

מחקר וסיון בחינוך המתמטי

גיליון 4

עברבר 2016

גיליון מיוחד

בנושא

למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית

כתב עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי

עורכת:
ד"ר קרני שיר שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

עורכות הגיליון המיוחד:
ד"ר טלי נחליאלי מכללת לוינסקי לחינוך
פרופ' מיכל טבח אוניברסיטת תל-אביב

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):
ד"ר מארק אפלבאום מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' דוד בן-חיים מל"מ הטכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר הגר גל דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר אילנה לבנברג גורדון – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר טלי נחליאלי מכללת לוינסקי לחינוך
פרופ' משה סטופל שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר אלכס פרידלנדר מכון ויצמן למדע
ד"ר אמאל שריף-רסלאן המכללה האקדמית הערבית לחינוך
פרופ' עטרה שריקי אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' דינה תירוש אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

תמונת שער: תמי יהושע

עריכה לשונית:
יפעת פישר, מכללת שאנן
מרים מילשטיין, מכללת שאנן

עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:
תמי יהושע, מכללת שאנן

ISSN 2311-5483
Key title: Ḳtab-ha-ʾet « meḥqar w-ʿiyẇn b-ḥiynẇk matemaṭiy »

כתב-העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה

כתובת אינטרנט של כתב-העת **http://shaanan.ac.il/?page_id=4244**

תוכן העניינים

דבר העורכת / קרני שיר 5

מדור חדשות מתמטיות / נצה מובשוביץ-הדר 4

הקדמה: למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית / טלי נחליאלי ומיכל טבח 12

עצמים מדיבורים: כיצד ילדים קטנים יוצרים מספרים בתוך שיח / עירית לביא ואנה ספרד 21

ניתוח שיח לימודי כיתתי בנושא המעגל דרך שתי עדשות תאורטיות: קומוגניציה של Sfard **ו-**SFL **של** Halliday/ **אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח 71**

מטה-אריתמטיקה ספונטנית כצעד ראשון לקראת האלגברה הבית-ספרית / שי כספי 96

הבניה משותפת של זהות "תלמידה מתקשה": שגרות שיח בין מורה לתלמידתה ותפקידם בהנצחת קשיי למידה במתמטיקה / עינת הד-מצוויינים 124

קריאת טקסטים מתמטיים בתיכון / אביטל אלבוים-כהן 149

שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה / טלי נחליאלי ומיכל טבח 174

מאמר תגובה: מה משתקף מהגיליון לגבי התפתחות התאוריה הקומוגניטיבית דרך מימושיה? / בוריס קויצ'ו 198

דבר העורכת



הגיליון הרביעי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" הוא גיליון מיוחד שערכו ד"ר טלי נחליאלי ממכללת לוינסקי לחינוך ופרופ' מיכל טבח מאוניברסיטת תל-אביב. בהקדמה שלהן לגיליון המיוחד יוצג הנושא של למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית, נושא שעומד במוקד הגיליון המיוחד, ויוצגו גם המאמרים המופיעים בגיליון.

היות שהמתמטיקה היא תחום דינמי שמתפתח ומתחדש כל הזמן, גם גיליון מיוחד זה נפתח במדור החדשות המתמטיות שכותבת פרופ' נצה מובשוביץ-הדר, ושבו היא משתפת אותנו בחדשות מתמטיות מרחבי העולם.

במדור הנוכחי מוצגות ארבע חדשות מתמטיות. שתי החדשות הראשונות נוגעות לריצוף חדש שהתגלה במחומשים. במהלך הקריאה יוכל הקורא להרחיב את ידיעותיו בנושא משמעות הריצוף, האריחים שבאמצעותם אפשר לרצף והריצוף החדש שהתגלה.

בחדשה השלישית תוכלו לקרוא על הטיה בלתי צפויה שהתגלתה בהתפלגות של מספרים ראשוניים תאומים (מספר ראשוניים תאומים הם מספרים ראשוניים כגון 11 ו-13 שההפרש בינהם הוא 2). מחדשה זו יהיה אפשר ללמוד מעט גם על הקשר שבין המספרים הראשוניים להצפנה.

החדשה הרביעית והאחרונה מספרת על פרס שקיבל אנדרו ויילס על הוכחת השערת פרמה ועל פרס אחר שהחמיץ.

על הפקת כתב העת והבאתו לדפוס אחראיות תמי יהושע, מנהלת ההוצאה לאור "שאנן", יפעת פישר ומרים מילשטיין, עורכות הלשון. על העזרה שלהן בהוצאת גיליון מיוחד נתונה תודה והוקרה.

הוצאת כתב עת מצריכה תמיכה מוסדית ומימון. אני רוצה להודות להנהלת מכללת "שאנן" ולעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש, על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב העת, ולפרופ' דוד בן-חיים, ששמח תמיד לתרום מזמנו ומניסיונו העשיר כדי שנוכל כולנו לקדם את הוצאתו לאור של כתב העת.

קריאה נעימה ומועילה!

ד"ר קרן שיר
עורכת כתב-העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי
ktav.et.rme@gmail.com

ISSN 2311-5483
Key title: Ḳtab-ha-ʿet « meḥqar w-ʿiyŵn b-ḥiynŵk matemaṭiy »

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-100,000 פריטים המתפרסמים בכ-1800 כתבי-עת מתמטיים למאגר המידע הבינלאומי המנוהל על-ידי החברה המתמטית האמריקאית: MathSciNet – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים. מדור החדשות בגיליון זה מכיל ארבע חדשות מהשנה הנוכחית (2016), שהן כמובן רק חלק קטנטן של המתרחש במתמטיקה השכם והערב.

ריצוף חדש במחומשים[1]

ב-11.8.2015 התפרסמה במדור המדעי של העיתון הבריטי *The Gardien* ידיעה בשם "Attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile".[2]

זהו משחק מילים מתוחכם (שלא ניתן לתרגמו לעברית) המיועד למשוך את קוראי העיתון הבריטיים לסנסציה הנוגעת, כביכול, למתקפה על הפנטגון בוושינגטון, על מנת שיקראו באותה הזדמנות על חדשה מתמטית הנוגעת לריצוף במחומשים...

1. תודתי נתונה לגלעד דיאמנט, הייטקיסט, בעל תואר בפיזיקה ומדעי המחשב ומחבר הספר "חשיבה חדה", על תרומתו להכנת חלק זה של המדור במהלך הכנת הבזק חדשות לחטיבה העליונה במסגרת פרויקט ההבזקים של "קשר חם".
2. Bellos, A. (2015, August 11). Attack on the pentagon results in discovery of new mathematical tile. The guardian. Retrieved from https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/aug/10/attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile

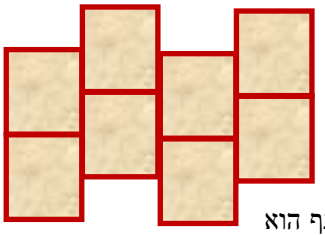
מה זה בעצם ריצוף?



איור 1

ריצוף, או הנחת אריחים (שווים או שונים) זה לצד זה ללא רווחים וללא חפיפה כלשהי, הוא נושא מרתק.

הריצוף הפשוט והמוכר ביותר שהיה מקובל בבתי מגורים בישראל עד לתקופה האחרונה הוא ריצוף באריחי מוזאיקה ריבועיים חופפים זה לזה שמידת הצלע שלהם היא 20 ס"מ, כך שהם מונחים קדקוד אל קדקוד וצלע אל צלע (בקיצור ק.ק.צ.צ.).

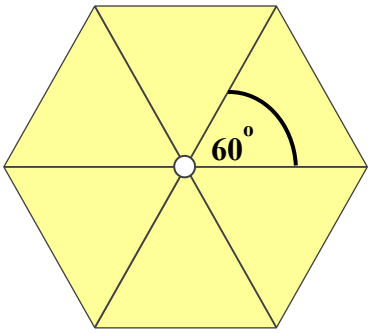


איור 2

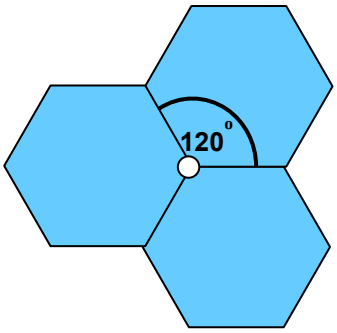
בשנים האחרונות מציעים יצרני האריחים עוד ועוד סוגים של ריצופים ריבועיים, אך הם נבדלים זה מזה רק בגודלו של האריח ובחומר ממנו הוא עשוי. לעתים מניחים אותם לא בשיטת ק.ק.צ.צ. אלא למשל כך:העיקרון המתמטי של ריצוף מונו-הדרלי (כלומר באריח יוצר אחד) בשיטת ק.ק.צ.צ, הוא שבכל קדקוד נפגשים אריחים חופפים אחדים, כך שסכום הזוויות סביב כל קדקוד משותף הוא 360 מעלות.

באילו אריחים ניתן לרצף?

היות והזווית הפנימית של משולש שווה צלעות היא בת 60 מעלות, משולש כזה יכול להיות "אריח יוצר" לריצוף פשוט על-ידי שישה משולשים חופפים כאלה שנפגשים בכל קדקוד (ראו איור 3). גם משושה משוכלל יכול להיות אריח יוצר לריצוף פשוט, שכן הזווית הפנימית של משושה משוכלל היא בת 120 מעלות ושלושה משושים משוכללים חופפים שנפגשים בקדקוד עומדים בתנאי ההכרחי והמספיק לריצוף (ראו איור 4).

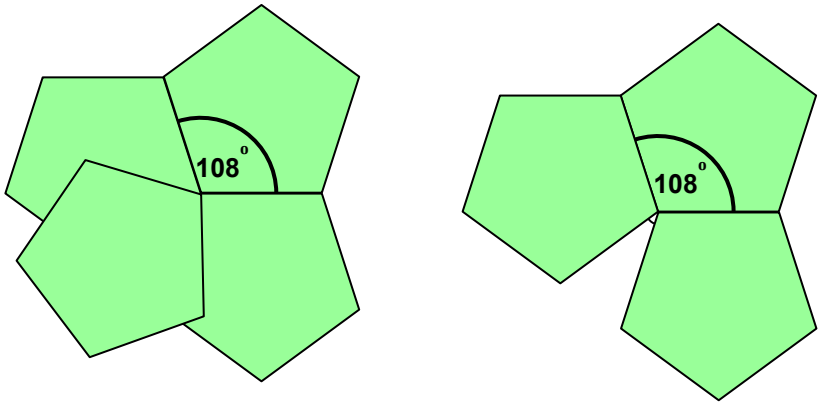


איור 3: שישה משולשים שווי צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף



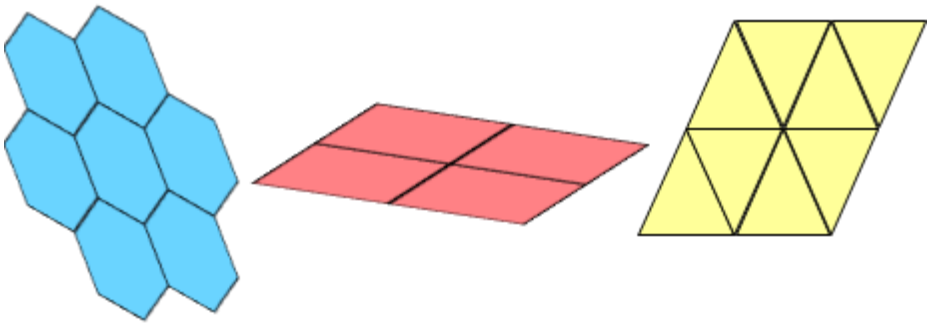
איור 4: שלושה משושים שווי צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף

אבל אי אפשר לרצף את המישור באריח יוצר בצורת מצולע משוכלל בעל 5 צלעות או 7 צלעות ומעלה, כיוון שהמספר המינימלי של מצולעים הנפגשים בקדקוד אחד לצורך ריצוף הוא שלושה, והחשבון מראה ששלושה מחומשים הנפגשים בקדקוד מותירים רווח (כי סכום הזוויות הוא 324 מעלות), ולארבעה אין די מקום סביב קדקוד משותף (סכום הזויות 432 מעלות, ראו איור 5). באשר למשובעים ומעלה גם שלושה הם יותר מדי.



איור 5: שלושה מחומשים משוכללים או ארבעה שנפגשים בקדקוד משותף אינם יוצרים ריצוף

השאלה שעולה באורח טבעידרך טבע היא האם יש אפשרות לרצף את המישור באריח יוצר קמור שאינו משוכלל? אם מבצעים טרנספורמציה של מתיחה-כיווץ או סיבוב על ריצוף מונו-הדרלי במשולשים שווי צלעות, בריבועים, או במשושים משוכללים, קל לראות שהסרת האילוץ של היות האריח היוצר משוכלל משאירה עדיין אפשרויות רבות לריצוף מונו-הדרלי במצולעים כאלה שאינם משוכללים (ראו דוגמה באיור 6).



איור 6: ריצוף במשולשים, מרובעים ומשושים שאינם משוכללים

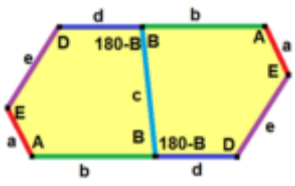
יתרה מזו, כל משולש יכול לשמש לריצוף מונו-הדרלי כי סכום הזוויות במשולש הוא 180°, והנחת משולשים זהים באופן הולם בקדקוד אחד יכולה לתת סכום של 360° סביב כל קדקוד. גם כל מרובע יכול לשמש כאריח יוצר מפני שסכום הזויות במרובע הוא 360° והנחת מרובעים בקדקוד באופן הולם נותנת את הנדרש לריצוף. משושים לא משוכללים הם קצת יותר בעיתיים. מתברר שיש רק שלושה משושים לא משוכללים שונים שבכל אחד מהם ניתן לרצף את המישור (לקבלת מידע מפורט, כדאי להפעיל את ההדגמה בגאוגברה כאן: http://tube.geogebra.org/student/m155779).

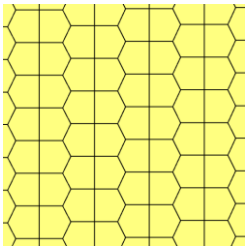
הסרת האילוץ הזה גם ממחומשים פותחת אף היא אפשרויות רבות. אולם במצולעים קמורים בעלי 7 צלעות ומעלה, גם אם אינם משוכללים, לא ניתן לרצף את המישור! (את ההוכחה לכך אפשר למצוא למשל בספרו המרתק של איבן ניבן[3] או בקישור:

(http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons#Tessellations_by_Convex_Polygons

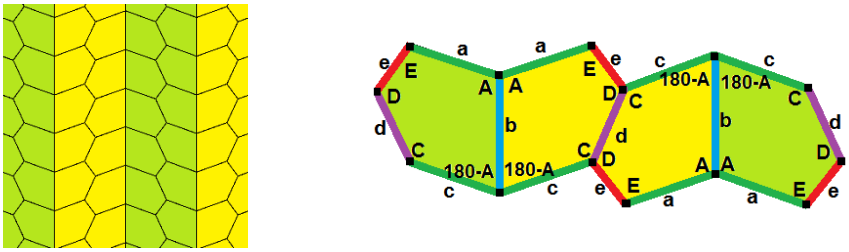
ריצוף מונו-הֶדרלי במחומשים לא משוכללים

בשנת 1918 גילה המתמטיקאי הגרמני קרל ריינהרדט (1895-1941) חמישה טיפוסים של מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור. כל טיפוס מאופיין על-ידי קבוצת תנאים החלים על המידות של הצלעות והזוויות או על הקשרים ביניהן. כל מחומש שעונה על קבוצת תנאים מסויימת שייך לאותו טיפוס. מרבית הטיפוסים מאפשרים מגוון של מחומשים שאינם בהכרח חופפים. לדוגמה, טיפוס מספר 1 (איור 7) דורש כי: A+D+E=360°; B+C=180° (באשר האותיות מציינות את חמש הזוויות הפנימיות כשהן מסומנות בזו אחר זו נגד כיוון השעון). באיור מוצגים שני מחומשים שונים מטיפוס 1. לאחד מהם יש תכונה נוספת של שוויון הצלעות a ו-c הסמוכות לקדקודי הזוויות A ו-C בהתאמה. לצדו של כל מחומש יוצר מופיע ריצוף בו. יצוין עוד כי מוצגים כאן ריצופים ק.ק.צ.צ אולם ניתן ליצור גם ריצופים שאינם שומרים על כך.[4]





3. Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
4. Wikipedia (2016). *Pentagonal tiling* [Images]. Retrieved from מתוך האיורים https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling



איור 7: שני מחומשים שונים מאותו טיפוס היוצרים ריצופים שנראים שונים אבל נחשבים לטיפוס אחד

בשנת 1968 פרסם המתמטיקאי האמריקאי ריצ'ארד קרשנר (1913-1982) מאמר שבו הוכיח את קיומם של שלושה טיפוסים נוספים של מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור. מרטין גרדנר כתב במדור הקבוע שלו בעיתון סיינטיפיק אמריקן בשנת 1975 תיאור של כל שמונה הסוגים מתוך הנחה שזוהי הרשימה המלאה, אבל קיבל הודעה מחובב שכינה את עצמו בשם ריצ'רד ג'יימס השלישי, שהוא מצא עוד טיפוס שלא כלול ביניהם. עוד בטרם יבשה הדיו מעל העדכון שפרסם גרדנר לקוראיו, הוא קיבל הודעה ממרג'ורי רייס, עקרת בית בעלת רקע מתמטי של בוגרת תיכון אך חובבת המקצוע, שגילתה עוד ארבעה סוגים. בשנת 1985 מצא רולף סטיין עוד מחומש קמור שיכול לרצף את המישור. 30 שנה עברו ונראה היה שזהו זה יש 14 טיפוסים ולא יותר. ואז למרבית ההפתעה, התגלה בקיץ 2015 טיפוס מספר 15 על-ידי שלושה אנשים: קייסי מן, ג'ניפר מקלאוד ודוד ון-דרו. אפשר למצוא את ההדגמות של כל 15 הסוגים אצל פג.[5] ולגמרי לא ברור שהרשימה כבר מלאה! ואפילו לא ברור שיש רק מספר סופי של ריצופים במחומשים.

האם אתם מזהים את הריצוף בכניסה לבית האיגוד האמריקני למתמטי?

משהו חדש על התנהגותם של המספרים הראשוניים ועוד חדשה פחות מפתיעה

מבין כל התכונות המפתיעות של המספרים הראשוניים, זאת שעושה אותם לשימושיים להצפנה, היא העובדה שאין קושי ליצור מכפלה של שני ראשוניים ולו גם גדולים מאוד ולקבל מספר פריק גדול מאוד, אבל קשה עד מאוד ובעצם בלתי אפשרי בזמן סביר, לפרק לגורמים מספר גדול מאוד שהוא מכפלה של שני ראשוניים גדולים. החיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים (שקיומם לבלי סוף הוכח מזמן, עוד על-ידי אוקלידס), קיבל מאז התגלית על יישומם להצפנה חשיבות מעל ומעבר לסיפוק הסקרנות של מתמטיקאים. המספר הראשוני הגדול ביותר שהתגלה עד מועד כתיבת שורות אלו הוא $2^{74,207,281}-1$ שהתגלה בינואר 2016 והוא בן 22,338,618 ספרות (להרחבה ראו מדור חדשות מתמטיות בגיליון 1

5. Pegg, E. Jr. (2009, May 13). Pentagon tilings. *Wolfram Demonstrations Project*. Retrieved from http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings

של כתב עת זה).

תדירות הופעתם של מספרים ראשוניים על פני ציר המספרים הממשי מוזרה ומעוררת תמיהה. מצד אחד אפשר לאתר מרווחים גדולים כרצוננו שאין בהם אף לא מספר ראשוני אחד, ומצד שני, תלויה ועומדת השערת המספרים התאומים שמן הסתם תוכח ביום מן הימים, לפיה אין סוף למספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 (עד היום, יש הוכחה להפרש סופי יותר גדול, שצמצומו ל-2 הוא האתגר).[6]

6. Wikipedia (2016). *Twin prime*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime

לא קיימת נוסחה שמפיקה אך ורק מספרים ראשוניים ותדירות הופעתם של המספרים הראשוניים נראית כאילו היא רנדומלית. האומנם?!? שני חוקרים מאוניברסיטת סטנפורד, רוברט אוליבר וקאנאן סאנדראראין, פרסמו בחודש מרץ 2016, כתבה בשם: 'הטיה בלתי צפויה בהתפלגות של מספרים ראשוניים עוקבים'.[7] כידוע, בהיותם אי-זוגיים (למעט 2) ולא מתחלקים ב-5 (למעט 5), המספרים הראשוניים פרט ל-2 ול-5 מסתיימים כולם באחת מארבע הספרות 1, 3, 7, 9. לכן, אילו הם היו מפוזרים באופן אקראי על פני ציר המספרים, אזי מספר ראשוני שמופיע מיד אחרי מספר ראשוני קטן ממנו המסתיים ב-1, היה גם הוא מסתיים ב-1 ב-25% מהמקרים. במילים אחרות, שני מספרים ראשוניים עוקבים היו מסתיימים בספרה 1, באחד ל-4 מקרים. אולם להפתעתם, שני החוקרים שבדקו את ביליון (1000 מיליון) המספרים הראשוניים הראשונים, מצאו שהראשוני הבא אחרי מספר ראשוני שמסתיים ב-1, מסתיים גם הוא ב-1 רק בכ-18% מהמקרים (כלומר בערך באחד מחמישה מקרים) ואילו ב-3 או ב-7 – בכ-30% מהמקרים וב-9 בכ-22% מהמקרים. אותו דבר נכון למספר ראשוני שמסתיים ב-3, 7, או 9, אבל בהטיה מעט קטנה יותר. כאמור, הכתבה פורסמה בבמה שבה מתמטיקאים מפרסמים תוצאות שהם מעמידים לידיעת עמיתיהם לבדיקה לפני שהם שולחים אותן לפרסום בעיתונות המקצועית. אבל מתברר שמתמטיקאים רבים עטו על הרעיון ובודקים עוד ועוד מקרים. לא ברור אם לממצאים האלה עשויים להיות שימושים או השלכות על ההצפנה המודרנית, אבל הסקרנות בוערת במתמטיקאים ויש להניח שלא יעבור זמן רב עד שהדברים יתבהרו.[8]

סוף סוף פרס לאנדרו וויילס על הוכחת השערת פרמה

אנדרו וויילס היה ילד בן עשר כשגילה (בשנת 1963) שמאות בשנים תלויה ועומדת השערה מתמטית פשוטה וקלה להבנה, שאף לא אחד מהמתמטיקאים יכול להוכיח ואף לא להפריך אותה, והבטיח לעצמו – אני אגדל להיות מתמטיקאי ואוכיח אותה. הוא אכן גדל להיות מתמטיקאי ואף הוכיח שלא קיים פתרון שלם>2 למשוואה $x^n + y^n = z^n$ עבור x, y, z ממשיים. הוכחת ההשערה, שנודעה במשך כ-400 שנה בשם "המשפט האחרון של פרמה", אף כי פרמה לא השאיר הוכחה לכך, לא זיכתה את אנדרו וויילס במדליית פילדס היוקרתית, מפני שזו ניתנת למתמטיקאי שהישגיו הוכרו לפני שמלאו לו 40 שנה. אבל אנדרו היה בן 41 כשהצליח לתקן את הטעות האחרונה שהתגלתה בהוכחה שלו, וזה היה בשנת 1994.

יום לאחר יום הפאי של שנת 2016 התבשרנו כי הזוכה בפרס אבל (Abel), הפרס הנחשב לפרס נובל של המתמטיקה לשנת 2016, הוא אנדרו וויילס.[9] אנדרו וויילס התמיד בעבודתו על פתרון הבעיה שנים רבות (חלק ניכר במסתרים!) שלא על מנת לקבל פרס, כמובן, אבל כל הקהילייה המתמטית התרגשה

7. Oliver, R. J. L., & Soundararajan, K. (2016, May 30). *Unexpected biases in the distribution of consecutive primes*. Retrieved from http://web.stanford.edu/~rjlo/papers/16-primebias.pdf
8. Rathi, A. (2016, March 15). *Mathematicians are geeking out about a bizarre discovery in prime numbers*. Retrieved from http://qz.com/639452/mathematicians-are-geeking-out-about-a-bizarre-discovery-in-prime-numbers/
9. Fermat's last theorem mathematician Andrew Wiles wins Abel prize. (2016, March 15). *New Scientist*. Retrieved from https://www.newscientist.com/article/2080689-fermats-last-theorem-mathematician-andrew-wiles-wins-abel-prize/

יחד אתו מהידיעה על זכייתו. על האירוע ב-24.5.2016 באוסלו תוכלו לקרוא כאן:
http://www.abelprize.no/seksjon/vis.html?tid=67109



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את "**קשר חם**" - מרכז מו"פ ל**קי**דום **שי**פור ו**ריענון ה**חינוך **המ**תמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמתיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.

הקדמה:
למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

מבוא

העניין שמביעים אנשי חינוך מתמטי בתקשורת האנושית הולך וגדל בשנים האחרונות. כיום אחד המוקדים המרכזיים של מחקר בחינוך מתמטי הוא תקשורת בכיתה. יש הרואים בתקשורת זו חלון לתהליכי חשיבה ויש הרואים בה "שקולה" לחשיבה. ספרד (Sfard, 2008) רואה בחשיבה תקשורת של האדם עם עצמו. כדי להדגיש את המשותף לתקשורת ולחשיבה היא הציעה להמשיג את שתיהן במילה אחת: "קומוגניציה" (commognition) המבטאת את האיחוד שבין קוגניציה לתקשורת (cognition & communication).

בספרה שהתפרסם בשנת 2008, ספרד מפרטת את הגישה הסוציו-תרבותית הקומוגניטיבית שפיתחה. ששת המאמרים המופיעים בגיליון זה, למרות השונות הגדולה ביניהם, חולקים גישה מושגית ומחקרית אחת – התאוריה הקומוגניטיבית. תובנות ממחקר קומוגניטיבי המתמקד במספר היבטים שונים של למידת מתמטיקה והוראתה פורסמו בשנת 2012 בכתב העת "The International Journal of Educational Research" (Sfard, 2012) ובשנת 2016 בכתב העת "Educational Studies in Mathematics" (Tabach & Nachlieli, 2016). בגיליון זה מאוגדת לראשונה אסופת המאמרים ה"קומוגניטיביים" בעברית.

על-פי הגישה הקומוגניטיבית, למידת מתמטיקה מוגדרת כשינוי בשיח המתמטי של הלומד כלומר, בדרכים שבהן היחיד מתקשר באשר למתמטיקה. ההתייחסות לכיתה כאל קהילת לומדים (community of practice, Lave & Wenger, 1991) שבה המורה משתתף מומחה והתלמידים משתתפים באופן פריפריאלי יותר, מציעה שלמידה היא תהליך שבאמצעותו תלמידים הופכים למשתתפים מרכזיים יותר בשיח. בפרט, התלמידים לומדים להכיר דרכים מקובלות לעשייה ולתקשורת הייחודים למתמטיקה.

תקשורת היא מרכזית לא רק לתהליכי הוראה ולמידה בכיתה אלא גם למחקר. לאחרונה אנו עדים

לפריחה של גישות תאורטיות בחינוך המתמטי. חוקרים העובדים עם גישות תאורטיות שונות מפתחים דרכים ייחודיות לתקשר בתוך קבוצות המחקר שלהם. לכן, תקשורת בין חוקרים הפועלים עם גישות מחקריות מגוונות הופכת לתובענית, והסתמכות על מחקרים קודמים היא מאתגרת. דבר זה פוגע בקידום מחקר קוהרנטי בחינוך המתמטי (למשל Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008). דרך אפשרית להתמודד עם מצב זה היא אימוץ של גישה מחקרית המגדירה הגדרה מפורשת וברורה את נושאי המחקר (כמו למידה, חשיבה ותקשורת), ואשר מאפשרת דיון בהיבטים למיניהם של הוראה ולמידה. אנו טוענות כי קומוגניציה היא מועמדת מתאימה לכך.

נפתח הקדמה זו עם הצגה קצרה של העקרונות המרכזיים של הגישה הקומוגניטיבית, ונתמקד בעיקר בלמידה ובהוראה. לאחר מכן נדגיש היבטים ספציפיים של כל אחד מהמאמרים בגיליון ונסיים בתיאור של רשת הקשרים ביניהם.

למידה בהסתכלות קומוגניטיבית: עקרונות מרכזיים

על-פי הגישה הקומוגניטיבית, מתמטיקה, ככל דיסציפלינה אחרת, היא סוג של שיח הכולל דרכים ייחודיות לדיבור ולעשייה. שיח מוגדר כסוג מיוחד של תקשורת. אפשר לאפיין את השיח המתמטי (כמו גם כל שיח אחר) בעזרת ארבעה מאפיינים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, רוטינות (שגרות) והיגדים מקובלים.

מילים והשימוש בהן

לכל שיח יש אוצר מילים הייחודי לו. עם זאת, לעתים בשיחים משיחים שונים משתמשים במילים דומות בדרכים שונות. כך למשל, במילה *חצי* משתמשים בשיח היומיומי כחלק שהוא תוצאה מחלוקת השלם לשני חלקים כלשהם. לעומת זאת, בשיח הכמותי-מספרי *חצי* הוא חלק אחד שהוא תוצאה מחלוקת השלם לשני חלקים *שווים*.

מתווכים ויזואליים (visual mediators)

מתמטיקה עוסקת ברעיונות מופשטים אשר לעתים יש להם ייצוג פיזי בעולמנו.[1] לפיכך כדי שנוכל לתקשר בזיקה לרעיונות אלה יש צורך במימושם בעזרת ישויות אשר כלפיהם אפשר לתקשר. מימושים אלה הם מתווכים ויזואליים. למעשה, פעמים רבות תקשורת מתמטית היא סביב מתווכים אלה. לדוגמה, מתווכים ויזואליים לצמד המילים 'שלושה רבעים' הם: ¾, 0.75,  .

1. למעשה, הקומוגניציה הופכת את הסדר ההתפתחותי המסורתי ובמקום לטעון שהרעיונות המופשטים קודמים לייצוגיהם הפיזיים (המתווכים הוויזואליים), היא גורסת שהרעיונות המופשטים, לרבות עצמים מתמטיים כמו מספר או פונקציה, הם תולדה של אבחנה בשקילות של מערכות סימנים מגוונות, כגון גרפים ותבניות אלגבריות.

היגדים מקובלים (endorsed narratives)

אלה רצפים של משפטים הנחשבים יחד כמתארים עצמים, קשרים בין עצמים או בין תהליכים, שאותם אפשר לקבל כנכונים או לדחותם. האופן שהיגד מתקבל כפוף לכללי השיח המתמטיים. כך למשל, כל משפט, הגדרה או הוכחה מתמטיים הם דוגמאות להיגד מקובל. הנה דוגמה לאחד ההיגדים המתמטיים המקובלים "קוטר הוא מיתר במעגל". במאמרן של אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח בגיליון זה מדובר על התהליך לקבלת היגד זה כמקובל על-ידי תלמידי כיתה ו.

רוטינות (routines)

אלה הם דפוסים טיפוסיים החוזרים על עצמם כתגובה לסיטואציה מוכרת. יש דפוסים שאותם אפשר לראות כמעט בכל היבט של השיח המתמטי: בדרכים של מיון, בדרכים של זיהוי סיטואציה כ"אותו דבר" או כשונה ועוד. ספרד ולביא (Sfard & Lavie, 2005) מבחינות במאמרן בין רוטינות של מעשה (deed) אשר הפעלתן מחוללות שינוי מסוים בסביבה, כמו הזזה של עצמים מוחשיים, ובין רוטינות של שיח (רוטינות דיסקורסיביות). מבין רוטינות השיח הן דנות ברוטינות של ריטואל(rituals) וברוטינות חקירה (exploration). רוטינות שיח אלה שבהן אפשר להבחין במהלך פעילות של תקשורת, נבדלות זו מזו לפי מידת עצמאותו של המבצע, רוטינות הריטואל והחקירה נמצאות בשני קצותיו של הרצף: ריטואל מתאפיין בתלות כמעט מוחלטת של המבצע במומחה – היא מתבצעת ביוזמתו של אדם אחר ובזמן ביצועה כמעט שלא נדרשת קבלת החלטות של המבצע. לעומתה, רוטינת החקירה מתאפיינת במידה רבה של עצמאות מצד המבצע ובהיעדר צורך בתיווך של מומחה. רוטינות של ריטואל קשורות לעשייה (או לרצייה) חברתית, ובהן פעולות של סולידריות עם משתתפי השיח האחרים. לעומתן, ברוטינות של חקירה יש פיתוח היגדים מתמטיים מקובלים שהם פיתוח השיח המתמטי של הלומד. לשלושת סוגי הרוטינות יש תפקיד בהתפתחות השיח המתמטי של היחיד.

ספרד ולביא (Sfard & Lavie, 2005) מתארות מאפיינים של רוטינות של עשייה, רוטינות של ריטואל ושל חקירה. אחד הקריטריונים שהן מתארות הוא "מי מבצע את הרוטינה?". בעוד שבריטואל נדרשת עשייה משותפת של היחיד עם אחרים (ובפרט עם מומחה), שכן היחיד זקוק לתיווך, בביצוע רוטינה של חקירה המבצע משוחרר מתלות בתיווך. ויגוצקי (Vygotsky, 1978) טען כי כל עשייה אנושית מופיעה בשני מישורים נפרדים, ראשיתו במישור החברתי, ובשלב הבא, לאחר תהליך שהוא מכנה "אינדיבידואליזציה", במישור האישי:

> Any function in the child's cultural development appears twice, or on two planes. […] First it appears between two people as an interpsychological category, and then within the child as an intrapsychological category." (ibid, p. 57).

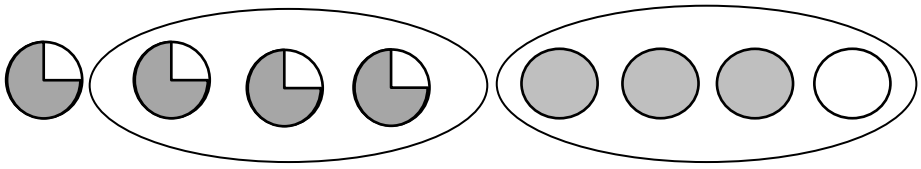
אותו רצף של פעולות המתבצע על-ידי לומדים מלומדים שונים עשוי להיחשב בעיני החוקרים רוטינה של עשייה, ריטואל או אף רוטינת חקר. כדי לזהות את סוג השתתפות התלמידים מוטל על החוקרים לבחון את מידת עצמאותו של הלומד בביצוע אותן פעולות, ובעיקר, האם הלומד יוזם את ביצוע הרוטינה

בעצמו כדי לענות על צרכיו הוא, וזאת בשונה מביצועים היזומים על-ידי אנשים אחרים. למשל, האם מטרתו היא לארגן מחדש אוסף של עצמים מוחשיים? האם מטרתו היא לחקות סדרה של שלבים שביצע המורה או לאמץ היגד מתמטי שיספק את סקרנותו?

דוגמאות לרוטינות של מעשה ורוטינות של ריטואל אפשר למצוא במאמרן של עירית לביא ואנה ספרד בגיליון זה. במאמר הנוכחי החוקרות מתארות את תהליך התפתחות השיח הכמותי-מספרי של ילד צעיר כתהליך האחדה והרחבה של השיח הכמותי-לא מספרי והשיח המספרי-לא כמותי שלו. בתהליך זה כלולים ביצוע רוטינות של עשייה ולאחר מכן רוטינות של ריטואל וחקירה. בנוסף לכך, במאמרה של עינת הד-מצויינים מתואר תהליך למידה-הוראה של תלמידה המתקשה בלימוד שברים. החוקרת דנה בהשתתפות הריטואלית של הלומדת, בהזדמנויות להשתתפות זו שיצרה למענה המורה, ובהזדמנויות המעטות שניתנו לתלמידה להשתתפות חקירתית.

כפי שהוזכר לעיל, בגישה מחקרית זו למידה כוללת שינוי הדרגתי בתפקידו של הלומד מזה של משתתף שולי (peripheral) בשיח המתמטי למשתתף מרכזי יותר (Lave & Wenger, 1991). מעבר זה הוא תוצאה של שינוי בשיח של היחיד. במילים אחרות, מבחינה מחקרית זיהוי עדויות ללמידה בגישה הקומוגניטיבית כולל חיפוש אחר שינוי באחד ממאפייני השיח לפחות: בשימוש של היחיד במילים ובמתווכים הוויזואליים, בהיגדים המתמטיים וברוטינות שבהן הוא משתמש.

ספרד (Sfard, 2008) מבחינה בין שני סוגים של למידה – למידה ברמת האובייקט ולמידה ברמת-על. למידה ברמת האובייקט כוללת הרחבה של אוסף סיפורים ("עובדות") על אובייקט מתמטי ידוע. היא מתבצעת בתוך השיח שסובב על אובייקט מתמטי זה. למשל, בזמן הלימוד בנושא שברים, קבלת שלושת המתווכים הבאים כשקולים כוללת הרחבה (ברמת האובייקט) של השיח על שברים של הלומד:



איור 1: מתווכים ויזואליים לשבר שלושה רבעים[2]

לעומת זאת, למידה ברמת-על כוללת שינוי בשיח עצמו, ובמיוחד בכללי-העל שלו. זה קורה למשל כאשר הלומד מכיר שיח שחדש לו, או כאשר שיחים שעד כה היו נפרדים מתאגדים לשיח כולל אחד. אם נחזור לנושא של שברים ניווכח שהאיגוד של השיח על סמלים (כמו: ¾ , 0.75), עם השיח על מתווכים ויזואליים (כמו אלה המוצגים באיור 1), הוא למידה ברמת-על. דוגמאות נוספות ללמידה ברמת-על אפשר לראות במאמר של אביטל אלבוים-כהן על קריאת טקסטים מתמטיים ובמאמרנו על למידת

2. בדוגמה האמצעית, השלם כולל שלושה "עיגולים". לפיכך אם היינו מחלקים כל עיגול לארבעה חלקים שווים היינו מקבלים בסך הכול 12 חלקים שווים. לפיכך החלקים האפורים שכוללים 9 מתוך 12 חלקים, הם שלושה רבעים מהשלם.

פונקציות המופיעים בגיליון זה.

הוראה בהסתכלות קומוגניטיבית: עקרונות מרכזיים

הוראה אינה מוגדרת הגדרה מפורשת בגישה הקומוגניטיבית. בן-צבי וספרד (Ben-Zvi & Sfard, 2007) דנו בהוראה לקראת למידה ברמת-על. הוראה מתרחשת כאשר בסיטואציה מסוימת המשתתפים בשיח תמימי דעים ביניהם באשר לשלושה היבטים בסיסיים של התקשורת לפחות: בדבר הקביעה מהו השיח המוביל, בדבר התפקידים של כל אחד מהמשתתפים בשיח – מיהו המלמד (המקבל על עצמו את הסמכות לקבוע שיח חדש), ומיהו הלומד (הבוחר להשתתף בשיח זה גם אם עדיין לא ברור לו ההיגיון באימוץ השיח), ובדבר אופי השינוי המצופה בשיח של הלומדים.

בהמשך ראינו הסכמות אלה כמתאימות להוראה בכלליות (ולא רק ברמת-על). ניסחנו הגדרה שקובעת כי פדגוג (מורה או מרצה) הוא פרט המקבל את התפקיד של המשתתף *המוביל* בשיח, בעוד הלומד הוא האדם המקבל את התפקיד של *המוּבל* בשיח (Nachlieli & Tabach, 2015). ואכן, הגדרה זו עולה בקנה אחד עם האטימולוגיה היוונית לפדגוג שהיא "האדם המוביל את הילד" (ויקיפדיה, 2016). במובן זה פדגוגיה או הוראה היא סוג מסוים של תקשורת, ותקשורת היא סוג מסוים של פעילות. אם נעסוק בכך דרך העדשה של תאוריית הפעילות – Cultural Historical Activity Theory (Engeström, 1987; Roth & Lee, 2007), הרי שההבחנה המרכזית שעשויה לאפיין פעילות מסוימת כפדגוגיה היא המניע לפעילות. רוט ורדפורד (Roth & Radford, 2011) ציטטו את לאונטיב:

> "The chief difference in activities is to be found in the difference of their objects or motives. An object/motive (fishing, for instance) is what endows the activity with a particular intent. But activities involve also actions and specific contextual methods and means to carry out these operations." (ibid, p. 6).

משילוב בין תאוריית הפעילות והתאוריה הקומוגניטיבית עולה כי אפשר להגדיר הוראה בתור פעילות תקשורתית המונעת מהרצון של היחיד לשנות את השיח של הלומד לכיוון של השיח המוביל. כך לדוגמה, אביטל אלבוים-כהן, בהיותה חוקרת ומורה, מציגה במאמרה את תפקידה ליצור הזדמנויות למידה שעשויות להביא לידי שינוי בשיח של לומדיה לכיוון הרצוי מבחינתה. דוגמה נוספת אפשר לקרוא במאמרן של ענאבוסי וטבח שבו מתואר שהמורה פועלת כדי לעזור לתלמידיה לשנות את השיח שלהם בנוגע למעגל, כך שיהיה דומה יותר לשיח המקובל בקרב מתמטיקאים.

המאמרים בגיליון זה

בגיליון זה שישה מאמרים מחקריים ומאמר תגובה, והם שונים זה מזה במיקוד ובמטרות, במשתתפים במחקר, בסביבה המחקרית ובנושא המתמטי. עם זאת, לכולם גישה מחקרית משותפת – הגישה הקומוגניטיבית.

מיקוד ומטרות

כל המאמרים בגיליון מאירים היבטים מגוונים באשר ללמידת המתמטיקה והוראתה. עם זאת, התהליכים וההיבטים שהם מתמקדים בהם, שונים זה מזה. שלושת המאמרים הראשונים בגיליון מתמקדים בלמידה ואילו שלושת האחרונים בהוראה. עירית לביא ואנה ספרד כותבות על התפתחות השיח הכמותי-מספרי של ילדים בגיל הצעיר. שי כספי מתמקד בתהליך התפתחות השיח המטה-אריתמטי (האלגברי) בין כיתה ה' לכיתה ז', בקרב תלמידים שטרם למדו אלגברה בית ספרית באופן פורמלי. המאמר של טלי נחליאלי ומיכל טבח עוסק בהתפתחות השיח על פונקציות בקרב סטודנטיות במהלך הכשרתן להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח מכוונות לפעולות ההוראה של מורה לכיתה ו' בנוגע להוראת המעגל. עינת הד-מצויינים עוסקת בתהליך התפתחות הזהות של תלמידה כתלמידה "מתקשה", ועל התפקיד שיש לתקשורת (ולאופי התקשורת) שבין המורה לתלמידה ביצירת הזהות הזו. אביטל אלבוים-כהן עסקה גם היא בתפקידה של המורה, ומאמרה מכוון לתהליך שינוי כללי-על של השיח המתמטי בקרב תלמידים שלומדים לקרוא טקסטים מתמטיים.

הסביבה המחקרית והמשתתפים

המחקרים למיניהם התבצעו בסביבות מחקריות לסוגיהן ועם משתתפים בגילאים מגוונים ובמערכות שונות. ארבעה מחקרים נערכו מחוץ לכיתה בידי פדגוג (בתפקיד של מראיין או מורה). אחד מהם מתאר עבודה עם לומד יחיד: במאמרן של לביא וספרד מתואר שעירית לביא ראיינה במשך כשנתיים ילד אחד בהיותו בין גיל שנתיים לארבע. לעומתם, שלושה מחקרים אחרים מתארים עבודה עם קבוצה: שי כספי ראיין זוגות של תלמידים הלומדים בכיתה ה', וכן של תלמידים הלומדים בכיתה ז'. במאמרה של הד-מצויינים מדווח שעינת הייתה המורה של דנה, שהייתה תלמידת כיתה ז', בעת עבודה קבוצתית, ואילו אביטל אלבוים-כהן עבדה עם קבוצה של שלושה תלמידי כיתה י"ב שלמדו מתמטיקה בהיקף של 5 יח"ל. שני מחקרים אחרים נעשו בתוך הכיתה. נחליאלי וטבח התמקדו בתהליכי למידה של סטודנטיות להוראה במשך עבודתן בקבוצות ואילו ענאבוסי וטבח התמקדו בדיון במליאה בכיתה ו'.

עתה נדון בששת המאמרים שבגיליון זה על-פי שני צירים: האחד נוגע לאופי הלמידה המתואר במאמר – למידה ברמת אובייקט לעומת למידה ברמת-על, והאחר נוגע לסוגיה של מידת תלות הלומדים בבן שיח מומחה ובתיווך שלו. נשאלת השאלה האם הם השתחררו מתלות זו, כלומר, האם הלומדים פועלים בשיטת רוטינות של עשייה, רוטינות של ריטואל או רוטינות של חקירה.

במאמרן של לביא וספרד מתואר תהליך, שבו הילד מאחד בהדרגה בין שני שיחים – הכמותי והמספרי לשיח כמותי-מספרי. זוהי עדות ללמידה ברמת-על. למידה זו נעשית על-ידי האחדה בהדרגה של שלוש רוטינות שונות מהשיח הכמותי: הרוטינה של *הבט-ובחר*, זו של *סדר-ובחר* וזו של *התאם-ובחר* – כולן בוצעו כרוטינות של ריטואל. בתהליך האחדה זה, שבו הילד למד לקבל רוטינות אלה כשקולות, הן התאחדו גם עם הרוטינה הריטואלית של *ספור-ובחר*, השייכת לשיח המספרי. ההתמקדות של החוקרות בתהליך למידה של ילד צעיר מאפשרת לנו להבין את המניע החברתי של רוטינת הריטואל. נסביר: נראה

שהמניע לפעילותו של הילד במשימות השונות היה חברתי הן מבחינת הבעת סולידריות עם המומחית (החוקרת) והן מבחינת החיקוי, תלות מוחלטת בתיווך צמוד של המומחה. עם הזמן נראה שתלותו בחוקרת הן מפאת רצונו לרצותה והן בשל הצורך שלו בתיווך, פחתו (או לפחות – השתנו).

לעומת זאת, במחקרו של כספי באשר להתפתחות השיח האלגברי של תלמידים בכיתות ה' או ז', החיבור בין שני הגורמים הקשורים למניע החברתי – ריצוי המומחה מחד גיסא והתלות בתיווך מאידך גיסא, אינו ברור. שי כספי עוקב מקרוב אחר תהליך העיצום (objectification). ספרד (Sfard, 2016) רואה את תהליך העיצום בתור מדרגה הכרחית במעבר מהפעלת רוטינה של ריטואל לרוטינה של חקירה. שי גורס שבתהליך העיצום יש שלוש רמות: הרמה התהליכית, הרמה המגורענת והרמה המעוצמת. נראה שפעולותיהם של הלומדים סביב המשימות שנתן להם כספי הן בעיקר חקירתיות באשר לשיח האריתמטי שמתפתח בהדרגה לשיח מטה-אריתמטי ספונטני ולבסוף לשיח אלגברי פורמלי. התפתחות זו היא למידה ברמת-על.

אביטל אלבוים-כהן בוחנת במאמרה את התפתחות השיח של תלמידים באשר לקריאת טקסטים מתמטיים. היא חושפת את תלמידיה לרוטינות שמטרתן להגדיל את אחריותו של התלמיד ליצירת פרשנות קוהרנטית לטקסט שהוא קורא. בשלבים הראשונים התלמידים אינם רגילים לפעולה זו מלימודי המתמטיקה הקודמים שלהם. לפיכך נראה שבשלבים הראשונים הם מבצעים רוטינות אלה באופן ריטואלי: הם זקוקים לתיווך צמוד של המורה ומחקים את פעולותיה. מטרת המורה החוקרת היא להפוך הליכים אלה לחקירתיים יותר על-ידי הפחתת הצורך בתיווך. הלמידה המיועדת היא למידה ברמת-על הכוללת כללי שיח חדשים.

שלושת המאמרים האחרים מתמקדים בהוראה. כאן נדון באופי הלמידה המיועדת לתלמידים: למידה ברמת אובייקט או למידה ברמת-על, וכן לתהליך האינדיבידואליזציה המצופה מהלומדים, ובפרט האם התלמידים אמורים לבצע רוטינות של עשייה, רוטינות של ריטואל או רוטינות של חקירה.

במאמרנו (נחליאלי וטבח) המשתתפים במחקר הם סטודנטים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, אשר למדו פונקציות בעבר. לפיכך הציפייה שלנו הייתה שהלמידה שלהם את נושא הפונקציות תהיה ברמת-עצמים (שלא ילמדו כללי שיח חדשים), וכן שההשתתפות של הסטודנטים תהיה בעיקר חקירתית. בפועל, כפי שתואר במאמר, מאחר שהנושא של "זיהוי באמצעות הגדרה" היה מרכזי, הרי שהשיח שבו השתתפו הסטודנטים היה שיח על מתמטיקה, כלומר, השיח היהברמת-על. מכאן שבקרב רוב הסטודנטים ההשתתפות הייתה ברמת-על. עם זאת, בעוד חלק מהם אכן למד למידה ברמת-על, באשר לאחרים לא היה מדובר בלמידה שכן הנושא היה מוכר. במאמר אפשר למצוא עדויות שהסטודנטים ביצעו רוטינות שהן ריטואליות יותר ורוטינות שהן חקירתיות יותר.

במאמרן של ענאבוסי וטבח יש עדות ללמידה ברמת-עצמים בקרב תלמידי כיתה ו' בנושא קוטר ומיתר במעגל ובקשר לפעילות שהיא ריטואלית יותר. התלמידים אמורים להמשיך לפתח את הנרטיבים שלהם באשר לעצמים המוכרים להם: מעגל, קוטר ומיתר על-ידי דיון מפורש במקרי קצה (למשל: האם קוטר הוא גם מיתר? האם יש מיתר שהוא קוטר?). אחד הממצאים המרכזיים המוצגים במאמר הוא שהמורה

שואלת בעיקר שאלות מכוונות. שאלות כאלה אינן מעודדות השתתפות חקירתית של התלמידים אלא תגובות שהן ריטואליות יותר, וזו ההשתתפות שמתוארת בדוגמאות המגוונות.

