוכח מקודם, זהו התנאי לכך שאלכסוני מרובע המרכזים מאונכים זה לזה.

זוהי הוכחה נוספת לתכונה של מרובע המרכזים.

הוכחה בדרך טריגונומטרית שאלכסוני מרובע המרכזים מאונכים זה לזה

בהתאם לסימונים המופיעים באיור 12, נעשה שימוש במשפט הקוסינוסים להוכחת התכונות של מרובע המרכזים.



על פי משפט הקוסינוסים במשולש ΔO_1AO_2 מקבלים:

$$(O_1O_2)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} - ad \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} + ad \cdot \sin \alpha =$$

$$(O_1O_2)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 + 2ad \sin \alpha) = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 + 4 \cdot S_{\Delta ADB})$$

באותו אופן מקבלים: $(O_3O_4)^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + 4 \cdot S_{\Delta BDC})$ כאשר נעשה שימוש בקשרים:

$$\angle O_3CO_4 = 360^\circ - (90^\circ + \gamma) = 270^\circ - \gamma, \quad \cos(270^\circ - \gamma) = -\sin \gamma$$

$$(O_1O_2)^2 + (O_3O_4)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2 \cdot S_{ABCD}$$

מכאן סכום ריבועי זוג צלעות נגדיות שווה לסכום ריבועי זוג הצלעות הנגדיות האחרות, ועל-כן האלכסונים מאונכים זה לזה.

כשמחברים את ריבועי אורכי כל הצלעות של מרובע המרכזים, מקבלים:

$$O_1O_2^2 + O_2O_3^2 + O_3O_4^2 + O_4O_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \cdot S_{ABCD}$$

כיוון ששטח המרובע הוא ביטוי חיובי, הרי שעבור כל מרובע מקורי מתקיים:

$$O_1O_2^2 + O_2O_3^2 + O_3O_4^2 + O_4O_1^2 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

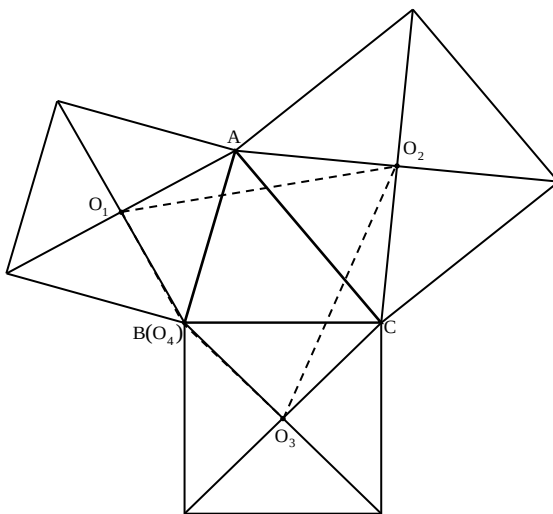
שוויון יתקיים רק כאשר המרובע המקורי מתנוון לקטע של קו ישר.

הערה מתודית

כפי שרואים ההוכחה של משפט ואן האובל למרובע כללי מחייבת מיומנות הוכחה ברמה גבוהה. אולם עבור המקרים המיוחדים המתוארים באיורים 3-8 ההוכחה של המשפט עבור מקרים אלו היא משימה אפשרית עבור תלמידי העל-יסודי הלומדים מתמטיקה ברמה מוגברת.