מאמרה של עינת הד-מצויינים מציג עדות להשתתפות ריטואלית של תלמידת כיתה ז', כזו שהביאה אותה לידי הישגים נמוכים במיוחד בבית הספר. השתתפות זו עולה בקנה אחד עם ההזדמנויות ללמידה שזומנו לה הן בבית הספר והן על-ידי המורה במרכז הלמידה. במאמר זה אנו עדים להתאמה בין הדרך שבה זיהתה התלמידה את עצמה כלומדת מתמטיקה, הדרך שבה מָסַפרים משמעותיים (כולל המורה, המשפחה וגורמים בבית הספר) זיהו את התלמידה, ומכאן הזדמנויות הלמידה שזומנו לה והדרך שבה הגיבה התלמידה על ההזדמנויות הללו.

לסיום, הנתונים המתוארים במרבית המחקרים המופיעים בגיליון זה הם במקורם בעברית, למעט הנתונים במאמרן של ענאבוסי וטבח שהם בערבית. לפיכך היות המחקרים כולם מכוונים לתקשורת וכתובים בעברית, מאפשר לחוקרים לגעת בנתונים כפי שהם ישירות ולא מתורגמים. יתרה מכך, קריאת ששת המאמרים מזמנת לקורא חשיפה להיבטים מהיבטים שונים של הוראת המתמטיקה ולמידתה שבוצעו בגישה תאורטית אחת. היבטים כאלה נחקרים בדרך כלל בעזרת גישות תאורטיות שונות אשר אינן בהכרח קוהרנטיות. הגישה המחקרית המשותפת מאפשרת לקורא להתבונן בהיבטים המגוונים מבעד לעולם מושגי אחד, וכך ליצור קשרים הן בין התופעות השונות שנחקרו והן בין התובנות העולות ממחקרים אלה. בנוסף לכך, בחינה של מחקרים שונים ומגוונים הנעשים בגישה משותפת היא הזדמנות להעמקה בגישה התאורטית עצמה.

אנו מקוות כי הקריאה של הגיליון תהיה מעוררת השראה.

רשימת מקורות

ויקיפדיה (2016). פדגוגיה. אוחזר מתוך פדגוגיה/https://he.wikipedia.org/wiki

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings and the learners autonomy. *Education & Didactique*, *1*(3), 117-134.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding.* Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2015). The discursive routine of personifying and its manifestation by two instructors. *CERME 9 – Ninth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 1447-1453). Prague, Czech Republic.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40*(2), 165-178.

Roth, W. M., & Lee, Y. J. (2007). "Vygotsky's neglected legacy": Cultural-historical activity theory. *Review of Educational Research*, *77*(2), 186-232.

Roth, W. M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and*

learning.Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (Ed.). (2012). Developing mathematical discourse – Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52*(3).

Sfard, A. (2016, July). *On the need for theory of mathematics learning and the promise of "commongnition"*. Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, *23*(2), 237-309.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (Eds.). (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 299-306.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge: Harvard University Press.



ד"ר טלי נחליאלי

ראש התכנית "הוראה ולמידה" לתואר שני במכללת לוינסקי לחינוך וראש תכנית "דלתא" להכשרת מורים מצטיינים למתמטיקה ומדעים. תחומי המחקר שלה מתמקדים בשיח המתמטי המתפתח בשיעורי המתמטיקה, וכן בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.



פרופ' מיכל טבח

חברת סגל בכיר באוניברסיטת תל אביב בחוג לחינוך מתמטי מדעי וטכנולוגי. במחקריה היא עוסקת בין השאר בסוגיות העולות כתוצאה משילוב טכנולוגיה בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובהתפשטות ידע מתמטי בכיתה. מיכל חוקרת באמצעות גישת המחקר התקשורתית לה מוקדש גיליון מיוחד זה מזה כעשור.

עצמים מדיבורים: כיצד ילדים קטנים יוצרים מספרים בתוך שיח

עירית לביא ואנה ספרד, אוניברסיטת חיפה

תקציר

המחקר המתואר במאמר זה הוא חלק של הפרויקט המתמשך שלנו המוקדש לשאלה **כיצד צומחת ומתפתחת חשיבה מספרית של ילדים?** אמנם הנושא נחקר כבר רבות, אולם הגישה התאורטית המיוחדת שהתחלנו לפתח לפני קרוב לשני עשורים מביאה עמה תובנות חדשות. לפי גישה זאת, הנקראת קומוגניטיבית, חשיבה היא תקשורת עצמית ומספרים הם מבנים דיסקורסיביים הנולדים ומתפתחים בתוך שיח. במאמר זה לאחר סקירה קצרה של התאוריה, אנו מציגות אחדות מהאבחנות שהגענו אליהן בסבב הנוכחי של הפרויקט. אנו מתמקדות בנתונים שאספנו במשך 18 חודשים במעקב אחר ילד בשם מעיין שהיה בן שנתיים ושמונה חודשים בתחילת המחקר. הניתוח שלנו, שבו אנו בוחנות את התפתחות תשובתו הרוטינית של מעיין לשאלה "איפה יש יותר?", מראה כי השיח המספרי הלא-כמותי והשיח הכמותי הלא-מספרי של ילד הגדל בחברתנו הם בהתחלה נפרדים, והם צומחים במקביל בעקבות חיקויים שעושה הלומד לרוטינות מספריות של בן-שיח מומחה. תחילה, ישנו קשר אסוציאטיבי בלבד בין ההליכים השונים שהוא מבצע בתגובה לשאלה. דפוסים דיסקורסיביים אלה, המתפתחים בתוך ה"חממה" של אינטראקציות בין-אישיות, מתאחדים בהמשך בהדרגה למארג רוטינות וביטויים מקובלים מקושר היטב, ובו כל היגד מספרי נחשב גם לכמותי. הנתונים שאספנו הובילו לתמונה מפורטת למדי של תהליך זה.

מילות מפתח: שיח; מחקר קומוגניטיבי; רוטינה; מעשה; ריטואל; חקירה; תקדים.

מבוא

כיצד נולדת ומתפתחת חשיבה מספרית של ילדים? שאלה זאת עומדת במרכזו של הפרויקט המחקרי רב-השנים שאת חלקו החדש ביותר נציג במאמר זה.

לא מדובר, כמובן, בנושא חדש. אדרבא, חשיבה מספרית מוקדמת היא חביבת החוקרים לפחות מאז שג'אן פיאז'ה שם אותה במרכז מחקרו (Piaget, 1952). תורתו של פיאז'ה הפכה לקרקע פורייה לחקר החשיבה המספרית. הרים של ספרות בנושא נערמו בעשרות השנים שעברו מאז. עם זאת, ההמשגה המיוחדת של חשיבה ולמידה שאומצה על-ידינו, והיא שונה מזו של פיאז'ה, מביאה עמה תובנות חדשות.

לאחרונה נכנס המחקר שלנו על חשיבה מספרית להילוך גבוה, והוא שואב השראה ועידוד מהאבחנות שכבר הספקנו להגיע אליהן תוך כדי עבודה מאומצת עם ילדים בני שנתיים עד שש. במאמר זה, לאחר סקירה קצרה של השלבים הקודמים בפרויקט, נציג אחדות מהתובנות החדשות ונשלים את התמונה בתיאור העדכונים התאורטיים שבאו בעקבותיהן. לאורכו של החיבור נתמקד, על כן, במקביל בשני סיפורים המשולבים זה בזה: בסיפור התפתחותה של החשיבה המספרית מחד גיסא, ובסיפור ההתפתחות של החשיבה המחקרית שלנו על חשיבה זאת מאידך גיסא. שני הסיפורים האלה מתעדכנים בהתמדה גם בעת שנכתבות שורות אלה.

רקע תאורטי: למידה על מספרים כתהליך אינדיווידואליזציה של שיח מספרי

בפרק זה נציג את יסודותיה של **הגישה הקומוגניטיבית ללמידה**, המשמשת אותנו בכל מחקרנו על למידת מתמטיקה ועל הוראתה. בהמשך נדבר על השלכותיה של גישה זו עבור השיטות המשמשות אותנו בחקר התפתחותה של החשיבה המספרית. המילה "התפתחות" מתייחסת כאן הן לשינויים שחלו במתמטיקה לאורך ההיסטוריה והן לתמורות המתרחשות בתהליכים אונטוגנטיים, כלומר במהלך חייו של היחיד.

חשיבה מספרית כשיח

ההנחה המרכזית של הגישה הקומוגניטיבית היא שחשיבה היא סוג מסוים של פעילות תקשורתית: זהו שיח בין האדם לבין עצמו. תקשורת זו אינה חייבת להיות מילולית והיא מתבצעת לרוב במגוון של אפנויות. מתוך הנחה בסיסית זו נגזרות שאר טענות היסוד של הגישה. המונח "קומוגניציה" הוא צירוף של שתי מילים: המילה האנגלית לתקשורת – "קומוניקציה" (communication) והמילה להכרה – "קוגניציה" (cognition). צירוף מיוחד זה נבנה כדי שיהיה אפשר לדבר על תהליכי תקשורת בין-אישית ואלה של חשיבה כביטויים שונים של אותה תופעה.

אל המסע לעבר ההמשגה "התקשורתית" יצאנו כבר לפני קרוב לשני עשורים, כשערכנו את המחקרים המוקדמים שלנו על למידת נושאים מתמטיים שונים. צעד ראשון בכיוון זה נעשה במחקרנו הקודם על החשיבה המספרית, שבו נתקלנו בתופעות שלא מצאנו להן הסבר או אף אזכור בספרות שסקרה את הנושא (Sfard & Lavie, 2005). לאחר חשיבה מאומצת הגענו אז למסקנה, כי הבעיה נעוצה בצורות דיבור, ולכן גם באופני חשיבה על למידה, שהיו נהוגים אז במחקר. גישות מחקריות מסורתיות הנשענות ברובן על עבודתו של פיאז'ה (Piaget & Inhelder, 1969), המשיגו את הלמידה כתהליך "רכישה" של "דברים" כגון "ידע", "מושג", "עובדה", "רעיון" או "ערך". כשמדברים על למידה במונחים אלה, הנחת היסוד המשתמעת היא שהדבר הנרכש הוא ישות מוגדרת היטב הממתינה להפוך לנכס אישי של הלומד. רכישה זו עשויה להיות תוצר של קליטה פסיבית או של בנייה פעילה. כמו כל מוצר, כך גם הידע ניתן ל"העברה" ולשיתוף עם אחרים.

עקב ראייה כזאת נטו החוקרים לתאר את ממצאי מחקריהם במונחים של חוסר וחסך: הם אפיינו חשיבה

של ילדים בגילאים שונים כ"רכישה" שטרם התרחשה או שהתרחשה באופן חלקי בלבד. הכותבים דיווחו, בין השאר, על ילדים ש**אין להם עדיין** מושג של מספר. הם קָבְלו על כך שרבים מהם אינם יודעים כי מילת המספר האחרונה הנאמרת בעת הספירה מציינת את **מספר העצמים שבקבוצה** (Greeno, Riley, & Gelman, 1984, pp. 96-97), ועל ילדים בני 4-5 ש**אינם** משתמשים בספירה כשהם משווים **כמויות** בדידות (Nunes & Bryant, 1996). המחברים לא הרבו לפרט את הסיבות ל"חסכים" אלה ולכן הם גם לא הסבירו כיצד, אם בכלל, משלימים הילדים את החסר. יתר על כן, החוקרים לא כללו בדיווחיהם נתונים מפורטים דיים כדי לאפשר שחזור השיח הייחודי של הילדים ומציאת דפוסים בדרכי התמודדותם עם בעיות מספריות למיניהן.

חשדנו ששפת הרכישה היא שגורמת לתופעות מעניינות להתחמק מעדשתם של החוקרים ויצאנו בחיפוש אחר שפה שונה, חופשית ככל האפשר מהנחות סמויות על מה רלוונטי לתהליכי הלמידה ומה חסר חשיבות בהקשר זה. את ההשראה לגישה הקומוגניטיבית מצאנו בשני מקומות: בתורתו של ויגוצקי (Vygotsky, 1978), אבי התאוריה הסוציו-תרבותית לנושא התפתחות האדם, ובפסיכולוגיה הדיסקורסיבית (Harré & Gillett, 1994), המתבססת על הגותו של ויטגנשטיין (Wittgenstein, 1953). הגישה הסוציו-תרבותית ממשיגה את הלמידה כהשתתפות משתכללת בפעילויות אנושיות שהחברה האנושית פיתחה לאורכה של ההיסטוריה (Lave, 1988, 1993; Sfard, 2008; Vygotsky, 1962; Walkerdine, 1988; Wertsch & Stone, 1985). פעילות תקשורתית העומדת במרכזה של הפסיכולוגיה הדיסקורסיבית בכלל ושל הגישה הקומוגניטיבית בפרט, היא אחת הפעילויות האלה. יוצא מכאן, כי חשיבה מספרית היא תקשורת על מספרים המתנהלת בין אדם לבין עצמו. על כן, כאשר אנו אומרים כי ילדה עוסקת בחשיבה מספרית, אנו טוענים למעשה, כי היא משתתפת או מנסה להשתתף בשיח הידוע בשם "שיח מספרי", והוא תוצר מאמציהם של אנשים שחיו לפניה.

ארבעה מאפיינים מייחדים שיח זה ומאפשרים להבדיל בינו לבין שיחים אחרים.

מילות מפתח והשימוש בהן: שיח נחשב למתמטי אם יש בו מילים המבטאות כמויות, צורות גאומטריות, שמות מספרים וכדומה. בשיח מספרי מילות המפתח הן, בין השאר, מילות מספר, כגון "חמש", "עשר" או "מאה עשרים ואחד". על-פי וויטגנשטיין, "משמעותה של מילה היא אופן השימוש בה" (Wittgenstein, 1953, p. 20). מילות מספר יכולות להופיע בשיח יומיומי של ילדים צעירים, אבל שיח מספרי "תקני" יכתיב שינוי באופן השימוש בהן. במחקרים הקודמים שלנו עמדנו על ההבדלים בין שיח מספרי של ילדים בני 4 שנים בערך לזה של מבוגרים (Sfard & Lavie, 2005). במאמר זה נתחקה אחר גלגולי השימושים במילות מספר ובמילים נוספות האופייניות לשיח על כמויות (למשל, מילות השוואה כגון "יותר", "פחות", "שווה" ומילות הערכה כמו "גדול", "קטן") גם בקרב ילדים צעירים יותר.

לשם תקשורת יעילה בני אדם נעזרים לעתים במתווכים חזותיים. שיח יומיומי מתווך, בדרך כלל, במראות ממשיים או מדומיינים של עצמים מוחשיים, הקיימים בעולם בלי כל קשר לשיח. שיח מתמטי מתווך, לעתים קרובות, במתווכים סימבוליים שנוצרו במיוחד עבור צורה זו של תקשורת.

היגדים מקובלים הם משפטים על עצמים מתמטיים שמומחים הסכימו לקבלם, משום שלדעתם היגדים אלה מתארים את העצמים באופן נכון ומדויק. הסוגים הנפוצים ביותר של היגדים מתמטיים מקובלים הם הגדרות, משפטים מתמטיים, זהויות למיניהן וכדומה. בשיח מתמטי פורמלי, תהליך אימוץ של היגדים מתבצע בהתאם למערכת כללים מוגדרים היטב ונוקשים למדי. בשיח יומיומי השימוש במילים מתמטיות ואימוץ של היגדים המכילים מילים אלה מנוהלים, בדרך כלל, בעזרת כללים גמישים יותר.

רוטינות הן דפוסי עשייה שחוזרים על עצמם. מהותה של פעולה רוטינית בכך שהיא משחזרת ביצועים אשר נצפו בעבר במצבים דומים. הזדמנויות להופעת רוטינות נוצרות, על כן, כאשר אותה מטלה חוזרת על עצמה שוב ושוב.

הביטויים "אותה מטלה" ו"שחזור פעולה" טעונים הסבר, כמובן. גם אם המצב הנוכחי דומה מאוד למצב כלשהו מן העבר, לא תיתכן כאן זהות מושלמת. בצורה דומה, הפעולה הנוכחית אינה יכולה להיות העתק מושלם של פעולה מן העבר. העמימות הזאת היא אתגר ללומד, והיא אופיינית למצב שבו הילד מרגיש, כי הוא מצופה לפעול בצורה מסוימת ועליו להחליט מהי דרך הפעולה המתאימה. מצב כזה, שיכונה להלן **מצב מטלה**, נוצר למשל כאשר הלומד נשאל שאלה או מתבקש בקשה (והשאלה או הבקשה יכולות להיות מוצגות על-ידי אדם אחר או אף על-ידי הלומד עצמו!). בהיותו במצב מטלה, על הילד להיזכר במצבי עבר שיכולים להיחשב ל**תקדימים** של מצב המטלה הנוכחי. הכוונה היא לאותם מצבים קודמים שהייתה בהם, לדעתו של הלומד, התמודדות עם **"אותה מטלה"**.[1] לאחר מכן יהיה עליו לבחור את היבטי הפעולה התקדימית שיישמרו במהלך השחזור. היבטים אלה ירכיבו את **ההליך** הרוטיני של הביצוע. יש להניח, כי הדרכים שייפרשו בהן הלומדים את המטלה ויבחרו את ההליך הדרוש לביצועה תהיינה לעתים שונות מאלה של מומחים לשיח: כך למשל, ייתכן שבאיתור תקדימים יסתמכו הילדים על מאפייני מצב המטלה שאינם נחשבים לרלוונטיים בעיני מומחים, והם יתעלמו מאלה שמומחה לשיח לא היה מוותר עליהם. בצורה דומה, ב"שחזור" הפעולה התקדימית הם עלולים לשנות מרכיבים, שלדידם של מומחים חייבים להישמר, וישמרו על אחדים מאלה שדורשים שינוי. בעקבות כך, מומחים לשיח יופתעו לעתים לראות כי ילדים שיכולים לבצע מטלה מסוימת בנסיבות מסוימות נכשלים ב"אותה מטלה" כשהיא מוצגת להם בנסיבות אחרות. זוהי תופעה ידועה המדווחת בספרות תחת הכותרת של "ממוצבות של למידה" (situativity of learning) (Brown, Collins, & Duguid, 1989; Greeno, 1997; Lave, 1988).

לסיכום, פערים בין הרוטינה שהמומחה מבקש לראות לזו שהלומדים מבצעים בפועל הם תופעה שכיחה ובלתי נמנעת. מטרת ההוראה היא לקרב רוטינות של ילדים לאלה של מומחים. יוצא כי רוטינה היא מבנה דינמי, העשוי להשתנות מביצוע לביצוע. עם זאת, עם הזמן תגיע הרוטינה למצב של יציבות. את הרוטינה המופעלת בידי הלומד ב"מצב מטלה" נתון אפשר לתאר כזוג מטלה-הליך, כאשר:

1. לעתים יתקשה הלומד לפרש את מצב המטלה, כי זה לא יתקשר לו באופן ברור לשום תקדים. אי-לכך אחד מעקרונות ההוראה הבסיסיים שאנו דוגלות בהם הוא שרוטינות חדשות צריכות להיות מוצגות בהקשרים שבהם הלומדים יכולים לקשור אותן לתקדימים כלשהם. עיקרון זה תואם את הטענה הידועה, כי "ידע חדש נבנה על בסיס ידע קיים", המקובלת על כל המומחים ללמידה בלי הבדל פרדיגמה או סוג הלמידה הנחקר. במחקר שלנו החלטנו לעגן את הלמידה במצבי מטלה הנוצרים על-ידי שאילת השאלה "איפה יש יותר?", שכן תשובה לשאלה זו היא בסיס למעשה בחירה מושכל. מצבי בחירה מוכרים היטב לרוב הילדים ובשל כך הם תקדימים זמינים למצב מטלה זה.

- **המטלה** היא אוסף כל המאפיינים המשותפים למצב המטלה הנוכחי ומצבי העבר הנחשבים בעיני הלומד לתקדימים שלו. אוסף המצבים הקודמים האלה יכונה בהמשך **מרחב התקדימים** של הרוטינה.[2]
- **הליך** הוא אוסף של מרכיבי הפעולה הנוכחית המשותפים לה ולפעולות שבוצעו במצבים תקדימיים.

בעבר תיארנו רוטינה כמערכת כללי-על המגדירים את הדפוס, כלומר קובעים **מתי ואיך** תתבצע משימה מסוימת (Sfard & Lavie, 2005). ההגדרה הנוכחית עולה בקנה אחד עם ההגדרה הישנה. כאן ההליך הוא ה"איך" של הרוטינה ואילו ה"מתי" שלה הוא בעצם המטלה הרוטינית, כלומר הדרך שבה המשתתף מפרש את מצב המטלה על-ידי פנייה לתקדימים מתאימים (המאפיינים המשותפים של התקדימים מגדירים את התנאים לביצוע וקובעים קריטריונים להשלמתו).

נשתמש בהגדרה ה"משודרגת" של רוטינה כדי להבחין בין שלושה סוגים של רוטינות: מעשה (deed), ריטואל (ritual) וחקירה (exploration). בעבר הבחנו בין שלושת הסוגים בעזרת המטרה שלשמה מבוצע ההליך הרוטיני. כעת נראה שההגדרה החדשה מביאה גיוון רב יותר בסוגי רוטינות, ומעל לכול, היא מאפשרת להתייחס לריטואל ולחקירה כמקרי הקיצון. זאת כשההנחה היא שיש ביניהם מקרי ביניים רבים, הנבדלים ביניהם במידת עצמאותו של המבצע. להלן הגדרות שלושת סוגי הרוטינות המלוות בהסבר של הטענה האחרונה.

החלוקה הראשונה של רוטינות היא לשתי קטגוריות: רוטינות מעשיות ורוטינות דיסקורסיביות. רוטינה היא מעשית או בקצרה מעשה, אם הפעלתה גורמת לשינוי מסוים בסביבה: ארגון או עיצוב מחדש של עצמים כלשהם או של יחסים בין עצמים. רוטינה מסוג מעשה יכולה להתבצע בליווי של שיח או בלעדיו. מצד אחד, פעולות כגון רכיבה על אופניים או הכנת קפה יכולות להתבצע עם תיווך של שיח או בלעדיו. מצד שני, גם פעולת תקשורת שאינה כרוכה בהזזה פיזית של חפצים יכולה להיות מעשה – אפשר לחשוב לדוגמה על האמירה "הרי את מקודשת לי..." הנאמרת בזמן חופה ומשנה את מצבם של שני בני אדם בחברה.

ריטואל וחקירה הם שני סוגים של רוטינות דיסקורסיביות, כלומר כאלה שנצפות בפעילות של תקשורת. **ריטואל** הוא רוטינה המבוצעת רק ביזמת אדם אחר ובלי שנדרשות במהלך ביצועה החלטות עצמאיות של המבַצֵע. במילים אחרות, זאת רוטינה המבוצעת כאשר מרחב התקדימים מורכב מביצועים של אדם אחר, הנחשב בעיני הלומד לשולט בשיח, תרתי משמע.[3] ההליך של רוטינה מסוג ריטואל משחזר את

2. יש להתייחס למאפייני מצב המגדירים את המטלה כהסתברותיים ולא כדטרמיניסטיים: אלה הם תנאים הקובעים את מרחב התקדימים בסבירות גבוהה (ברוב גדול של מקרים), אך לא בביטחון (לא בהכרח כל מקרה תואם). הפיכת הסבירות לביטחון, פירושה שהפנייה להליך המתאים ושחזורו חלים באופן אוטומטי, ללא תיווך של החלטות מודעות. במקרים שבהם המורים מתלוננים על "היעדר העברה לימודית", מדובר במצב שבו יש מאפיינים הנחשבים בעיני מומחים למספיקים כדי להוביל לפרשנות רצויה של מצב המטלה, אך מתברר בפועל כבעלי הסתברות נמוכה לעשות כן. נציין, כי מצב של מרחב תקדימים ריק ייתכן גם אצל מומחה לשיח המוצא את עצמו במצב מטלה בלתי מוכר. כדי לפתור את הבעיה שלפניה הוא עומד, ידרוש המומחה לרוב לעבור אל שיח אחר, וליתר דיוק יהיה עליו ליצור קישורים ממרחבי תקדימים של רוטינות בשיח הנוכחי אל מרחבי תקדימים של שיח אחר. פריצה מעין זו של גבולות השיח נחשבת למעשה יצירתי.
3. בשפה של ויגוצקי אפשר לומר, שריטואל הוא פעולה המתבצעת ב"אזור ההתפתחות הקרובה", ZPD, המוגדר כתחום שבו הילד יכול לעשות בשיתוף עם אחרים את שאינו מסוגל עדיין לעשות בכוחות עצמו – ראו Vygotsky, 1978.

אופן הפעולה של האדם האחר, והמבצע אינו מכיר בהליכים אלטרנטיביים לביצוע המטלה. במקרה של ריטואל, הביצוע עצמו ולא תוצאתו הוא מוקד העניין. אי-לכך ריטואל נחשב למבוצע בהצלחה לא לפי תוצאת הפעולה, אלא לפי הפעולה עצמה, כשהשאלה היא אם הפעולה התבצעה במדויק ולפי הכללים. אם המבצע טועה בביצוע, עליו לחזור להתחלה. במקרה זה אפשר לטעון, כי הילד שמבצע רוטינה זאת מונע על-ידי כמיהתו לסולידריות עם אחרים, ועל-ידי רצונו לשמור על מעמדו החברתי או אף לשפרו. כשהילד מגיע למיומנות בביצועם של מהלכים רוטיניים, קשה לפעמים להבחין בין אופן פעולתו ובין דרך הפעולה של מומחה לשיח. ורצ' וסטון (Wertsch & Stone, 1985) היטיבו לתאר מצב זה:

> It is possible for a child to produce seemingly appropriate communication behavior before recognizing all aspects of its significance as understood by more experienced members of the culture (p. 167).

ריטואל אינו, כמובן, היעד הסופי של הוראת מתמטיקה, ויש שיגידו שהוא אינו רצוי כלל. על הלומד להפוך למבצע עצמאי, המשתמש ברוטינות כדי להגיע להיגדים מקובלים חדשים, המרחיבים את דעתו ואולי גם העשויים לעזור לו, אם לא עכשיו אז בעתיד, בביצוע מטלות מעשיות (מטלה שאינה לשם תקשורת בלבד). ואולם ריטואלים הם שלב בלתי נמנע בתהליך הלמידה. הילד אינו יכול לבנות עצמים מתמטיים חדשים מבלי שהוא משתתף בשיח על עצמים אלה, והוא נאלץ לבצע ריטואלים כדי שיוכל להשתתף בשיח נטול עצמים זה (Sfard & Lavie, 2005). עם זאת, רוטינה המתחילה כריטואל אמורה להיעשות לבסוף לחקירה, כלומר לכזאת שיכולה להתבצע בכל שלביה ביזמתו של המבצע ולפי החלטותיו. המבחן המכריע לעצמאותו של המבצע, ועל-כן למידת החקירתיות של רוטינה, הוא האם הוא מסוגל ליזום את ביצועה בעצמו במצבי מטלה המתאימים לכך.[4] במקרה של רוטינה מסוג חקירה, הצגת מטלה אינה מחזירה את המבצע במישרין אל תהליכי ביצוע קודמים, או אפילו אל מרשם כללי להליך שיש לבצע. במקום זה היא גורמת למבצע להתמקד בעצמים מתמטיים מסויימים, והפעולות שעליו לבצע נגזרות מתכונותיהם של עצמים אלה (אפשר לחשוב לדוגמה על המטלה המנוסחת כ"מצא משיק לגרף פונקציה נתונה בנקודה x נתונה", היכולה להתבצע על-פי נוסחה מוכנה או מתוך ידיעת תכונות של נגזרת פונקציה בנקודה). הקריטריון שלפיו מחליט המבצע כי ביצוע החקירה הסתיים בהצלחה הוא הגעה להיגד מקובל חדש – ניסוח ואישוש של עובדה כלשהי.

על החוקר הבוחן שיח של לומדים לזכור כי אותה פעולה יכולה להיות ביצוע של ריטואל או של חקירה וכדי להבחין בין שני המקרים עליו לדעת, בין השאר, לאיזו מטרה מכוַון המבצע. ברוטינה מסוג ריטואל היעד הוא הפעולה עצמה, ועל כן פעולה זאת היא חלק מהגדרת המטלה. לעומת זאת, ברוטינה מסוג

4. במצב מטלה יש שני סוגים של החלטות שהמבצע צריך לקבל: (1) בחירת המטלה, כלומר של מרחב התקדימים המתאים למצב מטלה נתון; (2) בחירת מסלול הביצוע לפי האפשרויות המרכיבות את ההליך המתאים למטלה (מבנה של רוטינה הוא רקורסיבי: בכל שלב של ביצוע נוצר מצב מטלה חדש ויש להחליט הן על המטלה והן על אופן ביצועה, כלומר על התת-רוטינה שתופעל במקרה זה). שימו לב כי החלטה (1) כרוכה לעתים בפנייה לשיח מתמטי גם כאשר שיח זה אינו בררת מחדל (כפי שהוא בשיעורי מתמטיקה, למשל, או בכל מצב המזוהה עם שיח מתמטי בית-ספרי). מעמדה של ההחלטה כיצד לפרש את המטלה שונה, על כן, מההחלטות שיש לקבל במהלך ביצוע של רוטינה אשר נבחרה כבר. החלטות אחרונות אלה נעשות במסגרת השיח שנבחר כבר קודם.

חקירה המטרה היא יצירת היגד מקובל חדש למבצע, ותהיה הדרך שבה השיג מטרה זאת אשר תהיה.[5] ריטואל וחקירה הם רק שני קצוות של קשת, ויש ביניהם רצף של שלבי ביניים הנבדלים זה מזה במספר החלטות שהמבצע מסוגל לקבל במהלך הביצוע באופן עצמאי. זאת בעיקר בשאלה מה מניע את המבצע להשתתף בשיח זה: הרצון שלו להיות ולפעול "כמו אחרים" ולהביע בכך סולידריות עם הסובבים אותו, או צרכים שמקורם בשאלות שהוא מנסח בעצמו. עלייה בעצמאותו של המבצע מלווה לרוב בהרחבת מרחב התקדימים ובירידה במספר התנאים המגדירים את המטלה. ההליך עצמו הולך ונעשה מסועף יותר, כלומר יש יותר ויותר דרכי ביצוע אפשריות לאותה מטלה.

על-פי הגישה הקומוגניטיבית, רוטינה היא אבן היסוד של שיח (Nachlieli & Tabach, 2012): תחילתו של שיח חדש היא בהופעת רוטינות מסוימות. כפי שלמדנו ממחקרינו הקודמים, דרכו של הילד לחשיבה מספרית מתחילה ברוטינות של מתן תשובה לשאלות "כמה יש?" או "איפה יש יותר?" – כל רוטינה כזאת הילד מפתח לחוד ולא בהכרח רואה קשר ביניהן. עם הזמן הן תתאחדנה לשיח חדש. זה יקרה כאשר יחולו שני סוגי שינוי: ראשית, אוסף של רוטינות בדידות יהפוך למערכת מקושרת היטב בעזרת שלל יחסים הדדיים ושנית, דיבור על תהליכים יוחלף לעתים בדיבור על עצמים. את משמעותו של השינוי השני נבהיר בסעיף הבא, שבו נטען כי עצם הקרוי "מספר" הוא תולדה של תהליכים דיסקורסיביים.

מספר כמבנה דיסקורסיבי

לפי הגישה הקומוגניטיבית, מספרים הם אמצעים לניהול של שיח על היבטים כמותיים של המציאות. במילים אחרות, הטענה היא שהעצמים הווירטואליים הנקראים "שתיים", "ארבע", "חמישים ושמונה" וכדומה, נבנו על-ידי בני אדם לשם ייעול מלאכת יצירת סיפורים על עצמים מוחשיים. אחת השאלות הנשאלת במחקר שלנו היא כיצד נבנים המספרים על-ידי הלומד הצעיר. להלן מספר הנחות יסוד שנסתמך עליהן כשננתח את הנתונים האמפיריים שלנו בניסיון למפות תהליך זה.

שלא כמו חפצים מוחשיים, כגון עץ, מחשב או ירח, מספרים אינם יכולים להופיע בחיי הילד כמו מעצמם, שלא בתיווך של אנשים אחרים. ואכן, החושים לא יעזרו לילד להיווכח בקיום מספרים. האיתות הראשון לנוכחות עצמים מופשטים אלה בא, בדרך כלל, בצורת מילות מספר המרכיבות את הדקלום "אחת, שתים, שלוש..."‏, כשהוא מבוצע על-ידי הורה או כל אדם אחר תוך כדי הצבעה אחת לאחת על חפצים כאלה או אחרים. עם הזמן הילד מתחיל להבין כי די למנות כל אוסף פעם אחת, שכן גם אם ישאלו אותו שוב ושוב "כמה חפצים יש פה?"‏, יוכל להשיב בקצרה באמצעות המילה האחרונה שאליה הגיע בספירת האוסף כבר בפעם הראשונה. בשלב זה מילות המספר מתחילות להופיע כתארים של קבוצות עצמים. למשל, במקום להגיד "גלגל, עוד גלגל, עוד גלגל ועוד גלגל"‏, אומרים "למכונית יש ארבעה גלגלים". יתרה מזו, במקום כל המשפטים מהצורה "שלוש A ועוד ארבע A הן שבע A"‏, שבהם A הוא שם עצם כלשהו (בנקבה), די בכך שאומרים פעם אחת לתמיד "שלוש ועוד ארבע שווה שבע". אינסוף עובדות

5. אי-נכונותם של ילדים לקבל דרכי פעולה שאינן "כמו שהמורה עושה" היא תופעה ידועה המעידה על כך שהרוטינות הנלמדות בבית הספר אינן, לרוב, חקירות במלוא מובן המילה.

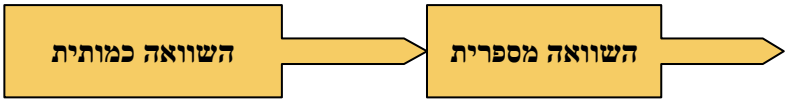
שעד כה בוטאו באמצעות אינסוף משפטים נפרדים, מתומצתות מעתה במשפט קצרצר אחד. אם נאזין לצורת הדיבור החדשה בעיון נבין, כי בהזדמנות זאת השתנה גם מעמדן הדקדוקי של מילות המספר: הן אינן עוד שמות תואר המודבקים לשמות עצם, אלא הן כעת שמות עצם בפני עצמן. עובדה זאת בולטת במיוחד במשפט השני, שבו מילות המספר ממלאות תפקיד של נושא דקדוקי. שימוש ממושך בשמות חדשים אלה יגרום לבסוף לתחושה, כי אכן מדובר בעצמים הקיימים בזכות עצמם. כשזה קורה אנו אומרים שהושלם עיצומו (reification) של השיח המספרי. במילה "עיצום" מתכוונים לכך שסיפורים על תהליכים, כגון זה של ספִירה, הפכו לסיפורים על עצמים הנקראים "מספרים". במחקר שלנו אנו עוקבות מקרוב אחר תהליכי עיצום ומנסות למפותם ברזולוציה גבוהה ככל האפשר.

כדי להבין את מהותו של השיח המספרי יש לדון בו בתוך הקשר שהופך אותו לחלק משמעותי של חיינו. בפרט, יש לתת את הדעת לצרכים שהולידו אותו במהלך ההיסטוריה ושאותם הוא משרת מאז. הרי צרכים אלה הם שיניעו ויצדיקו את אימוצו על-ידי הילד. הסעיף הבא יוקדש, על-כן, ל"כוחות" שהניעו את הופעתם והתפתחותם ההיסטוריות של מספרים ושעיצבו את החשיבה המספרית שלנו.

התפתחות היסטורית של שיח מספרי

ראיית המספרים כ"תוצאת לוואי" של התקשורת האנושית מעוררת את השאלה מה גרם לתקשורת בין בני-אדם להתפתח בכיוון זה. שאלה זו אינה רק עניין של סקרנות. אף-על-פי שהתפתחותו האונטוגנטית (אינדיווידואלית בחיי אדם) של שיח מספרי אינה יכולה להיות זהה להתפתחותו ההיסטורית, הרי שסביר להניח כי יש בזו האחרונה כדי לשפוך אור על תהליכי למידה. בשל כך, יש במחקר שלנו מקום לעיון בתהליכים היסטוריים. להלן אנו מעלות מספר השערות באשר לסיבות היסטוריות שהביאו להופעת השיח המספרי ובנוגע למנגנונים שגרמו לו לגדול ולהתפתח. השערות אלה נגזרות מההנחה התאורטית, כי כמעט כל שיח חדש הוא תוצאת לוואי של מאמץ לענות על צרכים מעשיים כלשהם. השיח החדש הוא שאִפשר בניית סיפורים שעזרו בביצוע משימות חיוניות אלה או אחרות.

ברוח הנחת יסוד זאת סביר להניח, שמקורו של השיח המספרי הוא במשימה מעשית כלשהי שביצועה לא היה אפשרי בלי שיח זה. המועמדת הסבירה ביותר למשימה כזאת היא השוואה כמותית בין אוספים הנמצאים במקומות מרוחקים זה מזה, אשר בשל המרחק לא ניתן למפות את אבריהם אחד-לאחד באופן ישיר. איור 1 מציג את השלב הראשוני הזה באופן סכמטי.



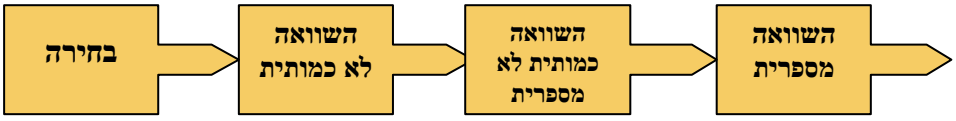
איור 1: המקור ההיסטורי של השיח המספרי, הערכה ראשונה

במבט מקרוב, הסכמה שבאיור 1 אינה עונה עוד על השאלה שנשאלה, שכן השוואה כמותית אינה כשלעצמה משימה מעשית. השוואה כזאת, בין שהיא מתבצעת בעזרת מספרים ובין בלעדיהם, היא פעולה דיסקורסיבית, וליתר דיוק, זוהי רוטינה מסוג חקירה המייצרת נרטיבים על יחסים בין אובייקטים בעולם. המשימה המעשית הבסיסית ביותר שיוצאת נשכרת מסיפורים כאלה היא **משימת בחירה**: בחירה בין שני אוספים של עצמים בדידים דומים, כגון סוכריות או מטבעות שוות ערך, תיעשה לעתים על-פי תוצאה של השוואה כמותית בין השניים. לפיכך, עלינו להרחיב את הסכימה שבאיור 1 לזו המוצגת באיור 2.



איור 2: המקור ההיסטורי של השיח המספרי, הערכה שנייה

המודל המוצע בגרסתו האחרונה מעוגן בהשערה, כי בחירה היא משימה שבני אדם נטו לבצע מאז ומתמיד וכמעט מיום היוולדם. מתקבל על הדעת שבתחילה לא היו הבחירות כמותיות, ואילו הבחירות הכמותיות הראשונות לא היו מספריות (הבחירות המוקדמות יכלו להיות אקראיות או אסתטיות, והבחירות הכמותיות **המוקדמות** יכלו להסתמך על השוואה במבט של השטחים הנתפסים על-ידי הקבוצות וצפיפותן היחסית). אבחנה זאת מביאה להרחבת המודל בשלב ביניים נוסף במסלול המוביל ממשימות בחירה אל השוואות מספריות. זהו השלב של השוואות כמותיות לא מספריות (ראו איור 3).



איור 3: המקור ההיסטורי של השיח המספרי, הערכה שלישית

את ההשערות על מקורותיו של השיח המספרי שמצאו את ביטוין באיור 3 אפשר לסכם כך:

- מבחינה התפתחותית שיח כמותי (שיח הסובב סביב מילות השוואה, כגון "גדול יותר", "יותר מאשר", "קטן יותר", "יותר", "פחות" ומילות הערכה כגון "גדול", "קטן", "הרבה", "מעט") קדם לשיח מספרי והוא צומח מתוך יכולת מוקדמת של בני אדם לבצע בחירה.
- משימות בחירה למיניהן הן אלה ששימשו גורם עיקרי להתפתחותו של השיח הכמותי.
- השיח המספרי התפתח כהרחבה של השיח הכמותי, וזאת בעקבות הניסיון לבצע השוואות כמותיות בין אובייקטים שלא ניתן היה להשוותם באופן ישיר על-ידי עריכת התאמה חד-חד-ערכית.

אנו מדגישות שכל אלה הן השערות בלבד, והן נגזרות מהנחות היסוד של קומוגניציה ומתוך הבנתנו את מבנהו של השיח המספרי (מבנה זה מטיל מגבלות על הדרך שבה השיח יכול להתפתח). יתרה מזו, ייתכן

שהן נידונו להישאר במעמד זה לתמיד, שכן הסבירות שתימצאנה ראיות לקיומו ההיסטורי של שיח כמותי מוקדם, הקודם לשיח מספרי, היא נמוכה (שהרי רק השיח האחרון נשמר בכתב). עם זאת, ההנחות שהנחו אותנו בניסוח השערות אלה עשויות להיות תקפות גם במקרה של התפתחות השיח המספרי אצל היחיד בתהליכי הלמידה. המודל שנבנה כעת לתהליכים אונטוגנטים, שלא כמו הסכמה המתארת את ההתפתחות ההיסטורית, ניתן לבחינה אמפירית. בחינת המודל היא אחת המטרות של מחקר זה. לפני שנציג את המודל נבהיר כיצד מגדירים חוקרים קומוגניטיבים את המושג "למידת מתמטיקה".

למידת מתמטיקה כאינדיווידואליזציה של שיח

לפי הגישה הקומוגניטיבית, **למידת מתמטיקה** היא תהליך של הפיכת הלומד למשתתף מיומן של שיח מתמטי. דרך נוספת לבטא זאת היא לומר, כי למידת מתמטיקה היא תהליך של **אינדיווידואליזציה** של שיח מתמטי. ראשיתו של תהליך האינדיווידואליזציה היא בהיחשפות של הלומד לשיח מתמטי חדש. בעקבות מחקרינו הקודמים (Sfard & Lavie, 2005) טענו, כי השתתפות פעילה בשיח מתחילה בחיקוי מהלכיו של מומחה. חיקוי זה מונע רק על-ידי צרכים חברתיים של הילד, כלומר ההשתתפות היא ריטואלית. בשלב זה פעולותיו של הלומד הן מהוססות והוא אינו מסוגל לבצע את הרוטינה מתחילתה ועד סופה ללא "פיגום" (scaffolding), כלומר ללא עזרה פעילה של המומחה.[6] המטפורה של פיגומים מאותתת שהמומחה מספק לילד את כל הדרוש לו כדי לעשות את הצעד הבא. פעילות הפיגום יכולה להתבטא בכך, שהמומחה והלומד מבצעים חלקי רוטינה לסירוגין (Howe, 2013; Littleton, 2013; Vygotsky, 1978; Wertsch, McNamee, McLane, & Budwig, 1980). בביצועים החוזרים הילד מנסה לעשות את מה שהמומחה עשה קודם לכן. עם הזמן קטן חלקו של המבוגר וגדל חלקו של הילד (Pratt, Kerig, Cowan, & Cowan, 1988). הלמידה תושלם כאשר הלומד יהפוך למשתתף פעיל, יוזם, מיומן ועצמאי, המסוגל להשתמש בשיח זה לפי רצונו ולפי צרכיו. במקביל, הרוטינות תהפוכנה מריטואלים לחקירות. תפיסה זו תואמת את תפיסתו של ויגוצקי, כפי שמתארים אותה וורצ' וסטון (Wertsch & Stone, 1985):

> The overall developmental scheme begins with external social activity and ends with internal individual activity (p. 164).

אינדיווידואליזציה של שיח מספרי

המודל ההיסטורי שהוצג קודם לכן הוא עתה נקודת מוצא לבניית המודל האונטוגנטי, מודל של התפתחות שיח לאורך חיי הפרט. ואכן, טבעי לחשוב כי תהליכי אינדיווידואליזציה של השיח המספרי יתרחשו בשלבים דומים לאלה שעברה האנושות בדרכה לשיח זה. ואולם במבט מקרוב נראה שלא כך הדבר. בימינו השיח המספרי נמצא בסביבתם של הילדים עוד לפני היוולדם. מרכיבים של שיח מספרי מוצגים

6. המטאפורה של פיגום, שיש לה מקום מרכזי בספרות הסוציו-תרבותית (ראו למשל Wood, Bruner, & Ross, 1976), נועדה להמחיש כיצד האדם "היודע" עוזר ללומדים לעשות את דרכם בתוך "טווח ההתפתחות הקרובה" שלהם (ZPD) (Howe, 2013; Littleton, 2013; Van de Pol, Volman, & Beishuizen, 2010; Vygotsky, 1978).

להם עוד לפני שהם מפתחים יכולת להשתתף בשיח כמותי. על כן, בחיי הפרט, שלא כמו בהיסטוריה, השיח הכמותי והשיח המספרי מופיעים פחות או יותר בו-זמנית. השיח הכמותי מתפתח כאשר המבוגרים הסובבים את הילד מערבים אותו בפעילויות בחירה והשוואה (בשיח על כמויות), ואילו השיח המספרי צומח בתוך דקלומים המכונים "מנייה וספירה", והוא תלוש בשלב זה ממעשים שימושיים כלשהם. לאור כל אלה, במודל ההתפתחות האונטוגנטית המוצג באופן סכמתי באיור 4, שני השיחים האלה, הכמותי והמספרי, מסומנים כמקבילים: נפרדים אך בו-זמניים.



איור 4: התפתחות של רוטינת השוואה

שתי השערות הטעונות אישוש מונחות ביסודו של מודל זה:

- בתחילת הדרך קיימת הפרדה בין שיח כמותי לבין שיח מספרי, כלומר השיח הכמותי ההתחלתי אינו מספרי והשיח המספרי הראשוני אינו מתייחס לכמויות.
- בשלב מסוים מתרחשת ההאחדה של שני השיחים, ובפרט, השיח המספרי הופך לכמותי.

בספרות ניתן למצוא ראיות מחקריות רבות התומכות בהשערה הראשונה. ידוע, למשל, שילדים בני 4 או 5, שהם בדרך כלל מיומנים במנייה, לא מנצלים בהכרח כישור זה כשהם משווים כמויות (Fuson, 1988; Hannula & Lehtinen 2001; Piaget, 1952; Saxe, Guberman, & Gearhart, 1987; Sfard & Lavie, 2005). ידוע גם שיכולתם של לומדים צעירים להשוות כמויות אינה תמיד מלווה ביכולות מספריות (Starkey & Cooper, 1980; Strauss & Curtis, 1981; Wynn, 1992). במחקר הנוכחי אנו מתמקדות בהשערה השנייה ושואלות כיצד ובאילו תנאים מתרחשת האחדת השיח הכמותי והשיח המספרי. המחקר הקודם שלנו אפשר הצצה נקודתית לתוך תהליך זה וסיפק ראיה אנקדוטית לתקפותה של ההשערה (Sfard & Lavie, 2005). מתוך רצון למפות את תהליכי ההתקרבות וההתאחדות של השיחים בצורה מפורטת יותר וברזולוציה גבוהה, אנו חוקרות כעת את הנושא בצורה שיטתית ובהיקף רחב יותר.

תיאור המחקר

במאמץ לשרטט תמונה מדוקדקת ככל האפשר של תהליכי איחוד השיחים, נספר את סיפורו של ילד בשם מעיין העושה את צעדיו הראשונים בשיח מספרי. את מעיין פגשנו לראשונה כשהיה בן שנתיים ושמונה חודשים. המחברת הראשונה חזרה אליו מאז מדי מספר חודשים כדי לנהל עמו שיחות בענייני מספרים. המאמר עוקב אחר השינויים שחלו בדרך שבה התמודד מעיין עם מטלה מספרית אחת מסוימת

במהלך חמשת המפגשים הראשונים, המפוזרים על פני פרק זמן של שנה וחצי. לפני שנתאר את ממצאינו, נציג את הפרויקט המחקרי המקיף שממנו לקוח סיפורו של מעיין.[7]

מחקר מסגרת: אינדיווידואליזציה של השיח המספרי בקרב ילדים בני 2-5 שנים

מטרת המחקר המקיף שלנו, המתקיים בימים אלה, היא **להגיע להבנה מעמיקה ככל האפשר של תהליכי אינדיווידואליזציה ההופכים ילדים למשתתפים מיומנים של שיח מספרי**. 16 הילדים בני שנתיים עד שש המשתתפים במחקר הם דוברי עברית ומתגוררים ביישוב קהילתי בצפון הארץ, שתושביו הם ממעמד בינוני-גבוה. הנתונים שלנו, שאיסופם יימשך כשנתיים, הם הקלטות וידאו ותכתובים של השיחות (ראיונות) שהמחברת הראשונה (להלן: המראיינת) מנהלת עם הילדים. בשיחות אלה, הנערכות מדי כארבעה חודשים עם כל משתתף לחוד ובנוכחות של הורה, מתבקשים הילדים לבצע מטלות העשויות לעורר שיח כמותי או מספרי. המטלות אמורות להתבצע בעצמים קונקרטיים או בעזרת יישומון לטאבלט שעוצב, בחלקו, במיוחד למחקר זה.[8]

במהלך הראיונות משמשת המראיינת לא רק כחוקרת, אלא גם כמורה. בכך היא ממשיכה את המסורת המחקרית המפותחת ומתועדת היטב שהחלה לפני כארבעה עשורים עם ניסויי הוראה (teaching experiments) (Stefee, Thompson, & von Glasersfeld, 2000). באמצעות דוגמאות ועזרה בביצוע מטלות היא מנסה לעודד תהליכי אינדיווידואליזציה. הילדים מתבקשים תחילה לפעול בכוחות עצמם גם בסוגי מטלות שלא נתקלו בהם בעבר. לאחר מכן המראיינת מדגימה את הביצוע ה"תקני". במהלך ההדגמה, ההחלטות מה לעשות וכיצד להתקדם הן של המראיינת. עם זאת, היא מעודדת את בני השיחה להשתתף במהלכים אלה לפי יכולתם. מיד לאחר מכן היא מזמינה את הילד או הילדה לבצע את המשימה באופן עצמאי פעם נוספת.

המחקר המדווח במאמר זה: אינדיווידואליזציה של רוטינת השוואה מספרית - חקר מקרה

הריאיון הראשון עם מעיין התקיים כאשר הוא היה בן 2(8) (שנתיים ו-8 חודשים) והריאיון החמישי, האחרון המדווח כאן, נערך כשהוא בן 4(2).

א. שאלת המחקר

בדיווח על הממצאים נתמקד באינדיווידואליזציה של רוטינת ההשוואה בין אוספים בדידים. ליתר דיוק, נעקוב אחר הרוטינות של מעיין שנצפו כשהמראיינת מעמידה את הילד במצבי מטלה הכוללים שאלה "איפה יש יותר?" הנשאלת בנוכחות של שני אוספים של חפצים, כגון קוביות וחטיפים. במשפט האחרון השתמשנו בצורת רבים (רוטינות), שכן כפי שנראה, השאלה "איפה יש יותר?" הובילה תחילה למרחבי

7. אנו מודות להוריו של מעיין על הסכמתם לפרסם את התמונות שצילמנו במהלך המפגשים עמו.
8. לצורך המחקר יצרנו קשר עם חברת "Slate Science" המתמחה בפיתוח חומרי לימוד במתמטיקה לטאבלט. לצדו של מקים החברה, שמוליק לונדון, עובדים בחברה פרופ' שמעון שוקן מבית הספר למדעי המחשב במרכז הבין-תחומי, פרופ' רז קופרמן, מתמטיקאי מהאוניברסיטה העברית, וגיא ורדי, מומחה לפיתוח והפצת משחקי מחשב. רוב חומרי הלימוד שפותחו על-ידי הצוות הם בצורת ישומונים לטאבלט. חלק מהפעילויות הממוחשבות שנבנו במקור לילדי כיתות א-ו הותאמו לפי בקשתנו לילדים צעירים יותר.

תקדימים שונים במצבי מטלה שונים. להלן נכנה רוטינות אלה בשם מקוצר **רוטינות אי"י**.[9] שאלת המחקר שנתמקד בה במאמר זה היא, על כן "**כיצד מתרחשת ההתפתחות של רוטינות אי"י של מעיין**? נוסף על כך, נצפה **בשימושים המשתנים של מעיין במילות יחס כמותי ובמילות מספר, ונעקוב אחר עיצומו ההדרגתי של שימוש זה**. בתוך כל אלה, **נחפש סימנים להתאחדותם של השיח הכמותי עם השיח המספרי**.

ב. איסוף נתונים

השאלה "איפה יש יותר?" המתייחסת לשתי ערמות של חפצים היא השאלה שבה פותחת המראיינת את שיחותיה עם כל אחד ממשתתפי המחקר. בחירה זאת של שאלת פתיחה ייחודית למחקרנו והיא נובעת מהתובנה שאליה הגענו בחיפושינו אחר המקורות ההיסטוריים של השיח המספרי, לפיה תחילתו של שיח זה היא במשימות השוואה, ולא במשימות ספירה ומנייה המכסבות ברוב המחקרים שנערכו עד כה. הנחנו, שאם רצוננו לחולל למידה משמעותית, הרי שעדיף לעגן את התהליך במשימת הבחירה המעשית המוכרת גם לילדים בגיל הרך. לא היה בכך כדי לקפח את המנייה, שהרי זו חלק מרוטינת ההשוואה המספרית. עם זאת, המנייה תשמש כעת מטרה מעשית ותהיה בשל כך משמעותית יותר בעיני הילד. במילים אחרות, ציפינו שהמנייה תתפתח תוך כדי העיסוק שלנו בהשוואות למיניהן.

על סמך מחקרנו הקודם (Sfard & Lavie, 2005) הנחנו, כי ילדים שטרם נחשפו להשוואות כמותיות יגיבו על השאלה "איפה יש יותר?" תחילה, כאילו הייתה זאת הזמנה לבחור אחד משני האוספים המונחים בפניהם כאשר אין קריטריון מוגדר, ידוע מראש, לבחירה זאת. כדי לאפשר אינדיווידואליזציה של רוטינת אי"י, יהיה אז צורך לחשוף אותם לביצועים של רוטינה זאת על-ידי משתתף שיח מנוסה. כדי לתכנן את ההוראה, שאלנו את עצמנו מהו ההליך שהנשאל עשוי לבצע בתשובה לשאלה "איפה יש יותר?". תוצאות הניתוח מוצגות באיור 5. אוסף האפשרויות מתחיל ב**בחירה ישירה**, מהלך שבו החלטת הבוחר אינה מבוססת על שיקול רציונלי שיטתי,[10] וממשיך בפעולות דו-שלביות, שבהן הבחירה מתבצעת רק לאחר פעולה מְתַוָכֶת. גם במהלך דו-שלבי יש להבחין בין כזה הנעזר בשיח כמותי או מספרי לבין כזה **שאינו עושה שימוש בשיח זה** (אלא נעזר במקומו בשיקולי טעם או בהעדפות אישיות אחרות, למשל). באשר לתיווך כמותי או מספרי, ציפינו לכך שההליך **הבט-ובחר**, המבוסס על השוואה במבט של כמויות (השוואת השטחים הנתפסים על-ידי האוספים או של צפיפות החפצים בשטחים אלה) יתפתח במהלך המפגשים שלנו עם הילדים גם ללא התערבות מפורשת מצדנו. את מאמצי ההוראה שלנו

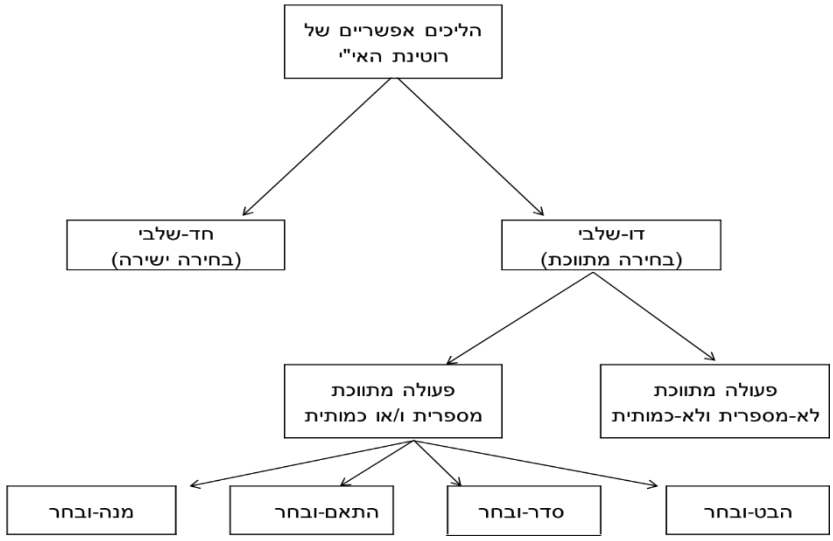
9. כפי שנאמר קודם לכן, המטלה המתבקשת על-ידי המומחה והמטלה המבוצעת הן לעתים מטלות שונות. באופן כללי יותר, מצבי מטלה עם השאלה "איפה יש יותר?" יכולים להתפרש בדרכים שונות בהתאם למאפיינים נוספים של מצב המטלה. אם יש אכן ריבוי של פירושים, אומרים שהרוטינה היא ממוצבת. היא מפסיקה להיות כזאת כאשר כל מצבי המטלה הכוללים את השאלה "איפה יש יותר?" (אי"י) מובילים למרחב תקדימים יחיד ולהליך מסוף המתאים למרחב זה. כדי שכל העובדות האלה לא תיעלמנה מעינינו, נקפיד על דרכי ביטוי מדויקות. במצב שבו נשאל המשתתף של המחקר שלנו "איפה יש יותר?" לא נאמר עוד, כי "הוא ביצע את מטלת ההשוואה הכמותית בצורה בלתי תקינה" או ש"הוא טעה בביצוע השוואה כמותית", אלא נטען, כי הוא ביצע מטלה אחרת, למשל זו של בחירה לא כמותית. המונח "רוטינות אי"י של מעיין" מתייחס, על כן, לרוטינות שהילד ביצע במצבי מטלה הנוצרים כשהמראיינת התכוונה למטלת השוואה כמותית.

10. השם "בחירה ישירה" נבחר כדי להתייחס לבחירה שאינה מבוססת על שיקול שיטתי, ולאו דווקא כדי לציין היעדר שיקול כלשהו (גם אם אפשרית בחירה כזאת, אין לנו אמצעים לאשש היעדר זה).

החלטנו למקד בשלושת ההליכים הדו-שלביים הכמותיים הנוספים:

- ההליך **סדר-ובחר**: בחירה לאחר השוואה על-ידי סידור הקוביות במגדלים או בשורות והשוואת גובהיהם או אורכיהם, בהתאמה.
- ההליך **התאם-ובחר** שבו נבחרת כגדולה יותר הקבוצה שבה, לאחר התאמה חד-חד-ערכית בינה לבין הקבוצה האחרת, נותרו איברים ללא בני זוג.
- ההליך **מנה-ובחר**: בחירה לאחר השוואה על-ידי מנייה.

אפשר, כמובן, לחשוב על מהלכים דו-שלביים נוספים המתווכים על-ידי פעולות אחרות, כגון שקילה או מדידת נפח, אך איור 5 ממצה את האפשרויות שרצינו לבחון במחקרנו הנוכחי. הואיל והקבוצה שבחרנו בה מכילה הן הליכים כמותיים שאינם מספריים (הבט-ובחר, סדר-ובחר, התאם-ובחר) והן הליך מספרי שאינו חייב להיות כמותי (מנה-ובחר) ידענו, כי די בה כדי שנוכל לעקוב אחר היווצרותו של שיח מספרי-כמותי מאוחד. התקדמות חשובה בהתאחדותם של השיחים הכמותי והמספרי תחול כאשר יהפכו כל ההליכים האלה לחלקים של רוטינה מסתעפת אחת. נוכל לדעת שכך אכן קרה אם נבחין בכך שהלומד, בעומדו במצב מטלת אי"י, מתייחס להליכים אלה כאלטרנטיבות שקולות. התאחדות מכוננת זאת של ההליכים היא גם בסיס להתגבשות המספר כעצם מתמטי. אי-לכך הוחלט שההליכים הדו-שלביים השונים יודגמו, בדרך כלל, זה לצדו של זה.



איור 5: הליכים אפשריים של רוטינת מתן תשובה לשאלה "איפה יש יותר?"

המראיינת הכינה סדרה של מטלות שבאמצעותן תוכל להורות את ההליכים הדו-שלביים ואף ניסחה

לעצמה מספר קווים מנחים לאופן פעולתה. ראשית, כל מטלה חדשה תוצג למרואיין בלי שתהיה לכך הקדמה הוראתית כלשהי. בכך יקבל הילד הזדמנות להפגין את יכולתו הראשונית להתמודד עם המשימה. אם המרואיין ישיב בפעולה שאינה "קנונית", המראיינת תזמין אותו לצפות בה כשהיא מבצעת את המטלה בעצמה. במקרים מסוימים היא תנסה לשתף את הילד בביצוע תת-פעולות רוטיניות מסוימות, כגון מנייה, ואף תקדים את השלבים השונים בשאלות מתאימות המופנות לילד. לאחר מכן אותה מטלה תוצג שוב. הילד יוביל את הביצוע כשהמראיינת מספקת לו "פיגומים" (scaffolding) ככל הנדרש.

את המידע על מטלות השוואה שהוצגו למעיין והן על המיקום המדויק של אירועי ההוראה אפשר למצוא בטבלה 1. ריכזנו כאן רק מטלות שבהן כוונה השאלה לאוספים של עצמים מוחשיים ולא הזכרנו מטלות דומות באמצעות הטאבלט שבוצעו במקביל. חשוב גם לזכור, כי בין מטלת השוואה אחת לשנייה הוצגו למעיין גם מטלות נוספות, ביניהן הדרישה להצדקת תשובותיו ("למה? איך אתה יודע?"). במאמר זה נסתכל רק בנתונים הנוגעים לשאלה "איפה יש יותר?" בניסוחיה השונים. בביטוי "אותה שאלה בניסוחיה השונים" אנו מתכוונות לניסוחים שהם שקולים **בעינינו**, כגון "איפה הכמות גדולה יותר?" ו"איפה המספר גדול יותר?" (כפי שראינו במחקרינו הקודמים, ילדים קטנים נוטים להגיב על ניסוחים אלה בצורות שונות; אחת השאלות הנשאלות במחקר שלנו היא מתי ובזכות מה הופכות השאלות האלה לשקולות בעיני הלומדים).

הנתונים המצומצמים שבידינו אינם מאפשרים ראייה ממצה של תהליכי אינדיווידואליזציה, שכן חלקים מתהליכים אלה התרחשו בוודאי בחיי היומיום של הילד, בבית ובגן העירוני שאליו הוא הולך מדי בוקר. עם זאת, די בנתונים הנבחרים שלנו כדי להבחין בתהליך שינוי הרוטינות וכדי למפות את מנגנוניו. אנו מאמינות כי מנגנוני האינדיווידואליזציה שהצלחנו למפות הם כלליים, והם מונחים גם ביסודה של הלמידה שהתרחשה מחוץ למפגשים שלנו עם מעיין.

טבלה 1: מטלות שבוצעו בחמשת הסבבים הראשונים של שיחות עם מעיין *,**

			השאלה הנשאלת במצב מטלה*				
			איפה יש יותר?**		**כמה יש?**		**למה? איך אתה יודע?**
	מתווך	**מטלה**	**למידה**	**הוראה**	**למידה**	**הוראה**	**למידה**	**הוראה**
1	קוביות	<4,3>	I (+)				משחק	
		<4,5>	II (-,-) עונה עוד לפני שמצג הקוביות מוכן, כשיש בכל קופסה שלוש קוביות)					
		<1,5>	III (-)		אומר "אחת" בלי שנשאל "כמה יש?"			

			השאלה הנשאלת במצב מטלה*				
			איפה יש יותר?**		כמה יש?		למה? איך אתה יודע?
	מתווך	מטלה	למידה	הוראה	למידה	הוראה	למידה	הוראה
		<0,6>	?		אומר "כלום" (בלי שנשאל)			
		<6,5>	+, +, -					
		<6,5>	?		-			
	במבה	<3,2>	IV (-, ?, -), VI					
		<2,5>	V (+,+)					
		<5,4>	-		"פה הרבה, פה שתיים" (בלי שנשאל)			
	קוביות	<4,3>		VI				
2***	כעכים	<6,5>	(-, -)				"כי אני רוצה"	
		<4,6>	VII -, -					
		<8,9>	-				"הם עשו את זה ככה"	
		<6,8>	(?, ?)		"הרבה", "אין יותר" (בלי שנשאל)			
		3			פיגום מסיבי	פיגום מסיבי		
		5			פיגום מסיבי; אומר "הרבה"	פיגום מסיבי; אומר "הרבה"		
	קוביות	<3,3>	VIII (-, -)		אומר "שלוש" ו"הרבה (בלי שנשאל)			
3	קוביות	<5,3>	IX (+)				"כי זה יפה"	
		<5,3>	X (+,+,+,+)					
		<5,3>		XI				
		<4,5>	XII (-, +)					
		<5,5>	+, +, +				"כי זה יפה"	
		<8,7>	XIII מנסה להשוות עם ספירה					
4	קוביות	<4,5>	+				"ככה"	
		<5,4>	+				"ככה"	

			השאלה הנשאלת במצב מטלה*					
			איפה יש יותר?**		כמה יש?		למה? איך אתה יודע?	
	מתווך	מטלה	למידה	הוראה	למידה	הוראה	למידה	הוראה
		<5,5>	+				"כי זה הרבה" "כי הייתי פה"	
		<3,5>	XIV (+, +, +); ?				"כי אני אוהב סגול"	
		<7,6>	+, -, +, ?				"כי פה הרבה ופה קצת"	
		<8,8>	+ ("פה הרבה ופה הרבה")				"ככה"	
		<6,5>	+				"ככה"	
		<6,5>	+ (סופר ביזמתו)				"כי ספרנו"	
		<4,5>	XV (+)					
5	קוביות	<5,5>	+				"ככה"	
		<4,6>	XVII (+)				"זה הרבה וזה קצת"	
		<1,5>	+					
		<5,5>	+ ("בשניהם חמישים")					
		<4,5>	+ "חמש הרבה יותר"	השוואת מספרים				
		<5,6>	+					
		<5,6>		השוואת מספרים ע"י מגדלים				
		<7,5>	+ ("זה יותר הרבה וזה יותר קצת")					

* **הסבר הסימנים**

"+", "-" ו-? מסמנים את מידת ההצלחה של מעיין בביצוע המטלה לפי הסטנדרטים המקובלים; מספר ההופעות של הסימן תואם את מספר החזרות על השאלה ולכן גם על ביצוע המטלה; כאשר התשובה אינה ברורה יופיע הסימן "?".

המספרים הרומיים בלבן על רקע כהה מסמנים אפיזודות המופיעות במאמר. השאר אלו הן אפיזודות שהתקיימו, אך אינן מצוינות במאמר.

הביטוי "קוביות <4 ,3>" הוא קיצור לאמירה "בקערה השמאלית ארבע קוביות ובימנית שלוש".

** **השאלה נשאלה** בצורות שונות, ביניהן "איפה יש פחות?", "מה אתה בוחר?" וכדומה. בנוסף לכך נשאלו במחקר שאלות נוספות, כגון "כמה יש"? "איך אתה יודע"? אשר גם אותן ניתחנו, אך אליהן אין אנו מתייחסות במאמר זה.

*** **הסבב כלל** ניסיונות נוספים לערב את מעיין בשיחה, אבל הילד היה עייף ולא שיתף פעולה.

ג. שיטת ניתוח הנתונים

את התכתובים חילקנו לאפיזודות המתחילות בשאלה "איפה יש יותר?" ומסתיימות עם מתן תשובה על-ידי אחד המשתתפים, מעיין או המראיינת. כללנו ברשימה גם אפיזודות המתחילות בשאלות הנחשבות לשקולות לשאלה "איפה יש יותר?" בעיני המראיינת (למשל, "באיזו קערה יש מספר גדול יותר של במבה?") או אף כאלה שיכלו לערב שיקול כמותי דומה (למשל, "איזו קערת במבה אתה בוחר/מעדיף?").

את הניתוח התחלנו מאפיזודות שבהן ענה מעיין על השאלה "איפה יש יותר?" כפי יכולתו, בלי הכוונה כלשהי (סבב 1). בכל אחת מהאפיזודות שהתרחשו לאחר ההתערבויות ההוראתיות הראשונות (אפיזודות IX, VI) בחנו את התקדמות האינדיווידואליזציה, כלומר שאלנו "מה השתנה?" במטלה ובהליך של הילד ביחס לאפיזודות הקודמות.

תהליך האינדיווידואליזציה של רוטינית אי"י ייחשב כמבוצע במלואו כאשר ניתן יהיה לטעון כי הרוטינה היא מסוג חקירה, ובפרט:

- מעיין מפרש את מצב המטלה אי"י כפי שהוא מתפרש על-ידי המראיינת, כלומר על-פי השאלה שנשאלה בנוכחות של שני אוספים של חפצים ולא לפי כל מאפיין אחר. כלומר, בין השאר, כי אין כבר צורך בהשתתפות של אדם אחר בביצוע הרוטינה. בשל מיעוט הדרישות, מרחב התקדימים יהיה רחב והרוטינה עצמה תתאים למצבים רבים ומגוונים.
- ההליך הוא מסועף, כלומר מציע מספר מסלולי ביצוע אלטרנטיביים (במילים אחרות, בעת הביצוע המבצע יכול לבחור מתוך מבחר תת-הליכים הנחשבים לשקולים, ביניהם ההליכים הדו-שלביים: הבט-ובחר, סדר-ובחר, התאם-ובחר ומנה-ובחר).

כדי למפות את ההתקרבות וההתכנסות ההדרגתית של הרוטינות של מעיין לזו שתיארנו כאן, היה עלינו לבחון בכל נקודת זמן את המטלות וההליכים שהוא ביצע באותו זמן. ניתוחים אלה הונחו על-ידי השאלות המפורטות בטבלה 2. כפי שניתן לראות, הסדר שבו ערכנו את הניתוחים הפוך לזה שבו מתייחסים לשני חלקי הרוטינה, מטלה והליך, בזמן ביצועה. ואכן, אין דרך לקבוע כיצד מצטיירת מטלה בעיני המבצע, אלא על-ידי צפייה באופן שבו הוא מבצע אותה. כדי לקבוע את מרחב התקדימים שאליו פנה מעיין במצב מטלה נתון, היה עלינו לדעת מה הוא עשה בפועל. מציאת מרחב התקדימים הייתה, כמובן, משימה ספקולטיבית, שתוצאתה היא בבחינת השערה. הנתונים שבידינו לא הספיקו כדי להעלות השערה חד-משמעית. במקרים אחרים נאלצנו להסתפק במספר פרשנויות אלטרנטיביות ולהשאיר את השאלה פתוחה אם יש לאחת מהן עדיפות על פני כל האחרות. למרות הקושי שבמשימה פרשנית זאת לא ויתרנו

עליה, שכן רעיונות באשר לדרכים אפשריות שבהן קישר הילד את מצב המטלה הנוכחי לניסיונו הקודם נחוצים כדי שניתן יהיה להבין את תהליכי האינדיווידואליזציה לעומק.

טבלה 2: סכמה לניתוח האינדיווידואליזציה של רוטינת מתן תשובה לשאלה "איפה יש יותר?"

היבט שיח	שאלה	שאלות ספציפיות יותר	תכונות שיש לחפש בתכתובים
A. רוטינות אי"י (רוטינה המתעוררת בעקבות שאלת המראיינת "איפה יש יותר?" הנשאלת בנוכחות שתי ערמות של חפצים) הערה: השאלות שבעמודות השנייה, השלישית והרביעית מתייחסות לכל אחת מהרוטינות לחוד.	מה היו ההליכים של מעיין התואמים כל אחת ממטלות אלה?	1. מהם ההליכים (למשל מתוך אלה המופעים באיור 5)?	תכונות אופייניות של אחד ההליכים באיור 5.
		2. אם ההליך הוא דו-שלבי, מה הקשר בין שני חלקיו?	סימנים לכך שההליך מאוגד, כלומר שבביצוע חלקו השני ("בחר") מעיין הסתמך על תוצאת החלק הראשון ("מנה", למשל) ואם לא, נאמר שההליך מקוטע.
		3. אם נצפה יותר מהליך אי"י אחד, מה הקשר בין ההליכים השונים?	ראיות לשימוש בהליכים השונים כניתנים להחלפה; למשל, נטייתו של מעיין לבדוק אם ההליכים השונים מובילים לאותה תשובה (ייאמר שההליכים קשורים "קשר תשובה" או שהם מאוחדים; אם לא, נאמר שהם קשורים "קשר שאלה", כלומר מופיעים ביחד בתגובה לשאלה אי"י, והם משורשרים).
	מה היו המטלות המחוללות על-ידי השאלה אי"י בעיני מעיין?	4. מהם מרחבי התקדימים המגדירים את המטלות?	התקדים שזוהה על-ידי מעיין ותכונות משותפות לו ולמצב הנוכחי
	מה היה סוג הרוטינה – מעשה, ריטואל או חקירה?	5. ברוטינה דיסקורסיבית, האם מהלך הביצוע מנווט על-ידי החלטות עצמאיות תוך כדי הביצוע?	ייקבע על בסיס תוצאות שני החלקים הקודמים של הניתוח
B. שימוש במילות מפתח של שיח כמותי ומספרי.	מה מילות המפתח של השיח הכמותי והמספרי שבהן משתמש מעיין ומה הם מאפייני השימוש?	1. מה מידת העיצום של מילות המספר?	הופעת מילות מספר בתבניות תחביריות אופייניות לשיח על עצמים
		2. האם יש סימנים להתאחדות של שיח כמותי ושיח מספרי?	הופעה משותפת בתוך היגד אחד של מילות מספר ושל מילים אופייניות לשיח כמותי (למשל "חמש גדול משלוש")

ממצאים

הדיווח שלהלן מתחיל בתיאור **ביצועי מעיין בשני הסבבים הראשונים**, שבהם יכולנו לקבוע את מצב הרוטינות שלו טרם החלה ההתערבות ההוראתית של המראיינת. לאחר מכן מתוארים **אירועי הוראה** ששימשו מקור אפשרי לתקדימים שאליהם חזר מעיין בביצועיו המתוארים בהמשך. לבסוף מוצגות שלוש **תפניות**, שחלה בהן התקרבות משמעותית של רוטינת אי"י של מעיין לרוטינה קנונית. תפניות אלה הן אבני דרך בתהליך התאחדות של שיח כמותי ושיח מספרי של הילד.

ביצועים התחלתיים (סבבים 1 ו-2, מעיין בן 2(8) ו-3(1) בהתאמה): רוטינת בחירה או רוטינת התכבדות, בהתאם למתווך

בסבבים 1 ו-2 של הראיונות, שבהם ניתנה למעיין הזדמנות להפגין אופני פעולה שהוא פיתח עוד בטרם המפגש אתנו, הבחנו בכך שהדרך שבה הוא מתמודד עם השאלה "איפה יש יותר?" השתנתה בהתאם לטיב המתווך שהצגנו לו: כשהיו מונחות בפניו ערמות של חטיפים אהובים עליו, כגון במבה או כעכים הוא פעל בדרך אחת, וכאשר המתווכים היו קוביות הוא ביצע פעולות אחרות. אי-לכך בדווח שלהלן אנו מבחינים בין שתי רוטינות אי"י שונות, האחת מתבצעת במצב שבו השאלה אי"י נשאלת בנוכחות של מתווכים "נחשקים", והשנייה מופעלת כאשר המתווכים הם "ניטרליים".

A. רוטינות

- מתווכים ניטרליים: רוטינת בחירה

להלן שלוש אפיזודות ראשונות שבהן השאלה "איפה יש יותר?" התייחסה לערמות של קוביות.

אפיזודה I:[11]<3, 4> [סבב 1, גיל 2(8)]

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
3	מראיינת	תגיד לי באיזו קערה יש יותר קוביות?	מצביע על הקערה עם 4 הקוביות	
4	מראיינת	פה? כן?		
5	מעיין	פה	מראה על הקערה עם 4 הקוביות	

11. הביטוי "קוביות <3, 4>" הוא קיצור ל"בקערה שמאלית יש 4 קוביות ובימנית יש 3". ראו לעיל הערה 7 באשר לפרסום התמונות.

אפיזודה II: קוביות <4, 5> (סבב 1)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
10	מראיינת	איפה יש יותר קוביות?		
11	מראיינת	איפה עכשיו יש יותר קוביות?	מנסה להשלים קערה עם 3 קוביות ל-4 וזאת שהיו בה קודם 4 קוביות – ל-5	
12	מעיין	פה	עונה לפני שהמראיינת מספיקה להוסיף קוביות. מצביע על אחת הקערות (כאשר הוא עונה 3 קוביות נמצאות בכל אחת מהקערות)	
13	מראיינת	רגע, רגע איפה עכשיו יש יותר קוביות?	כעת מצג הקוביות מושלם ומעיין רואה 4 ו-5 קוביות בקערה	
14	מעיין	פה פה	מרים את הקערה עם 4 הקוביות תוך כדי האמירה; זו אותה קערה עליה הצביע גם קודם לכן.	

אפיזודה III: קוביות <1, 5> (סבב 1)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
22	מראיינת	איפה יש יותר קוביות?		
23	מראיינת	ו....עכשיו, איפה יש יותר קוביות?		
24	מעיין	פה	מרים את הקופסה עם קובייה אחת	
25	מעיין	אחד		

ההליך: על-פי התשובה שניתנה על-ידי מעיין באפיזודה I, אפשר היה לשער שהוא ביצע הליך הבט-ובחר, שבו הבחירה מתווכת על-ידי הערכה כמותית. ואולם ביצועיו הבאים של הילד הפריכו השערה זאת: בהמשך המפגש, והן בסבב הבא, רבות מתשובותיו לשאלה "איפה יש יותר?" היו שונות מאלה של

מומחה לשיח כמותי (ראו טבלה 1). כך, למשל, כבר באפיזודה II, הקערה עם 4 קוביות "גברה" על זו עם 5 קוביות. אם עולה ההשערה שההערכה המוטעית נבעה מהקושי להבחין בהבדל הכמותי הקטן בין שתי הקבוצות, הרי שכפי שמראה אפיזודה III, תופעה דומה נצפתה גם כאשר הכמויות נבדלו זו מזו במידה ניכרת.

ובכל זאת, בפעולתו של מעיין נתגלה דפוס: בכל המקרים הוא בחר בערמה אחת מתוך שתיים ועשה זאת על-ידי הצבעה (12) או הרמה (24). האקראיות, לכאורה, של בחירותיו פוסלת אמנם את האפשרות של בחירה מתווכת על-ידי הליך הכרעה עקבי, אך אינה מוציאה מכלל אפשרות שהבחירות נעשו על-פי שיקולים שעלו ad hoc בהתאם לנסיבות. כך, לדוגמה, כאשר באפיזודה III הרים מעיין את הקופסה עם הקובייה היחידה תוך אמירת המילה "אחת" (25), ייתכן שהעדפתו נבעה מיכולתו לזהות את המספר ומרצונו להפגין יכולת זאת.

המטלה: הואיל וההליך לא היה כמותי, ברור שמעיין לא פירש את המטלה בדרך שפירשה אותה המראיינת.

אנו מניחות שהניסיון הקודם שבו נזכר מעיין בנסיבות הנוכחיות הוא שנדרשה בו בחירה באחת משתי קבוצות. גם ילדים קטנים נחשפים למצבים כאלה בחיי היום יום שלהם. הם יכולים לראות את המבוגרים מבצעים בחירה והם נדרשים לפעמים לפעולה כזאת בעצמם. מבחינתם, הבחירה פירושה אימוץ אחת משתי אפשרויות – של שקית קוביות אחת מתוך השתיים המוצעות למכירה בחנות; של ערמת עפרונות אחת מתוך השתיים המוצעות להם ולחבריהם, וכדומה – וויתור על השנייה.

סוג הרוטינה: במקרה זה, שאילת השאלה "איפה יש יותר?" בנוכחות של שתי ערמות של קוביות החזירה את מעיין אל תקדימים שנדרשה בהם פעולה מעשית (זו של בחירה), כלומר מדובר כאן ברוטינה מסוג מעשה.

- מתווך נחשק: רוטינת טעימה

באפיזודות הבאות הלקוחות מראיונות הסבב הראשון והשני, הפריטים בקבוצות המושוות הם חטיפים.

אפיזודה IV: במבה <2, 3> (סבב 1)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות[12]
71	מראיינת	איפה יש יותר? באיזו קופסה יש יותר במבות?		
72	אימא	איפה יש יותר מאמי?	מעיין מוסיף עוד במבה לקופסה עם השלוש. עכשיו יש 4 בשמאל, 2 בימין	
73	אימא	נסדר את הבמבה בקופסה	מעיין מוסיף עוד במבה לאותה הקופסה. (כמות	

12. התמונות להלן צולמו על-ידינו וההורים נתנו את הסכמתם לפרסומן.

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות[12]
			גדולה בשמאל ו-2 בימין)	
74	אימא	עכשיו תגיד לנו איפה יש יותר. שים גם פה קצת (בקופסה השנייה)		
75	מעיין	פה ופה.	מצביע על שתי הקופסאות ומרים את שתיהן.	

אפיזודה VII: כעכים <4, 6> [סבב 2, גיל 1(3)]

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
17	מראיינת	עכשיו... מעיין, עכשיו אני שוב שמה את שתי הצלחות. בסדר? אני רוצה שתאמר לי, איזו צלחת אתה רוצה לתת לי ואיזו צלחת אתה בוחר.		
18			בוחר בקערה עם 4 כעכים	
19	מראיינת	אתה נותן לי את זאת? ואתה רוצה את זאת?	מהנהן ומניח את ידו על הצלחת.	מצביעה על הימנית – שבה יש יותר.
20	מראיינת	למה?		
21	מעיין	כי אני רוצה	מקרב אליו את הצלחת.	
22	מראיינת	למה אתה רוצה את הצלחת הזו?		מצביעה על הצלחת שבחר.
23	מראיינת	אולי אני אקח את הצלחת הזו?	אוכל מהצלחת.	מדברת על הצלחת שבחר.

ההליך שביצע מעיין פעם אחר פעם בנוכחות שתי קערות עם חטיפים נראה שונה מזה שהפעיל כשהיו מונחות לפניו ערמות של קוביות. הפעם הוא לא הסתפק בהצבעה על אחת הקערות, אלא מילא אותן (72, 73) ואף ניסה להרימן (75).

מטלה: פעולתו של מעיין שאותה נקט בכל פעם כשהונחו לפניו חטיפים אהובים עליו, נראתה כניסיון לאכול. לעתים ניסיון זה אף הצליח (ראו 21 ו-23 באפיזודה VII). נדמה היה שמבחינתו של הילד מדובר במטלה מעשית, כזו שאדם בוגר רואה את עצמו עומד לפניה כשנאמר לו "טעם מן החטיפים שבקערות, תתכבד". ההבדל בין מטלת הבחירה לבין התכבדות הוא בכך, שבזו האחרונה אין צורך לאמץ אופציה אחת במלואה ואף אין הכרח לוותר כליל על השנייה: כשאדם מתכבד, הוא לוקח מאחת הקערות לא יותר מפריט או שניים – כך לפחות בהתאם לכללי נימוס – ולפעמים אף לוקח משתיהן. אין ספק, כי במהלך חייו הקצרים מעיין הספיק כבר להיות במצבים שנדרשה בהם ההתכבדות פעמים רבות.

סוג הרוטינה: כמו במקרה של ערמות של קוביות, השאלה החזירה את מעיין אל תקדימים שנדרשה בהם פעולה מעשית, אך הפעם הייתה זאת הפעולה של טעימה. גם הפעם, על כן, מדובר ברוטינה מסוג מעשה.

כאן המקום לציין, כי לנוכח העובדה שהחטיפים הסיחו את דעתו של מעיין וגרעו מרצונו לשתף עמנו פעולה, התמקדנו בסבבים הבאים במטלות עם מתווכים ניטרליים. המתווכים הנחשקים יחזרו במחקרינו העתידיים, ולו כדי שנוכל לבדוק מתי טיב המתווך יפסיק למלא תפקיד במצבי מטלה כמו אלה שתוארו כאן, והשאלה "איפה יש יותר?" תגרום להפעלת אותו תהליך. שהרי היעלמות הרגישות לטיב המתווך היא אחד הסימנים ל"ההבשלה" של השיח הכמותי.

B. מילות מפתח

במפגש הראשון מעיין כמעט לא השמיע מילות מספר או מילים של השוואה כמותית. תשובותיו לשאלה "איפה יש יותר?" ניתנו בעיקר באמצעות פעולות פיזיות וללא דיבור מלווה. עם זאת, מילות מספר לא נעדרו כליל – ראו למשל את מילת המספר "אחת" המופיעה באפיזודה III (תור 25) והמלים "שתיים" ו"הרבה" שבאפיזודה V שלהלן (תורים 77 ו-78, בהתאמה). ואולם אם נוכחותן של מילים אלה יוצרת רושם שהופעל שיקול כמותי, הרי שרושם זה מתפוגג עד מהרה כאשר מבחינים בכך שבשני המקרים הייתה זו הקערה עם מספר קטן יותר של קוביות שנבחרה כמענה לשאלה "איפה יש יותר במבה?". בשלב זה, מילות מספר משמשות את מעיין כתוויות של אוספים, אך לא מתלווה לכך יכולת לקשר בין המילים האלה בהיגדים המציינים יחס גודל, כגון "הרבה זה יותר משתיים" ולא הנטייה לפעול בהתאם ליחס זה.

אפיזודה V: במבה <2, 5> (סבב 1)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
76	אימא	לא, איפה יש יותר במבה?		
77	מעיין	פה הרבה	מניח קודם את הקערה עם הכמות הגדולה יותר	
78	מעיין	ופה שתיים	מניח את הקערה השנייה עם 2 יחידות של במבה	

אף-על-פי שמעיין לא השתמש במילות יחס כמותיות, כגון "גדול יותר" או "קטן" בנוכחותנו, הוא הראה סימנים ראשונים ליכולת לפעול לפי כללי השיח הכמותי. כך לדוגמה, באפיזודה VIII לאחר שהצביע על קערה אחת בתגובה לשאלה "איפה יש יותר?" (תור 224), הוא בחר בקערה האחרת כשהשאלה הפכה להיות "ואיפה יש פחות?" (224, 225).

אפיזודה VIII: קוביות <3, 3> (סבב 2)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
221	מראיינת	תאמר לי איפה יש יותר קוביות? פה או פה?	המראיינת מצביעה על המגדל הירוק והחום בהתאמה.	הקוביות מאורגנות בשני מגדלים של 3 קוביות בצבעי חום וירוק.
222	מראיינת	באיזה מגדל?	מעיין מרים את הקוביות הצהובות מתוך ערמת קוביות שבצד.	
223	מראיינת	מעיין? במגדל הזה יש יותר קוביות או במגדל הזה?	מצביעה על המגדל הירוק והחום בהתאמה.	
224	מראיינת	במגדל הזה? ואיפה יש פחות קוביות?	מעיין מצביע על הירוק.	
225	מעיין	במגדל הזה.	מצביע על החום.	

נראה על-כן, כי מעיין פעל לפי הכלל "אם A זה יותר מ-B, אז B זה פחות מ-A". פרשנות אלטרנטיבית היא שהבחירה שעשה בתור 225 נבעה מהפעלת רוטינה בין-אישית אופיינית לאינטראקציות לימודיות בין ילדים למבוגרים, שלפיה יש לשנות את התשובה כאשר אותה שאלה שנשאלה לפני רגע או דומה לה, נשאלת פעם שנייה. אף-על-פי שקשה להכריע בין שתי פרשנויות אלה, בדבר אחד אנו יכולים להיות בטוחים: כיוון שהכמויות המושוות היו שוות, אין לפרש את הבחירה ה"משלימה" כמעידה על מודעותו של הילד לכמויות וליחסים ביניהן.

לסיכום, השימוש ההתחלתי של מעיין במילות מספר וברוטינות של יצירת היגדים על כמויות היה ריטואלי ולא שימש בסיס לבחירותיו. שני השיחים – השיח הכמותי הראשוני והשיח המספרי המתעורר – לא השתלבו עדיין לשיח אחד, שכן לא נצפו היגדים המקשרים מילות מספר באמצעות מילות יחס אופייניות לשיח כמותי, וגם לא נצפו פעולות היכולות להתפרש כמבוססות על יחסים אלה. עם זאת, היו סימנים להיותם של שני השיחים מקושרים קשר אסוציאטיבי: בעת ביצוע רוטינת האי"י העלה מעיין ביזמתו תיאורים מספריים, והוא עשה זאת למרות העובדה שככל שאפשר לשפוט, הם לא שימשו אותו בהמשך לשום מטרה.

אירועי הוראה

המשימה העיקרית של המראיינת כשהיא תפקדה בתור מורה היה לחשוף את מעיין לשני הליכי האי"י הכמותיים, סדר-ובחר והתאם-ובחר, ולהליך מספרי מנה-ובחר ולהמחיש את שקילותם. את העקרונות שלפיהם נערכו ההתערבויות ההוראתיות הסברנו כבר למעלה, ועתה נדגים את הפעלתם בעזרת שתי אפיזודות, VI ו-XI.

אפיזודה VI: קוביות <3, 4> (סבב 1)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
122	מראיינת	בוא נשים אותן אחת ליד השנייה; כאן יש שלוש	מניחה את שלוש הקוביות בטור על השטיח כשמעיין מסתכל; מוציאה ארבע קוביות	
123	מעיין	גם אני רוצה	לוקח את ארבע הקוביות ומפזר	
124	מראיינת	בוא תסדר אותן אחת ליד השנייה וככה נדע איפה יש יותר.	מחברת את שלוש הקוביות שהונחו על השטיח בטור יחד	
125	מראיינת	אלה שלוש קוביות ועכשיו את אלה תשים, תחבר אותן	מושיטה למעיין את הקוביות	
126	מראיינת	אחת לשנייה.	מחזיקה קובייה שלישית בידה ומדריכה את מעיין כשהוא מחבר שתי קוביות זו לזו	
127	מראיינת	אחת... שתיים... ש...	מושיטה למעיין את הקובייה השלישית כשהוא מחבר את הקוביות	
128	מעיין		מושיט יד לקחת את הקובייה השלישית מהמראיינת	
129	מראיינת	כמה זה? ש..?	מצביעה למעיין על הקוביות שבידו של מעיין	
130	מעיין	שלוש		
131	מראיינת	יופי... אר...	מושיטה לו את הקובייה הרביעית.	
132	מעיין:		מחבר את הקובייה הרביעית	
133	מעיין	... בע	מחזיק את שורת הקוביות בידו	
134	מראיינת	יופי, עכשיו בוא נשים את הקוביות אחת ליד השנייה	כשמעיין מנסה לחבר את שתי השורות יחד, היא מניחה את ידה על השורה בת ה-3 קוביות	
135	מעיין	אני רוצ'ה	מחזיק שורה אחת בכל יד	
136	מראיינת	לא ביחד, רק אחת ליד השנייה. רגע, אני אראה לך איך. בוא אני אראה לך שנייה איך?	לוקחת שורה אחד ממעיין	
137	מראיינת	שנראה איפה יש יותר. תסתכל	מניחה את שתי השורות על השטיח צמודות.	
138	מראיינת	איפה יש יותר, כאן או כאן?		

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
139	מעיין	כאוון...	מעיין מצביע על השורה עם שלוש הקוביות ונשכב לאחור	

באפיזודה VI נועדה הופעת שני ההליכים, סדר-ובחר (החל מתור 125) ומנה-ובחר (החל מתור 127) משולבים זה בזה כדי לעזור ביצירת אסוציאציה ביניהם ולהמחיש את שקילותם. שני ההליכים האלה אמורים להתאחד יום אחד לכדי רוטינה אחת, והצגתם הבו-זמנית הייתה בבחינת הכנת תשתית להתאחדות זאת.

הליך דו-שלבי כמותי נוסף, התאם-ובחר, הופיע לצדם של שני ההליכים הקודמים באירוע הוראה שבאפיזודה XI (ראו בעיקר תורים 44 א-ג).

אפיזודה XI: קוביות <3, 5> [סבב 3, גיל (6)3]

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה
40	מראיינת	מעיין, אתה זוכר... שאנחנו... שאמרתי לך... אתה רוצה לדעת איך אני יודעת איפה יש יותר ואיפה יש פחות? כן?	
41	מעיין		מהנהן
42	מראיינת	אז בוא נחזור לערמה שהייתה לנו קודם, היו לנו כאן קוביות וכאן קוביות. אתה יודע מה אני עושה כדי לדעת? אני מונה	מסדרת שוב 3 ו-5 קוביות; נוגעת בכל ערמה בנפרד באומרה "כדי לדעת"
43	מראיינת	פה יש אחת, שתיים, שלוש; וכאן יש אחת, שתיים, שלוש, ארבע, וחמש	מסדרת את הקוביות בשתי שורות ומונה תוך כדי כך
44א	מראיינת	ואז אני רואה שהקובייה הזו מתאימה לקובייה הזו	מצביעה עם אצבע על שתי הקוביות הראשונות בכל טור.
44ב	מראיינת	זה אותו דבר; והקובייה הזו מתאימה לקובייה הזו, זה אותו דבר; והקובייה הזו מתאימה לקובייה הזו, זה אותו דבר	חוזרת על תהליך התאמת קוביות משתי הערמות עבור שני זוגות נוספים
44ג	מראיינת	אבל פה יש עוד שתי קוביות,	מניחה יד על שתי הקוביות הנותרות בטור של החמש, ואחר כך מרימה את שתי הקוביות מעט
44ד	מראיינת	אז אם יש פה יותר אז אני יודעת שהערמה הזו יותר גדולה	מניחה יד על כל הטור הארוך יותר עם הזזתו מעט שמאלה

דרך נוספת ליצירת אסוציאציות רצויות נקבעה בעקבות לקחי המחקרים הקודמים שלנו, שבהם נעשינו מודעות לכך שלעתים, שאלות הנחשבות בעינינו לשקולות, אינן כאלה בעיני הילדים. המודעות לשקילויות למיניהן היא סממן של עיצום השיח. את התאחדותם של הניסוחים השונים ל"אותה שאלה"

החלטנו לעודד על-ידי הדגמות שבהן אותו ביצוע בא בתגובה לדרישות המנוסחות בצורות שונות. כך לדוגמה, את השאלה "איפה יש יותר קוביות?" החלפנו מדי פעם בשאלות, כמו "באיזו ערמה כמות הקוביות גדולה יותר?" או "באיזו ערמה מספר הקוביות גדול יותר?" או אף בשאלה שיכולה להיחשב לשקולה רק בהקשרים מסוימים "איזו ערמה אתה בוחר?".

כמה היבטים מיוחדים של אינטראקציות לימודיות המודגמות באפיזודות VI ו-XI, ובמיוחד בזו הראשונה, ראויים להדגשה. מעל לכול, בולטת כאן נכונותם של שני המשתתפים לשיתוף פעולה בביצוע המשימה. רואים זאת בצורה ברורה במיוחד בתהליכי הספירה באפיזודה VI, שבהם מעיין משלים בזו אחר זו מילות מספר שהברתן הראשונה נאמרת על-ידי המראיינת. מדובר כאן בסוג בסיסי ביותר של פיגום לימודי (scaffolding). תמונה זאת ממחישה גם את בקיאותו של מעיין ברוטינות בין-אישיות האופייניות לאינטראקציות לימודיות: הוא מפגין את מודעותו לכך, ששאלה הנשאלת מפי בת-שיח יוצרת מרחב לפעולתו; הוא אף פועל לפי הרוטינה האינטראקציונית "עשה את שנעשה בתור הקודם" (את נטייתו זו להפוך את הנעשה בתור אחד לתקדים מועדף עבור התור הבא אחריו ראינו, למשל, באפיזודה II, בתור 12). יעילותן של ההתערבויות הוראתיות שלנו והצלחת תהליך האינדיווידואליזציה היו תלויות בבקיאותו זאת.

התפנית הראשונה (סבב 3, מעיין בן 3(6)): הופעת רוטינת השוואה כמותית ורוטינות מספריות ריטואליות

התפנית הראשונה באופן פעולתו של מעיין נצפתה רק לאחר שני אירועי ההוראה שהוצגו לעיל. בסבב השני, שהתקיים חמישה חודשים אחרי אירוע ההוראה הראשון (אפיזודה VI), לא הבחנו בשינוי משמעותי. בסבב השני לא מצאנו גם ראיות להשפעת אירועי ההוראה שהתקיימו בסבב זה ושהיו מכוונות בעיקר לשיפור בהליך המנייה המבוצע כחלק מתהליכי ההשוואה (ראו טבלה 1). המפנה הראשון הנראה לעין התרחש בסבב השלישי, אחרי חמישה חודשים נוספים. כפי שמודגם באמצעות ארבע האפיזודות שלהלן, ביצועיו של מעיין היו בפעם הזאת מגוונים וכללו מספר הליכים שונים. שתי האפיזודות הראשונות שלהלן (IX, X) התרחשו לפני אירוע ההוראה שהוצג כאפיזודה XI בסעיף הקודם, ואילו השתיים הנוספות (XII ו XIII) התרחשו לאחריו.

אפיזודה IX: קוביות <3, 5> (סבב 3)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
1	מראיינת	יש פה שתי ערמות של קוביות. איזו ערמה אתה בוחר?	מניחה את ידיה מעל קבוצת הקוביות האחת ואחר כך מעל השנייה.	
2	מעיין		מסתכל. מצביע על הערמה של החמש.	