משפט ואן-האובל למקרים של ניוון המרובע

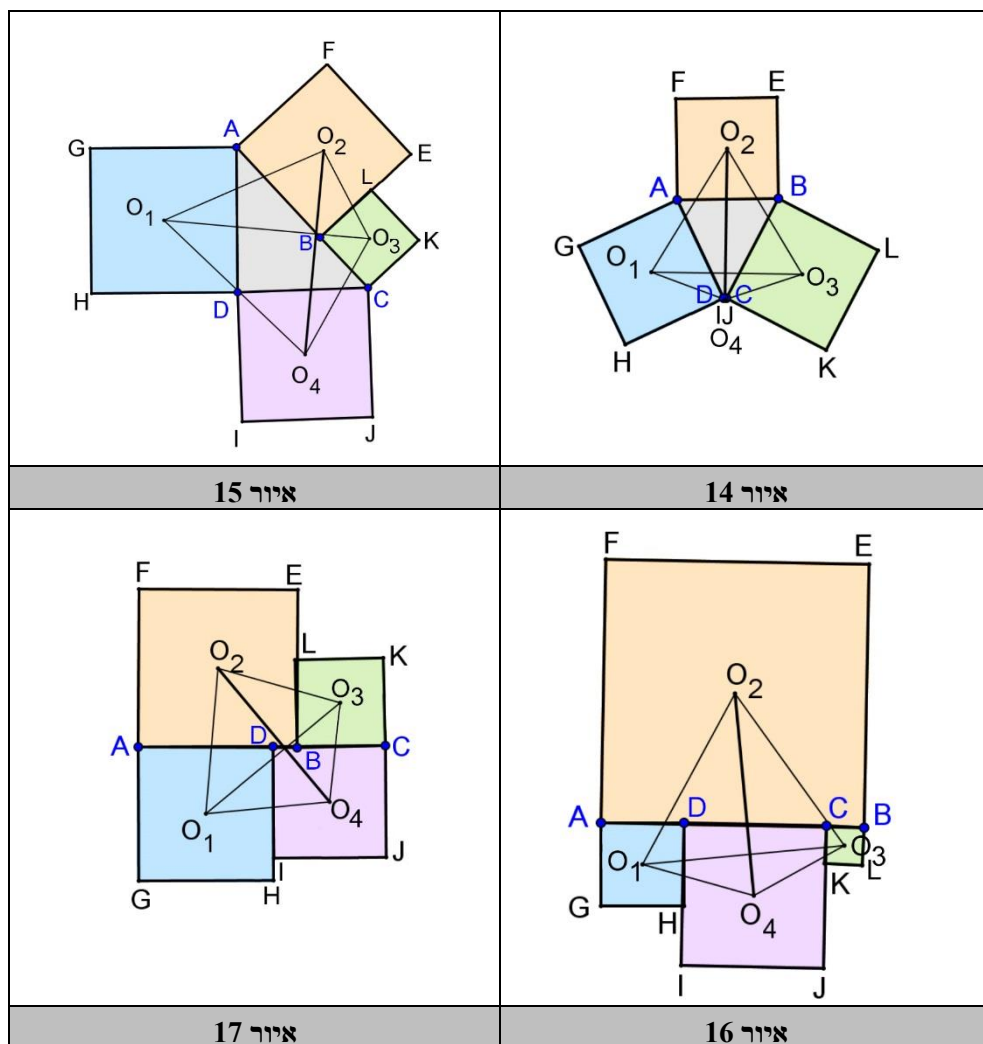
כאשר המרובע ABCD מתנוון למשולש ΔABC כנראה באיור 13, האלכסונים O_1O_3 ו- O_2O_4 נותרים מאונכים, וההוכחה לכך מתקבלת באותה דרך



איור 13

שהובאה ההוכחה למקרה הריבוע. אפשר להמשיך ולנוון את המרובע ממשולש לשני קטעים עם נקודה משותפת ואף לקו אחד שבו שני ריבועים מצד אחד של הקטע ושני ריבועים מצדו האחר. או שלושה ריבועים מצד אחד ושלושה מצדו האחר. גם למקרים אלו מתקיים משפט ואן האובל (Oxman, & Stupel, 2015).

הערה: ההוכחה של תכונות משפט ואן-האובל למקרה שהמרובע מתנוון לקטע, ניתנת להשגה בקלות על ידי מיקום הקטע על ציר ה- x באופן שקצה אחד שלו בראשית הצירים. איורים 14-17 מתארים את משפט ואן-האובל למקרים שבהם המרובע התנוון למשולש או לקטע.



סיכום

המאמר מסכם פעילות חקר של שני משפטים בגאומטריה: **משפט נפוליון ומשפט ואן-האובל**, שאינם מוכרים לפרחי ההוראה במתמטיקה ובוודאי שלא לתלמידי החינוך העל-יסודי. המשפטים מרהיבים בתכונות ה**שימור** שלהם. פעילות זו לוותה בהצגת הוכחות למשפטים ובחקר התכונות על ידי שימוש בסביבה גאומטרית דינמית.

רשימת מקורות

- סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. **כתב עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי**, 1, 80-107.
- Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2nd ed.). New York: Wiley.
- Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Eddy, R. H., & Fritsch, R. (1994). The conics of Ludwig Kiepert: A comprehensive lesson in the geometry of the triangle. *Mathematics Magazine*, 67, 188-205.
- Oxman, V., & Stupel, M. (2015). An elegant special cases of Van Aubel's Theorem. *The Mathematical Gazette*, 99(545), 256-262.
- Pappas, T. (1989). *The joy of mathematics*. San Carlos, CA: Wide World Pub./Tetra.
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013a). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(2), 129-161.
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013b). Plane geometry and trigonometry - Related fields: Do they work hand in hand? *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(1), 43-74.
- de Villiers, M. (1998). Dual Generalizations of Van Aubel's theorem. *The Mathematical Gazette*, 82, 405-412.
- Wells, D. (1991). *The penguin dictionary of curious and interesting geometry*. London: Penguin Books.
- Yaglom, I. M. (1962). *Geometric transformations* (A. Shields, Trans., Vol. 1). New York: Random House.



פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.
מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים.
פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל.
עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה.
בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.