אפיזודה X: קוביות <3, 5> (סבב 3)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
6	מראיינת		מזיזה את הקוביות כך שלא יהיו מסודרות בתבנית.	
6א	מראיינת	ועכשיו איזו ערמה אתה		

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
		בוחר?		
7	מעיין	זאת	מניח יד על הערמה הגדולה.	
...				
11	מראיינת	ובאיזו ערמה יש יותר קוביות?		
12	מעיין		מצביע עם האצבע על הערמה הגדולה (5) ונוגע בשתי קוביות כאילו מונה את הקוביות.	
13א	מראיינת	ובאיזו ערמה יש מספר גדול יותר של קוביות?		
13ב	מעיין		נוגע בערמה הגדולה באצבע, כשהוא עובר על מספר קוביות כאילו בתהליך של מנייה; המנייה אינה מדויקת	
14	מראיינת	ובאיזו ערמה יש מספר קטן יותר של קוביות?		
14א	מעיין		נוגע בערמה הקטנה עם האצבע כאילו בדרך של מנייה	
15	מראיינת	איך אתה יודע?		
16	מעיין	אהה... אהה... אהה... כי הייתי אצלך פעם		

אפיזודה XII: קוביות, <4, 5> (סבב 3)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
51	מראיינת	לא, רגע, לא, לא כל ערמה היא בנפרד, איזו ערמה אתה בוחר?	מפרידה בין הערמות	
52	מעיין	אחד, שתיים, שלוש, ארבע... ארבע	באומרו "ארבע" מסדר בשורה; מחייך, משעין ראש על היד ומביט לעבר המראיינת, כאילו מחכה לתגובה	
53	מראיינת	יופי,		
54	מעיין	ארבע	נאמר כמעט ביחד עם המילה יופי של המראיינת	
55	מראיינת	כאן יש 4 קוביות.	מצביעה הצבעה מהירה על הערמה עם 4 הקוביות	
56	מעיין	אחת, שתיים, שאאלוש, ארבא..א..ע, חמש	מקרב אליו את הערמה השנייה ומתחיל לסדר בשורה תוך כדי המנייה	
57	מראיינת	יופי. אז מה זה		

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
		אומר?		
58	מעיין	זה יותר וזה קצת		
59	מראיינת	מה יותר ומה קצת, תראה לי?	משחק בערמה שבה יש 4 קוביות.	
60	מעיין	זה קצת וזה הרבה	מצביע בהתאמה על הערמה שבה יש 4 קוביות ואז על הערמה שבה יש 5 קוביות.	
61	מראיינת	יופי! איך ידעת? לפי מה?		
62	מעיין	כי את אמרת לי	מחייך למראיינת	
63	מראיינת	כי אמרתי לך מה?		
64	מעיין	שסופרים		

אפיזודה XIII: קוביות, <7, 8> (סבב 3)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
119	מעיין	תראי	לפניו שורות של 7 ו-8 קוביות. נכנס לדברי המראיינת	
120א	מעיין		מתאים קוביות אחת לשנייה: (לוקח קוביות משורה ראשונה ושם ליד השנייה) קובייה אחת ואחר כך שנייה.	
120ב	מעיין	וזאת וזה לזאת וזה לזאת וזה לזאת וזה לזאת	שם קובייה הרביעית במהלך ההתאמה מדלג על קובייה אחת מקבל טורים שנראים שווים באורכיהם – כאילו יש מספר שווה של קוביות בשתי הערמות	
121	מראיינת	אז מה אתה אומר? איפה יש יותר ואיפה יש...		
122	מעיין	בכולם יש יותר		

A. רוטינות

לכאורה, בכל המקרים המוצגים לעיל הופעלו הליכים דו-שלביים. עם זאת, הרוטינה שבוצעה באפיזודה IX שונה מאלה שבאפיזודות האחרות, או לפחות בניסיון הביצוע הראשון שרואים שם. נטען להלן, כי

הליך הרוטינה שבאפיזודה IX, הבט-ובחר, הוא מאוגד ושעל-כן ניתן לתאר רוטינה זאת כחקירה, וכי מומחה לשיח היה מתאר את המטלה המבוצעת באמצעותה – השוואה כמותית במבט. בשאר המקרים, אלה המוצגים באפיזודות XII,X ו-XIII, פירש מעיין את מצב המטלה ככזה שמורכב מאירועי ההוראה, שההליכים שהוא מבצע הם חיקויי הפעולה שבוצעו אז על-ידי המראיינת באפיזודות VI ו-XI. ההליכים האלה לא היו מאוגדים ומעיין לא קיבל במהלך ביצועם שום החלטות עצמאיות. בתור כאלה, היו אלה ביצועים של רוטינות מסוג ריטואל.

- רוטינת השוואה כמותית במבט

הליך. בשלוש המטלות שבהן מספרי הקוביות היו <3, 5>, <4, 5> ו-<5, 5> (המקרה הראשון הוצג באפיזודה IX; האחרים אינם מצוטטים פה, אך את התזמון שלהם אפשר לראות בטבלה 1) תשובותיו של מעיין היו תקינות, כלומר תאמו את התשובות שהיה נותן מומחה לשיח כמותי. המקרה של שוויון <5, 5> היה מעניין במיוחד. תשובתו של מעיין לשאלה "איפה יש יותר?" התבטאה כאן בשימת ידיו על שתי הערמות (תור 24) בליווי היגד קצר "בשתיהם" (תור 32).[13]

נשאלת השאלה האם בכל המקרים האלה בוצע הליך השוואה כמותית או מדובר בניחושים מוצלחים. בנתונים שלנו מצאנו ראיות התומכות בכך, שבכל המקרים הופעל ההליך הבט-ובחר, וזה נכון גם באפיזודות כמו X, XII ו-XIII, שבהן נעשה שימוש בהליכים דו-שלביים נוספים (על כך נדון בהמשך). כך, לדוגמה באפיזודה IX הקדים מעיין את תשובתו בהתבוננות מרוכזת בשתי הערמות, כאילו הוא עומד לבסס את בחירתו על השוואה כמותית במבט של השטחים הנתפסים על-ידיהן (ראו תורים 1, 2 באפיזודה IX). בעקבות בחינה מדוקדקת (ראו להלן) פסלנו גם את האפשרות שהתשובות הנכונות שניתנו באפיזודות XII ו-XIII היו תוצאה של תת-הליכים אחרים, כגון מנייה שבוצעה שם. לפיכך, אנו גם טוענות, כי ההליך הבט-ובחר של מעיין היה **מאוגד**, כלומר תוצאת התת-הליך הראשון קבעה את דרך ביצועו של התת-הליך השני.

מטלה. לאור כל אלה, אפשר לומר שמעיין פירש את מצב המטלה בהתאם לכוונות המראיינת, דהיינו כמטלת בחירה כמותית. עם זאת, אי אפשר, כנראה, לזקוף את יכולתו החדשה דווקא לעבודת המראיינת. יש להניח כי מרחב התקדימים מורכב כאן מאירועים שרובם התרחשו מחוץ למסגרת המחקר. במשך עשרת החודשים שחלפו מאז סבב הראיונות הראשון, חיי יומיום זימנו למעיין הזדמנויות רבות לצפות באנשים מבצעים בחירות כמותיות למיניהן. מתקבל על הדעת שמתוך התקדימים האלה הוא למד להשתמש במילה "יותר", כפי שילדים לומדים להשתמש במילים אחרות, שהרי ההליך הבט-ובחר הוא חלק בלתי נפרד מעשיית שימוש במילה זאת.

סוג הרוטינה. שתי עובדות מעידות על כך שהרוטינה המבוצעת כאן היא מסוג חקירה: ראשית, ההליך הדו-שלבי שבוצע היה מאוגד, ועל-כן נדרשו החלטותיו העצמאיות ושנית, התנאי לסיום מוצלח היה היגד (המבוצע במקרה זה בתנועת יד) המשקף את מצב הדברים בעיני מעיין.

- רוטינה דו-שלבית המערבת מנייה, סידור והתאמה

הליכים. בהמשכו של הסבב השלישי נוספו לביצועיו של מעיין שלושה תת-הליכים: מנייה, סידור והתאמה. כזכור, המראיינת הציגה אותם באפיזודות IV (כאן הופיעו מנה וסדר) ו-XI (שכללה מנה,

13. במחקר הקודם השאלה "איפה יש יותר?" שנשאלה במצב של שוויון נענתה ב"באף אחד". אנו רואים תשובה זאת כשקולה, כלומר מביעה בעיקר את העובדה שהמצב אינו מאפשר בחירה של ערמה אחת. תשובה זאת, המאותתת את מודעותו של מעיין לשוויון אך גם מצביעה על אי-יכולתו להשתתף בשיח תקני עליו, לא הפתיעה אותנו. את התופעה הכרנו היטב ממחקרינו הקודמים (Sfard & Lavie, 2005). מחקרים אלה שכנעו אותנו גם, כי היא בלתי נמנעת כל עוד השיח הכמותי/מספרי של הילד אינו מעוצם, וכל עוד אין בשל כך עצמים שאפשר היה לתאר אותם כ"אותו דבר" או "שווים".

התאם וסדר). הם בוצעו שם כחלק ראשון של השוואה כמותית. מנייה הופיעה בביצועי מעיין תחילה רק במרומז (ראו אפיזודה IX) ולאחר מכן בצורה מפורשת (אפיזודה XI) משולבת בסידור הקוביות. לאחר מכן הופיע גם שילוב בין התאמה לסידור (אפיזודה XIII).

המנייה הופיעה במרומז אחרי שהשאלה "איפה יש יותר?" באשר לקערות עם 3 ו-5 קוביות נענתה על-ידי מעיין בהליך הבט-ובחר (ראו אפיזודה IX) ונשאלה פעם נוספת (אפיזודה X, תור 6א). בתורים 13א ו-14ב אפשר לראות את תנועות מניית הקוביות. אנו מפרשות אותן כמעשה של מנייה מדומה, שכן התאמת תנועות ההצבעה שכוונו לקוביות לא הייתה אחת-לאחת והיא אף לא לוותה במילות מספר. התשובה שנתן מעיין בפעם הזאת הייתה חזרה על תשובתו שניתנה טרם המנייה, לכאורה, באפיזודה IX. ברור, על-כן, שלא מדובר כאן בתהליך דו-שלבי של מנה-ובחר.

באפיזודה XII שנערכה באותו מפגש לאחר ההתערבות ההוראתית הנוספת (ראו אפיזודה XI לעיל), המנייה נעשתה למפורשת. למרות תקינותה, גם הפעם אין יסוד לטעון שהתשובה הנכונה של מעיין ניתנה על בסיסה, אכן, אנו משערות שהיא נקבעה על-פי השוואה כמותית במבט, בדומה לזו שביצע באפיזודה IX. הספק באשר לחלקה של המנייה בתהליך הבחירה התעורר בשל חוסר מיומנותו של מעיין בפעולה זאת. בסבב זה ראינו אותו טועה במנייה שוב ושוב כשהוא מדלג על פריטים. נוסף על כך, לא נצפתה פעולת השוואת התוצאות הסופיות של המנייה. לנוכח כל אלה, אפשר לומר שההליך הדו-שלבי מנה-ובחר היה מקוטע (לא מאוגד), כלומר הקשר בין שני חלקיו היה אסוציאטיבי בלבד: מעיין למד כי הבחירה היא מעשה שיש לבצע **לאחר** מנייה, אך לאו דווקא על בסיסה.

התת-הליך **סידור** קוביות הופיע במרומז באפיזודה XII משולב בהליך המנייה (ראו תור 56 – היחיד שבו יש ניסיון לסידור בשורה; עבודת הסידור אף לא הושלמה), והתרחש שוב באפיזודה XIII, הפעם משולב עם ההליך של התאמה (ראו תורים 120-121, שם מעיין מסדר את הערמות של 7 ו-8 קוביות בשתי שורות תוך מנייה ותוך ניסיון להתאימן אחת לאחת). גם הפעם נראה, כי התשובה הסופית נקבעה על-פי תוצאה של השוואה במבט בין אורכי השורות, כפי שהתקבלו בתהליך (הבלתי תקין) של סידור בשורה תוך כדי ההתאמה. השוויון, לכאורה, בין השורות גרם לתגובה אופיינית של מעיין למצב זה: אמירה "בכולם יש יותר" (תור 122). אפשר לומר, על-כן, כי התת-הליך סידור שיחק כאן תפקיד, אך הוא בוצע בצורה בלתי תקינה, והוביל להיגד סופי שונה מזה שהיה מתקבל בביצוע תקין. באשר לתת-הליך **ההתאמה**, על-פי הנתונים שלנו אין אפשרות לשפוט את תפקידו או טבעו, שכן לא הזדמן לנו לראותו מבוצע בלי ליווי ההליכים האחרים.

השאלה האחרונה באשר לארבעת תת-ההליכים נוגעת לקשר ביניהם. בעיני משתתף מיומן של שיח כמותי-מספרי ההליכים מנה-ובחר, סדר-ובחר והתאם-ובחר הם שקולים, כלומר הם מקושרים – "קשר התשובה": המשתתף מכיר בכך, כי תוצאתם תהיה תמיד אותה תוצאה ובשל כך מתייחס אליהם כאל ניתנים להחלפה. לא כך היה במקרה של מעיין, שככל הניתן לשפוט, הוא לא התעניין בתוצאות של ההליכים (כדי שיציין אותן, המראיינת הייתה צריכה לשאול "אז מה אתה אומר?" בסוף כל ביצוע – ראו 14, 57, 121). ככל הנראה, הילד ראה את כל שלושת התת-הליכים כיכולים, ואולי אף צריכים,

להופיע משולבים זה בזה (אם הוא לא הצליח לבצע את כל השלושה בעת ובעונה אחת היה זה, כנראה, רק בשל אי-יכולתו להתמודד עם המורכבות של המשימה). ייתכן שראייה כזאת הייתה, בחלקה, תוצאה של העובדה כי באירועי ההוראה הראשונים תת-הליכים אלה הוצגו לילד במשולב (כלומר, ההליך היה מן הצורה <"סדר תוך כדי התאמה ומנייה", בחר>). לכאורה אפשר לבקר את המראיינת על כך שלא הציגה את ההליך סדר-ובחר, למשל, בנפרד מההליכים האחרים. עם זאת, להופעתה של הפעולה של סידור עם זו של מנייה והתאמה יש חשיבות רבה, שכן בזכותה נוצר קשר אסוציאטיבי ביניהן – "קשר השאלה" (השאלה היא זאת שיוצרת את הצורך בהופעתן המשותפת) שעם הזמן אמור להפוך ל"קשר התשובה".

מטלה. לפי כל הנאמר לעיל, מעיין התנדנד בין שתי פרשנויות שונות של מצב המטלה. פרשנות אחת הובילה אותו למצבי עבר שבהם הופעל ההליך המאוגד של הבט-ובחר, כלומר **מטלת השוואה כמותית**. פרשנות זו זהה לפרשנותו של מומחה לשיח מספרי. לפי הפרשנות האחרת, **אירועי הוראה** היו התקדימים הקובעים.[14] הפעם, **ההליך שביצעה המראיינת היה לחלק מהגדרת המשימה**: מטרת הביצוע הייתה לשחזר בדייקנות מרבית את פעולותיה האחרונות של המומחית. באפיזודות XII ו-XIII שבוצעו מיד אחרי ההדגמה של המראיינת, פעל מעיין בהתאם לפרשנות השנייה, וזאת למרות יכולתו לבצע השוואות כמותיות במבט. הוא הונחה, ככל הנראה, על-ידי כלל אינטראקציה ידוע לכל ילד, שלפיו דרכיה של בת-שיח סמכותית "גוברות" על שלו. במקרים אלה הוא אף הסתפק בביצוע של התת-הליך השני ולא המשיך ביזמתו אל הבחירה, ועל-כן התייחס לשילובים השונים של מנייה, סידור והתאמה כאל רוטינות ריטואליות בפני עצמן. ואולם כאשר השאלה "איפה יש יותר?" נשאלה על-ידי המראיינת פעם נוספת (תורים 57, 120), הוא החליף את הפרשנות ובכל אחד מהמקרים בחר לבסוף לבצע השוואה כמותית במבט. נוסיף שהחלפת המטלה אירעה גם באפיזודה X, אך היא התרחשה כאן בכיוון הפוך: מעיין ביצע את התת-הליך המרומז של מנייה רק אחרי שערך השוואה במבט (אפיזודה IX; ראו את השאלה החוזרת בתור 6א).

בהקשר זה מעניין לציין את התפקיד שמילאה המילה "מספר" בפירוש מצב המטלה. ככלל, די היה בהופעתה של מילה זאת כדי שמעיין יפנה למנייה. כך קרה, לדוגמה, כשנשאלה השאלה "באיזו ערמה יש **מספר** קוביות גדול יותר?" (13א באפיזודה X). תופעה זאת חזרה על עצמה גם בסבבים נוספים: כל אימת שהשאלה הכילה את המילה "מספר", מעיין מנה, וזאת אף שלא השתמש במספרים כבסיס לקבלת החלטות.

סוג הרוטינה. לפי כל הסימנים, ההליכים שהתחילו בצירופים שונים של מנייה, סידור או התאמה בוצעו בשלב זה באופן ריטואלי בלבד: במהלך הביצוע מעיין לא קיבל החלטות עצמאיות, ותשומת לבו הייתה נתונה לתהליך עצמו ולא לתוצאתו. העלינו גם השערה שלא היו אלה הליכים

14. ההשערה שהופעתם של סידור, מנייה והתאמה בסבב זה חלה בהשפעת התערבויותינו ההוראתיות מקבלת משנה תוקף לנוכח הדברים שהשמיע מעיין יותר מפעם אחת כשהתבקש להסביר את פעולותיו. לדוגמה, כשנשאל "איך אתה יודע?", הוא השיב: "כי את אמרת לי" (ראו תורות 60-63 באפיזודה XI).

דו-שלביים, אלא חד-שלביים, שכן הפעולה המשולבת של מנייה וסידור או של התאמה וסידור לא הובילו לבחירה.

לבסוף נעיר, כי היו בשלב זה הליכים השייכים לשיח כמותי-לא מספרי (הבט ובחר), וכאלה השייכים לשיח מספרי שאינו כמותי (מנה-ובחר), אך לא היה שום הליך שקישר בין שני השיחים האלה, כלומר ששייך לשניהם בעת ובעונה אחת. בשלב זה רוטינה מבוססת הליך הבט-ובחר לא הייתה כבר ריטואלית, שכן בביצועה קיבל מעיין החלטות עצמאיות (בחירתו הייתה מבוססת על תוצאת התת-הליך הראשון). לעומת זאת, השיח המספרי של מעיין הוא עדיין ריטואלי. עם זאת, גם אם מדובר באסוציאציה של ריטואלים בלבד ולא בראיית שקילותם, הרי שבזכות אסוציאציה זאת עשה מעיין צעד חשוב לקראת איחוד של השיח הכמותי והמספרי.

B. מילות מפתח

כמו הרוטינות, כך גם השיח הכמותי והשיח המספרי המילולי נותרו נפרדים: מעיין השתמש עדיין במילות מספר רק כתוויות, והגה אותן בנפרד, שלא בתוך ביטוי לשוני מורכב (הן הופיעו בתהליכי ספירה או בסיומה בלבד). בפרט, הוא לא קישר בין מילות כמות או מספר במילות יחס כמותי (כגון "גדול יותר", "פחות" וכדומה) ולעומת זאת, היגדים המאותתים את נוכחותו של השיח הכמותי, כגון "זה יותר" (תור 58), לא הכילו מילות מספר. אל מאגר מילות הכמות הצטרף הביטוי "אותו דבר", אך בשלב זה הוא מופיע רק כחזרה על מילות המראיינת.

לאור כל הדברים שנאמרו בסעיף זה אפשר לסכם ולומר, שבסבב השני ראינו לראשונה התחלה של שיח כמותי לא ריטואלי ובמקביל הופיע שיח מספרי ריטואלי. ממצאים אלה הם אישוש למודל האונטוגנטי של שיח מספרי-כמותי שהצענו בתחילת מאמר זה.

התפנית השנייה (סבב 4, מעיין בן (9)3): רוטינת השוואה כמותית במבט מתגמשת ומתהדק הקשר בינה ובין הרוטינה המספרית

בסבב 4 שקיימנו ארבעה חודשים אחר כך, הבחנו בהתחזקות השיח הכמותי וכן בתחילת ההתקרבות בינו לבין השיח המספרי.

A. רוטינות

- רוטינה של השוואה כמותית מסתעפת

את התחזקותו של השיח הכמותי ראינו באפיזודה XIV, שם הבחנו בשינוי ברוטינה של השוואה כמותית.

אפיזודה XIV: קוביות <3, 5> (סבב 4)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
69	מראיינת	ואיך אתה יודע שבערמה הסגולה יש יותר קוביות?	מונחות לפניה 5 קוביות סגולות ו-3 קוביות חומות (מעיין הצביע זה עתה על הערמה של 5 קוביות כזו שיש בה יותר)	
70	מעיין	כי שמתי לי	משחק בערמה של הקוביות החומות.	
71	מראיינת	כי שמת לך?		
72	מעיין	כן		
73	מראיינת	מה שמת?		
74	מעיין	אם נבנה את זה אז נראה שזה לא גבוה.	מניח את הקוביות החומות זו על גבי זו ובונה מגדל.	
75	מעיין	ואם נבנה את זה (מתייחס לקוביות הסגולות) נראה שזה כן גבוה.	מניח את הקוביות הסגולות זו על גבי זו ובונה מגדל.	
76	מראיינת	נהדר, נהדר. כל הכבוד.		
77	מראיינת	אז צדקת?	מהנהן.	
78	מראיינת	מה אתה רואה? מה גילית?	מקרב את שני המגדלים זה לזה.	
79	מעיין	שהסגול גבוה.		
80	מראיינת	שהערמה הסגולה היא יותר גבוהה. נכון. נכון אתה צודק.	מצמיד את שני המגדלים.	

הליך. באפיזודה זאת, שהתקיימה לאחר ביצוע מוצלח של הליך הבט-ובחר (מהלך זה אינו מופיע באפיזודה XIV), בחר מעיין להצדיק את תשובתו זאת על-ידי ביצוע אלטרנטיבי: הוא ציפה מראש שההליך סדר-ובחר יביא לאותה תוצאה (ראו תור 75). הדבר מעיד על שני שינויים בהשוואה לסבב הקודם. ראשית, ההליך סדר-ובחר התאגד, כלומר תת-הליך הבחירה מתבצע כעת לפי תוצאת תת-הליך הסידור. שנית, מעיין מודע עכשיו לשקילותם של ההליכים הבט-ובחר וסדר-ובחר, כלומר לכך שהם מספקים תמיד אותה תשובה, והן לכך שהתשובה הזהה הופכת אותם לאופציות הניתנות להחלפה בביצוע של אותה מטלה. ראוי גם לציון כי המראיינת מחזקת את "קשר התשובה" כשהיא מברכת את מעיין על כך ש"צדק" בתשובתו הקודמת (תורים 77, 80).

מטלה. שני הליכים אלה אוחדו להליך אחד, שבו כל אחד מהם הוא הסתעפות אחרת, כלומר אחת משתי דרכי פעולה שקולות. פירוש הדבר שמצבי מטלה אשר כבר בסבב הקודם הובילו אל ההליך הבט-ובחר, הם גם שיוכלו מעתה להוביל להליך סדר-ובחר.

סוג של רוטינה. ההליך המאוחד הופך את רוטינת ההשוואה במבט לגמישה יותר, היכולה להתבצע מעתה באחד משני מסלולים אלטרנטיביים: את ערמות הקוביות אפשר יהיה להשוות זו לזו בהליך הבט-ובחר או בהליך סדר-ובחר. התגמשות הרוטינה פירושה שיש צורך בהחלטות רבות יותר של המבצע,

וזוהי התרחקות נוספת מריטואליזציה, ולכן גם התחזקות נוספת של השיח הכמותי.

- רוטינה מבוססת הליך מנה-ובחר: הידוק הקשר בינה לבין רוטינת השוואה כמותית

גם הקשר בין ההליכים סדר-ובחר ו-מנה-ובחר עבר שינוי מסוים, אם כי על-פי הנתונים שבידינו אי אפשר לפסוק אם חלה כבר התאחדות מלאה של הרוטינות המבוססות הליכים אלה (ראו למשל אפיזודה XV).

אפיזודה XV: קוביות <4, 5> (סבב 4)

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
189	מראיינת	עכשיו אתה תגיד לי איפה יש יותר.	(ערמה ימנית - 5 קוביות סגולות, ערמה שמאלית - 4 קוביות צהובות).	
190	מעיין	אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש	פונה בהתלהבות לעבר הקוביות הסגולות ומתחיל למנות. מונה בקול רם ותוך כדי כך יוצר מהערמה, שורה של קוביות. (קוביות סגולות - 5) עובר לערמה השנייה.	
191	מעיין	אחת, שתיים, שלוש, ארבע.	מונה בקול רם ותוך כדי כך יוצר מהערמה שורה של קוביות (קוביות צהובות - 4)	
192	מעיין	אז בזה יש	מצביע על שורת הקוביות הסגולות.	
193	מראיינת	נכון מאוד! כל הכבוד! מצוין! כל הכבוד!		

הליך. באפיזודה זאת, כמו באפיזודה XII, ביצע מעיין סידור ומנייה בו-זמנית. עובדה זאת מעלה שתי השערות מתחרות. לפי ההשערה הראשונה, התשובה לשאלה "איפה יש יותר?" ניתנת בהליך מנה-ובחר, שהוא כעת תקין לגמרי: המנייה היא נכונה, אחריה מעיין מבצע "בראש" השוואה נכונה של המספרים שהתקבלו בה, ומשתמש בתוצאה בבחירת הערמה של 5 קוביות. במקרה זה העובדה שתוך המנייה מעיין מארגן את הקוביות בשורה נובעת רק מדאגתו למנייה נכונה. פרשנות אלטרנטיבית היא שהתת-הליך סדר-ובחר הוא הבסיס לתשובה. במקרה זה, מבוססת תשובה זאת על השוואה תקינה של אורכי השורות, ואילו המנייה מופיעה רק בשל הקשר האסוציאטיבי שנוצר בינה לבין ההליך סדר-ובחר. ייתכן, כמובן, שיש יסוד של אמת בשתי ההשערות, ובמקרה זה אפשר לטעון ל"קשר התשובה" (שקילות) גם בין ההליכים הבט-ובחר וסדר-ובחר. בין אם נכונה ההשערה הראשונה, השנייה או השלישית, מדובר בשינוי משמעותי וחשוב: התקרבות, ואולי אף התחלת ההתאחדות, של השיחים הכמותי והמספרי.

מטלה. למרות אי-יכולתנו להכריע בשאלה אם ההליך מנה-ובחר מאוגד או לא, נוכל להעלות השערה

מבוססת, באשר לדרך שבה פירש מעיין את מצב המטלה: לפי כל הסימנים, הוא ניסה לבצע השוואה כמותית.

סוג הרוטינה. לאור טענה אחרונה זאת, הרוטינה שבוצעה כאן אינה עוד ריטואל. ייתכן אפילו כי היא כבר הפכה לרוטינה במלוא מובן המילה, אך אין בידינו ראיות כדי לאושש השערה זאת (הראיה הנחוצה היא שמעיין נוטה ליזום ביצוע רוטינה זאת בעצמו, בהתאם לצרכיו).

B. מילות מפתח

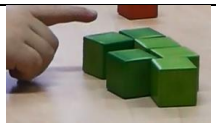
מעיין אינו מקשר עדיין בין מילות כמות ומילות מספר באמצעות מילות יחס, כלומר אינו יוצר ביטויים משותפים לשיח כמותי ולשיח מספרי (משתתפים מנוסים של שיח מספרי-כמותי עושים זאת, למשל, כשהם משתמשים בתבניות, כמו "x קוביות זה יותר מ-y קוביות" או "x גדול יותר מ-y ", בהן x ו-y הן מילות מספר). החידוש היחיד שהבחנו בו הוא הופעת ניסוחים, כגון "זה גבוה" או "זה לא גבוה" (אפיזודה XIV, 74, 75) או "כאן יש קצת וכאן הרבה", שבהם ההשוואה מוצגת על-ידי שימת תוויות של הכמויות ה"מתחרות" זו לצד זו. אף-על-פי שמעיין הדביק תוויות כמותיות לאוספי פריטים כבר במפגש הראשון, הביטויים המורכבים יותר שראינו בפעם הזאת הם בבחינת חידוש. ואמנם, האמירה "כי פה יש קצת ופה הרבה" משמשת עתה כנימוק לתשובה שניתנה לשאלה "איפה יש יותר?", ואילו בסבבים הקודמים השוואות כמותיות היו נדירות, ולרוב הן לא הופיעו כלל. כל זה מורה שוב על התפתחות מסוימת בשיח כמותי לא-מספרי.

התפנית השלישית (סבב 5, מעיין בן 4(1)): תחילת התאחדותם של השיח הכמותי והמספרי

בסבב זה ראינו שני שינויים עיקריים ברוטינות: אחד, ההליך המספרי הלך בעקבותיהם של שני הליכי ההשוואה הכמותית והפך למאוגד והשני, הוא התאחד עם שני ההליכים הכמותיים שהתפתחו קודם לכן, וגרם בכך להגמשה נוספת של רוטינת השוואה כמותית-מספרית. בנוסף לכך, הבחנו בשימושים משולבים במילות מספר ובמילות יחס כמותי. אלה וגם אלה הראו על תחילת התאחדותם של השיח הכמותי והשיח המספרי.

אפיזודה XVI : קוביות <4, 6> [סבב 5, גיל (1) 4]

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
32	מראיינת	וזאת קצת, בסדר. אהמם, אתה יכול לומר לי באיזו ערמה יש מספר גדול יותר של קוביות?	מונחות לפניה שתי ערמות של קוביות: 6 ירוקות ו-4 אדומות. האפיזודה מתחילה לאחר שמעיין ביצע כבר השוואה כמותית במבט, והכריז שבערמת הקוביות האדומות יש "קצת" ובזו של הירוקות "הרבה".	
33	מעיין	ב... אחד, שתיים, שלוש, ארבע	מונה את הקוביות האדומות (שהן אכן 4)	

תור דיבור	דובר	מה נאמר	מה נעשה	הבהרות
34	מראיינת	ממ		
35	מעיין	אחת...	מתחיל במנייה של הקוביות הירוקות – מהקובייה השמאלית קיצונית (זו שהוא מצביע עליה)	
36	מעיין	לא, אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש	ואז משנה את דעתו ומתחיל למנות שוב מהקובייה הירוקה שהכי קרובה אלינו. מונה את הקובייה הרביעית פעמיים כארבע וכחמש	
37	מעיין	אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש, שש	מתחיל שוב במנייה. מונה את הקוביות מהקיצונית ביותר ועד הרחוקה ביותר	
38	מעיין	כאן יש מעט וכאן יש הרבה	'מעט' מתייחס לערמת הקוביות האדומות (4) ו'הרבה' מתייחס לערמת הקוביות הירוקות (6)	
39	מראיינת	או.קיי		
40	מעיין	שש, שש	מצביע על ערמת הקוביות הירוקות (אכן 6) ופונה לערמת הקוביות האדומות ומתחיל לספור	
41	מעיין	אחת, שתיים, שלוש, ארבע.	מונה את הקוביות האדומות	
42	מראיינת	ואיפה יש פחות קוביות?	בוחר בערמת הקוביות האדומות	
43	מעיין	בארבע		
44	מראיינת	בארבע? ואיפה יש יותר קוביות?		
45	מעיין	בחמ.. בשש		

A. רוטינה

ההליך. להלן תיאור מפורט של שני השינויים ברוטינה.

החידוש הראשון הוא **התאגדותו של ההליך מנה-ובחר**. אם בסבב הקודם פקפקנו באשר להיותו של הליך זה מאוגד, הרי שבסבב החמישי לא היה עוד מקום לספק. כפי שאפשר לראות באפיזודה XVI, החלק הראשון של ההליך מבוסס על החלק השני: מעיין בוחר את התשובה לפי תוצאת המנייה. ליתר דיוק, התשובות של מעיין לשאלה "איפה יש פחות?" (תור 42) ו"איפה יש יותר קוביות?" (תור 44)

ניתנות באמצעות תוצאות של מנייה שביצע קודם לכן (תורים 43 ו-45, בהתאמה) ובהתאם ליחס הגודל בין המספרים שהתקבלו בה.

שני היבטים נוספים של דרכי הפעולה שנקט מעיין באפיזודה XVI ראויות לציון. האחד, הליך המנייה הוא כעת תקני לגמרי, וזאת אף שהערמות הנספרות אינן מסודרות ושבתנאים אלה מעיין נוטה לטעות (ראו תור 36). העובדה שהוא מסוגל להבחין בטעותו ולתקנה (תור 37) מעידה על מודעותו לכללי המשחק. בפרט, הוא מודע לעקרון הקרדינליות, שלפיו ספירה חוזרת אינה משנה את התוצאה. ואמנם, לאחר הספירה מעיין משתמש רק במילת המספר האחרונה ואינו חוזר על ההליך כולו (ראו תורים 40, 43, 46). השני, למרות פעולתו העצמאית במקרה של הליך המנייה, בביצוע של ההליך הדו-שלבי מנה-בחר עדיין מעיין זקוק ל"פיגומים": המעבר מתת-הליך של מנייה לזה של בחירת התשובה מתבצע רק לאחר שהשאלה נשאלת שוב (ראו תורים 42 ו-44).

השינוי הנוסף התבטא **בהתאחדותם של שלושת ההליכים, הבט-ובחר, מנה-ובחר וסדר-ובחר לרוטינה אחת**. כזכור, ההליכים הבט-ובחר וסדר-ובחר היו מאוחדים כבר בסבב הקודם. כעת מצאנו ראיות שבזכותן אין עוד ספק, כי ההליך מנה-ובחר הצטרף אל שני האחרים. באפיזודה XVI, לאחר שהמראיינת ביקשה ממעיין לנמק את התשובה שהפיק קודם לכן בעזרת ההליך סדר-ובחר, הילד ביצע את ההליך מנה-ובחר, אפשר להבין שהוא עושה זאת כדי להראות שתתקבל אותה תוצאה. המראיינת מחזקת את הרעיון שההליכים הם שקולים, כשהיא שואלת את מעיין אחר כך "יש לך עוד דרך לדעת איפה יש יותר?" (זה קורה בתור 55, שאינו חלק מאפיזודה XVI).

מעתה, כל שלושת ההליכים הדו-שלביים יהיו מרכיבים של רוטינת אי"י המאוחדת: כל אימת שתישאל השאלה "איפה יש יותר?", מעיין יבחר באחד ההליכים ויעשה זאת, ככל הנראה, בהתאם לנוחות המשוערת של הביצוע (הבחירה יכולה להיות תלויה, למשל, בטבעם של המתווכים שבהם אמורה הפעולה להתבצע).

המטלה. ככל שגָדַל מספר התקדימים ולכן עלה גם מספרם של מסלולי ביצוע אפשריים, כך הצטמצם מספר המאפיינים המצביים שלפיהם זיהה מעיין את המטלה. עם זאת, הבחנו שבחירת מרחב התקדימים עדיין הייתה רגישה לניסוח השאלה: מעיין בחר בהליך מנה-ובחר רק לאחר שהמראיינת שינתה את הניסוח הקודם של שאלתה ("איזו ערמה אתה בוחר?") לכזה שהכיל את המילה "מספר" ("איפה יש מספר גדול יותר של קוביות"? – תור 32). אפשר לומר, כי תבניות לשוניות שהיו בעינינו שקולות לחלוטין עדיין לא היו כאלה בעיני מעיין.

סוג הרוטינה. ההתגמשות הנוספת ברוטינה וגידול במספר ההחלטות שמעיין יצטרך מעתה לקבל בעומדו במצב מטלה אי"י הם בבחינת התרחקות נוספת מריטואלים. אולם, אי אפשר לדעת אם הרוטינה היא חקירה במלוא מובן המילה, שכן לא הייתה לנו הזדמנות לבדוק אם יש מצבים שבהם מעיין יוזם את ביצועה בעצמו.

B. מילות מפתח

ראיות נוספות לתחילת התאחדותם של השיח הכמותי והמספרי ראינו באופן שבו השתמש מעיין במילות מפתח. בסבבים הקודמים לא נמצאו בנתונים שלנו ביטויים "חוצי-שיחים" שהיו יכולים להעיד על תחילת התאחדות כזאת. הפעם ראינו ניצנים ראשונים של התבטאויות המשלבות מילות מפתח של שני השיחים. כך, לדוגמה, כשעמדו מול מעיין שני מגדלים, מגדל של ארבע קוביות ומגדל של שלוש, הוא הכריז תוך הצבעה "אלו **ארבע** וזה **קצת**" (תור 108, שאינו מופיע במאמר). בכך הוא הכניס את "ארבע" להקשר כמותי השוואתי, והראה שמילות מספר נעשות כעת לחלק משיח כמותי. עדות נוספת להתחברות הדרגתית של שני השיחים הגיעה עם הופעת משפטים, כמו "חמש צהובות", שבהם מילת מספר הופיעה בתפקיד של שם תואר לקבוצת הקוביות הצהובות. זהו תפקיד דומה הן מבחינה דקדוקית והן מבחינת שימוש לזה של מילות כמות, כמו "הרבה" או "קצת". המראיינת מנסה לקדם את החיבור בין השיח המספרי לבין הכמותי כשהיא מסכמת תוצאה של הפעלת התת-הליך מנה באומרה "שבע הוא מספר גדול יותר מחמש" (תור 199 שאינו מופיע במאמר). אמירה זאת מסיטה את השיח למחוזות רחוקים מאוד מאלה שבהם נמצא מעיין ברגע זה: לא זו בלבד שהיא מקשרת בין מילות מספר באמצעות ביטוי כמותי השוואתי ("גדול יותר"), אלא שהיא גם מדברת על מספרים כעל עצמים בפני עצמם. אף שמדובר בתכונות שיח שהופעתן אינה עוד קרובה (וזה אמור בעיקר בנוגע לעיצום), הרי שהחשיפה המוקדמת של מעיין ליעד רחוק זה היא חשובה. למעשה, השינוי הדרוש לא יתרחש בלעדיה, ובלי פעולות שיח דומות שיבואו אחריה.

מספר התפתחויות נוספות בשימוש במילות מספר וכמות ראויות לתשומת לב בהקשר הנוכחי. כך, לדוגמה, התחילה להופיע המילה ההשוואתית "יותר", שלמעשה לא נכחה בשיח של מעיין עד כה – ראו ביטויים כמו "זה הרבה יותר" (תור 122 אינו מופיע במאמר); כאן הדובר הבוגר היה אומר כנראה רק "זה יותר") או "זה יותר הרבה וזה יותר קצת" (178 אינו מופיע במאמר). שנית, חל שינוי באופן ההתמודדות המילולית של מעיין עם מצבי שוויון: הוא השתמש בביטוי "אותו דבר" לגבי שני מגדלים בעלי גובה שווה (169 אינו מופיע במאמר). עם זאת, ביטוי זה לא שימש אותו עדיין בתיאור של מספרים שווים. לדוגמה, כאשר הספירה של אוספים מושווים הסתיימה ב"חמש" עבור שניהם, הוא פלט "שני חמֵשים!" (67 אינו מופיע במאמר) ואחר כך הצהיר במצב דומה "שניהם חמש" (142 אינו מופיע במאמר). כפי שטענו בדיווחים ממחקרינו הקודמים (ראו למשל Sfard & Lavie, 2005), היכולת להשתמש בביטוי "אותו דבר" ביחס לאוספים שווים מתפתחת רק עם עיצומו של השיח המספרי.

סיכום

אצל מעיין השיח הכמותי הופיע ראשון (סבב 3) ובמקביל הופיע שיח מספרי ריטואלי. השיח המספרי הלא-כמותי נותר ריטואלי במשך חודשים ובאותו זמן השיח הכמותי הלא-מספרי התחזק בהדרגה והפך לעצמאי יותר ויותר. התחזקות זאת חלה בשרשרת של צעדים. ראשית, התאגד ההליך הדו-שלבי הבט-ובחר (התת-הליך של בחירה מבוצע מעתה על בסיס התוצאה של התת-הליך הראשון, הנקרא כאן "הבט"), ובכך נוצרה רוטינה ראשונית של השוואה כמותית במבט (כאמור, סבב 3). לאחר מכן התאחדה רוטינה זאת לרוטינה אחת עם זו המבוססת על ההליך סדר-ובחר שבוצעה עד כה בצורה ריטואלית

(ההליכים הבט-ובחר וסדר-ובחר נחשבים כעת לאלטרנטיבות שקולות). תוך כדי ההתאחדות של הרוטינות חלה התאגדותו של ההליך סדר-ובחר והוא היה לפעולה המבוצעת לשם השוואה כמותית (סבב 4). לבסוף, ראינו גם התאחדות של הליכי ההשוואה הכמותית עם ההליך מנה-ובחר, שעד כה בוצע בצורה ריטואליות בלבד (בסבב 5). בכך החלה התאחדותם של שיח כמותי ושיח מספרי. התפתחויות אלה במבנה של רוטינות וביחסים ביניהן מוצגות באופן סכמתי באיור 6. את ההתקרבות ההדרגתית בין שני השיחים ראינו גם דרך השינויים שחלו במקביל במבחר מילות מפתח של השיח הכמותי והשיח המספרי, ובדרכים שבהן מעיין השתמש במילים אלו (ראו טבלה 3).

דיון: מה לומדים מכאן על התפתחות החשיבה המספרית?

אף שהממצאים שדווחו במאמר זה הם תוצאה של חקר מקרה בודד, אנו סבורות שיש בהם בסיס למספר תובנות כלליות על התפתחותו של השיח המספרי. לפני שנציג תובנות אלה, נדגיש שיש להתייחס אליהן כאל השערות שטעונות אישוש נוסף. עם זאת, אלה השערות מבוססות למדי. ראשית, הן עולות בקנה אחד עם התאוריה שפרסנו לאורכו של מאמר זה. שנית, אנו מבינות בדיעבד שהיה אפשר לְצָפות בתופעות דומות גם במחקרינו הקודמים, אף אם לא השכלנו אז, בשלבים מוקדמים לבניית התאוריה, להבין את משקלן ואת חלקן בתהליכי האינדיווידואליזציה. שלישית, במחקר שלנו המתנהל בימים אלה משתתפים 16 ילדים, ואנו רואות תופעות דומות אצל כולם (את הצגת הראיות אנו נאלצות להשאיר למאמרים הבאים).

נספר כעת את סיפורו של תהלך אינדיווידואליזציה בכלל, ושל אינדיווידואליזציה של שיח מספרי בפרט, כפי שהוא עלה ממחקרנו עד כה. חלק מההשערות המרכיבות את הסיפור עלו במישרין מן התאוריה ואוששו במחקר הנוכחי; חלק אחר נוסחו לראשונה על סמך הממצאים ועידנו את המודל התאורטי ההתחלתי שלנו של התפתחות השיח המספרי.

אישוש המודל של התפתחות השיח המספרי-כמותי

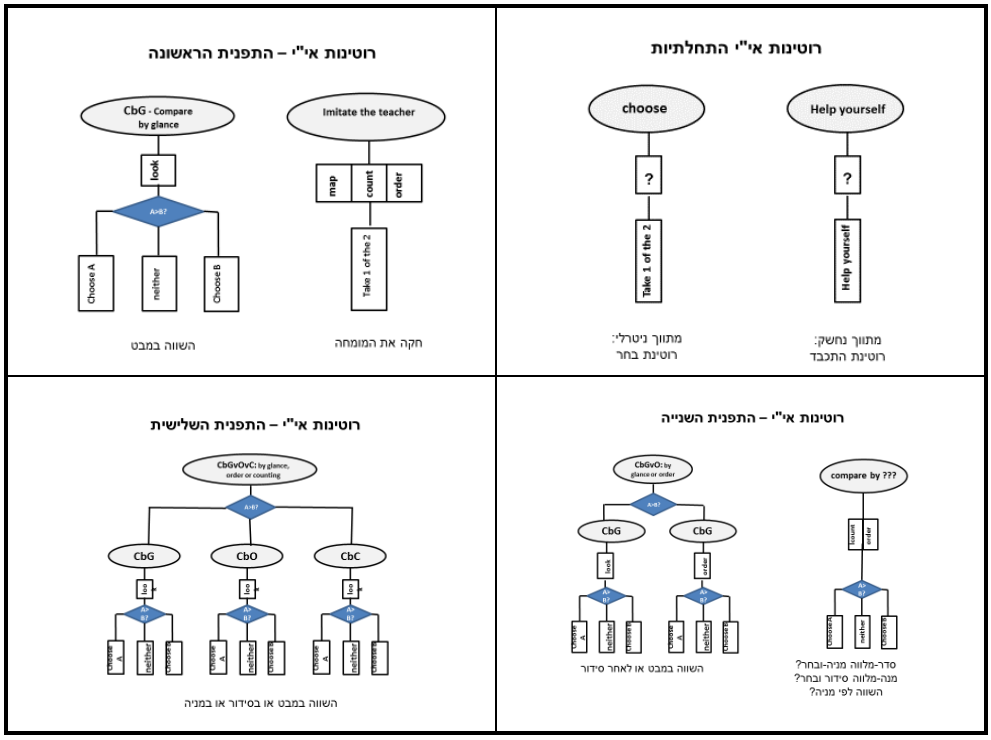
המקרה של מעיין אישש את שתי ההנחות המונחות ביסודו של המודל התאורטי שלנו:

- שיח כמותי ושיח מספרי של הילדים הגדלים בחברתנו **מתחילים להתפתח במקביל** ושומרים על ההפרדה למשך תקופה מסוימת. כל שיח חדש מתחיל במספר **רוטינות גרעיניות** שמתפתחות בתוך שיחים קיימים, ומתאחדות בשלב מסוים לרוטינה חוצה-שיחים אחת. **התאחדות השיחים,** פירושה התאחדות של לפחות שתי רוטינות גרעיניות מכל אחד משיחים אלה לרוטינה מסועפת אחת. במחקרנו הצלחנו לצפות בהתאחדותן של אחדות מהרוטינות הגרעיניות של שיח כמותי וכאלה השייכות לשיח המספרי, וראינו, על-כן, את תחילתו של שיח מספרי-כמותי.
- רוטינה דיסקורסיבית גרעינית מתחילה את קיומה **כריטואל** ואם הלומד מתמיד להשתתף בשיח, היא הופכת בהדרגה ל**חקירה**.

המחקר שלנו אישש כי אכן אלה התופעות הנצפות בהתפתחות של שיח מספרי המתרחש בחברה שלנו.

המקרה של מעיין שפך אור נוסף על התהליך כולו ואפשר מיפוי המנגנונים (1) של הופעת הריטואלים ו-(2) של הפיכתם מאוחר יותר לחקירות.

איור 6: התפתחות הרוטינה של מתן תשובה לשאלה "איפה יש יותר?" של מעיין



הסבר לשרטוטים:

בטבלה ה**אליפסות** מציגות את המטלות, כלומר האופן שבו פירש מעיין את מצב המטלה שנוצר כשנשאלה השאלה "איפה יש יותר?" בנוכחות שתי ערמות של קוביות. ה**מעוינים** מציינים מצבי הסתעפות הדורשים החלטה באיזה מסלול להמשיך את הביצוע. ה**מלבנים** הם ההליכים (או התת-הליכים).

טבלה 3: התפתחות שימוש במילות מפתח של שיח כמותי ושל שיח מספרי

שלב	שימוש במילים	
	של שיח כמותי	של שיח מספרי
התחלה	משתמש במילות גודל ("הרבה") בודדות	משתמש במילות מספר ("שתיים") בודדות
תפנית ראשונה	ביטויים השוואתיים ללא מספרים אין שימוש ב"אותו דבר" בהקשר של שוויון מספרי	מילות מספר כתוויות
תפנית שנייה	מופיעים ביטויי השוואה כמו "יותר	מילות מספר כתוויות

שלב	שימוש במילים	
	של שיח כמותי	של שיח מספרי
	הרבה" ו"יותר קצת".	
תפנית שלישית	מתחילים להופיע ביטויים חוצי-שיחים, כגון "אלו ארבע ואלו קצת".	

ריטואלים מספריים כתוצאה של חיקוי ויצירת אסוציאציות

בשלבים הראשונים של ההשתתפות של ילד בשיח מספרי, שיח כזה יכול להיות רק ריטואלי והוא יישאר כזה כל עוד הוא אינו מאוחד עם השיח הכמותי. ההתאחדות תתחיל מהיווצרות קשרים אסוציאטיביים בין מרכיבים שונים של שני שיחים – בין תת-הליך רוטיני אחד לאחֵר או בין מילים או ביטויים השייכים לשיחים שונים. אף כי ברור שאסוציאציה איננה סוג הקשר הרצוי, הרי שאין אפשרות לדלג על שלב זה. כפי שטענו קודם לכן, עצמים דיסקורסיביים חדשים – מספרים, במקרה הנוכחי – יכולים להיווצר רק תוך כדי השתתפות בשיח, ואילו בהיעדר העצמים, ההשתתפות יכולה להיות רק ריטואלית ואסוציאטיבית.

אפשר לומר, כי אינדיווידואליזציה של רוטינה היא בניית מרחב תקדימים. למורה תפקיד עקרוני בבנייה זאת: ביצועיה, הם שייצרו אותה, לפחות בהתחלה. במחקר זה, כמו גם במחקרים קודמים שלנו, הבחנו במספר תופעות אופייניות של תהליך זה.

- לפעמים די בהדגמה בודדת של המומחה לשיח כדי שאירוע זה יהפוך לחלק מכונן של מרחב התקדימים של הילד.
- בתהליך זה, כאשר על הילד להחליט על פירושה של מטלה, אירוע עבר קרוב ביותר (למשל, מה שנעשה בתור האחרון) משמש בררת המחדל לתפקיד של התקדים.
- להליך של המורה עדיפות על כל הליך אחר. אף אם הלומד השתמש בהליך משלו, הוא יעדיף את ההליך שהפעיל מומחה. כפי שציינו, ילדים מתקשים לקבל דרכי פעולה שאינן "כפי שהמורה עושה", והיא תופעה ידועה המעידה על כך, שהרוטינות הנלמדות בבית-הספר אינן, לרוב, חקירות במלוא מובן המילה.
- ההיכרות המוקדמת של הילד עם רוטינות בין-אישיות היא שמאפשרת התפתחות ראשונית של רוטינות של שיח מספרי. בין רוטינות בין-אישיות מחוללות למידה יש למנות את רוטינת החזרה המתמדת, שלפיה מה שצפוי להיעשות כעת הוא שיחזור של תקדים כלשהו – של פעולה שנעשתה בתנאים דומים בעבר. אצל ילדים העושים את צעדיהם הראשונים בלמידה, תקדים פירושו "עשה את שנעשה בתור הקודם". רוטינה שונה המשרתת אותו כבר עתה היא רוטינת ה-IRE המפורסמת (ראו למשל Mehan, 1979) על כל הסתעפויותיה.

הורים ומורים, בין שהם מודעים לחשיבות האסוציאציות הראשוניות בין לאו, מרבים בפעולות המקשרות בין הליכים או ניסוחים שונים. כך, לדוגמה, מומחה לשיח עובר בלי משים מהשאלה "איפה יש יותר X?" אל "איפה המספר של X גדול יותר?", ופעולה זאת, כשהיא חוזרת על עצמה, סופה לאחד

את מרחבי התקדימים של שתי השאלות (לפחות באותם מקרים שבהם מדובר בשני אוספים בדידים), ואף להפוך את שני ההיגדים ל"אותה שאלה". זהו אחד מתהליכי ההתאחדות שנדון בהם כעת.

הפיכה הדרגתית של שיח מספרי ריטואלי לכמותי כתוצר של התאגדות והתאחדות רוטינות

מעבר מהשיח המספרי הריטואלי לשיח מספרי-כמותי כרוך בהפיכת הקשר של "נוכחות משותפת" ליחס משמעותי יותר. הקשרים החדשים נוצרים הן בתחום הרוטינות והן באופני השימוש במילים.

במקרה של רוטינות, מתחילים להופיע שני סוגים חדשים של קשר:

- **התאגדות** של הליך דו-שלבי חל כשביצועו של התת-הליך השני מתחיל להיקבע על-פי תוצאת האחר.
- **התאחדות** של רוטינות חלה כאשר שני ההליכים מתחילים להיחשב לשקולים וניתנים להחלפה, וזאת משום שהילד מכיר בכך שהם מייצרים תמיד אותה תשובה. בהזדמנות זאת הלומד מתחיל להתייחס אל תוצאת ההליך כאל מטרת הפעולה.

במישור המילולי-סימבולי מתחילים באותו זמן להופיע ביטויים שמקשרים בין מילים וסמלים מתוך שיחים שונים, בעיקר מכאלה שעד כה היו זרים זה לזה. במקביל, חל עיצום הדרגתי של מילות מספר. בזכותן המילה "חמש" מערמות ספציפיות של חמישה חפצים – של קוביות, של במבה או של אצבעות – תהפוך ל"ייצוגים" שונים של אותו עצם מופשט הנקרא "מספר חמש". בעקבות כל אלה, פעולות תקשורת רבות ומגוונות מתאחדות בהדרגה לרשת סבוכה הראויה להיקרא שיח.

באופן מטפורי אפשר לומר, שהתפתחותו של שיח מתבטאת ב**הפיכת תערובות לתרכובות**. ואמנם, כל דבר חדש בשיח מתחיל את קיומו כתערובת של דפוסי פעולה שאין להם דבר במשותף מלבד הופעתם בהקשרים דומים, והוא מגיע ל"בגרות", כשהאוסף הופך למערכת שבה לכל מרכיב תפקיד ייחודי משלו, המשלים את התפקידים של המרכיבים האחרים. במחקר שלנו עמדנו מקרוב על השאלה כיצד אינטראקציות בין הילד הלומד לבוגר המלמד מביאות ליצירת מרכיבי שיח חדשים ולקשרים האסוציאטיביים ביניהם, וכיצד, לאחר מכן, היא גורמת להתאחדותם של המרכיבים הנפרדים. נסקור בקצרה את ההשערות העיקריות על תהליך זה העולות מהממצאים שלנו עד כה.

אמרנו קודם לכן כי מורים והורים צריכים לפעול למען היווצרותן של אסוציאציות. כעת נוסיף, כי רצוי שהם יעשו זאת בהקשרים שמעודדים התאחדות. למשל, במחקר שלנו בחרנו ללמד ספירה כחלק של הליך רחב יותר, שבו תוצאתה משמשת אותנו מיד להחלטות על דרך הביצוע של ההליך הבא אחריה (למשל, בחירת הקבוצה הגדולה יותר). בכך תהליך האינדיווידואליזציה שיזמנו במסגרת המחקר שלנו היה שונה מאלה הנצפים בדרך כלל, בחיי יומיום של ילדים. בחברה שלנו, הספירה מוצגת לילדים, בדרך כלל, כפעולה בפני עצמה ומנותקת מכל פעילות אחרת. האמנו שדרך ההוראה האחרת נעודד איחוד של מרכיבים שהיו עד כה מקושרים קשר אסוציאטיבי בלבד. לכאורה, הגישה הוכיחה את עצמה. הממצאים שלנו מרמזים על כך שההתקדמות של מעיין לקראת איחוד ההליך מנה-ובחר הייתה מהירה יותר מזאת שנמצאה במחקרים אחרים (Fuson, 1988; Piaget, 1952, 1969; Saxe, Guberman, & Gearhart, 1987) ואמנם, כפי שמסכמים נונס וברייט (Nunes & Bryant, 1996), עוד בגיל 5 או 6

> Children who know how to count may not use counting to compare sets with respect to number (p. 35).

במפגש שלנו ראינו את מעיין בן ה-4 סופר ביזמתו כדי להשוות קבוצות של בדידים ואף משתמש בתוצאת הספירה בבחירת התשובה. הדבר נוגד, לכאורה, את אשר נאמר בציטוט האחרון. נותר, כמובן, לבדוק את מידת כלליותו של אותו מרחב תקדימים המתאים לשאלה "איפה יש יותר?" שנוצר אצל מעיין במפגשים שלנו, ושההליך מנה-ובחר המאוגד היה לחלק בלתי נפרד ממנו. הרי אין להוציא מכלל אפשרות שמרחב תקדימים זה ייחודי לאינטראקציות עם המראיינת, ואולי אף למצב של השוואה בין קבוצות של פריטים מוחשיים ניטרליים. גם אפשרות זאת נבחנת בימים אלה במחקרנו. עם זאת, אף אם יתברר שבשלב זה ההליך מנה-ובחר המאוחד אינו זמין במצבים אחרים, נוכחותו במרחב תקדימים מקומי זה היא התחלה חשובה, המצעידה את מעיין לשיח מספרי-כמותי מאוחד.

אחרית דבר

במאמר זה עקבנו אחר מעיין במשך חודשים רבים והקורא נפרד ממנו כשהשיח המספרי שלו נמצא במלוא התנופה ההתפתחותית. מאז שהופענו בחייו לראשונה מצוידות בערמות של קוביות, כעכים ובמבה, הוא עבר כברת דרך נכבדה. ואולם תהיה התקדמותו מרשימה ככל שתהיה, ארוכה עוד הדרך שלפניו. למרות כל הישגיו, הרוטינות של מעיין עוד אינן חקירות במלוא מובן המילה. נכון, רוטינות אלה עברו גלגול חשוב, כשהן משתנות מאסוציאטיביות למאוגדות ומאוחדות. למרות זאת, סביר להניח שאין להן עוד קיום, אלא בתוך ה"פקעת" של אינטראקציות בין-אישיות. בתור שכאלה, אין לצפות שהילד ייזום את ביצוען לשם סיפוק הצרכים של עצמו. בין שטענה זו נכונה בין לאו – דבר שננסה לבחון בהמשך מחקרנו – הַאֲחדות נוספות רבות צריכות לקרות בתוך השיח המספרי הצומח הזה לפני שהרוטינות המספריות תהפוכנה לכלים זמינים בכל מצב ובכל שעה. את השלמת הסיפור על הדרך שבה מתרחש המעבר מאוסף ריטואלים בדידים למארג מורכב הראוי להיקרא "שיח חקירתי מאוחד" אנו נאלצות להשאיר למחקר עתידי.

תודות

תודתנו נתונה ל"קבוצת השיח" שלנו – טלי איילון, אביטל אלבוים-כהן, יגאל אסניס, איריס דיין, עינת הד-מצויינים, רחל הס-גרין, מיכל טבח, נח מוריס, טלי נחליאלי, ג'ייסון קופר ואיה שטיינר – על הדיונים המאתגרים והפוריים. אנו גם אסירות תודה לעורכות של הגיליון המיוחד הזה ולשתי שופטות אנונימיות שכולן יחד וכל אחת לחוד דירבנו בהערותיהן הקולעות את חשיבתנו ושיפרו בכך את כתיבתנו. אם למרות כל אלה יש במאמר אי-אלו חולשות, הרי זה באשמתן הבלעדית של הכותבות.

רשימת מקורות

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concept of number*. New York: Springer-Verlag.

Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong question. *Educational Researcher, 26*(1), 5-17.

Greeno, J. G., Riley, M. S., & Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology, 16*, 94-143.

Hannula, M. M., & Lehtinen, E. (2001). Spontaneous tendency to focus on numerosities in the development of cardinality. In M. Panhuizen-Van Heuvel (Ed.), *Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 113-120). Drukkerij Wilco, The Netherlands: Amersfoort.

Harré, R., & Gillett, G. (1994). *The discursive mind*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Howe, C. (2013). Scaffolding in context: Peer interaction and abstract learning. *Learning, Culture and Social Interaction, 2*(1), 3-10.

Lave, J. (1988). Missionaries and cannibals. In J. Lave (Ed.), *Cognition in practice* (pp. 23-44). Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. (1993). The practice of learning. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (pp. 3-32). Cambridge: Cambridge University Press.

Littleton, K. (2013). Adaptation and authority in scaffolding and teacher–student relationships: Commentary on the special issue 'Conceptualising and grounding scaffolding in complex educational contexts'. *Learning, Culture and Social Interaction, 2*(1), 52-55.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 10-27.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number* (C. Gattegno & F. M. Hodgson, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child* (H. Weaver, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul.

Pratt, M. W., Kerig, P., Cowan, P. A., & Cowan, C. P. (1988). Mothers and fathers teaching 3-year-olds: Authoritative parenting and adult scaffolding of young children's learning. *Developmental Psychology, 24*(6), 832-839.

Saxe, G. B., Guberman, S. R., & Gearhart, M. (1987). Social and developmental processes in children's understanding of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 52*(2), i-162.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction, 23*(2), 237-309.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210*, 1033-1035.

Stefee, L. P., Thompson, P. W., & von Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In E. A. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development, 52*(4), 1146-1152.

Van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review, 22*(3), 271-297.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thoughts and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.

Wertsch, J. V., McNamee, G. D., McLane, J. B., & Budwig, N. A. (1980). The adult-child dyad as a problem-solving system. *Child Development, 51*(4), 1215-1221.

Wertsch, J. V., & Stone, C. A. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 162-179). Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1953). *Philsophical investigations*. Oxford, UK: Blackwell.

Wood, D. J., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89-100.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology, 24*(2), 220-251.



עירית לביא

דוקטורנטית באוניברסיטת חיפה בחוג לחינוך מתמטי החוקרת את נושא השיח המתמטי והתפתחות החשיבה המתמטית בגיל הרך. מרצה במכללת אורנים ומדריכה פדגוגית לבתי-הספר היסודיים במכללה. אחראית מעבדת מתמטיקה בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה.



פרופ׳ אנה ספרד

פרופסור לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה; נושא מחקריה הוא התפתחותו של שיח מתמטי והשפעתם ההדדית של שיח זה ושל תחומי חיים אחרים.

ניתוח שיח לימודי כיתתי בנושא המעגל דרך שתי עדשות תאורטיות: קומוגניציה של Sfard ו-SFL של Halliday

אחלאם ענאבוסי, אוניברסיטת תל-אביב ומכללת אלקאסמי

מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

תקציר

מחקר זה מתמקד בניתוח שיח כיתתי בנושא המעגל דרך שתי עדשות תאורטיות: קומוגניציה שלSfard ו-SFL של Halliday. המחקר מראה דוגמה מפורטת לשיטת ניתוח שיח של מליאת כיתה במטרה לעקוב אחרי רוטינות הוראה של המורה מחד גיסא, ואחרי תהליך הלמידה שמתרחש בעקבות רוטינות הוראה אלו מאידך גיסא. שיטת הניתוח המוצעת היא חידוש יחסי, שכן היא מאפשרת הסתכלות נקודתית על ההתרחשויות בשיח הכיתתי באופן המשלב בין שני השחקנים העיקריים בתהליך ההוראה למידה – המורה והתלמידים שלה. ספציפית יש למחקר שתי מטרות מרכזיות. האחת היא לזהות את השגרות (הרוטינות) הפדגוגיות של מורת-המתמטיקה, ולנסות לזהות את הנרטיבים העומדים בבסיס פעולות אלה. השנייה לזהות אם התרחשה למידה ובאיזה אופן התרחשה, וזאת בעזרת חשיפה מפורשת של הנרטיבים המתמטיים של המורה ושל התלמידים. לצורך מענה על מטרות המחקר ניתחנו שיעור בן 90 דקות שנערך בכיתה ו' שכוללת 20 תלמידים בבית ספר במחוז צפון. תוצאות המחקר מראות שמורת המתמטיקה השתמשה ברוטינות שבבסיסן נמצאים נרטיבים משלושה סוגים: מתמטיים-תכנים, חברתיים-רגשיים וארגוניים. נוסף לכך, מניתוח שני קטעים בשיעור התברר כי בשניהם התקיימה למידה. אפשר לטעון כי הנרטיבים המתמטיים המקובלים שזוהו אצל המורה יחד עם הפעולות הפדגוגיות, תרמו לתהליך הלמידה ולשינוי הנרטיבים של התלמידים לקראת הנרטיבים המקובלים. לעומת זאת, ראינו שלפעמים יש נרטיבים שמעכבים את תהליך הלמידה. תוצאות המחקר הם במעמד של השערות, שכדי לבססן יש צורך להמשיך ולעקוב באופן דומה אחרי המורה בכיתה זו למשך מספר שיעורים.

מילות מפתח: שיח מתמטי כיתתי; שילוב תאוריות; נרטיבים ושגרות של מורה למתמטיקה; מיתר וקוטר במעגל.

מבוא

תחום מיוחד של מחקר בחינוך מתמטי שזכה לתשומת לב בעשורים האחרונים הוא בחינה של השיח הכיתתי. חוקרים שונים חקרו שיח זה בהסתמכות על כלים שונים ותאוריות שונות. מחקר זה מתמקד בניתוח שיח כיתתי בנושא המעגל דרך שתי עדשות תאורטיות: קומוגניציה של Sfard ו- Systemic Functional Linguistic (SFL) של Halliday. כלומר, מחקר זה מאמץ את הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) ואת הגישה הבלשנית-שימושית, SFL (Halliday, 1978), תוך שימוש בכלי מתודולוגי המשלב בין שתי התאוריות (Tabach & Nachlieli, 2011).

לפי הנחת היסוד שבבסיס התאוריה הקומוגניטיבית, למידה היא שינוי באחד מארבעת מרכיבי השיח המתמטיים: מילים ודרך השימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שגרות ונרטיבים. כמו כן, פדגוגיה – לפי הגישה הקומוגניטיבית, היא פעילות תקשורתית שהמניע שלה הוא לקרב את השיח של הלומדים לקראת השיח המתמטי המקובל. הגדרה כזו של פדגוגיה כוללת את כל הפעולות התקשורתיות: מילוליות, לא מילוליות, רגשיות ועוד (Tabach & Nachlieli, 2016).

לפי הנחת היסוד שבבסיס הגישה הבלשנית-שימושית, שפה היא משאב ליצירת משמעות, ולפיכך כל שימוש בשפה כולל בתוכו בחירה (לאו דווקא מודעת) שאפשר לדון בה בעזרת שלוש פונקציות-על: זו הנוגעת לתוכן (ideational); זו הנוגעת להיבטים בין-אישיים (interpersonal); וזו הארגונית (textual). לכן, אפשר לבחון את הפעולות הפדגוגיות של מורה בכיתה על-ידי זיהוי מרכיבי השיח הארגוניים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שגרות ונרטיבים.

בסקירת הספרות נרחיב על שתי התאוריות (הקומוגניטיבית והבלשנית-שימושית), וכן על הכלי המשלב ביניהן.

המחקר הנוכחי עוסק בהוראה ולמידה בנושא המעגל בכיתה ו' בניסיון לזהות האם התרחשה למידה, מהם תהליכי הלמידה שהתרחשו ומה היו פעולות המורה והתלמידים שאפשרו אותה. על סמך זאת נציג להלן את מטרות המחקר: 1. זיהוי פעולות (שגרות) פדגוגיות של מורת המתמטיקה שמאפשרות למידה (שינוי), וכן לנסות לזהות את הנחות היסוד העומדות בבסיסם על-ידי זיהוי נרטיבים פדגוגיים; 2. זיהוי למידה על-ידי חשיפה מפורשת של הנרטיבים המתמטיים (של התלמידים ושל המורה) הרלוונטיים לנושא המתמטי הנלמד. החדשנות של מחקר זה היא בשיטה שבה המחקר נוקט כדי לנתח את השיח במליאת הכיתה ולאפשר מעקב אחרי רוטינות הוראה של המורה, ואחרי תהליך הלמידה שמתרחש בשל רוטינות הוראה אלו.

כדי ליישם את המטרות האלה תיעדנו וניתחנו שיעור בן 90 דקות בנושא "קטעים במעגל בכלל והקשר בין מיתר לקוטר בפרט". בשיעור השתתפו 20 תלמידים בכיתה ו'. במאמר נציג שתי דוגמאות עיקריות: האחת, דיון העוסק בקשר שבין קוטר למיתר. השנייה, דיון הרואה בקוטר ציר סימטריה. בניתוח נדגים שינויים בשיח של התלמידים והמורה על-ידי ניתוח הנרטיבים המתמטיים של התלמידים ושל המורה.

סקירת ספרות

במחקר זה אנחנו משתמשים בכלי מתודולוגי המאפשר דיון בכמה היבטים של השיח המתמטי הכיתתי (Tabach & Nachlieli, 2011). כלי זה מאמץ את הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) ואת הגישה הבלשנית-שימושית, SFL (Halliday, 1978). לפיכך נתאר תחילה את שתי הגישות וכן את השילוב ביניהן. לבסוף נעסוק בתחום התוכן המתמטי: מושגים במעגל.

הגישה הקומוגניטיבית ללמידה של מתמטיקה

ויגוצקי (2006) ראה את הדיבור והחשיבה כקשורים זה לזה בקשר הדוק שאי אפשר להפרידו. הוא טען ששליטה בדיבור מאפשרת לא רק לתקשר עם אחרים, אלא גם לארגן את המחשבות. טענות אלה מונחות ביסודה של הגישה הקומוגניטיבית (הדיסקורסיבית) לחקר למידה. גישה זאת שייכת למשפחת התאוריות הסוציו-תרבותיות, הרואה את החשיבה כמתפתחת באינטראקציות חברתיות תלויות תרבות.

השם קומוגניציה (Commognition) מעיד על ראייה מאוחדת של החוקרת לחשיבה (Cognition) ולתקשורת (Communication), כלומר החוקרת רואה בחשיבה ובתקשורת שני היבטים של אותה תופעה. חשיבה מומשגת כשיח של היחיד עם עצמו. על-פי גישה זו, שיח הוא אירוע כלשהו של תקשורת המתנהל בהתאם לדפוסים ייחודיים, ותקשורת היא פעילות חברתית שגרתית ובה אוסף של פעולות לגיטימיות של היחיד. לכל פעולה כזו אוסף של תגובות לגיטימיות (Sfard, 2007). כל שיח מגדיר קהילת שיח שהמשתתפים בה מתקשרים ופועלים על-פי דפוסים מקובלים. ספרד (Sfard, 2007) טוענת כי אפשר להבדיל בין סוגי השיח המתפתחים בין קהילות מקצועיות למיניהן, כמו של המתמטיקאים, באמצעות דיון בארבעה מאפיינים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שגרות ונרטיבים מקובלים. אפשר לחקור התפתחות שיח של יחידים או של כיתות בעזרת מעקב אחר שינויים במאפיינים אלה.

מילים ודרך השימוש בהן – שיח מתמטי כולל מלים מתמטיות, כגון מילים המבטאות כמויות, צורות גאומטריות וכן שמות מספרים. מילים הקשורות לצורות ולמספרים יכולות להופיע בשיחים יומיומיים, והן יכולות גם להופיע בשיחים מתמטיים המנוהלים בבית הספר או באקדמיה, המכתיבים את השימושים הייחודים והמקצועיים במילים אלה. למשל: ילד משתמש במילה **מעגל** בחייו היומיומיים: **מעגל** תנועה, תמרור **מעגלי**, אך בשיח מתמטי המילה **מעגל** תשמש לאובייקט מתמטי בעל הגדרה חד-משמעית "המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה מסוימת, המרכז, קבוע". רוב המילים הנחשבות למתמטיות מופיעות בשיח היומיומי, ומה שהופך מילה יומיומית למתמטית הוא אופן השימוש בה.

מתווכים ויזואליים – הם אמצעים חזותיים שמספקים את אובייקט השיח המתמטי. שיחים מתמטיים משתמשים במתווכים סימבוליים שנוצרו במיוחד לתקשורת זאת, וביניהם גרפים, נוסחאות מתמטיות, תרשימים, דיאגרמות, ציר מספרים, ציורים וחפצים מוחשיים ועוד. מתווכים אלה הם חלק בלתי נפרד מפעולת התקשורת ומתהליכי החשיבה. למשל, האופן שבו מצייר אדם קוטר יכול לשמש מקור ידע

לתיאור הבנתו את מאפייני המעגל, וזה כולל אם כיוון בציורו למרכז המעגל, לנקודות על היקף המעגל, אם הוא נצמד בציורו לקוטר טיפוסי או לא וכדומה. השימוש בתיווך ויזואלי הכרחי כאשר מלמדים על צורות גאומטריות בשיח גאומטרי.

נרטיבים (היגדים) מקובלים – אלה היגדים לגבי עצמים מתמטיים שמתקבלים כנכונים בתוך הקהילה המתמטית, ואין עליהם חילוקי דעות. הכוונה לכל טקסט מדובר או כתוב המנוסח כתיאור עצמים, יחסים בין עצמים או פעילויות עם עצמים, ושאפשר לאמצו או לדחותו, ומסומן כ"אמתי" או כ"לא אמתי". בשיח המתמטי ההיגדים שנרצה לאמץ מכוונים לתאוריות מתמטיות הכוללות הגדרות, משפטים, הוכחות וכדומה. נראה להלן דוגמאות להיגדים המקובלים בגאומטריה: "המעגל הוא מקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה מסוימת, המרכז, קבוע", "הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל". חשוב לציין כי היגדים שמקובלים על הפרט אינם תמיד בהכרח זהים לאלה של המומחים.

שגרות – אלה דפוסים קבועים לעשיית דברים שחוזרים על עצמם המוגדרים היטב בפעולות בני השיח. קיימות שגרות של שימוש במילים, שימוש במתווכים, הפעלת שיח במצבים שונים, שכנוע, הסבר, חישוב וכדומה (Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski, & Sfard, 2005).

הגישה הבלשנית שימושית (Systemic Functional Linguistics- SFL)

SFL היא גישה בלשנית-שימושית לחקר סמלים ומערכות סמלים. את גישה זו פיתחו הלידיי, מטהיסן, מרטין ורוז (Halliday & Matthiessen, 2004; Martin & Rose, 2005). על פיה כל אמירה היא חלק מהקשר כלשהו, והארגון הדקדוקי של כל שפה טבעית משקף את התפקידים שבעבורם התפתחה השפה. ההנחה הבסיסית היא ששפה משמשת משאב וכל שימוש בה מייצג בחירה, לאו דווקא מודעת, של המשתמש לגבי כל אחת משלושת התפקידים (meta-functions): (1) תוכן (ideation) – עיסוק בתוכן של חוויה; (2) בין-אישי (interpersonal) – תיאור או בנייה של קשרים בין אישיים שיש בהם עמדות וערכים; (3) ארגון (textual) – ארגון השפה לטקסט.

אפשר להתאים את שלושת התפקודים (תוכן, בין-אישי וארגוני) לשיח הכיתתי (טבח ונחליאלי, 2014). בתפקוד התוכן יש עיסוק בתכנים המתמטיים – זהו השיח המתמטי; בתפקוד הבין-אישי יש עיסוק במיצוב של היחיד כלפי אחרים וכלפי המתמטיקה. בתפקוד הארגוני קיימות הפעולות הפדגוגיות שהמורה מבצע כדי לארגן את התכנים ולעזור ללומדים להיות שותפים מרכזיים יותר בשיח המתמטי הכיתתי – זהו השיח הפדגוגי.

כלי מתודולוגי לניתוח השיח הכיתתי

כדי לזהות תהליכי הוראה ולמידה בשיעור שנושאו המעגל, השתמשנו בכלי ייחודי (נחליאלי ורגב, 2009; Tabach & Nachlieli, 2011). כלי זה משלב בין הגישה הבלשנית ובין הגישה הקומוגניטיבית. הכלי מאפשר דיון בו בזמן בהיבטים מגוונים של השיח שמתפתח בכיתה: השיח המתמטי, השיח הבין-אישי והשיח הפדגוגי, ובארבעת המאפיינים של השיח (מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שגרות

ונרטיבים). טבלה 1 מציגה כלי זה.

טבלה 1: כלי לניתוח שיח מתמטי כיתתי

היבטי השיח	מילים והשימוש בהן	מתווכים ויזואליים	נרטיבים מקובלים	שגרות
שיח מתמטי	המילים המתמטיות שבהן משתמשים בכיתה.	המתווכים שבהם משתמשים במתמטיקה.	ההיגדים המתמטיים הנאמרים בשיעור.	השגרות המתמטיות שמשתמשים בהן בשיעור.
• שיח **בין-אישי**	המילים שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	המתווכים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	השגרות שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.
שיח פדגוגי-ארגוני	המילים שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו שותפים מרכזיים.	המתווכים שבעזרתם היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו שותפים מרכזיים.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו שותפים מרכזיים.	השגרות שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו שותפים מרכזיים.

במחקר זה נתמקד בהוראה ולמידה בנושא המעגל בכיתה ו', בניסיון לזהות האם התרחשה למידה, מהם תהליכי הלמידה שהתרחשו ומה היו פעולות המורה שאפשרו אותם. נוסף על כך, ננסה לזהות את הנחות היסוד העומדות בבסיס פעולות המורה. מכאן אנו מתמקדים בחשיפה מפורשת של הנרטיבים המתמטיים (של התלמידים ושל המורה) הרלוונטיים לנושא המתמטי הנלמד ומתמקדים בזיהוי רוטינות פדגוגיות, בין-אישיות ומתמטיות של המורה. ניתן לאמור שאנחנו מתייחסים לשלושה סוגים של שיח מתמטי, ארגוני ובין-אישי.

סוגים שונים של שיח מתמטי בכיתה

המושג שיח (Discourse) מלמד על הקשר רחב יותר מן המושג שיחה (Conversation). בשיח הכוונה לא רק לתכני השיחות, אלא למערכות היחסים ולנורמות ההתנהגות הגלויות והסמויות הנוצרות במהלכן. המושג "שיח", בהקשר הנוכחי, הוא אירוע כלשהו של תקשורת המתנהל על-פי דפוסים ייחודיים.

מחקרים רבים בחינוך מתמטי הוכיחו שהוראה יעילה היא הוראה שמעודדת את התלמידים להיות פעילים ולהשתתף בשיח מתמטי (ראה למשל Walshaw & Anthony, 2008). מחקרים אחרים ניסו לזהות את סוגי השיח המתמטי המתרחש בתוך כיתת המתמטיקה (ראה למשל רגב ושמעוני, 2005; Ryve, 2006, 2007) וניסו לתאר את הקשר בין סוגים אלה. למשל, רגב ושמעוני (2005) זיהו חמישה סוגי שיח הנבדלים זה מזה בעולם התוכן ובתפקידים היחסיים בתהליך השיחה.

סוגים אלה הם:

שיח ארגוני-לוגיסטי שמטרתו לאפשר למורה ולתלמידים לעסוק בנוחות במתמטיקה.

שיח חברתי שמטרתו לתהלך את אקלים השיחה.

שיח מתמטי הוא שיח ביצועי, תכליתי, הממוקד במטרת השיחה. שיח זה מלווה את הביצועים המתמטיים הפנימיים והחיצוניים, כמו כתיבת תרגילים במחברת או חשיבה על פתרון בעיה מסוימת.

שיח מטה-קוגניטיבי שמטרתו להסביר, להוכיח ולהצדיק את הפעולות המתמטיות.

שיח מודל הוא שיח המתנהל כאשר המשתתפים בשיחה מבצעים פעולות לוגיות (אופרציות שכליות) בתוך מודל כלשהו. מטרתו לאפשר ללומדים להבין את החוקיות המתמטית, תחילה בתוך מערכת אנלוגית, שלחלקם קל יותר להתמצא בה, כדי שיוכלו גם או אחר כך להקיש ממנה למערכת המתמטית.

כיוון שכך, נראה שסוגים אלה משתלבים עם פונקציות העל של האלידיי (ראה לעיל סעיף "הגישה הבלשנית שימושית"). נראה שהשיח המתמטי, המטה-קוגניטיבי ושיח מודל משתלבים בפונקציית-העל שמכוונת ל**תוכן** של האלידיי, וכמובן השיח הארגוני-לוגיסטי משתלב עם פונקציית-העל שמכוונת ל**ארגון** והשיח החברתי משתלב עם פונקציית-העל שמכוונת ל**בין-אישי**.

בד בבד זיהה רייבי (Ryve, 2007) שלושה סוגים של שיח בכיתת המתמטיקה: 1. שיח דידקטי (didactically oriented); 2. שיח תוכן (subject oriented discourse); 3. שיח מוכוון פתרון בעיות (problem solving oriented discourse). לפי רייבי (שם), סוגי שיח אלה עשויים לעלות בכל שיח מתמטי כיתתי, אבל התדירות של כל סוג משתנה משיח לשיח ותלויה במשימה הנתונה. סוגים אלה משתלבים עם שלוש פונקציות-העל של האלידיי, כאשר שיח תוכן ושיח מוכוון פתרון בעיות משתלבים עם פונקציית-העל שמכוונת ל**תוכן** (ideation), והשיח הדידקטי משתלב עם פונקציית-העל שמכוונת ל**ארגון** (textual). נראה שחסרה כאן נגיעה לפונקציית-העל שמכוונת ל**בין-אישי** (interpersonal).

המחקר הנוכחי מראה דוגמה מפורטת לשיטת ניתוח שיח של מליאת כיתה כדי לעקוב אחרי רוטינות הוראה של המורה, ואחרי תהליך הלמידה שמתרחש על-פי רוטינות הוראה אלו. לכן המחקר מנסה, בין השאר, לזהות את הפעולות הפדגוגיות של מורה למתמטיקה שמאפשרות ללמידה, זאת על-ידי זיהוי סוגים שונים של השיח המתמטי שנוצר בין המורה ובין התלמידים בכיתת המתמטיקה. המחקר בוחן, כאמור, סוגים שונים של שיח דרך כלי ייחודי (Tabach & Nachlieli, 2011) המאפשר להביא שלושה סוגים של שיח: ארגוני (פדגוגי), בין-אישי ומתמטי.

מושג המעגל במחקר

מחקרים סיפקו תובנות רבות לגבי הוראה ולמידה של גאומטריה בכלל, ויחסית נושא המעגל בלמידה זכה לדיון מועט (Oladosu, 2014). להלן הנושאים שבהם התמקדו המחקרים שחקרו למידת נושא המעגל: 1. יכולת ילדי גן לזהות מעגל מבין פריטים אחרים (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999); 2. דימוי מושג המעגל אצל תלמידי יסודי ועל-יסודי (Neel-Romine, Paul, & Shafer, 2012; Oladosu, 2014); 3. מידת ההבנה האינטואיטיבית של תלמידי תיכון למשפטים במעגל כאשר הם פותרים בעיות גאומטריות (González & DeJarnette, 2013); 4. למידת התלמידים את נושא המעגל בסביבות טכנולוגיות. למשל, מיהדיוב (Mehdiyev, 2009) מצא כי השימוש בGeoGebra בהקשר של גורמים אחרים, כגון עבודה קבוצתית ושימוש בדפי עבודה, העלה את מידת המוטיבציה אצל תלמידי כיתה ט' בעת למידה על המעגל; 5. רגשות ועמדות התלמידים כשהם לומדים על המעגל. למשל, דאהר, סוידאן ושהחברי (Daher, Swidan, & Shahbari, 2015) ניתחו עמדות ורגשות של התלמידים כשהם לומדים את נושא המעגל בסביבת גאוגברה. החוקרים מצאו שיש ארבעה גורמים משפיעים על עמדותיהם של התלמידים ועל רגשותיהם במהלך פעילות: מאפייני חברי הקבוצה, ההיסטוריה שלהם עבור חוויות למידה, מאפייני הפעילות ושלביה.

כלומר, לא מצאנו מחקרים שעסקו במפורש בתובנות תלמידים לגבי מושגים במעגל, או מה האתגרים שהם נתקלים בלמידת מושגים אלה. המחקר הנוכחי מתרכז בתובנות תלמידי כיתה ו' לגבי מושגים וקשרים בסיסיים במעגל.

מתודולוגיה

שאלות המחקר

1. מהן השגרות הפדגוגיות שאפשר לזהות אצל מורה בכיתת המתמטיקה?
2. מהם הנרטיבים הפדגוגיים העומדים בבסיס השגרות הפדגוגיות אצל המורה?
3. האם במהלך השיעור התקיימה למידה?
4. מהן פעולות המורה שאפשרו שינוי בנרטיבים המתמטיים של התלמידים?

רקע לגבי מקור התכתוב והמשתתפים בשיח

שיעור בן 90 דקות בנושא המעגל הוקלט בכיתה ו' בת 20 תלמידים הלומדים בבית ספר בצפון הארץ. השיעור תוכתב במלואו לצורך המחקר. זהו השיעור הראשון מבין ארבעה שיעורים מתוקשבים שהוקלטו לצורכי מחקר. השיעור עסק בנושא היכרות עם מושגים בסיסיים במעגל: הגדרת מעגל, רדיוס, קוטר, מיתר, מרכז המעגל, קשר בין מיתר ובין קוטר ולווה בשימוש בטכנולוגיה.

לתלמידים המשתתפים במחקר היה ידע קודם על הגדרת המעגל, הרדיוס, הקוטר והמיתר. במהלך

השיעור המורה חזרה על מושגים אלה וניסתה ללמד את הקשר בין קוטר למיתר ותכונות הקוטר. למורה יש תואר שני בחינוך מתמטי והיא נחשבת למורה מצטיינת.

ניתוח הנתונים

מחקר זה בוחן שלושה סוגים של שיח שמתפתח בכיתה: השיח המתמטי, השיח הבין-אישי והשיח הפדגוגי. בחינה זו תיעשה על-ידי בדיקת שגרות ונרטיבים אצל המורה ונרטיבים מתמטיים אצל התלמידים. הבדיקה הכפולה אפשרית, כאמור, בזכות שימוש בכלי הייחודי (Tabach & Nachlieli, 2011) שתואר בסעיף לעיל "כלי מתודולוגי לניתוח השיח הכיתתי", המאמץ את הגישה הבלשנית של הלידיי והגישה הקומוגניטיבית של ספרד. כלי זה מוצג להלן ובתוכו מסומנים התאים שבהם נעסוק.

טבלה 2: השיחים שבהם נתמקד במחקר

היבטי השיח	מילים והשימוש בהן	מתווכים ויזואליים	נרטיבים מקובלים	שגרות
שיח מתמטי			✓	✓
שיח בין-אישי			✓	✓
שיח פדגוגי-ארגוני			✓	✓

ששת שלבי ניתוח הנתונים:

1. זיהוי פעולות פדגוגיות של המורה ובדיקה כמה פעמים פעולות אלה חוזרות על עצמן כדי להסיק מהן את השגרות הפדגוגיות שלה. חשוב לציין שעבור מה שנראה כשגרה ארגונית, נבדקו כל ארבעת השיעורים המוקלטים, וזאת כדי לקבל חיזוק להשערה שמדובר בפעולה רוטינית של המורה.
2. ניסיון לזהות נרטיבים פדגוגיים העומדים בבסיסן של השגרות הפדגוגיות שזוהו בשלב 1.
3. חלוקת השגרות הפדגוגיות והנרטיבים העומדים מאחוריהן לשלושה סוגים שונים: מתמטיים, חברתיים-רגשיים (בין-אישיים) וארגוניים.
4. זיהוי קטעים מרכזיים בשיח שהתקיים במליאת הכיתה שבהם יש עדות ללמידה, כלומר שינוי בנרטיבים המתמטיים של התלמידים.
5. בקטעים האלה זוהו הנרטיבים המתמטיים של התלמידים ושל המורה.
6. זיהוי פעולות המורה ופעולות התלמידים אשר נראה שאפשרו את השינוי.

ממצאים

פרק הממצאים נחלק לשני חלקים. בחלק הראשון נדון בשגרות ובנרטיבים של המורה. ספציפית, נעסוק בשלושה סוגים של שגרות שזיהינו אצל המורה מתוך הסתכלות על השיעור כולו: שגרות מתמטיות, שגרות חברתיות-רגשיות ושגרות ארגוניות. כן נעסוק בנרטיבים שלמיטב הבנתנו עומדים בבסיס כל שגרה. בחלק השני נציג שתי דוגמאות (מקטעים) מהשיעור הנדון. הדוגמה הראשונה היא בנושא קשר בין מיתר לקוטר. האחרת היא בנושא הגדרת הקוטר כציר סימטריה. בעזרת שתי הדוגמאות נתאר את התפתחות השיח של התלמידים במהלך דיון עם המורה על-ידי ניתוח הנרטיבים המתמטיים של התלמידים ושל המורה.

שגרות ונרטיבים של המורה

בחלק זה נציג חמש טבלאות. טבלה 3 מציגה את השגרות והנרטיבים הארגוניים של המורה. טבלה 4 מציגה את השגרות ואת הנרטיבים המתמטיים של המורה וטבלה 5 מציגה את השגרות החברתיות-רגשיות של המורה. טבלה 6 וטבלה 7 מציגות שגרות ונרטיבים של המורה, וכל שגרה ונרטיב משגרות ונרטיבים אלה הם גם מתמטיים וגם חברתיים-רגשיים.

שגרות ונרטיבים ארגוניים של המורה

טבלה 3: שגרות ונרטיבים ארגוניים של המורה

שגרות	מספר המופעים של השגרה	נרטיבים	דוגמאות מאמירות/פעולות המורה, [מספר אמירה]
נקודת הפתיחה של השיעור היא נקודת הסיום של השיעור הקודם.	ארבע, פעם אחת בכל שיעור שנצפה	למידת מתמטיקה מתבצעת בהדרגה – בכל פעם בונים עוד נושא חדש על נושאים קיימים.	תתרכזו, תסתכלו על הלוח, יש לי מעגל. מי זוכר? מה אמרנו ביום שישי על המעגל? זוכרים את הפעילויות שעשינו? באיזו שיטה, ומה ראינו? [5]
בדיקת נוכחות.	ארבע, פעם אחת בכל שיעור שנצפה	הנוכחות בשיעורים היא דבר חשוב. נוכחות בשיעורים היא מידע שיש למסור להנהלת בית הספר.	המורה מבצעת בדיקת נוכחות בהתחלת השיעור
הצהרה על תחילת השיעור.	ארבע, פעם אחת בכל שיעור שנצפה	המורה אחראי על הנעשה בכיתה וקובע את סדר ההתקדמות בשיעור.	...יאללה, בואו נתחיל. בבקשה מכולם, רוצים להתרכז בשיעור [3]

כאמור, מה שנראה כשגרה ארגונית, נבדק בכל ארבעת השיעורים המוקלטים כדי לקבל חיזוק להשערה שמדובר בפעולה רוטינית של המורה. כל אחת מהשגרות שזוהתה בטבלה 3 חזרה על עצמה פעם אחת בדיוק בארבעת השיעורים שתועדו. עובדה זו מעוררת את התחושה שמדובר בשגרות ארגוניות של המורה.

שגרות ונרטיבים מתמטיים של המורה

טבלה 4: שגרות ונרטיבים מתמטיים של המורה

שגרות	מספר המופעים של השגרה	נרטיבים	דוגמאות מאמירות או פעולות המורה, [מספר אמירה]
חזרה על מושגים שנלמדו תוך כדי השיעור ובשיעור קודם.	ארבע	חזרה על מושגים מתמטיים עוזרת לתלמידים בהפנמתם.	מי רוצה להסביר לי? תסתמכו על מה שאמרנו ביום שישי, מי זוכר? איך הגדרנו את המעגל? [22]
שימוש במתווכים ויזואליים.	יותר מ- 40	שימוש במתווכים ויזואליים מקל על הלומדים ועוזר להם בהבניית והפשטת האובייקט המתמטי.	...תסבירי לי לגבי הקטע הזה [מצביעה על הציור בגאוגברה], בין מי ומי הוא מחבר? בין איזה נקודות הוא מחבר? תתרכזי ותשתתפי... [20]

טבלה 4 מראה את השגרות המתמטיות של המורה ואת הנרטיבים המתמטיים העומדים בבסיסן. אם מסתכלים על מספר המופעים של השגרות שמוצגות בטבלה 4 נראה שלשגרה "שימוש במתווכים ויזואליים" יש מספר מופעים גדול יחסית. כלומר, המורה רואה בשימוש במתווכים ויזואליים כעוזר וכמקדם למידת מתמטיקה.

שגרות ונרטיבים חברתיים-רגשיים של המורה

טבלה 5: שגרות ונרטיבים חברתיים-רגשיים של המורה

שגרות	מספר המופעים של השגרה	נרטיבים	דוגמה מאמירות או פעולות המורה
פנייה לתלמידים בשמם.	יותר מ-40	כל תלמיד ותלמיד חשוב – התלמיד במרכז. פנייה לתלמיד בשמו עוזרת לו להתרכז בשיעור ומעלה את המוטיבציה שלו.	[...] אז מה אתה אומר? מה 'ראוי' ('ראוי' הוא שם של תלמיד)? [63]
המורה משתמשת בדפוס אינטראקציה פת"מ: פתיחה, תגובה ומשוב	13	בתהליך ההוראה והלמידה חייבים באינטראקציה. תפקיד המורה לתת משוב חיובי לדברי הלומדים (חברתי	מורה: [...] האם אני יכולה לומר שקוטר הינו מיתר? תלמידים: לא, כי הקוטר עובר במרכז המעגל.

שגרות	מספר המופעים של השגרה	נרטיבים	דוגמה מאמירות או פעולות המורה
		רגשי).	מורה: אוקיי, בסדר הקוטר עובר במרכז המעגל. אבל אמרנו שההגדרה של מיתר היא שמיתר מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על ההיקף של המעגל... [-114 112]

טבלה 5 מראה את מספר המופעים הרב של השגרה "פנייה לתלמידים בשמם". אנו רואות בכך עדות לחשיבות השגרה בעיני המורה. נראה כי המורה מאמינה שפנייה לתלמיד היא דבר חשוב ובעל השפעות חיוביות. חשוב לציין שיש שגרות ונרטיבים חברתיים-רגשיים נוספים שזיהינו אצל המורה, אבל אלו הם גם מתמטיים, לכן נציג אותם בנפרד בטבלה 6.

שגרות ונרטיבים שהם מתמטיים וגם חברתיים-רגשיים של המורה

נציג כאן שתי שגרות שזיהינו אצל המורה והן נחשבות כשגרות מתמטיות וחברתיות-רגשיות בו בזמן. לכל שגרה משתי השגרות יש תת-שגרות. בטבלה 6 נציג את השגרה "חזרה על אמירות התלמידים" ותת-השגרות שלה ובטבלה 7 נציג את השגרה "שאילת שאלות" ותת-השגרות שלה.

טבלה 6: השגרה הפדגוגית "חזרה על אמירות התלמידים"
שנחשבת כמתמטית וחברתית-רגשית

שגרות		מספר המופעים של השגרה	נרטיבים (חברתי-רגשי/ מתמטי)	דוגמה מהשיעור
חזרה על אמירות התלמידים – Revoicing	כאשר התשובה לא מדויקת – חזרה תוך כדי דיוק.	13	החזרה על דברי הלומד מעודדת אותו ונותנת לו הרגשה שדבריו חשובים (חברתי-רגשי). דיוק הוא הכרחי במתמטיקה (מתמטי).	מורה: איך הגדרנו מעגל? תלמידה: הוא אוסף של נקודות. מורה: הוא אוסף אינסופי של נקודות [...] ומה עוד? תדייקו... [22-24]
	כאשר התשובה נכונה – חזרה ועידוד (מצוין, יפה, טוב...)	24	חזרה על דברים נכונים עוזרת לאחרים בקבלתה (חברתי-רגשי). עידוד התלמיד מעלה את המוטיבציה שלו (חברתי-רגשי).	המורה: המרחק שווה, מה קראנו למרחק השווה הזה? התלמידה: רדיוס המעגל המורה: רדיוס המעגל, מצוין. [12-14]

טבלה 7: השגרה הפדגוגית "שאילת שאלות" שנחשבת כמתמטית וחברתית-רגשית

שגרות		מספר המופעים של השגרה	נרטיבים (חברתי-רגשי/ מתמטי)	דוגמה מהשיעור
שאלת שאילות	שאלות הכוונה	יותר מ-40	למידת מתמטיקה מתבצעת תוך כדי חקירה (מתמטי). לומד צריך להיות אקטיבי תוך כדי למידה (חברתי-רגשי). התלמיד במרכז (חברתי-רגשי). תפקיד המורה הוא הדרכת הלומדים בחקירת הנושאים השונים (חברתי-רגשי).	המורה: מיתר זה גם מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על ההיקף, האם אני יכולה לומר שקוטר הינו מיתר? [112]
	שאלות שהוצגו כתגובה לתשובה לא נכונה שנתן תלמיד	8	התלמיד מתקן עצמו אם יינתן לו עוד הזדמנות – שאלה, ולא צריך לומר "לא נכון" שזה יוריד את המוטיבציה שלו (חברתי-רגשי).	מורה: האם הקטע השחור [מתכוונת לקוטר] מקיים תנאי זה [מחבר שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל] תלמידה: לא. מורה: למה לא? האם הקטע מקיים תנאי זה? [-124 122]
	שאלות סיכום	18	סיכום הנושא המתמטי הנלמד מסדר את הנושא אצל התלמידים ונותן למורה משוב על המצב הקיים (מתמטי).	מורה: אוקיי, היום למדנו על? תלמידים: המיתר מורה: ולמדנו על הקוטר שהוא? ... [393-395]

טבלאות 6 ו-7 מציגות שתי שגרות מרכזיות של המורה שהן גם מתמטיות וגם חברתיות-רגשיות. אם נסתכל גם על מספר המופעים של כל שגרה מהשגרות המופיעות בטבלאות 6 ו-7 נראה שמספר ההופעות של שתי השגרות הוא גדול. ספציפית, תת-השגרה "שאלת שאלות הכוונה" הופיעה הכי הרבה פעמים (לפחות 40 פעם שאלה המורה שאלה בכוונה לכוון את התלמידים). ממצא זה משקף אמונה עמוקה של המורה לגבי תפקיד שלה בכיתה כמכוונת תהליכי למידה.

דוגמאות מהשיעור

נעסוק בשתי דוגמאות מהשיעור. הדוגמה הראשונה היא דיון מליאה בנושא "הקוטר הוא המיתר הכי ארוך במעגל" והדוגמה השנייה היא דיון מליאה בנושא "הקוטר כציר סימטריה".

דוגמה ראשונה: קשר בין קוטר ומיתר (התייחסות לנרטיבים בתוכן המתמטי)

בחלק זה נציג קטע שהתרחש בכיתה שסבב על הקשר בין קוטר למיתר. בתחילה יוצג שיח שהתנהל בין המורה לתלמידיה ואחר כך ננתח את הנרטיבים המתמטיים שלדעתנו מובעים בו.

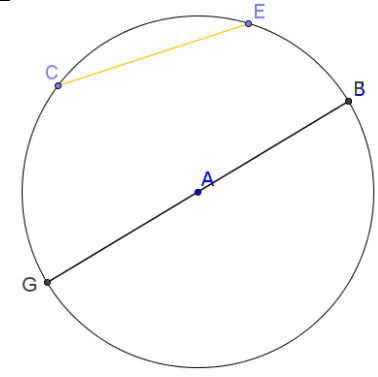
קטע 1: קשר בין קוטר למיתר

תהליך למידת הקשר בין קוטר למיתר התבצע בשני שלבים, הראשון הוא קבלת הקוטר כמיתר והשני הגדרת הקוטר כ"מיתר הארוך ביותר במעגל". בהתאם, נפצל את הקטע לשני תת-קטעים: קטע 1.1 וקטע 1.2.

קטע 1.1: הקוטר הוא מיתר

להלן השיח שהתנהל בין המורה ובין תלמידיה כאשר היה בכוונתה ללמד אותם שהקוטר הוא מיתר.

קטע 1.1: דיון מליאה בנושא "קוטר הוא מיתר"

מס' אמירה	דובר	אמירה
112	מורה	מיתר זה גם מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על ההיקף, האם אני יכולה לומר שקוטר הוא מיתר?
113	תלמידים	לא, כי הקוטר עובר במרכז המעגל.
114	מורה	אוקיי, בסדר הקוטר עובר במרכז המעגל. אבל אמרנו שההגדרה של מיתר היא שמיתר מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על ההיקף של המעגל.
115	תלמיד	זה [GB] עובר בין שלוש נקודות.
116	מורה	איפה שלוש נקודות אלה? זאת נקודה על ההיקף וזאת נקודה על ההיקף.
117	תלמיד	והמרכז.
118	מורה	בסדר, עובר דרך המרכז. אבל מה אמרנו לגבי הגדרת המיתר? תגידו לי את הגדרת המיתר.
119	תלמידים	מחבר בין שתי נקודות על ההיקף.
120	מורה	אינני שומעת, שידבר רק אחד.
121	תלמידים	מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל.
122	מורה	יפה, מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל. האם הקטע השחור [מתכוונת לקוטר] מקיים תנאי זה? 
123	תלמיד	כן
124	תלמידה	לא
125	מורה	למה לא? האם הקטע מקיים תנאי זה?
126	תלמיד	כן

מס' אמירה	דובר	אמירה
127	מורה	האם הקטע מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל?
128	תלמיד	כן
129	מורה	אז, למה אמרת לא? האם אני יכולה לומר שהוא מיתר? האם הוא מקיים את תנאי המיתר?
130	תלמידים	כן
131	מורה	אז, זה מיתר?
132	תלמיד	כן, זה מיתר.
133	מורה	כן מיתר, זה כן מיתר. אבל יש לו עוד תכונה נוספת, מהי תכונתו הנוספת?
134	תלמיד	עובר במרכז המעגל.
135	מורה	יפה, עובר במרכז המעגל. עכשיו, איך קוראים לו משום שהוא עובר במרכז המעגל?
136	תלמידים	רדיוס... קוטר.
137	מורה	עוד פעם אני חוזרת, הקטע הזה מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל, נכון? אז, איך קוראים לו?
138	תלמידים	מיתר
139	מורה	תתרכזו אתי, עוד פעם, הקטע הזה מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל, איך קוראים לו?
140	תלמידים	מיתר.
141	מורה	עוד פעם, מקיים התנאים של ה-?
142	תלמידים	מיתר
143	מורה	אוקיי, אבל יש לו עוד תכונה.
144	תלמידים	אהה
145	מורה	מהי תכונה זו?
146	תלמידים	שהוא עובר במרכז המעגל
147	מורה	מצוין, עובר במרכז המעגל. מכיוון שהוא עובר במרכז המעגל, איך קוראים לו?
148	תלמידים	קוטר
149	מורה	בסדר, אזי גילינו שהקוטר הוא?
150	תלמידים	מיתר
151	מורה	אבל עובר ב-?
152	תלמידים	מרכז המעגל
153	מורה	מצוין, מסכימים? הקוטר הינו מיתר שעובר במרכז המעגל. עוד פעם...
154	תלמידים	הקוטר הוא מיתר שעובר במרכז המעגל.