ד"ר יקטור אוקסמן

תחום התמחות - מתמטיקה וחינוך מתמטי (Ph.D.).
פרסם מאמרים רבים בתחום הנ"ל בכתבי עת בארץ ובחו"ל.
לאחרונה עוסק במחקר בגאומטריה דינמית ובדרכי שילוב תוכנות דינמיות בהוראת גאומטריה.

מדור חוויות מכנס 2017

קרני שיר, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך ; מכללת לוינסקי לחינוך, תל-אביב יפו

"למה המורה לא מרשה לנו לשחק בכיתה?". בעקבות שאלה זו החל צחי לחשוב על דרכים שבהן אפשר לשלב משחקים בלמידה ונרשם להאקתון בנושא חינוך ומשחק שארגנה מיינדסט (המילה האקתון, Hackathon, היא שילוב של שתי המילים Hack ו-Marathon).



בהאקתון לרוב מדובר על סוג של מרתון תכנות שנמשך לרוב שש עד 48 שעות, ומורכב מקבוצות קטנות של אנשים שמתחרים בזמן הנתון בבניית תוצר מאפס בהתאם לנושא של ההאקתון – אם יש כזה.

צחי יצא נלהב מאוד מחוויית הלמידה ההאקתונית, השונה לגמרי מאופן הלמידה המסורתית בבית הספר, והחליט לאמץ את הפורמט ולהכין את התלמידים שלו בדרך זו לבגרות באזרחות. לאחר ההצלחה של דרך הוראה זו והתגובות החיוביות של התלמידים, החליט צחי לפתח את Chik-Chalk, פלטפורמה שתאפשר למורים ליישם בקלות ובנוחות

ביום שני ערפילי של חודש פברואר, בחופשה בין שני הסמסטרים של שנת הלימודים תשע"ז, נסעתי למכללת לוינסקי ליום עיון בנושא יזמות וחדשנות בחינוך.

מזג האוויר הערפילי של אותו יום הפתיע אותי במעט. היה זה אחרי שלושה ימי שמש שנראה כי בישרו על סופו של החורף ותחילת האביב, אך מזג האוויר הקודר בהמשכו של אותו שבוע העיד על כך כי ימי השמש שהגיעו לבקר בסוף השבוע הם אלו שהיו יוצאי הדופן, וכנראה נצטרך להמתין עוד זמן מה לבואו של האביב.

למרות מזג האוויר האפלולי בחוץ, האווירה ביום העיון היתה חמה ונעימה. לאחר ברכות ושתי הרצאות מליאה, אחת של ד"ר טלי יריב משען – מנכ"לית קרן ברכה, והשנייה של אבי ורשבסקי – מנכ"ל מיינדסט (MindCET) וחבר הנהלת מט"ח, חולקנו לקבוצות והלכנו לשמוע על מיזמים חינוכיים שונים הנמצאים בשלבי עבודה.

המורה-יזום הראשון שפגשנו היה צחי דורון, פרסומאי לשעבר, שעשה הסבה להוראה ובעשור האחרון עובד כמורה להיסטוריה ואזרחות בתיכון אנקורי בפתח-תקווה. במפגש סיפר לנו צחי על האופן שבו התגלגל לחשוב על הרעיון שהוא מפתח. צחי סיפר שהכול התחיל כאשר הבת שלו, שהייתה תלמידה בכיתה א', חזרה יום אחד הביתה ושאלה אותו

מתודות הוראה חדשניות.

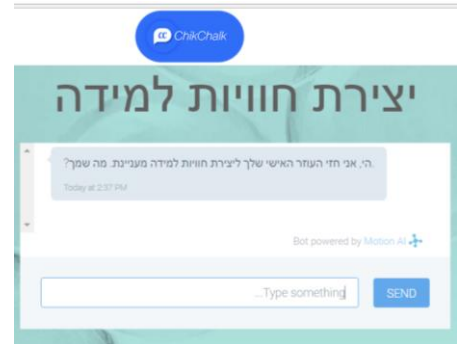
סקרנות ויצירתיות אצל התלמידים. המשחק הוא משחק WikiRun (מעבר בין פריטי מידע הקשורים זה לזה במטרה לחבר את הפריט הראשון לאחרון באופן הגיוני), וכל תלמיד משחק במכשיר הקצה שלו (מכשיר טלפון חכם, מחשב, איי-פוד וכדומה). הנתונים מגיעים למורה ומרוכזים אצלו, ועל הלוך מוקרן מהלך המשחק של כל התלמידים בו בזמן. בסיום המשחק מקבל המורה נתונים מפורטים על המשחק של כל תלמיד.