טבלה 8 מציגה את הנרטיבים המתמטיים שעלו מניתוח השיח המתמטי בתת-קטע 1.1.

טבלה 8: נרטיבים מתמטיים שהובעו על-ידי המורה ועל-ידי התלמידים בקטע 1.1

הנרטיב	מופע הנרטיבים – מספר אמירות וציטוטים	
	מופע הנרטיב אצל המורה	מופע הנרטיב אצל התלמידים
1. הקוטר אינו מיתר כי הוא עובר במרכז המעגל		[113] כאשר המורה שאלה האם קוטר הוא מיתר, התלמידים ענו: "לא, כי הקוטר עובר במרכז המעגל."
2. מיתר הוא קטע שמחבר בין שתי נקודות על ההיקף	[114], [122] "אמרנו שההגדרה של מיתר היא שמיתר מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על ההיקף של המעגל"	[119], [121], [140]+[142] כאשר המורה שאלה על הגדרת מיתר התלמידים ענו: "מחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל."
3. הקוטר מחבר בין שלוש נקודות: שתי נקודות על ההיקף והמרכז		[115-117] "זה [GB] עובר בין שלוש נקודות..."
4. הקוטר מקיים את התנאי של המיתר (מחבר בן שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל).		[123], [126], [128] כאשר המורה שאלה האם הקוטר מקיים את תנאי המיתר, התלמידים ענו – כן.
5. קיים מיתר שעובר במרכז המעגל		[139- 148] [ראה קטע 1.1 למעלה]
6. הקוטר הוא מיתר שעובר במרכז המעגל	[153] "שהוא עובר במרכז המעגל"	[130], [132], [134], [150], [152], [154] "הקוטר הוא מיתר שעובר במרכז המעגל"

מהסתכלות על הנרטיבים המתמטיים שמוצגים בטבלה 8 רואים בבירור שהתרחשה למידה. למידה זו כוללת שינוי בנרטיב המתמטי המקובל על התלמידים. בתחילת התהליך הנרטיב של התלמידים לגבי קוטר ומיתר היה: "הקוטר אינו מיתר כי הוא עובר במרכז המעגל" [113]. לאחר מכן אימצו התלמידים את הנרטיב המתמטי המקובל: "קוטר הוא מיתר שעובר במרכז המעגל" [150, 152, 153, 154]. כאשר מסתכלים על תהליך ההתפתחות של הנרטיבים, כפי שמתואר בטבלה 8, רואים כי המידע שהקוטר עובר דרך נקודת המרכז של המעגל עיכב את תהליך קבלת הקוטר כמיתר (ראה נרטיבים 1 ו-3). אפשר לשער שעיכוב זה היה בגלל שהתלמידים סברו בסמוי, שמיתר צריך לעבור דרך שתי נקודות ולא יותר, או כיוון שהם חילקו את הקטעים במעגל לקבוצות זרות, כלומר קטע במעגל הוא או מיתר או קוטר אבל לא שניהם.

נציג את השלב השני (קטע 1.2), שבו למדו התלמידים שהקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל.

קטע 1.2: הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר

להלן השיח שהתנהל בין המורה לתלמידיה כאשר היה בכוונתה ללמד אותם שהקוטר הוא המיתר הארוך ביותר.

קטע 1.2: דיון מליאה בנושא "הקוטר הוא המיתר הכי ארוך"

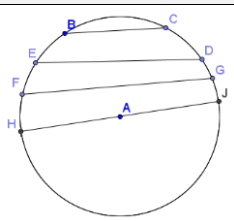
מספר אמירה	מדבר	אמירה
180	מורה	עכשיו רוצים לצייר מיתר. למשל, נחבר בין p ו-u [מציירת מיתר]. בסדר, זה מיתר. האם אני יכולה לצייר מיתר יותר ארוך מזה?
181	תלמידים	כן
182	מורה	כן, יכולים. מי יכול לבוא להגיד איפה לצייר אותו?
183	תלמיד	אני
... דיון ... התלמיד בא ללוח ומצייר		
188	מורה	בראבו מישל, המיתר שציירת יותר ארוך מזה, אבל אני רוצה שיהיה יותר ארוך, אני רוצה לצייר עוד. תסתכל מישל, מה דעתך?
... המשך דיון		
208	מורה	יללה. מה דעתך מארי, תציירי אחד יותר ארוך. קחי העט האדום [מארי מציירת קוטר] יפה... מה זה, מה ציירת? מה זה? האם ציירת מיתר?
209	תלמידה	כן
210	מורה	את בטוחה שזה מיתר?
211	מורה	למה זה מיתר? מה אמרנו לגבי המיתר?
212	תלמידה	מחבר בין שתי נקודות על ההיקף.
213	מורה	יפה, בסדר. והקטע הזה שציירתי? איפה זה עובר?
214	תלמידים	במרכז המעגל
215	מורה	מה ציירה היא?
216	תלמידים	קוטר.
217	מורה	האם הקוטר הזה מיתר?
218	תלמידים	כן
219	מורה	האם הקוטר הוא מיתר?
220	תלמידים	כן
221	מורה	אז, האם המיתר שציירת יותר ארוך מהמיתר שציירנו בהתחלה.
222	תלמידים	כן
223	מורה	מצוין, מי ינצח את מארין ויצייר מיתר ארוך מזה שציירה מארין?
224	תלמידים	לא ייתכן
225	מורה	אולי כן ייתכן? תנסה [מדברת עם אחד התלמידים, גאן], צייר קטע ארוך יותר ממה שציירה מארין. צייר איך שאתה רוצה [התלמיד מצייר קוטר]... גאן, מה ציירת? יכולים לצייר אותו?
... דיון		
230	מורה	אתה אומר שציירת מיתר יותר ארוך ממה שציירה מארין, בוא נבדוק האורך, מהו אורך הקטע שציירה מארין?... בוא נראה במחשב, גאן צייר את הקטע האדום ומרין ציירה הצהוב. גאן צייר קוטר ומארין ציירה קוטר. האם אורך הקטע שציירת שונה מזה שציירה מארין?
231	תלמיד	לא
... בודקים את האורך של שני הקוטרים השונים		
237	מורה	אורך הקטע שצייר גאן 10, הקטע הירוק בטוח 10 כי הוא קוטר, אמרנו

מספר אמירה	מדבר	אמירה
		שהקוטרים יש להם אותו אורך. האם גאן צייר קטע שונה ממה שציירה מארין באורכו?
238	תלמיד	לא
...המשך דיון		
248	תלמיד	המורה, המורה, ידעתי, לא יעזור .. אני יודע
249	מורה	מי מסכם?
... דיון		
265	מורה	בואו נסכם, הסקנו כי הקטע שציירה מארין מה?
266	תלמידים	הקטע הארוך
267	מורה	ראינו שהקוטר הוא המיתר הארוך במעגל. בהתחלה ציירנו מיתר מה אחר כך חיפשנו, מה הייתה שאלתי?
268	תלמיד	קטע
269	מורה	אצבע... תתרכזו איתי, מה הייתה שאלתי בהתחלה, מה רציתי?
270	תלמיד	רציתי קטע ארוך
271	מורה	רציתי קטע ארוך ממה שציירה מארין, בכל פעם היינו מציירים קטע, והיינו רוצים מיתר ארוך יותר. עד שהגענו לאן...?
272	תלמידה	הארוך ביותר
273	מורה	מי זה?
274	תלמידים	הקוטר
275	מורה	הקוטר, מה זה אומר על הקוטר?
276	תלמיד	הארוך ביותר
277	תלמיד	המיתר הארוך
278	מורה	המיתר הארוך במעגל

מניתוח השיח המתמטי בתת-קטע 1.2 עלו הנרטיבים הבאים, המוצגים בטבלה 9:

טבלה 9: הנרטיבים המתמטיים שעלו במקטע 1.2: הקוטר הוא המיתר הארוך היותר

הנרטיב	מופע הנרטיבים – מספר אמירות וציטוטים	
	מופע הנרטיב אצל המורה	מופע הנרטיב אצל התלמידים
1. הקוטר הוא מיתר שמחבר בין שתי נקודות שנמצאות על היקף המעגל ועובר במרכזו (נרטיב שכבר הופיע קודם, ראה טבלה 5)	הופיע קודם לקטע זה	[218] +[209] כאשר שאלה המורה אם קוטר הוא מיתר, התלמידים אמרו "כן".
2. קיימים מיתרים באורכים שונים		[181], [191], [203] המורה ביקשה מהתלמידים לצייר מיתרים באורכים שונים והם הצליחו בזה.

הנרטיב		מופע הנרטיבים – מספר אמירות וציטוטים	
		מופע הנרטיב אצל המורה	מופע הנרטיב אצל התלמידים
3. המיתרים שמצוירים אחד תחת השני גדלים עד שמגיעים לקוטר			[205] המורה שאלה "המיתרים שציירנו, אחד תחת השני... מה קורה להם?" התלמידים ענו "גדלו"... המורה שאלה עד לאן? התלמידים ענו עד הקוטר.
4. יש מיתר יותר ארוך מהקוטר – אחד התלמידים			[240], [252] המורה ביקשה לשרטט מיתר ארוך יותר ממה שציירה אחת התלמידות (שציירה קוטר), אחד התלמידים אמר שאפשר וניסה לצייר.
5. הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר		[278] "הקוטר הוא המיתר הארוך במעגל"	[258], [224], [208] +[277] +[274]+[256]+[248] "קוטר הוא המיתר הארוך במעגל"

מניתוח הנרטיבים המתמטיים שמוצגים בטבלה 9 רואים בבירור שהתקיימה למידה, על-פי הופעת הנרטיב המתמטי: "הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר שנמצא במעגל" [מספר אמירות 248, 256, 274, 277]. לפחות תלמיד אחד חלק על עובדה זו (בשורות 240, 252), כלומר זה אכן נרטיב חדש לתלמידים אלו.

מטבלה 8 ו-9 מתברר שהמורה מבטאת נרטיבים מתמטיים מקובלים. המורה גם מצפה מהתלמידים לקבל נרטיבים מתמטיים אלה.

למרות שכוונתנו בניתוח קטע זה הייתה לזהות עדות ללמידה, זהינו עוד **שגרה** פדגוגית של המורה (שהופיעה חמש פעמים) והיא, שהמורה אומרת במפורש את הנרטיב המתמטי אחרי שהתלמידים מגיעים אליו בעצמם בהדרכתה.

דוגמה שנייה: קוטר כציר סימטריה (התייחסות לנרטיבים בתוכן המתמטי)

נציג בתחילה את השיח שהתנהל בין המורה לתלמידיה ואחר כך נעסוק בנרטיבים המתמטיים של התלמידים ושל המורה.

קטע 2: דיון מליאה בנושא הקוטר כציר סימטריה

מספר אמירה	דובר	אמירה
347	מורה	יפה, בראבו... יש עוד תכונה לקוטר, אני אומרת לכם מילה אחת כך שתסיקו מסקנה... המילה 'קיפול'. תגיד (לאחד תלמידים)
348	תלמיד	אם נקפל את הקוטר הזה, נקבל רדיוס
349	מורה	אוקיי, עוד יותר... מי ייקח מה שאמר וימשיך? אני מבינה מה שאתה אומר, אבל צריכים לסדר את זה, דבר 'ראוי'..
350	תלמיד	אם אני אקפל אותם נשארים זהים
351	מורה	זה אומר, מה קורה, אם נקפל סביב הקוטר, בשני חלקי המעגל?
352	תלמיד	שווים, זהים, דומים
353	מורה	מי יגיד משהו אחר?
354	תלמיד	שניהם שווים
355	מורה	חוץ מהמילה שווים
356	תלמיד	חופפים
357	מורה	זה אומר, אם אני מקפלת לאורך הקוטר, מה יקרה לשני החלקים?
358	תלמיד	חופפים
359	מורה	מה זה אומר?
360	תלמיד	מכסים אחד את השני
361	מורה	זה אומר... איך קוראים לקוטר הזה?
362	תלמידה	ציר סימטריה
363	מורה	בראבו, ציר סימטריה
364	מורה	האם יש ציר סימטריה אחד במעגל? או שכל קוטר מהווה ציר סימטריה?
365	תלמידים	כל קוטר.
366	תלמיד	מכל מקום, כן.
367	מורה	יפה, כל קוטר מהווה ציר סימטריה. כן אכן מי יסכם?
368	תלמיד	אם יש לי קוטר ומציירים בכל אופן, יהיו שווים.
369	מורה	אני רוצה שתדייק במשפט שלך, נו תגיד לפני שנדבר
370	תלמידה	כל קוטר מחלק את המעגל לשני חלקים שווים
371	מורה	מצוינת, הקוטר מחלק את המעגל לשני חלקים שווים, זאת אומרת שקוטר?
372	תלמידים	הוא ציר סימטריה
373	מורה	יפה, זה אומר שהקוטר במעגל הוא ציר סימטריה, בואו נראה את זה...

טבלה 10 מרכזת את הנרטיבים המתמטיים שעלו ממקטע זה.

טבלה 10: נרטיבים מתמטיים בנושא "הקוטר מהווה ציר סימטריה"

הנרטיב	מופע הנרטיבים – מספר אמירות וציטוטים	
	מופע הנרטיב אצל המורה	מופע הנרטיב אצל התלמידים
1. קיפול הקוטר ייתן רדיוס		[348] "אם נקפל את הקוטר הזה, נקבל רדיוס"
2. קיפול הקוטר ייתן שני חלקים זהים, שווים		[350]+[354] כאשר המורה שאלה על מה יקרה לשני החלקים של המעגל אם נקבל את הקוטר, אמרו: "זהים, שווים"
3. קיפול הקוטר ייתן שני חלקים חופפים		[356]+[358] כאשר המורה שאלה על מה יקרה לשני החלקים של המעגל אם נקבל את הקוטר, אמרו: "חופפים"
4. שני חלקים חופפים מכסים אחד את השני		[360] כאשר המורה שאלה על משמעות חופפים, אמרו: "מכסים אחד את השני"
5. הקוטר הוא ציר סימטריה	[363]+[373] "זה אומר שהקוטר במעגל הוא ציר סימטריה"	[362]+[372] המורה שאלה: "מה זאת אומרת שקוטר?" התלמידים ענו: "הוא ציר סימטריה"
6. כל קוטר הוא ציר סימטריה	[373] "כל קוטר"	[365] המורה שאלה האם קוטר ספציפי הוא ציר סימטריה או שכל קוטר הוא ציר סימטריה, התלמידים ענו "כל קוטר"

טבלה 10 מראה שהתרחשה למידה, וזאת בשל השינוי בנרטיב שהובע על-ידי התלמידים מ"קיפול הקוטר ייתן רדיוס" ל"כל קוטר הוא ציר סימטריה". ראוי לומר שהשינוי שעברו התלמידים כאן הוא מנרטיב מקובל מתמטית (נרטיב 11: קיפול הקוטר ייתן רדיוס) לנרטיב מקובל אחר (נרטיב 16: כל קוטר הוא ציר סימטריה). זה בניגוד למה שראינו בקטע 1.1 שבו הנרטיב של התלמידים השתנה מנרטיב לא מקובל (נרטיב 1: הקוטר אינו מיתר כי הוא עובר במרכז המעגל) לנרטיב מקובל מתמטי (נרטיב 6: הקוטר הוא מיתר).

דיון

במחקר הנוכחי הועלו ארבע שאלות מחקר, חלקן נוגעות למורה וחלקן לתלמידים. התשובות לשאלות המחקר הוצגו בפרק הממצאים, ולכן בפרק הדיון ננסה לקשור בין העובדה שהצבענו עליה בפרק הממצאים, כי התרחש שינוי בנרטיבים של התלמידים, כלומר התרחשה למידה, ולהראות כיצד השגרות של המורה שירתו את התהליך שהתרחש. חשוב לציין שאמנם כדי לוודא שאכן התרחשה למידה יש להמשיך ולבדוק את הנרטיבים המקובלים על התלמידים גם בהמשך, כלומר, האם השינוי שנעשה הוא לטווח ארוך ומתקיים גם בהיעדר מומחה המנהל את הדיון.

בתת-קטע ראשון (קטע 1.1) שהיה בנושא "הקוטר הוא מיתר" השגרות של המורה היו שאילת שאלות הכוונה, שאילת שאלות כאשר התלמיד נותן תשובה לא נכונה, חזרה על דברי התלמיד, שימוש במתווכים ויזואליים, חזרה על מושגים שנלמדו קודם, עידוד כאשר התלמיד נותן תשובה נכונה. במיוחד, השגרות המרכזיות (בעלות מספר הופעות גדול יחסית) בקטע זה היו: שאלת שאלות וחזרה על דברי התלמידים. כאמור, בתת-מקטע זה התרחש שינוי בנרטיב של התלמידים מנרטיב לא מקובל (הקוטר אינו מיתר כי הוא עובר במרכז המעגל) לנרטיב מקובל (קוטר הוא מיתר שעובר במרכז המעגל). אפשר לטעון כי שגרות אלו אפשרו שינוי הנרטיבים של התלמידים לקראת הנרטיבים של המורה. תרומת השגרה "חזרה על דברי התלמידים" (Re-voicing) מצוינת על-ידי או'קונור ומייקלס (O'Connor & Michaels, 1993). החוקרים (שם) הראו שלחזרה על דברי התלמידים שתי תרומות עיקריות: הקלה בלמידה ומתן מעמד חברתי.

בתת-קטע שני (קטע 1.2) שהיה בנושא "הקוטר כציר סימטריה" השגרות של המורה היו שאילת שאלות הכוונה, שימוש במתווכים ויזואליים, פנייה ספציפית לתלמיד, עידוד כשהתשובה נכונה, חזרה על דברי התלמידים. במיוחד, השגרות המרכזיות בקטע זה היו שימוש במתווכים ויזואליים, שאילת שאלות, פנייה ספציפית לתלמיד. כאמור בתת-מקטע זה התרחש שינוי בנרטיבי התלמידים המתמטיים מ"קיימים מיתרים באורכים שונים" ל"קוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל". אפשר לטעון ששגרות אלה יחד עם הנרטיבים המקובלים שנאמרו על-ידי המורה אפשרו את השינוי אצל התלמידים. על תרומת שימוש במתווכים ויזואליים דיווח הרכבי (Arcavi, 2003). החוקר מדגים את התפקידים השונים והעשירים ששימוש במתווכים ויזואליים יכול לשרת. על תרומת שימוש המורה בפעולות מילוליות או לא מילוליות על תהליך הלמידה מדווח גורהם (Gorham, 1988). מבחינה אחרת, פרימיר והאוסר (Frymier & Houser, 2000) הראו שהתלמידים רואים בתמיכה באגו (שמקבילה לפנייה ספציפית לתלמיד) וביכולת המורה לנהל קונפליקטים (שמקבילה לשימוש המורה בשאילת שאילות) כחשובים ביותר להוראה יעילה.

בקטע 2, שהיה בנושא "הקוטר כציר סימטריה" אכן התרחשה למידה, אבל באופן שונה. בכל קטע מהקטעים הקודמים הנרטיבים של התלמידים היו בתחילה לא מקובלים, אבל כאן המצב הוא אחר. הנרטיבים של התלמידים היו מקובלים (קיפול הקוטר ייתן רדיוס) והשינוי שהתרחש אצלם הוא מנרטיב מקובל (קיפול הקוטר ייתן רדיוס) לנרטיב מקובל אחר (הקוטר הוא ציר סימטריה). שגרות המורה בקטע זה היו עידוד, שאילת שאלות הכוונה, שאילת שאלות סיכום, חזרה על דברי התלמיד. השגרה המרכזית בקטע זה היא שאילת שאלות הכוונה. כאמור, המורה מבטאת נרטיבים מתמטיים מקובלים (טבלה 10). אפשר לטעון כי שגרות אלה עם הנרטיבים המקובלים אפשרו את השינוי אצל התלמידים לקראת הנרטיבים המקובלים של המורה.

אפשר לומר כי למורה יש שלושה סוגים של שיח שאנחנו משערים שתרמו לתהליך הלמידה. איור 1 מבהיר את הכוונה שלנו.



איור 1: שיח של מורת המתמטיקה בכיתה[1]

מחקרים אחרים ניסו לבדוק את השפעת פעולות פדגוגיות שונות על תהליך הלמידה. אחד המחקרים האלה הוא של ליפויסקי ואחרים (Lipowsky et al., 2009). מחקר זה בוחן כיצד שלושה ממדים בסיסיים של הוראה איכותית שהם הפעלה קוגניטיבית, אקלים תומך וניהול הכיתה, יכולים להשפיע על התפתחות ההבנה של התלמידים למשפט פיתגורס. אחד הממצאים של מחקר זה הוא כי לניהול הכיתה ולהפעלה קוגניטיבית יש השפעות חיוביות על ההישגים במתמטיקה, ממצא שתומך בממצאי המחקר הנוכחי. במקרה שלנו, ההפעלה הקוגניטיבית התבצעה על-ידי השגרה הפדגוגית של שאילת שאלות שמאפיינת את המורה בשיעור שניתחנו. האקלים התומך וניהול הכיתה מתחברים עם שגרות פדגוגיות שונות שמאפיינות את השיח של המורה בשיעור שניתחנו: פנייה ספציפית לתלמיד, חזרה על אמירות התלמידים, עידוד כאשר התשובה נכונה ושגרות אחרות. כך יהיה אפשר לטעון כי שימוש בשגרות פדגוגיות ספציפיות (כמו השגרות שמצאנו) יתרום לתהליך למידת התלמידים מבחינה קוגניטיבית ומבחינה הישגית. במחקר זה זיהינו מספר שגרות שונות שתומכות בלמידת התלמידים ומשנות את הנרטיבים המתמטיים שלהם. אפשר להמשיך במחקרים שונים ולמצוא שגרות אחרות שתומכות בצורה דומה בלמידת התלמידים את המתמטיקה.

מתוך מחקר זה עולה השאלה: האם יהיה מומלץ לבנות מודלים פדגוגיים שונים, ולבחון באמצעות שתי התאוריות (קומוגניציה ו-SFL) את תהליכי הלמידה שמתרחשים בהשפעת כל מודל, ובסופו של דבר להמליץ או לא להמליץ על המודל שנבנה? אנחנו גם מציעות לעשות ניתוח של שיח מתמטי בנושאים מתמטיים שונים, לזהות האם קיימים נרטיבים מתמטיים שמעכבים את קיום הלמידה בכל נושא ונושא ולאפיינם. במחקר זה ראינו אפשרות ליישום התאוריה הקומוגניטיבית של ספרד (Sfard, 2008) כדי לזהות עדויות ללמידה ולאפיין את התהליך המביא לכך, ובפרט שאפשר לזהות עדויות ללמידה על-פי

1. *Elements of Teacher vector set 05*. Retrieved from http://freedesignfile.com/13532-elements-of-teacher-vector-set-05/

שינוי באחד (או יותר) ממאפייני השיח של הלומדים. במקרה זה התמקדנו בנרטיבים המתמטיים של התלמידים. אפשר להסיק גם כי התאוריה הקומוגניטיבית של ספרד והתאוריה הבלשנית של האלידי מספקות עדשה רחבה מאוד באמצעותה אפשר לחקור את המרכיבים וההיבטים השונים של השיח המתמטי – במקרה שלנו חקרנו שגרות ונרטיבים בתוכן ובפדגוגיה.

רשימת מקורות

ויגוצקי, ל' (2006). **חשיבה ודיבור** (ב' קוטיק-פרידגוט ב', עורכת, ר' גילבאום, מתרגמת). ירושלים: מאגנס.

טבח, מ' ונחליאלי, ט' (2014). מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות להוראה: המקרה של הקורס 'פונקציות וגרפים'. **מעוף ומעשה במכללת אחוה, 16**, 43-67.

נחליאלי, ט' ורגב, ח' (2009). **אירועים מעודדי למידה וחשיבה ואירועים בולמי למידה וחשיבה בשיעורי מתמטיקה** (דו"ח מחקר שהוגש למכון מופ"ת). תל-אביב.

רגב, ח' ושמעוני, ש' (2005). השיחה המתמטית – שיח אחד או יותר? **על"ה, 34**, 35-43.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Ben-Yehuda, M., Lavy, H., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education ,36*(3), 176-247.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 3*0(2), 192-212.

Daher, W., Swidan, O., & Shahbari, J. (2015). Discursive positionings and emotions in a small group's learning of geometric definitions. In K. Krainer & N. Vondrov´a (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1160-1166). Prague, the Czech Republic.

Frymier, A. B., & Houser, M. L. (2000). The teacher-student relationship as an interpersonal relationship. *Communication Education, 49*(3), 207-219.

González, G., & DeJarnette, A. F. (2013). Geometric reasoning about a circle problem. *Mathematics Teacher, 106*(8), 586-591.

Gorham, J. (1988). The relationship between verbal teacher immediacy behaviors and student learning. *Communication education, 37*(1), 40-53.

Halliday, M. A. K. (1978). Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning. London: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K., & Matthiessen, C. M. I. M. (2004). *An introduction to functional grammar* (3rd ed.). London: Arnold.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., Pauli, C. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction, 19*(6), 527-537.

Martin, J. R., & Rose, D. (2005). *Working with discourse: Meaning beyond the clause* (Rep.). London: Continuum.

Mehdiyev, R. (2009). Exploring students' learning experiences when using a Dynamic Geometry Software (DGS) tool in a geometry class at a secondary school in Azerbaijan (Unpublished master's thesis). Universiteit van Amsterdam, The Netherlands.

Neel-Romine, L. E., Paul, S., & Shafer, K. G. (2012). Get to know a circle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4), 222-227.

O'Connor, M. C., & Michaels, S. (1993). Aligning academic task and participation status through revoicing: Analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly, 24*(4), 318-335.

Oladosu, L. (2014). *Secondary school students' meaning and learning of circle geometry* (Doctoral dissertation). The University of Calgary, Alberta.

Ryve, A. (2006). *Approaching mathematical discourse – Two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions* (Doctoral dissertation). Mälardalen University, Västerås.

Ryve, A. (2007). What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(1), 43-61.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2011). Combining theories to analyze classroom discourse: A method to study learning processes. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2548). University of Rzeszów, Poland.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3) 299-306.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The teacher's role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of educational research, 78*(3), 516-551.



אחלאם ענאבוסי

בוגרת תואר ראשון בהוראת מתמטיקה ומחשבים במכללת אלקאסמי. בוגרת תואר שני בחינוך מתמטי באוניברסיטת תל-אביב. מורה למתמטיקה ולמחשבים בבית ספר יסודי במחוז צפון. עוסקת בפיתוח אתרים העוזרים למורי המתמטיקה אשר כוללים חומרי לימוד וכלים טכנולוגיים חינוכיים. עוסקת גם בהדרכת סטודנטים ופרחי הוראה לשילוב כלים דיגיטליים ייחודיים בהוראה. בעלת ניסיון מחקרי של חמש שנים.



פרופ׳ מיכל טבח

חברת סגל בכיר באוניברסיטת תל-אביב בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי. במחקריה היא עוסקת בין השאר בסוגיות העולות מתוך שילוב טכנולוגיה בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובהתפשטות ידע מתמטי בכיתה. מיכל חוקרת באמצעות גישת המחקר התקשורתית זה כעשור.

מטה-אריתמטיקה ספונטנית כצעד ראשון לקראת האלגברה הבית-ספרית[1]

שי כספי, אוניברסיטת חיפה

תקציר

מאמר זה מתאר שלב התחלתי של מחקר אורך שבו נבחנה התפתחות משיח אלגברי בלתי-פורמלי לשיח אלגברי פורמלי הנלמד בבית הספר. המשתתפים במחקר היו חמישה זוגות של תלמידים בכיתה ז'. במעקב שנמשך שנתיים וחצי, נמצא שהתלמידים הצליחו להתמודד עם בעיות אלגבריות (בעיות הכללה ובעיות עם נעלם) בעזרת שיח מטה-אריתמטי, וזאת בטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית הבית-ספרית. שיח זה התגלה כבעל תכונות מסוימות שאינן בנמצא בשיחים יומיומיים, אך הן אופייניות לשיח אלגברי פורמלי. הממצאים שהתקבלו הביאו לידי הרחבת המחקר ולהסתכלות על מטה-אריתמטיקה של תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. מתוך הממצאים עולה כי שיח אלגברי בלתי-פורמלי מופיע זמן רב לפני שמתחילה למידתה של האלגברה הפורמלית בבית הספר.

מילות מפתח: שיח מטה-אריתמטי; שיח אלגברי; התפתחות; פורמליזציה; הכללה.

מבוא

בשלושת העשורים האחרונים פורסמו מחקרים רבים שבחנו את החשיבה האלגברית של תלמידים בחטיבת הביניים. רוב המחקרים דנו בידע האלגברי של הלומד בנקודת זמן מוגדרת (בעת איסוף הנתונים) ועסקו בדרך כלל בנושא אלגברי מסוים, ללא קישורו לנושאים אלגבריים אחרים (de Lima & Tall, 2008; Stacey & MacGregor, 1999). מחקרים אלה התרכזו לרוב באלגברה פורמלית המבוטאת בעזרת סמלים אלגבריים (כגון אותיות).

המחקרים המעטים שהגדירו את עצמם כ"מחקרי אורך" דנו בשאלה "מה מתפתח בחשיבה האלגברית?" ולא עסקו בשאלה איך מתרחשת התפתחות זו (Becker & Rivera, 2004). אמנם מחקרי אורך אלה

1. המאמר הנוכחי הוא גרסה מתורגמת ומקוצרת של המאמר: Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal Research, 51-52*, 45-65.

שבוצעו בעיקר בבתי-ספר יסודיים, עקבו אחרי התפתחותה של אלגברה בלתי-פורמלית, אך המעקב המתואר בהם הסתיים בדרך כלל עם הצגתה של האלגברה הפורמלית בכיתה (Radford, 2012). יתרה מזו, תשומת לב מועטה בלבד ניתנה בהם לשאלת יחסי הגומלין בין השיח הפורמלי ובין השיח הבלתי-פורמלי במהלך למידת האלגברה הפורמלית בבית הספר. המחקר, ששלביו הראשונים מוצגים במאמר זה, מבקש למלא את החסר. לשם כך אומצה "הגישה הקומוגניטיבית" (Sfard, 2008),[2] שפותחה במיוחד לצורך ניתוח השיח המתמטי ולמעקב אחרי התפתחותו.

1. רקע תאורטי

לפי הגישה הקומוגניטיבית יחידת הניתוח היא שיח. שיח מוגדר כדרך תקשורתית מסוימת, בין-אישית או פנימית המתנהלת לפי כללים ייחודיים. שיח נתון מחלק את בני האדם לאלה שמסוגלים להשתתף בו ולאלה שאין להם גישה אליו. למשל תלמידים הלומדים מתמטיקה במקומות שונים בעולם אמורים להשתתף באותו השיח הנקרא "מתמטי", וזאת על אף שהם דוברים שפות שונות. בשיח המתמטי ישנם תת-שיחים רבים, לדוגמה שיח אלגברי, שיח גאומטרי ועוד. הגישה התקשורתית מגדירה ארבעה מאפיינים ייחודיים לשיח המתמטי:

- שיח נחשב למתמטי אם הוא כולל **מילים מתמטיות** שסביבן מאורגן השיח.
- **מתווכים חזותיים** הם עצמים סימבוליים (למשל גרף, נוסחה או ביטוי אלגברי) שבעזרתם יכולים המשתתפים בשיח המתמטי לזהות את נושאי השיח ולנהל בהתאם את הפעילות התקשורתית.
- **נרטיב** הוא כל טקסט מדובר או כתוב המנוסח כתיאור של עצמים, כתיאור של קשרים בין עצמים או כתיאור פעולות על עצמים. משתתפים שונים בשיח עשויים לאמץ נרטיבים שסווגו כ"נכונים" על-ידי הקהילייה המתמטית, או לדחות כאלה שסווגו על-ידי ה כ"לא נכונים". נרטיבים מתמטיים עשויים להשתייך לאחת משתי הרמות הבאות: (1) רמת *העצם* – הכוללת חוקים מתמטיים (למשל, $2+5=7$) או (2) רמת *העל*– הכוללת חוקים המגדירים את השיח (למשל הוכחה של טענה מתמטית).
- **רוטינות** הן דפוסי שיח החוזרים על עצמם במהלך הפעילות התקשורתית של המשתתפים.

בפרק זה אגדיר את האלגברה הבית-ספרית ואציע מודל המתאר את התפתחותו של השיח האלגברי.

1.1. אלגברה אלמנטרית כמטה-אריתמטיקה

אלגברה בית-ספרית (אלמנטרית) היא מטה-שיח של האריתמטיקה (Sfard, 2008), כלומר שיח על שיח מספרי. במסגרתו של שיח מיוחד זה עוסקים בשני טיפוסים של משימות מטה-אריתמטיות:

1. הכללות, כלומר זיהוי דפוסים מספריים. באלגברה פורמלית מציגים דפוסים כאלה כשוויונות סימבוליים, כגון $a(b+c)=ab+ac$. שוויון זה הוא קיצור של המשפט המטה-אריתמטי: "כדי לכפול מספר בסכום של שני מספרים אחרים, ניתן לכפול כל אחד משני מספרים אחרים אלה במספר הראשון, ואז לחבר את התוצאות".

2. **קומוגניציה** (*commognition*) הוא מונח המקיף חשיבה (קוגניציה של הפרט) ותקשורת בין-אישית. מונח זה נוצר מהכלאה של המילים "קוגניציה" ו"תקשורת" והוא בא להדגיש כי חשיבה ותקשורת בין-אישית הן התגלמויות שונות של אותה תופעה.

2. שאלות עם נעלם, כלומר שאלות שעוסקות במספר בלתי ידוע שמשמש בביצוע חישובי שתוצאתו ידועה. טיפוס זה של משימות מתואר בשפה המודרנית כפתרון משוואות. ואכן, משוואות כגון $2x+1=13$ הן שאלות מטה-אריתמטיות – שאלות על תהליכים מספריים. במקרה זה השאלה היא: "מהו המספר, שאם נכפיל אותו ב-2, ונחבר 1 למכפלה, נקבל 13?".

שתי הדוגמאות שלעיל נכתבו באמצעות סמלים מיוחדים המזוהים על-פי רוב כסממן הבולט של האלגברה. ואולם לפי הגדרת האלגברה שניתנה לעיל (ועיקריה מקובלים על היסטוריונים ופילוסופים של המתמטיקה), הסימול הפורמלי שהומצא רק במאה השבע-עשרה אינו תכונה הכרחית של שיח אלגברי. את גישה זו אימצו כמה חוקרים בחינוך המתמטי (Sfard, 1995; Radford, Bardini, & Sabena, 2007; Zazkis & Lijedahl, 2002). ובכל זאת, לשיח האלגברי הסימבולי יש שלוש תכונות בולטות המעניקות לו עמדת יתרון על פני השיח הבלתי-פורמלי:

1. **חד-משמעיות** – לביטוי מסוים בשיח ניתנת פרשנות אחת ויחידה.
2. **סטנדרטיזציה** – כל המשתתפים בשיח פועלים לפי אותם חוקים תקשורתיים.
3. **דחיסות** – טענה מתמטית ארוכה הופכת לביטוי תמציתי הנתון למניפולציות אלגבריות.

כך למשל את התיאור המילולי הארוך "מכפלת הפרשם של שני מספרים a ו-b בסכומם של שני מספרים אלה", נוכל לרשום על-ידי הביטוי הדחוס והחד-משמעי $(a+b)\cdot(a-b)$, שעליו מפעילים הדוברים את אותם החוקים התקשורתיים. החד-משמעיות מושגת באמצעות **רגולציה** – כינונם של חוקי שיח מפורשים בעלי כללי תחביר עקביים וקפדניים (כגון ביצוע תקין של אופרציות אלגבריות ומעבר לביטוי השקול a^2-b^2).

הדחיסות מושגת הן באמצעות ראיפיקציה והן באמצעות סימול: **ראיפיקציה** היא החלפת הדיבור על *תהליך* חישובי בדיבור על *עצמים* שהם תוצאת החישוב (למשל במקום לתאר את הביטוי $x+3$ כ*תהליך* – "מחברים את x ו-3", אפשר לנסחו כ*עצם* – "הסכום של x ו-3"); **סימול** הוא החלפת שמות עצם, פרדיקטים[3] (predicates) ופעלים באידאוגרפים. בדומה למילים, אידאוגרפים הם סמלים העוסקים בעצמים או בפעולות. אולם בשונה ממילים, האידאוגרפים אינם קשורים קשר הדוק לצלילים מסוימים, למשל האידאוגרף "x" שבעזרתו נהוג לסמן משתנים או נעלמים במתמטיקה. תכונות השיח הפורמלי (חד-משמעיות, סטנדרטיזציה ודחיסות) והשיטות למימושן (רגולציה, ראיפיקציה וסימול) מספקות את "תהליך הפורמליזציה של השיח האלגברי", כלומר את התהליך ההדרגתי שבו נוצרת האלגברה הפורמלית.

3. פרדיקט הוא פונקציה שמקבלת משתנה אחד או מספר משתנים ומחזירה ערך אמת או שקר. למשל, אם P הוא פרדיקט כלשהו, אז פירוש הפסוק $\forall x P(x)$ הוא: "לכל x מתקיים P(x)".

1.2. התפתחותו של שיח אלגברי

התפתחותו ההיסטורית של כל שיח מתמטי התרחשה על-ידי פורמליזציה של שיחי-העל שלו והכרה בהם כחלק מן השיח המתמטי עצמו (Sfard, 2008). אפשר לפרק כל שיח מתמטי נתון לשכבות היררכיות, כשכל שכבה במבנה כזה (פרט לראשונה) היא שיח-על של השיח המכונן את השכבה שמתחתיה. היררכיה זו שאפשר לראותה בקלות יחסית, "מסגירה" את התפתחותו של השיח, כשסדר השכבות משקף את סדר ההתפתחות ההיסטורית. ואמנם אי אפשר לחשוב על מטה-שיח הנוצר לפני השיח עצמו. המודל ההיררכי כשיוצג במפורש, עשוי לשחק תפקיד גם בחקר של למידת האלגברה. השכבה התחתונה אינה אלא השיח המטה-אריתמטי שהתפתח התפתחות ספונטנית, כלומר מחוץ להקשר הוראתי מפורש (Daniels, 2007).[4] נראה כי המודל מלמד על מסלול שהלומד צריך לעבור כדי להבטיח את למידתה של האלגברה. הנימוק לטענה זו ברור אף הוא: אם כל שכבה בהיררכיה היא שיח-על של השיח בשכבה שמתחתיו, הרי שהצגה של שכבה חדשה בטרם שולט התלמיד בשכבה שמתחתיה, נושאת בחובה סיכון שלתלמיד לא יהיו אמצעים וחומרים לבניית השיח החדש.

בטבלה 1 מוצג מודל ראשוני של התפתחות האלגברה הנשען על מודל קודם שהציגו ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994). בניית המודל נעשתה בהתאם להבנתי את השיח האלגברי והקשרים הפנימיים שלו, תוך הישענות על שני מקורות: מחקר העוסק בהתפתחותה ההיסטורית של האלגברה וכן המחקר העוסק בלמידתה. אחד מיעדי המחקר הנוכחי היה לאושש את הסכֵמה, וכן לתרום להמשך בנייתה ועידונה (למשל בהשלמת התאים הריקים שבה). שורות המודל מייצגות רמות עולות של מורכבות. מעברים מרמה אחת לרמה העוקבת לה הם אבני-דרך התפתחותיות: כל רמה חדשה מביאה עמה שינוי בדרך השימוש במילים ובמתווכים קיימים ועל כן גם בכמה מחוקי-העל של השיח. הרמות המוצגות במודל הן חלק מתמונה רחבה יותר: לפניהן שכבה דומה ובה יש רמות נמוכות יותר של שיח אריתמטי, ועוקבות להן מספר שכבות ברמות גבוהות, כגון אלגברה ליניארית או אלגברה מופשטת, שכל אחת מהן היא מטה-שיח ייחודי של האלגברה האלמנטרית (רמות קצה אלה אינן מופיעות בטבלה 1).

שתי העמודות המרכזיות מציגות גרסה בלתי-פורמלית ופורמלית של השיח. הרמות התואמות של השיח הבלתי-פורמלי והפורמלי הועמדו זו לצד זו כיוון שאפשר לזהות את השיח בחצי השמאלי של השורה כגרסה פורמלית של השיח בחצי הימני שלה, ולא מפני שהן מתפתחות בו בזמן או בסמיכות האחת לשנייה.

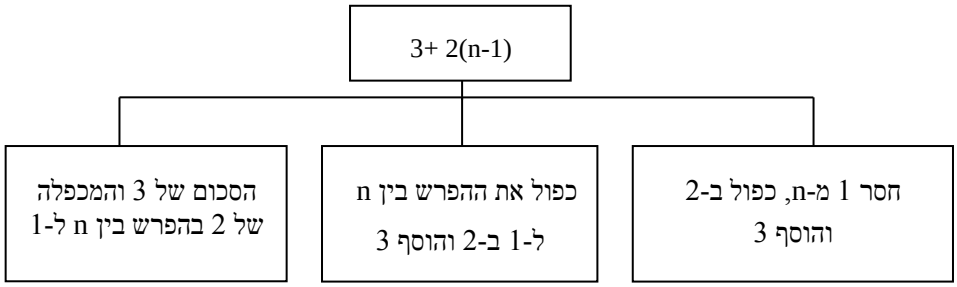
4. אני משתמש במילה "ספונטני" בדרך שבה היא שימשה את פיאז'ה, ויגוצקי וממשיכי דרכם. צמיחה ספונטנית מתרחשת בלי כוונה מפורשת ובלי מאמץ הוראתי מכוון. עבור פיאז'ה, הצמיחה מתרחשת הודות למבנה הביולוגי האנושי. עבור ויגוצקי, הצמיחה מתרחשת במהלך אינטראקציות יומיומיות עם הסביבה האנושית והלא-אנושית, כשההשפעה האנושית במרכז (כדי לבדל את עצמו מהדטרמיניזם הביולוגי של פיאז'ה, החליף ויגוצקי את ה"ספונטני" ב"יומיומי"). למשל, ויגוצקי דן בהתפתחות ספונטנית של מושגים, ורואה במושגים ספונטניים "ככאלה שנרכשו על-ידי הילד מחוץ להקשר הוראתי מפורש" (Daniels, 2007, pp. 310-311). השימוש שלי במילה "ספונטניות" דומה להגדרתו של ויגוצקי יותר מהגדרתו של פיאז'ה.

טבלה 1: מודל של התפתחות השיח האלגברי

רמה/משימה		בלתי-פורמלי				פורמלי			
		מסמנים של עצמים והשימוש בהם		רוטינות		מסמנים של עצמים והשימוש בהם		רוטינות	
רמה	משימה	מסמנים מילוליים	אידאוגרפים (מתווכים חזותיים)	פנייה (שאלה, בקשה)	הליך	מסמנים מילוליים	אידאוגרפים (מתווכים חזותיים)	פנייה (שאלה, בקשה)	הליך
רמה 1 תהליכית	**מציאת נעלם**	**שם עצם בשיח יומיומי** המתפקד כמספר **לא-ידוע**	**צורות גאומטריות** המתפקדות **כשומרי מקום**	"מה היה <שם העצם>?"	**שחזור**, סדרת פעולות מספריות הפוכות	נעלם	**אות כנעלם**	משוואות **"אריתמטיות"** שבהן הנעלם באגף אחד בלבד	**שחזור**, סדרת פעולות מספריות הפוכות
	הכללת קשרים	**שם עצם בשיח יומיומי** המתפקד כמספר **נתון**		כיצד תקבל איבר מסוים של הדפוס?	**סדרת פעולות** עם סימן שוויון המשמש להוראה: **"בצע"** תיאורים **רקורסיביים**.	נתון	אות המתפקדת כנתון (פרמטר)		
רמה 2 מגורענת	**מציאת נעלם**	**פסוקית שם עצם מורכבת** המוצגת בצורה **תהליכית**, כתיאור של **חישוב** מסוים				משוואה	**אות כנתון (פרמטר) ביטוי מילולי מורכב** המתפקד כתיאור של תהליך	**P(x) = n** כאשר p(x) הוא ביטוי מילולי מורכב (למשל, 3x+7) ו- n הוא מספר מסוים	**פעולה על שני האגפים** אלגוריתם
	הכללת קשרים				**תיאורים מגורענים** של חישובים מורכבים. **רקורסיה מקוצרת**	נוסחה (ביטוי)	**ביטוי מילולי מורכב** המתפקד **כתיאור של תהליך**		**נוסחאות מורכבות** כתיאורים של **חישובים**
רמה 3 מעוצמת	**מציאת נעלם**	**פסוקית שם עצם מורכבת** המוצגת בצורה **מעוצמת**, כתיאור **תוצאה** של חישוב מסוים				פרמטר (מחליף נתון)	**ביטוי מילולי מורכב** המתפקד **כעצם** (מספר מסוים)	**P(x) =R(x)** כאשר p(x) ו-R(x) הם ביטויים מילוליים מורכבים	פתרון משוואות **אלגוריתם סימבולי**
	הכללת קשרים			תאר חוק עבור יצירת **הדפוס**	חיפוש אחר תיאור **רקורסיבי**				**מודל** תופעה חקור את התופעה	**נוסחאות מורכבות** כתיאורים של **תוצאות** חישוביות

ברמה הראשונה – **רמה תהליכית** של השיח האלגברי, ההתמקדות של הדוברים היא בחישובים מספריים. בשלב זה החישובים מתבצעים בעיקר במילים, והמאפיין הבולט של התיאורים המילוליים (או סמלים אם יש כאלה) של חישובים אלה הוא שהפעולות רשומות בסדר שבו הן מבוצעות (ראה דוגמה באיור 1א). בעיות טיפוסיות ברמה זו כוללות משוואה אריתמטית מהדרך $ax + b = c$, דרך שאפשר לפותרה ב"שחזור" – הפיכת הפעולות שבוצעו על הנעלם כדי לקבל את התוצאה הרשומה באגף ימין. כפי שדיווחו פילוי ורוג'נו (Filloy & Rojano, 1989), ילדים מסוגלים לבצע חישוב "הפוך" כזה גם בלי שמישהו לימד אותם טכניקה זאת. הרמה התהליכית מתאפיינת גם בשימוש תדיר במילים מיוחדות עבור

תוצאות ביניים. כך למשל כאשר תלמיד מתאר את הביטוי $3x+5$: "שלוש כפול משתנה שווה משהו. המשהו הזה ועוד 5". התלמיד משתמש במילה "משהו" כתוצאת ביניים של התהליך החישובי.



א. תיאור תהליכי **ב. תיאור מגורען** **ג. תיאור מעוצם**

איור 1: שלוש רמות של תיאורים להליך חישובי

ברמה השנייה – **רמה מגורענת**, ההתמקדות היא עדיין בחישובים מספריים, אך התיאורים של תהליכים אלה אינם תואמים אחד לאחד את סדרת הפעולות שהתבצעו במהלך החישובים עצמם. כך למשל באיור 1ב הדובר מבצע תחילה פעולת כפל, על אף שפעולה זו אינה כתובה ראשונה. כמו כן פעולת החיסור ("חסר 1 מ-n") הוחלפה בפסוקית שם עצם ("ההפרש בין n ל-1"). התוצאה המשולבת של שתי החלפות אלה היא ראיפיקציה של תהליך החישוב ו"הַזָרה" שלו – ביטול אזכורו של המבצע האנושי. בשל שינויים אלה הפסוקיות המתקבלות הן מעוצמות, כלומר מתארות עצמים ולא פעולות. אפשר לומר שבזכות הפסוקיות האלה, התיאור של התהליך הופך ל"מגורען": פסוקיות עצם אלה הן בבחינת קיצורים של פעולות בסיסיות, והן קושרות חלקים של שרשרת פעולות ארוכה ל"חרוזים" או "גרעינים".

המראה החיצוני של שרשרת חישובים זו אינו שונה בהרבה מהמראה של שיח אלגברי ברמה הראשונה: גם כאן מופיעה סדרת פעולות חישוביות, אלא שהודות להחלפת החישוב בתוצאתו, אין צורך להפסיק את הסדרה בכל מקרה של חישוב עזר. עבור תלמיד המצוי ברמה זו, לתוצאות ביניים אלה ישנו קיום ארעי בלבד. גם אם תוצאות אלה מבוטאות בסמלים, מותר להן להופיע בתהליך של חישובים, אך הן אינן מספקות תשובות סופיות לגיטימיות לבעיות אלגבריות. תופעה זו עשויה להסביר למשל את חוסר היכולת של תלמידים לפרש ביטוי אלגברי כגון $a+b$ כעצם (ראה Collis, 1975) או לחלץ את הנעלם במשוואה הפרמטרית $(k-1)x=3$ על-ידי חילוק שני אגפי המשוואה בביטוי המורכב $k-1$ (Sfard & Linchevsky, 1994).

הרמה השלישית **והמעוצמת** של האלגברה היא זו של המשתתפים המומחים בשיח האלגברי. ברמה זו המעמד של פסוקית שם עצם מורכבת או של ביטוי אלגברי מורכב אינו שונה מזה של מספר. מבנה מורכב זה עשוי להיות חלק מפעולה מספרית כלשהי ויכול להופיע כתחליף למספר בכל היגד העוסק במספרים. השימוש בביטויים אלגבריים, מילוליים או סימבוליים, נעשה כעת על-ידי קשרים בין עצמים

שבהם אינו מעורב הגורם האנושי: "מכפלה של סכום שני מספרים וההפרש שלהם שווה להפרש שבין הריבועים של מספרים אלה". לעומתו, תיאור "מגורען" המערב את המבצע האנושי עשוי להישמע כך: "במקום לכפול את הסכום של שני מספרים בהפרש שלהם, אפשר להחסיר את הריבוע של המספר השני מהריבוע של הראשון" (ראה גם איור 1ג). ברמה המעוצמת, ביטויים אלגבריים נחשבים כמציינים עצם מפותח ועצמאי.

2. שיטת המחקר

מחקר האורך המתואר עוקב אחרי קבוצה של לומדי אלגברה כדי למפות את התפתחות השיח האלגברי שלהם. במהלך שנתיים וחצי התבקשו התלמידים לפתור בעיות אלגבריות העוסקות בהכללה ובפתרון משוואות, כך שרמת מורכבותן עלתה עם הזמן.

איסוף הנתונים החל עם כניסתם של התלמידים לכיתה ז', לפני שנחשפו לאלגברה הפורמלית הבית-ספרית. מטרתי הייתה ללמוד על מאפייניו של השיח המטה-אריתמטי (הבלתי-פורמלי) הספונטני[5] שלהם. בהמשך עקבתי בדקדקנות אחרי התפתחותו של שיח זה בזמן שהתלמידים למדו אלגברה פורמלית בבית הספר.

2.1. שאלות המחקר

שתי השאלות המרכזיות שהנחו מחקר זה:

1. מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי של תלמידים בכיתה ז', בטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי בכיתה?
2. כיצד התפתח השיח האלגברי של תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה בכיתה? בייחוד האם השיח הבלתי-פורמלי והשיח הפורמלי מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

המאמר הנוכחי מתמקד בשלב ההתחלתי של המחקר, לפני שהתלמידים נחשפו חשיפה רשמית לאלגברה פורמלית בית-ספרית. לפיכך במאמר זה אדון בשאלת המחקר הראשונה בלבד.[6] כפי שאסביר בהמשך, ממצאי המחקר עודדו אותי להרחיב את אוכלוסיית המשתתפים ולכלול תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. מהלך זה הביא גם לידי הרחבת שאלת המחקר הראשונה והיא תנוסח כעת ניסוח כללי יותר: **מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?**

5. המילה "ספונטני" מציינת כי התלמידים התבקשו להתמודד עם פתרון משימות אלגבריות בטרם הפכה האלגברה לאובייקט למידה מוצהר בבית הספר.
6. תשובה על השאלה השנייה מופיעה בתוך כספי, 2014.

2.2. המשתתפים והליך איסוף הנתונים

לצורך המעקב אחרי התפתחותו של השיח האלגברי נבחרו חמישה זוגות תלמידים בכיתה ז'. לתלמידים אלה יש מאפיינים דומים: הם תושבי עיר גדולה בצפון הארץ, בעלי רמת הישגים ממוצעת או מעל הממוצע במתמטיקה ורקע סוציו-אקונומי בינוני. התלמידים השתייכו לאותו בית ספר. אף שלמדו מתמטיקה בשתי כיתות נפרדות ואצל מורות אחרות, למדו המשתתפים לפי תכנית לימודים זהה והשתמשו באותם ספרי לימוד. בחירתם למחקר התבצעה על-פי שלושה קריטריונים: גישה חיובית למתמטיקה, יכולת גבוהה לבטא את עצמם ומוכנות להשתתף במחקר מתחילתו ועד סופו. כדי שיוכלו ליהנות בחברת בני-זוגם, חולקו התלמידים לזוגות על-פי בחירתם האישית.

במהלך שנתיים וחצי מדי שישה חודשים התקיים סבב ראיונות שבו נפגש כל זוג תלמידים עם החוקר (ראה איור 2). כל סבב ראיונות ארך כחודש וחצי וכלל חמישה או שישה מפגשים עם כל זוג. אורכו של כל מפגש היה בין 60 ל-90 דקות. הסבב הראשון החל בתחילת כיתה ז', בשלב שבו התלמידים טרם נחשפו לאלגברה הבית-ספרית, ואילו הסבב החמישי והאחרון התקיים באמצע שנת הלימודים של כיתה ט'. במהלך הראיונות שצולמו במלואם, האזנתי לשיחות שקיימו המשתתפים בעת התמודדותם עם המשימות, ובמידת הצורך שאלתי אותם שאלות הבהרה. תמיד הקפדתי להימנע מכל התערבות הוראתית ישירה, כך שהצגת האלגברה ועקרונותיה נשארו בידי המורות המלמדות בכיתה.

איור 2: ריאיון עם זוג משתתפים: התלמידים ממוקמים מול המצלמה והחוקר יושב מולם[7]



לאחר ניתוח ראשוני של הממצאים שהתבצע לאחר סיום הסבב הראשון, הבנתי שאני זקוק לעוד נתונים כדי להכריע בין מספר פרשנויות אפשריות של הנתונים שנאספו עד לאותו שלב. התברר לי שהיה כדאי "לחפור" עמוק ומוקדם, ולכן החלטתי לבדוק שיח זה גם בקרב תלמידים צעירים יותר. לשם כך קיימתי עוד ראיונות עם כמה זוגות תלמידים בכיתה ה' בעלי רקע סוציו-אקונומי דומה לרקע של התלמידים בכיתה ז'. במאמר זה מוצגות תוצאותיו של סבב הראיונות הראשון שהתקיים בקרב המשתתפים הראשיים של המחקר (להלן "הבוגרים" – תלמידי כיתה ז' באותה עת) והן משוות לתוצאות שהתקבלו

7. את האיור איירה אמי ספרד, בתה של פרופ' אנה ספרד.

אצל התלמידים בכיתה ה' (להלן "הצעירים").

המחקר הנוכחי הוא חקר מקרה (או חקר מספר מקרים – multiple case studies) שבו ביקשתי לבחון בין השאר מה קורה לשיח האריתמטי הבלתי-פורמלי של תלמיד, כאשר הוא פוגש את השיח האלגברי הפורמלי בבית הספר. ברור שדרך ההוראה בכיתה עשויה להשפיע על תוצאותיו של מפגש זה. עם זה כמו בכל חקר מקרה, נהוג לקבל את המקרה כפי שהוא ולהראות מה עשוי לקרות ולא מה קורה תמיד. בפרק הדיון אדון בשאלה מה מתוך הממצאים שאציג אפשר להכליל מעבר למקרה הספציפי שנחקר כאן.

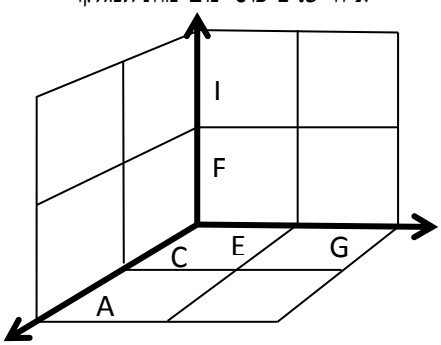
2.3. משימות המחקר

השאלון שבו השתמשתי בראיונות הוא מאגר משימות המייצגות את הקטגוריות הבאות (ראה איור 3):

1. **InF** מול **For**: המשימה מנוסחת ניסוח בלתי-פורמלי (**I**nformal) (לא מכילה אותיות אלגבריות) או ניסוח פורמלי (**F**ormal) (מכילה אותיות אלגבריות). הבחנה זו מאפשרת לקבוע את יחסי הגומלין שבין השיח הבלתי-פורמלי לשיח הפורמלי.
2. **Gen** מול **Equ**: המשימה מזמנת הכללה (**G**eneralization) או מציאת נעלמים (**E**quation).
3. **Abs** מול **Con:** המשימה מוצגת בהקשר מופשט (**A**bstract) (למשל סדרת מספרים) או בהקשר מוחשי (**C**oncrete) (למשל, מציגה סדרת צורות או מתארת מצב מחיי היומיום).

אפשר לחלק כל קטגוריה לחלוקה פנימית. לדוגמה במקרה של משוואות נכללו משימות עם נתונים מספריים (**Num**) וגם משימות פרמטריות (**Par**). טבלה 2 מציגה דוגמה למשימה מטיפוס <InF, Gen, Abs>.

איור 3: טיפוסי משימות המחקר



2.4. ממצאים

הממצאים שאציג במאמר זה לקוחים משני אוספים: בשלב הראשון אציג תשובות שניסחו התלמידים הבוגרים בסבב הראיונות הראשון (שלב פרה-אלגברי), עבור משימת ההכללה המוצגת בטבלה 2.[8]

8. משימת הכללה זו הייתה המשימה הראשונה שהוצגה לפני משתתפי המחקר (בתחילת סבב 1), ועל כן נבחרה לצורך הדגמת ניתוח השיח המטה-אריתמטי שלהם. כמו כן המשימה הניבה ממצאים עשירים במיוחד שנתמכו על-ידי ממצאים של משימות נוספות.

בשלב הבא אציג ממצאים שנאספו בקרב התלמידים הצעירים עבור אותה משימה. כאמור, סדר זה של הצגת הנתונים משקף את הסדר שבו התרחשו הדברים במהלך איסוף הנתונים.

טבלה 2: משימת הכללה

לפניכם סדרה של מספרים: . . . 4, 7, 10, 13, 16,
<InF, Gen, Abs>
א. איזה מספר נמצא במקום ה-20 בסדרה?
ב. איזה מספר נמצא במקום ה-50 בסדרה? איזה מספר נמצא במקום ה-75 בסדרה?
ג. נסחו כלל שבאמצעותו ניתן לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.

2.5. שיטת ניתוח הנתונים

כפי שהוסבר בסעיף 1.1., לתהליך הפורמליזציה של השיח האלגברי יש שלושה תת-תהליכים: סימול, עיצום ורגולציה. במאמר זה אתמקד בסימול ובעיצום כפי שהם באים לידי ביטוי בתשובות התלמידים עבור משימת ההכללה שהוצגה לעיל.

מטרתי **בהיבט הסימול** היא לבחון באילו אמצעי שיח השתמשו התלמידים כדי לבטא משתנים. בסעיף ג' של משימת ההכללה התבקשו התלמידים לנסח איבר כללי של סדרה, כלומר לבצע *שינוי* לשוני המכונה **האחדה** (saming). אדם מבצע האחדה של ישויות כלשהן (נניח של כל המספרים הטבעיים) לישות אחת אם בדיבורו הוא יכול להחליף אותן במסמן יחיד (לדוגמה, את 1, 2, 3, ... הוא יכול להחליף במילה "מספר" או באידאוגרף x). מטרת ההחלפה היא להפוך אינסוף ביטויים אריתמטיים בעלי מבנה דומה (למשל: הריבוע של 3, הריבוע של 11, וכדומה) לביטוי יחיד (הריבוע של מספר, x^2). המסמן המאוחד נקרא "משתנה".

בכל תשובה שהציגו התלמידים, בחנתי תחילה את *המסמנים* שבהם השתמשו ביוזמתם עבור אותם גדלים המופיעים בבעיה שבעיני משתתף מנוסה נחשבים למשתנים (למשל, האיבר בסדרה ומיקומו) וכן עבור פרמטרים (או קבועים, כגון האיבר הראשון והפרש הסדרה). בשלב הבא בחנתי את *מקורות המסמנים האלה*, ושאלתי את עצמי באשר לסיבה שלפיה הם נחשבו בעיני הלומד מתאימים לתפקיד שנבחרו אליו.

בהמשך אבקש לבחון גם את **מידת העיצום** בשיח של המשתתפים. לשם כך אבחן מספר סממנים המובאים בטבלה 3. מכלול סממנים אלה בשיח שופכים אור על השלב הנוכחי בדרך לשיח אלגברי מעוצם, המתאפיין ביכולתו של התלמיד לעסוק בביטויים אלגבריים הן כתהליך חישובי ("תהליך") והן כתוצאת החישוב של תהליך זה ("עצם"). **ראייה דואלית תהליכית/מעוצמת** מספקת תכונה מובהקת של שיח אלגברי תקני והיא עדות לשיח מעוצם.

לסיום חלק זה, אדגיש כי הצגת הממצאים כוללת אפיון השיח של כל קבוצת תלמידים (בוגרים וצעירים) ולא של כל משתתף בודד או אפילו של זוג משתתפים.

טבלה 3: סממנים של עיצום בשיח של המשתתפים

היבטים נבחנים	שאלות מנחות והסבר לחשיבותן	כיצד אשיב על השאלות?
דרכי הצגה לפעולות	**מה הם המסמנים של פעולות שבהם השתמשו התלמידים?**	אזהה את הנשוא הדקדוקי של ההיגד – פעלים ופעולות בשיח של התלמידים.
	מהו חלקו של המבצע האנושי במהלך הפעולה? פעולות שאנשים עושים (למשל "כפלתי") משקפות תהליכיות בשיח, ואילו פעולות הַזָּרה שאנשים אינם עושים (כגון "כָּפוּל") הן שלב בדרך לשיח מעוצם.	אזהה את הנושא הדקדוקי של ההיגד – אדם או עצם מתמטי.
דרכי הצגה לתוצאות של פעולות	**באילו מסמנים השתמשו התלמידים עבור תוצאות של פעולות?** במשפט "מחברים את 3 ו-5 ואת התוצאה כופלים ב-2", המילה "תוצאה" היא תוצאת ביניים של החישוב (תוצאת הביניים היא המספר 8). לכאורה תוצאת ביניים, בהיותה עצם, זקוקה להצגה של עצם מציין חדש (למשל "התוצאה"). אולם בשיח אלגברי מפותח נהוג לטפל בתוצאה זו בשתי שיטות: **1. הצגה על-ידי פסוקית פעולה**: הנכונות של תלמיד לוותר על מילה מיוחדת עבור תוצאת ביניים, פירושה שהוא רואה בביטוי מורכב לא רק פעולה, אלא גם תוצאה שלה. למשל, אם תלמיד אומר: "3 כפול 2 ועוד 7", אז הביטוי "3 כפול 2" מתאר פעולה וגם תוצאה שאליה אפשר לחבר מיד את ה-7. במאמר זה אכנה פסוקיות מיוחדות אלה בשם "פסוקיות פעולה" – פסוקי משנֶה שאינם מכילים תוצאות ביניים ושמתארים תהליך של הזרה. בשיחים מתמטיים מפותחים משמשות פסוקיות פעולה אלה גם כפסוקיות שם עצם. להופעתן של פסוקיות פעולה בשיח יש חשיבות רבה, שכן הן משקפות שלב בדרך לגרעון ובהמשך תובלנה לעיצום. **2. הצגה על-ידי נומינליזציה**: עוד פתרון לבעיית תוצאת הביניים הוא שימוש ב"נומינליזציה" – תהליך שבו מילים המתארות תהליכים (פעלים כגון "חיברתי" או שמות פעולה כגון "לחבר") הופכות לשמות עצם מופשטים. למשל, בפסוקית "הסכום של a ו-b", שם העצם "סכום" הוא נומינליזציה של הפועל "סָכמתי" או של שם הפעולה "לסכום". הופעתו של שם עצם מטיפוס זה הוא סממן של גרעון.	אזהה מופעים של תוצאות ביניים, של פסוקיות פעולה, של פסוקיות עצם ומסמנים של נומינליזציה בתשובות של התלמידים.

היבטים נבחנים	שאלות מנחות והסבר לחשיבותן	כיצד אשיב על השאלות?
סדר הצגת הפעולות	**האם סדר הפעולות בתשובת התלמיד תואם את סדר הפעולות שבוצעו בעת החישוב?** הופעתה של פסוקית (כתובה או נאמרת) המציגה פעולות בסדר השונה מסדר ביצוען גם היא סממן לגרעון.	אבחן את סדר הפעולות המופיעות בתשובת התלמיד.

3. ממצאים - שיח אלגברי בלתי-פורמלי של התלמידים בכיתה ז׳

בסעיף זה אדון באופן שבו נבנו פתרונות התלמידים הבוגרים עבור משימת ההכללה שהוצגה בטבלה 2.

3.1. דוגמאות - תיאור כללי

כדי להדגים את השיטה שבה ניתחתי את הנתונים, איעזר בתשובותיהן של זוג תלמידות בכיתה ז' – תמר וחנה, עבור סעיף ג' של המשימה. תחילה התבקשו התלמידות לנסח את הכללים שלהן בכתב ולאחר מכן בעל-פה (ראה טבלה 4). העמודה השמאלית מציגה את התרגומים הסימבוליים של כללים אלה, כפי שכתב אותם החוקר. תרגומים אלה נבנו בהתאם לניתוח מסמני העצם המוצג בטבלאות 5a ו-5b.

טבלה 4: כללים של תלמידים בכיתה ז' – תמר וחנה

שם	כלל כתוב	כלל נאמר	כלל שקול
תמר	כלל: מקום × חוקיות הסדרה + 1. □×3+1	מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד אחד. משהו כפול 3 ועוד 1.	$a_n = n \cdot 3 + 1$
חנה	כדי למצוא מקום מסוים בסדרה צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול) ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות) כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו, ואז לחבר את המספר למספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.		$d(n-m)$ ↓ $a_m + d(n-m)$

על אף שהתלמידות עבדו יחדיו, תשובותיהן שונות מאוד: בעוד שתמר הציגה כלל שהיה ישיר ושקול לכלל $a_n = n \cdot 3 + 1$, חנה הציגה כלל ששיקף את דרך הפתרון של הסעיפים הקודמים במשימה. את ההליך של חנה אפשר להציג בסמלים: $a_n = a_m + 3(n-m)$, והוא מראה כיצד איבר מסוים של הסדרה (a_n) מחושב על סמך איבר הקודם לו העומד במקום m (האיבר a_m). כפי שאראה בהמשך, הפתרונות של תמר וחנה מייצגים את כלל התשובות שנתנו המשתתפים הבוגרים עבור משימה זו, ועל כן נבחרו לצורך הניתוח הנוכחי.

3.2. אמצעי הסימול של תלמידים עבור משתנים

בשלב זה של המחקר התלמידים טרם נחשפו לסימול אלגברי ולכן השתמשו לרוב במשתנים מילוליים או במסמנים אידאוגרפיים שרמזו על התפקיד של העצמים שעברו האחדה. רמיזה זאת נעשתה בכמה דרכים:

- חלק משמות המשתנים היו **מטאפורות** (metaphors) – אמצעי לשוני המבוסס על אנלוגיה, קשר של דמיון בין שדה סמנטי לאחר. כך למשל כאשר התלמידים כינו את האינדקס n של איבר כלשהו a_n בשם "מקום" (אמנם כותב המשימה בחר מילה זו, אך בפועל התלמידים אימצו אותה והשתמשו בה).
- שמות אחרים היו **סינקדוכות** (synecdoche)[9] – מבע לשוני המגדיר את השלם על-ידי אזכור של חלק ממנו. כך לדוגמה, חנה כינתה את האיבר a_n בשם "מקום מסוים בסדרה" ואת האיבר a_m בשם "המקום שמצאתי".
- שמות אחדים היו **סינקדוכות הפוכות**, כלומר ייצגו את החלק על-ידי השלם. למשל בביטוי של חנה "כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו", שכוונתה הייתה לציין את $n-m$, השלם "כמה שצריך להוסיף" הופיע בתפקיד של החלק שלו.
- לעתים קרובות כאשר בחרו מסמן לצורך האחדה, השתמשו התלמידים ב**גנוסים** (genus) – כלומר בקטגוריה רחבה (סוג) שאליה משתייכים העצמים שעברו האחדה. כך היה כאשר התלמידים כינו איבר בסדרה, a_n, בשם "מספר" (כותב המשימה בחר מילה זו, אך התלמידים אימצו גם אותה). במקרים אחרים חנה כינתה את ההפרש של הסדרה הנתונה, 3, בשם "חוקיות", ותמר כינתה את האינדקס של איבר, n, בשם "משהו".
- בכמה פעמים בוצעה האחדה על-ידי שימוש ב**תיאורים דאיקסיים** (deictic) – מסמנים לשוניים המראים מיקום מרחבי וזיהוי של אנשים, עצמים, אירועים ותהליכים שדובר עליהם במהלך פעולת הדיבור. מסמנים אלה הם מילים ופסוקיות המציינות את טבעו תלוי ההקשר של התיאור. למשל, כאשר חנה השתמשה בביטויים "המספר שיש לך עכשיו" ו"כמה שאתה עוד צריך".
- לבסוף, תמר השתמשה באידאוגרף □ שמסמן חלל פיזי השמור למספר שאינו ידוע כעת (המקום של איבר מבוקש בסדרה), אך שייכתב בעתיד. לפיכך נהוג לכנות אידאוגרף זה בשם "שומר מקום". שלא כמשתנה אלגברי, שומר מקום אינו חייב לקבל את אותו הערך בכל מופעיו.

ריבוי משמעויות: כפי שעולה מהתיאור שלעיל, השימוש המגוון והספונטני של התלמידים בביטויים השאובים מהשיח היומיומי עשוי לגרום לעתים לעמימות בשיח.

- לפעמים נעשה שימוש בשם עצם אחד עבור כמה מטרות שונות – לדוגמה, המילה "מקום" שימשה

9. סינקדוכה היא סוג של *מטונימיה* (metonymy) – מבע לשוני הממחיש מושג או גורם באמצעות החלפתו בגורם אחר השייך לאותו הקשר, סיבה, חומר, יחס רעיוני או ייצוג.

הן לציון האינדקס n (אצל תמר) והן עבור האיבר a_n (אצל חנה).

- תופעה הפוכה היא כינוי עצם אחד בכמה שמות – למשל, חנה השתמשה בביטויים "המקום שמצאתי" ו"המספר שיש לך עכשיו" לציון האיבר שחושב קודם לכן – a_m.
- לבסוף השמות הגנריים, כגון "מספר", "משהו" ו"חוקיות" היו כלליים, והם עשויים להתפרש שלא כהלכה על-ידי הדוברים בשיח. כדי להתגבר על הכללות יתר, השתמשו התלמידים בתיאורים מפורטים. למשל, חנה השתמשה בביטוי "המספר שיש לך עכשיו", כשהיא הופכת את הגנוס למתאר דאיקסי. סוג כזה של פירוט, בהיותו תלוי הקשר (יש לשים לב לשימוש במילים "אתה" ו"עכשיו"), לא היה יכול למנוע ריבוי של פרשנויות.

טבלה 5a: מסמנים של עצמים, תמר – כיתה ז'

תמר **כלל נאמר וכתוב**	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
נאמרת מקום	מקום	n	מילולי	מטפורה	כן
כפול חוקיות הסדרה ועוד אחד.	חוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
משהו כפול 3 ועוד 1	משהו	n	מילולי	גנוס	לא
כתובה מקום*	מקום	n	מילולי	מטפורה	כן
חוקיות הסדרה + 1	חוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
□×3+1	□	n	אידאוגרפי	שומר מקום	לא

טבלה 5b: מסמנים של עצמים, חנה – כיתה ז'

חנה **כלל נאמר וכתוב***	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
כדי למצוא מקום מסוים בסדרה	מקום מסוים בסדרה	a_n	מילולי	מטָפורה	לא
צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול)	המקום שמצאת	a_m	מילולי	סינקדוכה + מתאר דאיקסי	לא
ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות)	החוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו,	כמה שצריך להוסיף	n-m	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
	למספר שיש לך עכשיו	m	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר	לא

חנה כלל נאמר וכתוב*	מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם				
	מסמנים של עצם	שקול פונקציונלית ל...	טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)	הקשר למסמנים	ריבוי משמעויות האם השימוש היה נכון?
				דאיקסי	
ואז לחבר את המספר שיש לך עכשיו	המספר שיש לך עכשיו	a_m	מילולי	גנוס + מתאר דאיקסי	כן
ואת המכפלה של	המכפלה	$d(n\text{-}m)$	מילולי	מטפורה/ מתאר מבני	כן
החוקיות	החוקיות	d	מילולי	גנוס	לא
וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.	וכמה שאתה צריך עוד.	n-m	מילולי	מתאר דאיקסי	לא

* הכלל הנאמר והכלל הכתוב אוחדו במקרים שבהם תלמיד שהתבקש לנסח את הכלל בעל-פה, פשוט קרא את מה שכתב.

3.3. אמצעים עבור פעלים, פעולות ותוצאותיהם[10]

הצעד המרכזי המבטיח חד-משמעיות בשיח וקיצור של נרטיבים מטה-אריתמטיים למשפטים אלגבריים פורמליים, הוא ראיפיקציה. לפיכך נשאלת בחלק זה השאלה: האם הכללים שניסחו התלמידים מתארים פעלים, כמו במקרה שדובר אומר: "אני *כופל* את a ו-b *ומוסיף* c", או עצמים, כמו במשפט: "*הסכום* של c *והמכפלה* של a ו-b". במילים אחרות, אבקש לבחון האם קיים **גרעון** בכללים של התלמידים. כמו כן אבחין בין פעלים שאנשים עושים (למשל "כפלתי את a ב-b") ופעולות הַזָּרה שעצמים מתמטיים עושים אותן (למשל "a כפול b"). ככל שמספר השימושים בפעלים גדול יותר (בייחוד אלה שאנשים עושים), כך הכלל מעוצם פחות.

מסמנים עבור פעלים ופעולות: אחד המאפיינים של תשובות התלמידים הוא שכיחותם של אזכורים ישירים של פעלים, פעולות וכן טבעם. תשובות אלה כללו שלושה טיפוסים של מסמני פעולות:

1. **פעלים חשבוניים** – כגון "מחלקת", "מורידים", "לחלק", "להוסיף".
2. **פעלים שאינם חשבוניים** – כגון "לעשות", "להקפיץ", "מגיע", "התחלתי".
3. **פעולות חשבון** – כגון "כפול", "ועוד" וכן סמלים תואמים "×", "+".

נוסף על כך אפשר גם לסווג את תשובות התלמידים בהתאם למידת מעורבותו של המבצע האנושי:

1. **אנושי** – תשובה שבה עושה הפעולות הוא בן-אדם. למשל, הפועל "מצאת" בתשובתה של חנה.
2. **עצם מתמטי** – תשובה ללא פעולות בן-אדם, כך שהפעולות בה נעשות על-ידי עצמים מתמטיים. לדוגמה, "מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1" אצל תמר (בניגוד ל"אני כופלת את המקום בחוקיות").

כפי שעולה מטבלה 6, בשיחים של תמר וחנה זוהו שלושת הטיפוסים של פעולות: התלמידות השתמשו

10. **ההבחנה בין פועל ופעולה:** *הפועל* הוא חלק הדיבר המציין פעולות או התרחשויות. לפועל יש **זמן** (עבר, הווה, עתיד) **וגוף** (מדבר/ת, נוכח/ת, נסתר/ת, מדברים/ות, נוכחים/ות, נסתרים/ות). *פעולה* אינה בעלת זמן או גוף (לדוגמה: "הליכה", "דיבור") ולפיכך **אינה** פועל.

בפעלים, כגון "לחבר", "מצאת", וכן בפעולות חשבון כגון "ועוד" או "כפול". יתרה מזו, בעוד שהכלל של חנה עוסק בפעולות אנושיות, הרי שתמר לא הזכירה אנשים בתשובתה.

טבלה 6: מתארים של פעולות ותוצאותיהן, תמר וחנה – כיתה ז'

תגובה		פעולות			מבצע	תוצאות			סדר הפעולות נשמר?	מצב אונטולוגי כללי (רמה)
שם	טיפוס	פעלים חשבוניים	פעלים שאינם חשבוניים	פעולות חשבון		הצגה	פונקציה	טיפוס		
תמר	כתוב			×, +, •	עצם	מקום כפול חוקיות הסדרה □×3+1	$3n+1$ a_n	באמצעות פסוקית פעולה	כן	2 כמעט מגורען
	נאמר			כפול, ועוד	עצם	מקום כפול החוקיות ועוד אחד	$3n+1$ a_n	באמצעות פסוקית פעולה	כן	2 כמעט מגורען
חנה	כתוב ונאמר	לחבר, להוסיף	למצוא, מצאת	כפול	אנושי	המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך	$d\times u$ כאשר $u=n-m$	באמצעות נומינליזציה	כן ולא (קודם הציגה גרעון במונחים תהליכיים)	2 כמעט מגורען

מסמנים עבור תוצאות של פעולות: כאשר כלל מכיל סדרת פעולות, נשאלת השאלה: באילו אמצעים משתמש מציג הכלל כדי לבטא תוצאות ביניים שעליהן מבוצעות פעולות נוספות? כאמור שיחים מתמטיים מפותחים מאפשרים שתי שיטות לטיפול בתוצאות ביניים.

הצגה על-ידי פסוקית פעולה: השיטה הראשונה לבעיה של תוצאות הביניים היא לא להציגן כלל, כמו למשל בכלל של תמר: "המקום כפול החוקיות של הסדרה ועוד אחד" (כלל סימבולי: $n\cdot 3+1$). כאן לא נאמר דבר מפורש על תוצאת ביניים, כלומר על התוצאה מיישום החלק הראשון של הכלל, "מקום כפול חוקיות הסדרה". התיאור ממשיך בהצגת הפעולה הבאה "ועוד אחד". בלי שהדבר ייאמר, ברור שפעולה נוספת זו מיושמת על התוצאה של כל החישובים שנעשו עד כה.

השאלה הנשאלת כעת היא: האם עלינו לפרש את הפסוקית המורכבת "המקום כפול החוקיות של הסדרה" כתיאור של פעולה או כעצם מציין? התחביר אינו מספק תשובה חד-משמעית, שכן המילה "כפול" היא אינה שם עצם ואינה פועל.[11] לעומתו הביטוי "מקום כפול החוקיות של הסדרה" מתפקד כ- a בביטוי "a ועוד אחד", ולכן בשל פונקציה תחבירית זו הוא יכול להיחשב כמסמן של עצם.

תשובה אפשרית על שאלה זו נקבל מתוך בחינת סדר הפעולות בכללים של התלמידים. כל עוד התלמיד מציג את המילים המזכירות פעולות לפי הסדר שעליהן להיעשות, הסיכויים הם שהוא מחשיב מילים אלה כמסמנים של פעולות במקום כתוצאות של פעולות. נראה כי הכלל של תמר: "מקום כפול החוקיות

11. ילדים משתמשים לעתים במילים "כפול" או "ועוד" כחלק מפסוקית פועל, למשל: "אני עושה ועוד פה". מכל מקום תופעה זו אינה רלוונטית לניתוח הנוכחי כיוון שהשימושים בפעלים לכאורה אינם יכולים להופיע בביטויים שמציגים **תוצאה** של חישוב.

של הסדרה ועוד אחד" אכן שומר על הסדר שבו מתבצעות הפעולות בעת החישוב. העובדה שתמר טרם עשתה ראיפיקציה לביטויים מעין אלה נתמכת על-ידי ניסוחה התהליכי בקביעת הכלל: תמר אומרת "אז אתה **עושה** את המקום כפול שלוש ועוד אחד". לעומת זאת, כאשר תלמיד אומר: "אחד ועוד מקום כפול החוקיות של הסדרה" (השקול ל- $1+n\cdot 3$), הסבירות של ראיפיקציה גדלה במידה ניכרת. ניסוח אחרון זה מרמז על כך שאחרי קריאת שתי המילים הראשונות של הכלל, "אחד ועוד", המבצע חייב להפסיק, לחשב את $n\cdot 3$, ורק אז לחזור לכלל ולהשתמש בתוצאה כמחובר. לכאורה הצגה זו הייתה יכולה להיות "טבעית יותר" כיוון שהיא משקפת טוב יותר את התהליך שלפיו התלמידים מצאו את החוקיות מלכתחילה: על-ידי התקדמות מהאיבר הראשון של הסדרה לאיבר שחיפשו אותו.

הצגה על-ידי נומינליזציה: השיטה השנייה היא נומינליזציה – תהליך שבו פעלים (או חלקי דיבור אחרים) הופכים לשמות עצם. לדוגמה, בביטוי של חנה "המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך", שם העצם "מכפלה" הוא נומינליזציה של שם הפועל "להכפיל". הסממן הראשון המעיד כי ביטוי זה מייצג תוצאה (ולא פעולה) הוא היותו פסוקית שם עצם. כאשר משלבים אותו בתוך משפט גדול יותר ("לחבר את המספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך"), הביטוי מתפקד כשם עצם. סממן נוסף לשימוש הראיפיקטיבי של הביטוי "המכפלה של ..." הוא במיקומו בתוך המשפט: הופעתו כמחובר שני מלמדת על היותו תוצאה של חישוב שהיה צריך להתבצע מראש.

3.4. רמת השיח

הופעתה של הנומינליזציה בכלל של חנה משקפת את התקדמות השיח שלה לעבר ראיפיקציה. לנומינליזציה זו חשיבות יתרה בתהליך הפורמליזציה של השיח המטה-אריתמטי, שכן היא דורשת הכרה בטבעם התהליכי/מעוצם של ביטויים אלגבריים. אולם השימוש הנוכחי בנומינליזציה אינו משמש ראיה מספיקה לכך שהתרחשה ראיפיקציה מלאה. למשל, ייתכן שחנה קיבלה ביטוי מסוים זה מדוברים אחרים לפני שיכלה לחשוב עליו במונחים של עצם.

גם לכלל של תמר ישנן כמה תכונות המאפיינות מטה-אריתמטיקה פורמלית, וזאת ללא תלות בשאלה האם מבחינתה ביטוי כגון "מקום כפול חוקיות הסדרה" מציין עצם או לא. ראשית, תמר השתמשה בפעולות החשבון "פלוס" ו"כפול" ועל כן ניסחה כלל שאינו מבוצע על-ידי אנשים. שנית, אם נבקש לתרגם את הביטוי של תמר לאידאוגרפים, לא נצטרך לבצע אף לא שינוי מבני אחד: תרגום מילה במילה ייתן את הביטוי הקנוני: $n\times d+1$ (תמר התקרבה לתוצאה זו כאשר כתבה את הכלל שלה בצורה $\square\times 3+1$).

לסיכום, מתוך הניתוחים שהוצגו עד כה, עולה כי שתי התלמידות הבוגרות מתקדמות לרמה השנייה, הרמה המגורענת של השיח האלגברי. ממצאים אלה שיאוששו בהמשך כניתנים להכללה, הפתיעו אותי. מתוכם נלמד כי שיח מטה-אריתמטי מובנה היטב יכול להתפתח התפתחות ספונטנית, עוד לפני פגישתם הראשונה של התלמידים עם האלגברה הבית-ספרית. לנוכח הפתעה זו, החלטתי להרחיב את המחקר לאלתר ולהציג כמה מהמשימות לפני קבוצה של תלמידים צעירים בכיתה ה'.

את הממצאים בקרב המשתתפים בכיתה ה' אציג להלן מתוך השוואה מתמדת בין השיח המטה-אריתמטי של התלמידים הצעירים ובין שיח זה בקרב המשתתפים הבוגרים.

4. ממצאים - שיח אלגברי בלתי-פורמלי של התלמידים בכיתה ה׳

4.1. דוגמאות - תיאור כללי

בדומה לבוגרים, בחרתי שתי תשובות של תלמידות צעירות. לאחר ניתוח חוצה זוגות של תשובות הצעירים, הבחנתי כי תשובותיהן של שתי התלמידות עבור משימת ההכללה (ראה טבלה 2) מייצגות את כלל התשובות שניתנו בקרב קבוצה זו. הפעם כל אחת משתי התלמידות, איילת וקרין, השתייכו לזוג עבודה אחר.

מקריאת התשובות (ראה טבלה 7) מתקבל הרושם כי אין הבדל מהותי בין ההליכים החישוביים של התלמידים הצעירים ובין אלה שביצעו המשתתפים הבוגרים. החישוב של איילת שקול לזה של תמר ואילו ההליך של קרין שקול לזה של חנה. יתרה מזו, לתשובתה של איילת יש צורה נוסחתית המזכירה את הכלל השני שהציגה תמר $(\square\times 3+1)$, והכלל של קרין דומה באופיו המילולי לכלל של חנה.

ובכל זאת, בחינה מדוקדקת אחרת תחשוף מיד הבדלים משמעותיים. תחילה, הכללים של התלמידים בכיתה ה' ארוכים יותר: איילת הזדקקה ל-21 מילים לעומת שבע מילים בכלל של תמר; קרין השתמשה ב-62 מילים לעומת 46 מילים אצל חנה. הסיבות להכברה במילים בקרב התלמידים הצעירים תעשינה ברורות כאשר אבחן מאפיינים אחרים בשיחים של הצעירים והבוגרים.

טבלה 7: כללים של תלמידים בכיתה ה' – איילת וקרין

שם	כלל כתוב	כלל נאמר	כלל שקול
איילת	___ = 1_ + ___ = ___ × 3_ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ התשובה שמנו התחלנו את הסדרה המספר שווה התרגיל 3×___ המספר שנתנו המספר הקפיצה	צריכים לעשות את המספר שידוע לנו, כמו 75 כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו, ואז זה יהיה שווה משהו – כאילו את המספר של 3 כפול מה שזה לא יהיה, ואז אנחנו צריכים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחלנו להקפיץ את זה, ואז זה יהיה שווה התשובה.	$3\times n+1=a_n$
קרין	צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה (16) (החמישי בסדרה). אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא (העשרים בסדרה). אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה למקום שאתה צריך להגיע (15 = 5-20) אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת (45 = 3×15). בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה (61 = 16+45).		$d(n-m)$ – $r\times 3+a_m=a_n$

4.2. אמצעי הסימול של תלמידים עבור משתנים

השוואה בין טבלאות 5a ו-5b לטבלאות 8a ו-8b חושפת קווי דמיון רבים בבחירות שעשו הבוגרים והצעירים במסמנים עבור משתנים. איילת וקרין השתמשו במילים מוכרות שהומרו למשתנים בהתאם לתפקידם. ההמרה הושגה באמצעות בחירה של מסמן מילולי או אידאוגרפי הקשור לעצמים שעברו האחדה (saming). שיטות ההמרה שזוהו הן אלה שנמצאו בקרב הבוגרים: מטפורה, סינקדוכה, סינקדוכה הפוכה, גנוס ותיאור דאיקסי. התלמידים הבוגרים והתלמידים הצעירים עשו שימוש מצומצם באידאוגרפים ששימשו כשומרי מקום. עם זה בכללים של התלמידים הצעירים זוהו שתי תופעות שלא נראו קודם לכן:

- קרין השתמשה במספרים ספציפיים כמשתנים כדי להדגים את ההליך הכללי (דוגמה גנרית).
- מילים מיוחדות הוצגו כמשתנים עבור תוצאות ביניים או עבור תוצאות סופיות (איילת: "המספר ששווה לתרגיל ___×3" עבור dn, ו"התשובה" עבור a_n; אצל קרין: "התוצאה המתקבלת" עבור $n-m$, ו"המספר שיצא" עבור $(n-m)d$).

ריבוי משמעויות: בדומה לשיח הבוגרים, גם הכללים של התלמידים הצעירים היו מרובי משמעויות: שם עצם אחד שימש עבור מספר מטרות ("איזה מקום אתה רוצה" שימש את קרין הן עבור n והן עבור a_n); עצם אחד סומן במספר דרכים (איילת השתמשה ב"מספר שידוע לנו ומה שזה לא יהיה" עבור n); והשימוש הנרחב בסינקדוכות, בגנוסים ובמתארים דאיקסיים השאיר מקום רב לפרשנויות מוטעות.

טבלה 8a: מסמנים של עצמים, איילת – כיתה ה'

איילת כלל נאמר וכתוב	מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	שקול פונציונלית ל...	טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)	הקשר למסמנים	ריבוי משמעויות האם השימוש היה נכון?
נאמרת צריכים לעשות את המספר שידוע לנו,	המספר שידוע לנו	n	מילולי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
כמו 75	75	n	אידאוגרף	הדגמה	כן
כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו,	מספר הקפיצה	d	מילולי	מטפורה + גנוס	לא
ואז זה יהיה שווה משהו –	משהו	nd	מילולי	גנוס	לא
כאילו את המספר של 3 כפול מה שזה לא יהיה,	מה שזה לא יהיה	n	מילולי	מתאר דאיקסי	לא
ואז אנחנו יכולים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחילו להקפיץ את זה,	את ה-1 – שכאילו ממנו התחילו להקפיץ את זה	a_0	מילולי	קבוע + מתאר דאיקסי	כן
ואז זה יהיה שווה התשובה.	התשובה	a_n	מילולי	גנוס	לא

איילת **כלל נאמר וכתוב**	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	**שקול פונציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
כתובה $\_\_\_ = \_1\_ + \_\_\_\_ \times \_3\_$ התשובה ← שממנו התחלנו את הסדרה ← המספר שווה התרגיל ← המספר שנתנו ← המספר הקפיצה $3\times$ ___	מספר הקפיצה (3)	d	מילולי/ אידאוגרפי	מטפורה	לא
	המספר שנתנו	n	מילולי/ אידאוגרפי	סינקדוכה הפוכה + מתאר דאיקסי	לא
	<u>המספר</u>; התרגיל $3\times$	nd	מילולי/ אידאוגרפי	גנוס	לא
	שממנו התחילו את הסדרה (1)	a_0	מילולי/ אידאוגרפי	קבוע + מתאר דאיקסי	כן
	התשובה	a_n	מילולי/ אידאוגרפי	גנוס	לא

טבלה 8b: מסמנים של עצמים, קריין – כיתה ה'

<u>קריין</u> **כלל נאמר וכתוב***	**מסמנים של עצמים שמתפקדים כמשתנים של הייצוגים שלהם**				
	מסמנים של עצם (פסוקית שם עצם)	**שקול פונקציונלית ל...**	**טיפוס (מילולי, אידאוגרפי)**	**הקשר למסמנים**	**ריבוי משמעויות** **האם השימוש היה נכון?**
צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה	המספר הכי גבוה שאתה רואה	a_m	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(16) (החמישי בסדרה).	16	a_5 ,16	אידאוגרף	הדגמה	כן
אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא	מקום שאתה רוצה למצוא	a_n	מילולי	סינקדוכה + מתאר דאיקסי	לא
(העשרים בסדרה).	העשרים	a_{20}	מילולי	הדגמה	כן
אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה	המקום הכי גבוה	m	מילולי	מטפורה + מתאר דאיקסי	כן
למקום שאתה צריך להגיע	למקום שאתה צריך להגיע	n	מילולי	מטפורה + מתאר דאיקסי	כן
(20-5=15)	20 ,5 ,15	$n, m, n-m$	אידאוגרף	הדגמה	כן
אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת	התוצאה המתקבלת	$n-m$	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(15×3=45)	15, 3, 45	n-m, d, (n-m)·d	אידאוגרף	הדגמה	כן
בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא	המספר שיוצא	$(n-m)\cdot d$	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה	המספר שאתה רואה הכי גבוה	a_m	מילולי	מתאר דאיקסי	כן
(45+16=61).	45, 16, 61	(n-m)·d, a_m, a_n	אידאוגרף	הדגמה	כן

* הכלל הנאמר והכלל הכתוב אוחדו במקרים בהם תלמיד אשר התבקש לנסח את הכלל בעל-פה פישוט קרא את שכתב.

4.3. אמצעים עבור פעלים, פעולות ותוצאותיהם

מסמנים עבור פעלים ופעולות: השוואה מדוקדקת בין טבלאות 6 ל-9 מגלה מספר הבדלים בין שיח הבוגרים לבין שיח הצעירים בדרך טיפול בפעלים ובפעולות.

- בקרב התלמידים הצעירים רוב הפעלים אינם חשבוניים (למשל, "להתחיל", "ראיתי", "רוצה", וזאת לעומת הפועל היחיד "למצוא" בכללים של הבוגרים). שימוש נרחב זה מלווה בהישענות גדולה יותר של הצעירים על תיאורים דאיקסיים הקושרים בין המשתנים, פעולות, כוונות ורצונות של הדובר. לפיכך בכללים של התלמידים הצעירים בולט המבצע האנושי.
- סדר הפעולות בכללים של התלמידים הצעירים זהה לסדר שבו פעולות אלה מבוצעות במהלך החישוב (שלא לפי הכלל של חנה שבו הפעולות מופיעות בסדר שאינו תואם את סדר ביצוען).

מסמנים עבור תוצאות של פעולות: ההבדל המובהק בין השיחים של הבוגרים לצעירים מצוי בדרך הטיפול בתוצאות הביניים של חישובים מורכבים.

- איילת וקרין לא השתמשו בפסוקיות פעולה או בנומינליזציה לצורך הצגת תוצאות הביניים, כפי שעשו תמר וחנה. במקום זאת, שתיהן הציגו שמות עצם מציינים חדשים (מילים מיוחדות עבור תוצאות ביניים כגון "התוצאה" או "התשובה") וכן אידאוגרפים (כגון קו ריק).
- בשל השימוש בשמות מיוחדים עבור תוצאות ביניים, הצליחו הצעירים לשמור על הפרדה ברורה בין הפעולות לתוצאותיהן. הדבר ניכר בהצגה האידאוגרפית של איילת שבה סימן השוויון מתפקד כפעולת "בצע" במחשבון ולא כסימן המבטא שקילות (הוראת "עשה משהו", כפי שמופיעה אצל קיארן [Kieran, 1981]). הביטוי המופיע משמאל לסימן השוויון מציין פעולה ואילו הביטוי מימין מציין את התוצאה. למעשה כדי להמיר את האידאוגרף של איילת למבנה השקול לביטוי האלגברי $3n+1$, די למחוק את זוג הסמלים " ____ =" המופיעים משמאל למספר 1. מחיקה זו, גם אם היא פשוטה לביצוע מבחינה טכנית, כרוכה בקפיצה מחשבתית עצומה, שכן היא קשורה לדואליות תהליך/עצם של הביטוי.
- שלא כבוגרים, מבני הכללים של הצעירים לא היו קרובים לביטויים האלגבריים הקנוניים $a_m+(n-m)d$ או $3n+1$. סדר הפעולות בכללים של הצעירים תאם את סדר ביצוען בעת החישוב.

4.4. רמת השיח

הכללים של איילת וקרין כוללים פעולות שבני-אדם עושים, סדר הפעולות בהם תואם את סדר ביצוען והם אינם מכילים פסוקיות פעולה (ולפיכך גם לא פסוקיות שם עצם). בשל מאפיינים אלה, הכללים הם תהליכיים ואינם מכילים סממנים של גרעון, ולכן מתאימים לרמה הראשונה במודל ההתפתחות של השיח האלגברי (ראה לעיל טבלה 1).

טבלה 9: מתארים של פעולות ותוצאותיהן, איילת וקרין – כיתה ה'

תגובה		פעולות			מבצע	תוצאות			סדר הפעולות נשמר?	מצב אונטולוגי כללי (רמה)
שם	טיפוס	פעלים חשבוניים	פעלים שאינם חשבוניים	פעולות חשבון		הצגה	פונקציה	טיפוס		
איילת	כתוב		נתנו, התחלנו	×, +	עצם/ אנושי	המספר שווה התרגיל $\frac{\quad}{3\times}$	nd	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
	נאמר	להוסיף	לעשות, צריכים, התחלנו, להקפיץ	כפול	אנושי	משהו התשובה	nd	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
קרין	כתוב נאמר	כופל, מחבר	להתחיל, רואה, לראות, למצוא, עושה, להגיע, לוקח, רואה	×, +, -	אנושי	התוצאה המקבלת	n-m	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי
						המספר שיוצא	$(n-m)\,d$	תוצאת ביניים	כן	1 תהליכי

5. שיח אלגברי בלתי-פורמלי של כלל התלמידים בכיתה ז' ובכיתה ה' - סיכום השוואתי

בחלק זה של המאמר אשווה בין השיחים המטה-אריתמטיים של כלל התלמידים הבוגרים והצעירים. הנתונים שאתבסס עליהם לקוחים מתוך התשובות הכתובות והנאמרות של התלמידים בסעיף ג' של המשימה שהוצגה בטבלה 2. עיון מדוקדק בתשובות של כלל המשתתפים מראה כי את הממצאים שהוצגו עבור תמר, חנה, איילת וקרין אפשר להכליל כמייצגים של שתי קבוצות המשתתפים. שיח הבוגרים ושיח הצעירים נמצאו דומים בהיבטים רבים: בשניהם נעשה שימוש בשמות עצם מוכרים מהשיח היומיומי, והתלמידים קישרו את המשתנה לתפקידו באותם אמצעים של האחדה, דבר שהביא לידי שיח שאינו חד-משמעי. יתרה מזו, ברוב הכללים שהציגו הבוגרים והצעירים הופיעו הפעולות בסדר התואם את סדר ביצוען.

אולם בשיח של התלמידים הבוגרים והצעירים נמצאו בכל זאת מאפיינים מסוימים שבלטו יותר באחת מהקבוצות. מאפיינים אלה שאציג מיד, עשויים ללמד אותנו כיצד משתנה השיח המטה-אריתמטי במעבר מכיתה ה' לכיתה ז'.

אך תחילה אבקש לציין ממצא כללי הנשען על פתרונות שהציעו המשתתפים. על אף שהמשימה כרוכה בהכללה אלגברית ולפיכך עשויה לחרוג מיכולותיהם של תלמידים שטרם נחשפו לאלגברה הבית-ספרית, רוב הצעירים וכל הבוגרים הציעו פתרונות שאפשר לסווגם כנכונים (ראה טבלה 10). המשתתפים הציעו כללים משני סוגים: הראשון שקול מבנית לצורה $3n+1$ והשני לצורה $a_n = a_m + (n-m)d$.

הממצאים שעלו מתוך ניתוח הנתונים אוגדו בטבלאות 10 ו-11. ממצאים אלה חושפים הבדלים מהותיים בין השיח של המשתתפים בכיתה ז' ובין השיח של התלמידים בכיתה ה'.