נוסף לקישור מושגים בדרך משחקית חווייתית, אפשר לנתח את המסלולים של התלמידים, למצוא קטעים המחברים בין זוגות מושגים שתלמידים רבים עברו בהם, ולעמוד על הדרכים השונות שבהן אפשר לקשר את שני המושגים, הראשון והאחרון, זה לזה.

כפי שאמר אבי ורשבסקי בהרצאת המליאה, אתגרי החינוך הם מטרה נעה. העולם שנמצא בחוץ משתנה כל הזמן, ולא ברור לנו עד כמה דברים שאנחנו מלמדים היום יהיו רלוונטיים לעולם שיהיה, כאשר אותם תלמידים יסיימו את בית הספר. כיוון שהפרקטיקות של העתיד הם 'כתם עיוור', ולא לגמרי ברור מה יהיו הצרכים של העתיד, אין ספק שיש חשיבות רבה בהכנסת תרבות יזמית ורעיונות חדשניים למערכת החינוך.

נכון לעכשיו, יש שלוש שיטות ההוראה חדשניות שהוא שם דגש בהן בפיתוח הפלטפורמה: (1) מודל הלמידה ההאקטונית; (2) מודל הלמידה באמצעות PBL (למידה מבוססת פרויקטים); (3) מודל הכיתה ההפוכה (בניגוד לשיטת ההוראה המסורתית שבה שלב ההקניה מתבצע בכיתה והתלמידים מתרגלים בבית, שלב ההקניה מתבצע בבית בצפייה בסרטון וידיאו או בקריאת טקסט המסביר את הדברים, ובכיתה מתפנה זמן לעיסוק מעמיק בחומר). הדגש של צחי בבניית הפלטפורמה Chick-Chalk הוא לאפשר גם למורה שאיננו טכנולוגי לבנות שיעור שונה וחווייתי, כאשר כל מה שנדרש מהמורה הוא לנהל דו-שיח, באמצעות צ'ט-בוט, עם 'חזי' העוזר האישי. באמצעות התשובות שיענה המורה לחזי יהיה אפשר לבנות את השיעור הייחודי.



המורה היוזם השני שנפגשנו עמו בסדנאות היה גיא ברסלר שבדומה לצחי, גם היה מורה לאזרחות ולהיסטוריה בתיכון. הפרויקט שהקים גיא עם השותפה שלו, מאיה בן-אמוץ,

נקרא NaraView.



ד"ר קרני שיר

סיימה לימודי דוקטורט בנושא 'תפיסות של מטה מושג במתמטיקה - המקרה של אלגוריתם חזי' ונבחנה לתואר דוקטורט בשנת 2004. היא מנחה היסטוריה ומתמטיקה בתיכון 'המקד' בירושלים. היא מנחה פרויקט 'חזי' ושותפה לפיתוח הפלטפורמה NaraView. היא מנחה פרויקט 'חזי' ושותפה לפיתוח הפלטפורמה NaraView. היא מנחה פרויקט 'חזי' ושותפה לפיתוח הפלטפורמה NaraView.

הנחיות למחברים

הגשה

מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי", ייכתבו בשפה העברית. על המאמרים להיות בהיקף של 25 עמודים לכל היותר. ב-25 עמודים הללו ייכללו כל התקצירים, טבלאות, תרשימים, איורים ורשימת המקורות. את הטבלאות או האיורים יש לשבץ בגוף הטקסט עצמו, ולא כקובץ נפרד.

יש להגיש את המאמר בגופן David, גודל 12, רווח כפול ויישור דו-צדדי (אינץ' מכל צד). שם המאמר יופיע בגודל 16 מודגש, כותרות של סעיפים ראשיים של המאמר בגודל 14 מודגש ותת-כותרות בגודל 12 מודגש. את המאמר יש לשלוח כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת ktav.et.rme@gmail.com.

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100-200 מילים ורשימה של 3-5 מילות מפתח.

הנוסחאות במאמר ייכתבו בתכנת MathType.

רשימת המקורות תיכתב לפי הכללים המפורטים במדריך APA. יש להקפיד על התאמה מלאה בין האזכורים של המקורות בטקסט ובין הופעתם ברשימת המקורות. רשימת המקורות בסוף המאמר תסודר לפי א'-ב' של שמות המחברים (עברית לפני לועזית).

המאמרים יישלחו לשיפוט מקצועי אנונימי. לשם כך יש להוסיף עמוד שער, שמופיעים בו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושיוכו האקדמי, המקצועי או האחר של המחבר. עמוד שער זה יוסר בעת השליחה לשיפוט כדי לשמור על אנונימיות הכותב/ת בהליך ההערכה והשיפוט.

אין לציין את שם הכותב/ת בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותב/ת. במקרה של אזכור ביבליוגרפי של המחבר בגוף המאמר עצמו יש לציין רק "(מחבר, שנה)", וכן לסמן X במקום המתאים ברשימת המקורות.