- הכללים של התלמידים הבוגרים היו קצרים ודחוסים יותר מאלה של הצעירים.
- **התלמידים הבוגרים והצעירים סימנו משתנים על-ידי שמות עצם מוכרים**. סימון זה נעשה באותם אמצעים עבור האחדה תוך קישור המשתנה לתפקידו: מטפורה, סינקדוכה, סינקדוכה הפוכה או גנוס המשולב עם תיאורים דאיקסיים.
- **משתנים אחרים שזוהו בשיח של התלמידים הצעירים והבוגרים היו אידאוגרפים בתפקיד של שומרי מקום (קו ריק או ריבוע ריק).** סימון זה נמצא שכיח יותר בקרב הבוגרים (שני מופעים בקרב הצעירים לעומת חמישה בקרב הבוגרים). שני בוגרים כתבו: □= 1 + 3·□ ואחד מהם אף המחיש זאת בכתיבת המספר 50 בריבוע השמאלי ו-151 בריבוע הימני. תלמיד אחר כתב: $x \cdot 3+1=x$. ככל הנראה, שימוש זה נבע משימוש קודם בריבועים המציינים חלל פיזי עבור מספרים (שומרי מקום).

טבלה 10: תכונות הכללים של המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז'

		כיתה ה' (N=10)	כיתה ז' (N=10)
כלל (פתרון)	$3n+1$	4	8
	$a_n = a_m + (n-m)d$	3	2
	שגוי	3	0
כלליות	ללא הכללה (שימוש בשם מספר עבור משתנה)	2	1
	הכללת יתר (שימוש ב-d או במילה "חוקיות" במקום במספר 3)	3	1
אורך ממוצע (מספר מילים)	כתוב	49.25 (SD=28.45)	29.5 (SD=17.94)
	נאמר	52.75 (11.04)	33.0 (16.58)
שימוש באידאוגרפים	קו ריק או ריבוע ריק	2	5

* N מציין את מספר התשובות שהציגו המשתתפים הבוגרים והצעירים.

- **התשובות של התלמידים הבוגרים היו ממוקדות פחות בתהליכים לעומת התלמידים הצעירים**. הדבר ניכר בכמה דרכים: ראשית, בשימוש המצומצם שעשו הבוגרים בפעלים חשבוניים כגון "הוספתי", "לכפול" (בממוצע 3.4 פעלים בתשובת בוגר לעומת 5.5 בתשובת צעיר) וההישענות הנרחבת שלהם על פעולות חשבון כגון "ועוד" ו"כפול" (בממוצע 3.2 שימושים בתשובת בוגר לעומת 0.5 בתשובת צעיר). שנית, השימוש המופחת של הבוגרים בפעלים שאינם חשבוניים כגון "כתבתי", "סימנתי" (בממוצע 2.2 פעלים בתשובת בוגר לעומת 4.9 בתשובת צעיר) וכן במילים המציינות התקדמות בזמן (בממוצע 0.3 מילים בתשובת בוגר לעומת 1.5 בתשובת צעיר). לבסוף, בעוד ש-90% מתשובות הצעירים נוסחו כאנושיות, רק 55% מתשובות הבוגרים נוסחו כאנושיות. נומינליזציה נמצאה בקרב תלמידה בוגרת אחת בלבד (המילה "מכפלה" בכלל של חנה).
- כדי להתמודד עם תוצאות ביניים, השתמשו התלמידים הבוגרים והצעירים במילים מיוחדות

(למשל: "התוצאה", "התשובה", "משהו"), היוצרות הפרדה ברורה בין ההליך החישובי לתוצאתו. אולם תופעה זו נמצאה שכיחה יותר בקרב הצעירים (בממוצע פי 4 יותר בתשובת צעיר). התלמידים הבוגרים השתמשו לרוב בפסוקיות פעולה שבהן פעולות חשבון המציינות הן פעולות והן את תוצאותיהן, ולפיכך מבטלות את הצורך בהפרדה זאת (בממוצע שימוש זה בתשובת בוגר היה גדול פי 6 מאשר בתשובת צעיר). לאור השימוש בפסוקיות פעולה אלה, התשובות של התלמידים הבוגרים היו קרובות יותר בתחבירן לאידאוגרפים אלגבריים, לעומת תשובותיהם של המשתתפים הצעירים. הופעתן של פסוקיות אלה היא סממן של גרעון שעתיד להביא בסופו של דבר לידי שיח אלגברי מעוצם.

טבלה 11: תכונות של השיח בקרב המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז'

		כיתה ה' (N=20)	כיתה ז' (N=20)*
מסמנים של פעולות	ממוצע של פעלים חשבוניים לתשובת תלמיד	5.5	3.4
	ממוצע של פעלים שאינם חשבוניים לתשובת תלמיד	4.9	2.2
	ממוצע של פעולות חשבון לתשובת תלמיד	0.5	3.2
המבצע	אנושי	18 (90%)	11 (55%)
	עצם מתמטי	2 (10%)	9 (45%)
ממוצע של מילים מיוחדות עבור תוצאות ביניים לתשובת תלמיד		1.6	0.4
ממוצע של מילים המתארות התקדמות בזמן לתשובת תלמיד		1.5	0.3
הצגה של תוצאות ביניים	פסוקית פעולה	5	32
	נומינליזציה	0	1
שינוי סדר הפעולות		0	2

* N הוא המספר **הכולל** של תשובות כתובות ונאמרות שהציגו התלמידים הבוגרים והצעירים.

לסיכום, בעוד שהשיח המטה-אריתמטי של כלל המשתתפים רחוק עדיין משיח אלגברי מפותח, דומה שהשיח האלגברי הבלתי-פורמלי של התלמידים הבוגרים מפותח יותר משל התלמידים הצעירים. על סמך קביעה זו אוכל לטעון כי התלמידים הבוגרים נמצאים על סיפה של רמה 2 של מודל ההתפתחות של השיח האלגברי (מגורענת), ואילו המשתתפים הצעירים עדיין לא עברו את רמה 1 (תהליכית).

6. דיון ומסקנות

הנתונים שהוצגו מראים הבדלים ניכרים בין השיחים המטה-אריתמטיים של התלמידים הבוגרים והצעירים. האלגברה הבלתי-פורמלית של הבוגרים דחוסה יותר ונראה שמעוצמת יותר, ולפיכך קרובה יותר מבחינה תחבירית לאלגברה הפורמלית. ואולם אין לדעת האם התלמידים הבוגרים שהציעו ביטויים "מגורענים" אכן חשבו על פסוקיות שם עצם, כלומר האם התכוונו לתוצאה של החישוב ולא לחישוב עצמו. על אף שחלק מהבוגרים מסוגלים להשתמש בתחביר שמאפשר ביטויים מורכבים יותר, אני סבור

שזהו אך צעדם הראשון לעבר ראיפיקציה.

מטרתו של שלב התחלתי זה של המחקר הייתה ללמוד על דרך התפתחות השיח המטה-אריתמטי של תלמידים עוד לפני שנחשפו ללימודי האלגברה הפורמלית בכיתה. העובדה שהתלמידים הצליחו להשתתף בשיח מטה-אריתמטי מלמדת כי מטה-אריתמטיקה ספונטנית מתחילה להתפתח שנים לפני הצגתה הפורמלית של האלגברה בבית הספר.[12] גם ללא למידה או קבלה של תשומת-לב ישירה, השיח המטה-אריתמטי של הילדים עשוי לעבור תמורות משמעותיות, ולהיות קרוב בתחבירו לשיח האלגברי הפורמלי של בית הספר.

בעוד שציפיתי כי תתרחש התפתחות מסוימת בשיח המטה-אריתמטי בין כיתה ה' לכיתה ז', מידת השינוי הפתיעה אותי. על סמך המחקר שתואר אצל ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), שיערתי בדומה לאחרים שהשיח המטה-אריתמטי של התלמידים יתמקד בתהליכים יותר מאשר בעצמים. בשל ציפייה זו ניסחתי את המשימות בשני הסבבים הראשונים בשפה תהליכית. לדוגמה שאלתי על הכלל לחישוב של איבר כלשהו של הסדרה במקום לשאול מהו האיבר הכללי של הסדרה. על אף שהציפייה שלי לשיח תהליכי הוכחה כמוצדקת, מצאתי גם קווי דמיון מבניים יוצאי דופן בין השיח המטה-אריתמטי המילולי של התלמידים והשיח האלגברי הפורמלי המעוצם.

אוכל לתת שני הסברים אפשריים לממצא זה: ראשית, מבנים של נוסחאות אלגבריות אינם שונים מאלה של ביטויים אריתמטיים, ולכן ייתכן שהתלמידים מתבססים על היכולת האריתמטית המתפתחת שלהם; שנית, ייתכן כי בימים אלה השיח האלגברי נמצא "באוויר": אלמנטים של שיח אלגברי עשויים להימצא בשיחים אחרים של בית הספר הרבה לפני הצגתה של האלגברה הפורמלית בכיתה ז'. יתרה מזו, ייתכן שצורות ביטוי אלגבריות חדרו לשיחים היומיומיים. אלה כמובן רק השערות שלתיקופן נדרש מחקר מקיף על התפתחותו המוקדמת של השיח האלגברי הבלתי-פורמלי.

אמנם מאמר זה מתאר רק את השלב ההתחלתי במחקר אורך, אך אני סבור כי הממצאים שהוצגו בו הם בעלי ערך בהערכת מידת תקפותן של שתי הרמות הראשונות במודל התפתחות השיח האלגברי (ראה סעיף 1.2). ראשית, ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם התאוריה: התלמידים בכיתה ה' נמצאים ברמה התהליכית ואילו התלמידים בכיתה ז' נושקים לרמת המגורענת. שנית, בהסתכלות מקרוב על תהליכי השיח האלגברי, זיהיתי תהליכים ברורים שתלויים בשיח עצמו, יותר מאשר בתכונות הייחודיות של המשתתף בשיח או באופן שבו המורות בכיתה ואני עודדנו התפתחות זו. בין התופעות הנובעות ממבנה השיח עצמו יש למנות, למשל, שינויים בשיח שחייבים להיעשות בסדר מסוים (כמו שגג הבית יכול להיבנות רק אחרי שנבנו כל הקומות). ובכל זאת יש לראות במודל השערה שעשויה להשתנות בשל ממצאים אחרים ובקרב אוכלוסיות אחרות החשופות לתהליכים אחרים.

מחקר זה נושא עמו מסר למלמדים אלגברה בבית הספר. על סמך המודל שבניתי והממצאים שקיבלתי,

12. אדגיש שוב כי התפתחות ספונטנית אינה עניין של התפתחות "טבעית" של "בשלות" התלמידים (Radford, 2011). אני טוען כי מדובר בבשלותו של השיח, אשר באמצעות יחסי-גומלין חברתיים נורמליים, עשוי להתפתח בטבעיות.

אוכל לגבש נתיב מבטיח להוראת האלגברה הפורמלית: המורה תציג לתלמידיה משימות כדי ליצור פורמליזציה הדרגתית של השיח המטה-אריתמטי הטבעי שלהם. תחילה היא תעורר את השיח הספונטני של התלמידים. לאחר זמן מה, המורה עשויה לסייע לתלמידיה להכיר בפגמים הקיימים בפתרונות הייחודיים שהציעו, דבר שיתווה את המסלול לשיח פורמלי. המשך התהליך ייעשה דרך שיטה בשני מישורים: טיפוח השיח המטה-אריתמטי הספונטני של התלמידים, ובתוך כך עידוד התלמידים להשתתף בשיח האלגברי הפורמלי.

ההחלטה להצמיח את השיח הפורמלי מתוך השיח הבלתי-פורמלי מקבלת תמיכה מכל הזרמים והגישות הגורסים כי ידע חדש צומח מתוך ידע קיים. אך מעל לכול התמיכה לכך מגיעה מהאבחנה שעשה ויגוצקי במושגים "יומיומיים" (בלתי-פורמליים, ספונטניים) ו"מדעיים" (פורמליים) (Vygotsky, 1987), ומהטענה הנגזרת ש"אם שתי הצורות אינן "מתחברות", אזי התפתחות אמיתית של המושג אינה מתרחשת" (Daniels, 2007, p. 314). נראה שלגישת ההוראה שהצעתי יש שני יתרונות ברורים: 1. לתהליך זה יש סיכוי טוב להיראות הגיוני בעיני התלמידים ולעורר בהם מוטיבציה ללמידה; 2. אחרי שהכירו בחולשות של השיח הספונטני שלהם בעצמם, התלמידים עשויים להיות מודעים היטב לפעולות שהם מבצעים ולסיבות המניעות אותם. לגישת הוראה זו יש את היכולת להבטיח את ההמשכיות בין השיחים המוכרים לתלמיד לאלה שהוא עדיין אינו שולט בהם. כך מצטמצמת הסכנה של למידה ריטואלית שבה הלומד רואה את השיח האלגברי כ"שיח עבור אחרים".

חשוב שנכיר את המקורות שעמם התלמידים מגיעים לכיתות האלגברה. ככל שנדע יותר על מקורות אלה, כך יגדלו הסיכויים לעזור להם בסגירת הפער שבין המטה-אריתמטיקה הספונטנית שלהם לאלגברה הפורמלית הנלמדת בבית הספר. מעל לכול אנו זקוקים לידע זה כדי להיות מסוגלים לשמור על הקשר רב-החשיבות שבין שני השיחים האלה.

רשימת מקורות

כספי, ש' (2014). **התפתחות השיח האלגברי בקרב תלמידים בחטיבת-הביניים** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת חיפה.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2004). An investigation of beginning algebra students' ability to generalize linear patterns. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, p. 286). Bergen, Norway: Bergen University College.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Daniels, H. (2007). Pedagogy. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), *The Cambridge Companion to Vygotsky* (pp. 307-331). Cambridge: Cambridge University Press.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

de Lima, R. N., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3-18.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 191-228.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. C. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (pp. 39-285). New York: Plenum Press.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,49*(3), 372-402.



ד"ר שי כספי

סיים לימודי דוקטורט בנושא 'התפתחות השיח האלגברי של תלמידים בחטיבת הביניים', בהנחייתה של פרופ' אנה ספרד מאוניברסיטת חיפה.
מורה למתמטיקה בתיכון "חוגים" בחיפה.
מרצה במכללת אורנים.

הבניה משותפת של זהות "תלמידה מתקשה": שגרות שיח בין מורה לתלמידתה ותפקידם בהנצחת קשיי למידה במתמטיקה[1]

עינת הד-מצויינים,[2] הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

תקציר

על סמך המסגרת הקומוגניטיבית לחקר היבטים חברתיים, קוגניטיביים ורגשיים של הלמידה המחקר הנוכחי מציע הסתכלות חדשה על הדרך שבה זהות של "מתקשה" במתמטיקה נבנית תוך הבניה הדדית במהלך שיח בין תלמיד למורה. המאמר מתחקה אחר מנגנוני השיח שנוצרו בין דנה, תלמידת כיתה ז' בעלת הישגים נמוכים במיוחד במתמטיקה, לביני, מורתה במרכז למידה חוץ בית-ספרי. מנגנונים אלה לא רק שלא קידמו את דנה, אלא הם הנציחו את הכישלון שלה. באמצעות בחינת דפוסי התקשורת שהתפתחו במהלך המפגשים הראשונים ביני ובין דנה, אראה כיצד סטיותיה של זו מדפוסים מקובלים לאינטראקציות תלמיד-מורה הביאו לידי כך שזיהיתי אותה כ"מתקשה מאוד" ואף "חסרת סיכוי" במתמטיקה. זהות זו שהייתה מקובלת במידת מה גם על דנה, הייתה כרוכה בהשתתפות ריטואלית שלה בשיח המתמטי, כזו שלא אפשרה לדנה להתקדם לשיח עצמאי וחקירתי. מקרה זה מלמד על הצורך לבחון מחדש קשיים מתמשכים במתמטיקה בשל התפקיד המשותף שיש לתלמיד ולסביבה ביצירתם.

מילות מפתח: קשיי למידה במתמטיקה; זהות; השתתפות ריטואלית; קומוגניציה; אינטראקציות מורה-תלמיד.

1. מאמר זה הוא גרסה מתורגמת ומקוצרת של מאמרי שהתפרסם בכתב-העת Educational Studies in Mathematics: Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics—teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 341-368.
2. המאמר משמש אחד מתוצרי עבודת דוקטורט שנערכה בהנחייתה של פרופ' אנה ספרד, אוניברסיטת חיפה.

הקדמה

מדוע ישנם תלמידים שנראה כי למרות כל ניסיונות ההוראה, אינם מסוגלים ללמוד מתמטיקה? ההשקפות החינוכיות והפסיכולוגיות השכיחות ביותר בימינו מתארות "לקויות למידה מתמטיות" או "דיסקלקוליה" כאחראיות על כך (Butterworth, 2005; Geary & Hoard, 2005; Ginsburg, 1997). בשנים האחרונות גוברת ההכרה בכך שתהליכים חברתיים ורגשיים הם גם גורם חשוב בכישלון ללמוד מתמטיקה (Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski, & Sfard, 2005; Bishop, 2012; Black, 2004). במאמר זה אפנה את תשומת הלב לתהליכים אלה בהביטי על מקרה שבו זהות של תלמידה "מתקשה" הייתה כרוכה ביצירה משותפת של אינטראקציות ריטואליות בין המורה לתלמידה. חשיבותן של אינטראקציות אלה הושמה אך ורק במתן תשובה "נכונה", כלומר ריצוי גורם סמכות חיצוני, מתוך ניגוד לאינטראקציות חקירתיות שמטרתן ייצור סיפורים מתמטיים לצורך הפעילות עצמה, והן מאופיינות בהכוונה עצמית של התלמיד. דפוס האינטראקציה הריטואלי הביא לידי מצב שבו אפשרויות הלמידה שהועמדו לפני התלמידה היו בסופו של דבר מוגבלות ביותר.

רקע תאורטי

קשיי למידה במתמטיקה

רוב התאוריות המנסות להסביר קשיים במתמטיקה רואות בכישורים מתמטיים עניין מולד או יכולת קבועה ולכן הן תולות את הקשיים במתמטיקה *בלקות* כלשהי (Butterworth, 2005; Shalev et al., 2001). גישה זו הפכה בשנים האחרונות למקובלת מאוד לא רק במחקר אלא גם במסגרות חינוכיות ובשיח הציבורי הן בארצות המערב והן בישראל. עם זה יש לשאול מה זו בדיוק "לקות למידה מתמטית" וכיצד היא שונה מ"קשיים במתמטיקה" או מ"חוסרים בהזדמנויות למידה במתמטיקה"? – על כל השאלות הללו אין עדיין תשובה חד-משמעית במחקר (González & Espínel, 1999; Mazzocco & Myers, 2003).

אחד הקריטריונים המקובלים בימינו להגדרת תלמיד כ"לקוי למידה" הוא היעדר "תגובה להתערבות" (Response to Intervention) (Fletcher & Vaughn, 2009; Fuchs et al., 2005). אולם מהי בדיוק ההתערבות או ההוראה הנחוצה להדגים שהתלמיד איננו מסוגל ללמוד מתמטיקה? על כך אין הסכמה. בפועל, תלמידים שמושמים להקבצות נמוכות (כולל אלה המאובחנים כ"לקויי למידה" במתמטיקה) נחשפים לעתים קרובות לסוג הוראה שונה מזה שאליו נחשפים תלמידי הַקְבָּצות גבוהות (Eisenmann & Even, 2011; Linchevski & Kutscher, 1998; Solomon, 2007). למעשה חוקרים מסוימים ממליצים בפירוש על שימוש בטכניקות הוראה שונות לתלמידים המוגדרים כלקויי למידה (Jones, Wilson, & Bhojwani, 1997; Montague, 2007).

מנקודת מבט סוציו-תרבותית לקויות למידה בכלל ולקויות במתמטיקה בפרט אינן רק עניין אינדיווידואלי, אלא תוצר משותף של כישורי התלמיד, דרכי ההוראה של המורה והמסגרת החברתית

והתרבותית של התלמיד (Ben-Yehuda et al., 2005; Black, 2004; Lange, 2009; McDermott, 1993; Solomon, 2007). לדוגמה, סולומון (Solomon, 2007) מצאה כי תלמידים בהקבצות גבוהות פיתחו "זהות מתמטית" שונה מתלמידים בהקבצות נמוכות, וזאת בשל דרכי ההוראה השונות הנהוגות בהקבצות אלו. בלאק (Black, 2004) הראתה שחוסר השוויון בחשיפה להזדמנויות למידה קיים לא רק בין הקבצות ברמות שונות, אלא גם בתוך כיתת המתמטיקה עצמה, כאשר תלמידים המוגדרים "חזקים" נהנים מהזדמנויות שיח עשירות עם המורה יותר מאשר תלמידים המוגדרים כ"חלשים". אך גם במחקרים המועטים שעסקו בהדרת תלמידים "חלשים" מהשיח המתמטי, לרוב לא היה דיון כלשהו בכישורים המתמטיים או בהתפתחות (או עצירה) של התלמידים בשל הזדמנויות הלמידה שניתנו להם.

מחקרים העוסקים ב"לקויות" וקשיים במתמטיקה מניחים בדרך כלל כי "יכולת מתמטית" היא עניין פשוט למדי להערכה ולמדידה. אולם הנחה זו רחוקה מן המציאות כפי שהודגם במחקר של בן-יהודה ועמיתותיה (Ben-Yehuda et al., 2005). הן השתמשו ב"ראיון שיח מתמטי" כדי לחקור את השיח של שתי בנות בכיתה י"א שהיסטוריית ההישגים הלימודיים שלהן במתמטיקה הייתה רצופה כישלונות. במחקר הן הראו כיצד אחת הבנות, טלי, שזיהתה את עצמה כתלמידה טובה במתמטיקה, ושמורתה גם כן זיהתה אותה כ"תלמידה טובה" ו"בעלת פוטנציאל", ביצעה את כל החישובים המתמטיים שנדרשו ממנה באופן *ריטואלי וסינטקטי*. ריטואלי משום שהיא ביצעה את החישובים רק על סמך סמכות חיצונית האחראית על קביעת נכונותם, ולא על סמך ההיגיון המתמטי שלה עצמה. סינטקטי משום שחישובים אלו התבססו אך ורק על חוקים להעברת ספרות ממקום למקום ללא שום סימן *לעיצום (objectification)* של העצמים המתמטיים.

ספרד (Sfard, 2008) טבעה את המונח "עיצום" כדי לאפיין דיבור על עצמים מתמטיים *כישויות עצמאיות בעולם*. למשל דיבור על "המספר ארבע" כקיים בזכות עצמו במקום לראות במילה ארבע מילה שמופיעה במהלך פעילות המנייה "אחת, שתיים, שלוש, ארבע...". על סמך מחקרן על שיח של ילדים צעירים (בני שלוש עד חמש) הציעו ספרד ולביא (Sfard & Lavie, 2005) תאוריה שלפיה עיצום הוא שלב הכרחי בדרך לפיתוח שיח מתמטי משוכלל יותר. למשל, על הילד להעצים את המילה "ארבע" לפני שיוכל לדבר על "ארבע ועוד ארבע *שווה* שמונה".

נחזור לנערות במחקרן של בן-יהודה ועמיתותיה: לעומת טלי, מירה הנערה השנייה שהשיח המתמטי שלה נחקר בפרוטרוט, זיהתה את עצמה כחלשה מאוד ומורתה גם זיהתה אותה כך. אך במפתיע השיח המתמטי של מירה היה מועצם הרבה יותר מזה של טלי. היא דיברה על המספרים כישויות שאפשר לפעול עליהן ושייכה אותם לאובייקטים קונקרטיים בעולם. הבעיה הייתה שמירה נמנעה משימוש בפרוצדורות מתווכות העצמים שבנתה לעצמה (כגון ספירת אצבעות), שכן היא תפסה אותן כילדותיות ואינן תואמות את גילה. האפשרות שלה להשתתפות חקירתית, כלומר השתתפות שמטרתה היא ייצור סיפורים מתמטיים על העולם, הוגבלה באופן שבו מירה תפסה את היחס בין זהותה כתלמידה בוגרת ובין הרוטינות שהיא ידעה להפעיל בביצוע חישובים וחשבה שהן ילדותיות. אם כן, מחקרן של

בן-יהודה ועמיתותיה מלמד על הצורך להבין יותר לעומק את הקשר שבין צדדים רגשיים וזהותיים ובין הכישורים המתמטיים שתלמידים מפתחים במהלך הלמידה.

כלים קומוגניטיביים לחקר היבטים רגשיים של למידה

אחד המושגים המקובלים ביותר בקרב חוקרים הנשענים על תאוריות סוציו-תרבותיות לחקר היבטים לא קוגניטיביים בלמידה הוא *זהות*. נושא הזהות האתנית, גזעית וחברתית קיבל בשנים האחרונות תשומת לב הולכת וגוברת מצד חוקרים בתחום החינוך בכלל (Gee, 2000-2001; Leander, 2002; Wortham, 2006) ובתחום החינוך המתמטי בפרט (Andersson, 2011; Bishop, 2012; Boaler & Greeno, 2000; Cobb, Gresalfi, & Hodge, 2009; Ingram, 2011; Lange, 2009; Nasir, 2002; Solomon, 2007). אולם ההגדרה המדויקת של המושג זהות עדיין משמשת מקור לחילוקי דעות רבים (Brubaker & Cooper, 2000). כדי להתגבר על הטשטוש שקיים במושג הגדירו ספרד ופרוסק (Sfard & Prusak, 2005) זהות כ"אוסף סיפורים". הן פירטו והגדירו זהות כ"אוסף סיפורים בנוגע לאדם שהם תוצר של רה-איפיקציה (reifying), ואשר הם מקובלים ומשמעותיים" (שם, עמ' 16). הרה-איפיקציה מתקבלת כאשר במקום לדבר על מה האדם *עושה*, מדברים על מהותו של האדם (*מי* הוא). ב"מקובלים" כוונתן של ספרד ופרוסק הייתה ש"לו מספר הזהות היה נשאל לגבי הסיפור, הוא היה מעיד שזהו תיאור מהימן של המצב כפי שהוא בעולם". לפיהן, עובדת היות הסיפור *משמעותי* נקבעת אם "כל שינוי בסיפור יוביל לשינוי באופן שבו מספר הסיפור מרגיש כלפי האדם המזוהה" (שם, עמ' 17).

ההגדרה למושג הזהות שמופיעה לעיל הוכחה בעשור האחרון כמועילה עבור חוקרים רבים בתחום החינוך המתמטי (Andersson, 2011; Graven, 2011; Ingram, 2011; Lange, 2009), אך היא מתאימה במיוחד לשימוש במקרים שבהם אנשים מתבקשים באופן ישיר לדבר על עצמם (כפי שקורה בריאיון). היא מועילה פחות לחקר של זהויות כפי שהן נבנות בשיח הכיתתי. אחת המטרות של פרויקט המחקר שחקר המקרה הנוכחי היה חלק ממנו, הייתה לייצר "ארגז כלים מושגי" שיסייע להחליט מה מתוך השיח היומיומי של תלמידים בכיתה יכול להיחשב *כסיפור זהות*. במילים אחרות, במקום להסתכל על זהויות *כתוצר*, מחקר זה ומחקרים קודמים במסגרת הקומוגניטיבית דנים ב*תהליך* הזיהוי (identifying) (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012; Wood & Kalinec, 2012).

המושג "פעילות זיהוי" (identifying) דומה במובן מסוים למושג "מיקום" (positioning) (Davies & Harré, 1990; Harré & van Langenhove, 1999) שהפך לפופולרי למדי בשנים האחרונות לתיאור יחסי גומלין חברתיים בכיתה (Andersson, 2011; Black, 2004; Evans, Morgan, & Tsatsaroni, 2006). עם זה עבור מטרות המחקר הנוכחי מושג המיקום סובל מכמה מגבלות. העיקרית שבהן נובעת מהטבע הרגעי של המושג. בכל רגע תלמיד יכול למקם את עצמו או להיות ממוקם על-ידי אחרים בדרכים מדרכים שונות. יתרה מזו, הקשר בין שלל הדרכים שבהן תלמיד ממוקם ובין סיפור הזהות שהוא מייצר עבור עצמו איננו ברור. בדומה לתאוריית המיקום (positioning theory), המסגרת התקשורתית ממשיגה זהות כנזילה, מוגדרת חברתית וממוקמת בסיטואציות ספציפיות. עם זה במחקר הנוכחי אני

מחפשת את הסיפורים *הקבועים* יחסית שתלמידים מספרים על עצמם, שעוברים אִתם מסיטואציית למידה אחת לאחרת ובכך משפיעים עליה.

אחד החסרונות של שימוש במושג הזהות הוא שהלה נוטה להפוך למועצם. במילים אחרות, נאמר כי לאדם "יש" זהות מסוימת בלי לפרט מיהו בדיוק שייצר את סיפור הזהות הזה (האדם עצמו או אחרים עליו?). מושג *הימוי* מנסה להתמודד עם הערפול הזה על-ידי ציון *מי* מזהה *את מי* ולאיזה *קהל*. על סמך ספרד ופרוסק (Sfard & Prusak, 2005) אציין את המידע הזה על-ידי אפיון כל אמירה מזהה בשלשה: מספר-אדם$_{\text{קהל}}$. אמירות מסוג $_{\text{א}}$א$_{\text{ב}}$ משמשות זיהוי בגוף ראשון של האדם א' על עצמו, כאשר הוא מדבר אל אדם ב'. בדומה, אמירות זיהוי בגוף שני שבהן אדם ב' מספר סיפור על אדם א' לאדם א' הן מסוג $_{\text{ב}}$א$_{\text{א}}$. אמירות בגוף שלישי שבהן אדם ב' מספר לאדם ג' סיפור על אדם א' הן מסוג $_{\text{ב}}$א$_{\text{ג}}$. ציון השלשות האלה יכול להוסיף תובנות חשובות על הדרך שבה סיפורים שונים באשר לאותו בן-אדם (כגון סיפורים בגוף ראשון וסיפורים בגוף שלישי) עוסקים זה בזה ומשפיעים זה על זה.

ספרד ופרוסק (2005) הציעו הבחנה חשובה נוספת בין שני סוגים של סיפורי זהות: זהות נוכחית לעומת זהות מיועדת. *זהות* נוכחית היא מכלול סיפורי הזהות באשר למצב הדברים כפי שהוא כעת (למשל "אני גרועה במתמטיקה"). לעומת זאת, זהות *מיועדת* אלה הסיפורים לגבי כיצד הדברים אמורים או מצופים להיות (למשל "אני רוצה להתקבל ל5 יח' במתמטיקה"). במחקרן על ההבדלים בין דרכי למידת מתמטיקה של תלמידים ישראלים ותיקים לעומת תלמידים עולים חדשים מברה"מ (לשעבר), הן הראו שתלמידים עם זהויות מיועדות שונות (למשל כאלה הרואים בלמידת מתמטיקה חלק מהיותם "אנשים תרבותיים" לאלה הרואים אותה אך ורק ככלי להתקבל למסלולים אקדמיים יוקרתיים), לומדים מתמטיקה בדרך אחרת. במחקר הנוכחי אשתמש במונח "זיהוי מיועד" כדי לאפיין דיבור באשר לדרך שבה הדברים אמורים או צריכים להתנהל (על-פי המְסַפֵּר) או באשר לדרך שבה אנשים מצופים להשתתף בפעילויות מסוימות.

אמנם לכל אדם יש סיפורים רבים המסופרים עליו, אך איסוף הסיפורים הללו מתוך שיח יומיומי (ובמיוחד שיח כיתתי) הוא עניין מורכב למדי. השלב הראשון לקראת איסוף זה כפי שבוצע במחקר הנוכחי, כלל חלוקת השיח של תלמידים (הן המילולי והן הבלתי-מילולי) לשתי קטגוריות עיקריות: תקשורת מתמטית או מתמוט (mathematizing) ותקשורת על אנשים (subjectifying). מתמוט מוגדר על-ידי תקשורת (בעל-פה או בכתב) באשר לכמויות וצורות מתוך שימוש במילים מתמטיות ובסימנים מתמטיים (למשל "2+2=4" או "זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו"). לעומת זאת, *תקשורת על אנשים* מוגדרת כ*תקשורת באשר למשתתפים בשיח* (כגון "אני לא יודעת כיצד לפתור את הבעיה הזו" או הצבעה על תלמיד והנהון לאישור).

דפוסי אינטראקציה

ככל אובייקט שיח זהויות נוצרות באמצעות אינטראקציה חברתית (McCall & Simmons, 1966). אינטראקציה חברתית היא פעילות בעלת דפוס החוזר ונשנה, והיא מוגבלת בנורמות חברתיות

ותרבותיות (Goffman, 2005). המגבלות או חוקי-העל (כלומר החוקים המכתיבים מה מותר, מה נכון ומתי צריכים להיאמר דברים מסוימים) הוגדרו על-ידי ספרד (Sfard, 2008) כ***שגרות*** (רוטינות). לרוב שגרות אלו אינן מוצהרות, אלא משתמעות ממעשיהם של המשתתפים ועוברות המללה רק על-ידי צופים חיצוניים (במקרה זה החוקרים) שעוקבים אחרי פעילויות המשתתפים החוזרות ונשנות בדפוסים מסוימים.

מחקריה של ספרד ושל עמיתיה (Sfard, 2007; Sfard & Kieran, 2001; Sfard & Lavie, 2005) התמקדו בעיקר בשגרות מתמטיות. אולם באשר לחיי הכיתה, נחקרו שגרות בהקשרים רבים אחרים, למשל בקשר של אינטראקציות מורה-תלמיד (Cazden, 2001; Lefstein, 2008; Mehan, 1979). סוג כזה של שגרות אינו קשור בהכרח לשיח מסוים (כגון השיח המתמטי), אלא למה שלעתים קרובות נקרא "נורמות חברתיות" של פעילות כיתתית. שגרות אחרות שנחקרו הן אלה המגדירות מהו טיעון מתמטי מקובל או מהן דרכים מתמטיות מקובלות לפתור בעיות. אלו כונו בספרות "נורמות סוציו-מתמטיות" (Cobb, Yackel, & Wood, 1992) או חוקי-על של השיח המתמטי (Sfard, 2007).

במחקר הנוכחי עלה צורך לאפיין עוד סוג *של שגרות* או חוקי-על שאינם מתאימים בדיוק לשום קטגוריה מהקטגוריות שהוזכרו לעיל. אלה חוקים בלתי מוצהרים השייכים לאזור הדמדומים שבין נורמות חברתיות ובין נורמות סוציו-מתמטיות ונורמות מתמטיות. חוקים אלו יכולים להיות מתוארים היטב כחוקים האחראים על *התקשורת על אנשים* או ה"זיהוי העצמי" המתאים עבור פעילויות מתמטיות מסוימות. למשל לשאלה "כמה זה שמונה כפול שתיים?" יש תשובות אפשריות רבות. למשל "אני יודע! זה 16!", או "אה.. אולי 14? לא..". שתי התשובות הללו שונות זו מזו לא רק בתוכן המתמטי שלהן, אלא גם במה שהדובר בהן *אומר על עצמו* (כלומר בזיהוי העצמי שלו). הראשונה כוללת סיפור מתמטי "נכון" (או מקובל על-פי כללי השיח המתמטי) עם מסר של ביטחון בתשובה. השנייה כוללת טעות (כלומר היגד לא מקובל על-פי כללי השיח) עם מסר מתאים של חוסר ביטחון בתשובה. אלה דוגמאות פשוטות יחסית של שגרות אינטראקציה נורמטיביות. אולם החוקים העומדים בבסיס שגרות אינטראקציה כאלה יכולים להיות מורכבים בהרבה. במקרים מורכבים אלה קל ביותר לזהות אותן על-פי *הפרתן* (Voigt, 1994). הפרה זו מתוארת בקטע הבא מתוך שיעור שבו אני (המורה) מציגה נושא מתמטי חדש – תבניות מספר – לפני קבוצה של ארבעה תלמידים מכיתה ז' עם הישגים נמוכים במתמטיקה (ביניהם דנה – הגיבורה הראשית בחקר המקרה הנוכחי). אף שלכל התלמידים היה מעט מאוד ניסיון עבר עם המושג "תבניות מספר", התשובה של דנה על שאלתי הייתה יוצאת דופן.

קטע 1: דנה מפרה שגרת אינטראקציה בעת דיון כיתתי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
1	מורה	היום אנחנו מתחילים לדבר על תבניות מספר. מי יודע מה זו תבנית מספר?
2	הדסה	התבנית של המספר, אה.. שתיים אה שתיים ואחד כאילו?
3	מורה	אמ.. לא בדיוק. למישהו עוד יש רעיון מה זה תבנית מספר?
		התלמידים מנסים עוד כמה ניחושים שאינם מתקרבים למה שהמורה מחפשת אז

תור דיבור	דובר	מה נאמר
		היא מנסה שוב:
18	מורה	לדוגמה, אה.. עם נוסחאות, כן? ראיתם פעם נוסחה של משהו?
20	נדב	כן, של ניסוי.
23	הדסה	אה! כן! ראיתי כזה ניסוי, אה אה, P ו-P ו-A
24	נדב	ב"שמינייה"
25	מורה	יפה. בשביל נוסחאות כאלו אנחנו צריכים אותיות, או.קי?
26	דנה	P ועוד P. אנ'לא הבנתי את הקטע עם ה-E...
27	נדב	E ועוד E
28	דנה	לדוגמה E שווה שבע. לא הבנתי את הקטע הזה.

אף שלתלמידים בקבוצה לא היה מושג על מה אני (המורה) מדברת כאשר אני אומרת "תבנית מספר", הדסה ונדב סיפקו תשובות שהתאימו פחות או יותר לשגרות האינטראקציה המקובלות במצבים כגון אלה. שגרות אלה יכולות להיות מתוארות כך:

פתיחה: המורה שואלת שאלה לגבי מושג חדש, במקרה זה "תבנית מספר".

בהמשך לפתיחה הזו, יש מספר תגובות מקובלות אפשריות:

תגובה 1: התלמידים עונים את הניחוש הטוב ביותר שעולה על דעתם תוך הבעה (לרוב לא מילולית) שהם רק מנחשים את התשובה.

תגובה 2: לתלמידים יש כבר ניסיון מסוים עם המושג, ולכן הם משתמשים בו על-פי החוקים המקובלים. למשל "כן, תבנית מספר היא משהו כמו 2b או 4 + x".

תגובה 3: לתלמידים יש ניסיון מסוים עם המונח, אך הם מכירים בכך שהם עדיין לא מבינים אותו די הצורך. לפיכך הם משתמשים בו שימוש שהם מכירים, אך מבקשים להבין אותו טוב יותר. למשל "תבניות מספר הם ביטויים עם X-ים אבל לא הבנתי מתי מותר להשתמש ב-X ומתי ב-Y".

התשובה של הדסה [2]: "תבנית מספר, אה.. שתיים ו.. שתיים ואחד כאילו?", עם הטון המהוסס שבה, משמשת דוגמה טובה לתגובה מהסוג הראשון. התשובה של נדב [20] שבה התלמיד מסוגל להשתמש במילה החדשה בדרך מקובלת (אם כי לא בדיוק מתמטית) משמשת דוגמה לתגובה מהסוג השני. לעומת שתי התגובות הללו התגובה של דנה "P ועוד P, אנ'לא הבנתי את הקטע עם ה-E, למשל E שווה 7"[3]

3. האמירה של דנה באשר ל-E נשארה סתומה בעיני עד עצם היום הזה. ייתכן שהיא התקשרה לאירוע מסוים בסדרת ה"שמינייה" שלא הכרתי. העובדה שנדב (שהכיר את הסדרה) לא הביע תמיהה עליה ואף בנה עליה עם "E ועוד E" מחזקת את הסברה הזו. עם זה בעת השיעור לא ראיתי כל היגיון באמירה של דנה.

חורגת משגרות האינטראקציה הללו בהצגת שילוב מעט משונה שלהן. היא משתמשת בצורת הסובייקטיפיקציה של תגובה מס' 3 (ביטוי ביטחון מסוים לגבי היכרות עם המושג תוך בקשת הסברים להרחבה לגביו), ואילו ההיבט המתמטי של דבריה מתאים לתגובה מס' 1 (של היעדר ניסיון מוחלט עם המושג ועם הדרך שיש להשתמש בו).

דוגמה זו מראה עד כמה שגרות האינטראקציה במצבי למידה-הוראה הן מורכבות לתיאור, לא רק משום שהן לעולם אינן מוצהרות, אלא משום שהן משלבות מסרים באשר לעצמי (כגון "אני בטוחה במה שאני אומרת" או "אני רק מנחשת") עם מסרים מתמטיים או תלויי תוכן מסוג אחר. כמו כן, כל עוד איננו יודעים כיצד ביטויים מסוג "E שווה 7" באים לידי שימוש בסיטואציות בית ספריות, או המשפט "לא הבנתי את הקטע עם.." משמש בשיח היומיומי של תלמידי כיתה ז', הרי שיהיה לנו קשה לראות את המוזרות שבאמירה של דנה.

לעתים קרובות סטיות משגרות אינטראקציה מביאות לידי תגובות רגשיות, כגון שעשוע או דחייה. יתרה מזו, הן יכולות ליצור היגדים מזהים חד-משמעיים באשר לאדם שסטה משגרת השיח. למשל בדוגמה לעיל הסטייה של דנה משגרת השיח (כפי שאני ציפיתי שהיא תתנהל) הביאה לידי כך שזיהיתי אותה לא רק כ"מתקשה" מאוד במתמטיקה, אלא גם כ"משעשעת" או "מצחיקה" (אם כי כמובן הזהות הזו נשמרה ביני לבין עצמי, כסיפור מסוג $\text{דנה}_{\text{מורה}}$, ועדות לה נמצאת רק ביומן המחקר שלי). על כן מעקב אחרי שגרות שיח בסיטואציית למידה והוראה יכול לגלות לנו רבות מה הביא לידי יצירת זהויות מסוימות בכיתה.

כעת כאשר הוצגו הכלים המושגיים לבחינת הקשרים בין רגשות, יחסים בין-אישיים ושיח מתמטי, נציג את שאלת המחקר במונחים אופרציונליים. השאלה היא *כיצד הסיפורים השונים המסופרים לגבי התלמיד (אלו שמסופרים על ידו ואלו שמסופרים על-ידי המורה) מייצרים או מגבילים הזדמנויות ללמידת מתמטיקה*? במחקר הנוכחי ניסיתי לתת מענה על שאלת מחקר זו באמצעות חקר מקרה ספציפי של תלמידה בעלת הישגים חלשים במיוחד.

מתודולוגיה

בחרתי להתמקד במקרה של דנה שהייתה התלמידה בעלת ההישגים הנמוכים ביותר במחקר גדול יותר שערכתי (הד-מצויינים, 2011; Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012), משום שהכישלון שלה היה קיצוני במיוחד, ומקרים קיצוניים מאפשרים לעתים קרובות לראות בבהירות רבה יותר מנגנוני שיח שבדרך כלל נסתרים מן העין.

המחקר שבו השתתפה דנה כלל 12 תלמידים מכיתה ז' שלמדו עמי בקורס של חמישה חודשים במרכז למידה חוץ בית-ספרי. התלמידים חולקו לשלוש קבוצות למידה לפי הישגיהם בבית הספר. דנה שובצה לקבוצת ההישגים הנמוכים בשל דיווח שהתקבל מאמה וממורתה בבית הספר שהיא חווה קשיים ניכרים במתמטיקה הן בכיתה ז' והן בשנות לימודיה הקודמות בבית הספר היסודי. לפי דיווחי האם והיועצת, דנה אובחנה בכיתה ג' או ד' שיש לה לקות למידה והפרעת קשב וריכוז, אך עותק של האבחון לא הובא

לידי.

נוסף לשיעורים במרכז הלמידה (שיכונו להלן "הקורס"), כל משתתף במחקר עבר שני ראיונות, בתחילת המחקר ובסופו. הריאיון הראשון כלל חלק קצר של היכרות וחלק ארוך יותר של הערכת השיח המתמטי, בהתבסס על ראיון השיח המתמטי של בן-יהודה (2003). ראיון שיח זה פותח גם הוא עבור תלמידי כיתה ז'. הריאיון המסכם התנהל גם הוא בשני חלקים: בחלק הראשון היו שאלות באשר לזהות המתמטית של התלמיד. חלק זה כלל סרט שתיאר את חוויית החרדה ממתמטיקה שמתעוררת אצל תלמיד כיתה ח' כאשר הוא נתקל בקשיים במקצוע בפעם הראשונה בחייו. השימוש בסרט נועד להקל על המרואיין ביצירת שיחה סביב נושאים של ציפיות הורים ומשפחה באשר ללימודי מתמטיקה של ילדם, חרדות ממתמטיקה ויחסים בין תלמידים למורים למתמטיקה (שאלות הריאיון ותמלולי הראיונות המלאים נמצאים בנספחים בעבודתה של הד-מצויינים [2011]). החלק השני של הריאיון כלל שוב ריאיון מתמטי שבו כמה מטלות שוחזרו מהריאיון הראשון ושאלות אחרות נועדו לבחון את כישורי התלמיד בחומר שנלמד במהלך הקורס. נוסף לריאיון עם התלמידים, ראיינתי גם את ההורים והמורים שלהם בבית הספר. במקרה של דנה ראיינתי את המורה שלה למתמטיקה והיועצת במהלך הקורס ואת אמה בסופו.

כל השיעורים והראיונות צולמו בשתי מצלמות. הראיונות עם דנה ועם אמה תומללו במלואם. שיעורים נבחרים תומללו ולאחר מכן נותחו לעומק על-פי עקרונות הגישה התקשורתית, כפי שיתואר להלן.

דרך ניתוח הנתונים

האמצעי הראשון שבעזרתו ניתחתי את הנתונים היה בחלוקת השיח למתמוט מול תקשורת על אנשים. בשלב השני חילקתי את התקשורת על אנשים לשלוש רמות: הרמה הספציפית שבה האמירות עוסקות בפעולות ספציפיות של המשתתפ/ת בהקשר מסוים. למשל "לא הבנתי את זה" או "אז אני עושה ככה"; הרמה השנייה הכילה אמירות הנוגעות להערכה של פעילות ברמה הכללית, כגון "אני אף פעם לא מצליחה תרגילים כאלה" או "לפתור תרגילים עם מספרים עשרוניים קל לי"; הרמה השלישית היא רמת האמירות המזהות בהגדרתן: "היא לקוית למידה" או "אני לא טובה במתמטיקה". כמובן שאמירות ברמה השלישית משמשות חלק מזהות (בהגדרתה כ"מכלול סיפורים"), אך גם אמירות מרמה ראשונה ושנייה יכולות להיכנס למכלול, ובתנאי שהן עקביות וחוזרות על עצמן.

בשלב השלישי נבחנו הדרכים שבהן התלמידה מזהה את עצמה (ואחרים מזהים אותה) זיהוי *עקיף*. ההגדרה של זיהוי עקיף הנה: התנהגות או דיבור של אדם א' שמטרתם ייצור סיפורי זהות אצל אדם ב' באשר לא', ללא אמירה ישירה באשר לא'. למשל כאשר תלמידה שואלת "איך אני עושה את זה?" היא מזהה את עצמה בעקיפין כבלתי מסוגלת להחליט לבד על דרך הפעולה שלה.

בשלב הרביעי נבחנו דרכי הזיהוי הישיר והעקיף בדפוסי האינטראקציה עם המורה. כאן נבדק האם המורה והתלמידה שיתפו פעולה בייצור הזהות (בעיקר בזיהוי העקיף) או שהיו ניסיונות להתנגדות ולהצעת נרטיבים אלטרנטיביים מצד אחת מהן. למשל, האם המורה ניסתה לגרום לדנה לזהות את עצמה אחרת מהסיפור שדנה סיפרה על עצמה.

הזיהוי ודפוסי האינטראקציה נבחנו על-פי המתמוט של התלמידה והמורה. בדקתי באיזו מידה השיח המתמטי היה מועצם או סינטקטי ואילו רוטינות חישוב והצדקה הופיעו בו. אלמנטים אלה סייעו לגבש תמונה למידת הריטואליות של ההשתתפות בשיח. כמו כן נבחן האם ובאיזו מידה ניתנו לתלמידה הזדמנויות להשתתפות חקירתיות, וכיצד היא הגיבה להזדמנויות הללו. לבסוף בדקתי האם חלה התפתחות בשיח המתמטי של התלמידה התפתח למן הריאיון המתמטי המקדים ועד הריאיון המסכם.

המקרה של דנה

המקרה של דנה עורר תהייה משום שלמרות מאמציה והצהרותיה על רצונה להתקדם במתמטיקה, ולמרות ההוראה האינטנסיבית שהיא קיבלה הן בקורס שלי והן בשיעורים פרטניים ממורתה בבית הספר, היא לא הצליחה להפנים אף לא אחד מהנושאים שנלמדו במתמטיקה במהלך אותה השנה. כדי להבין מה עיכב את דנה מלהתקדם אתחיל בניתוח של השיח המתמטי שלה בתחילת הקורס, תוך שאני מוציאה ממנו את ארגז הכלים המתמטי של דנה – כלומר מכלול המילים והשגרות המתמטיות שהיו ברשותה בשלב זה. בשלב הבא אנתח את הדרכים שבהן דנה השתתפה בשיעורי הקורס ואת האינטראקציות הטיפוסיות שהיו לה עמי, מורתה. ניתוח זה יראה כי שגרות האינטראקציה שלפיהן פעלה דנה היו שונות מאוד מאלה שאני פעלתי לפיהן, והביאו אותנו לידי דו-שיח בלתי פרודוקטיבי ויצירה משותפת של זהות ה"מתקשה" של דנה.

הדו-שיח המתמטי הראשון ביני ובין דנה

במבט לאחור נראה שזיהיתי את דנה כמתקשה במיוחד משלב מוקדם מאוד של הריאיון הראשון שערכתי עמה. כיצד נוצר סיפור הזהות הזה כל כך מוקדם? יש לציין כי אף שהיה לי מידע מוקדם על הישגיה הנמוכים של דנה בבית הספר, לא ידעתי רבות על כישוריה המתמטיים לפני שריאיון זה החל. ואולם עברו דקות מעטות של הריאיון כדי שאזהה את דנה כבעלת כישורים מתמטיים נמוכים מאוד יחסית לתלמידת כיתה ז'.

הריאיון החל בהצהרה מפורשת מצדי על הציפייה שלי מהתנהלות הריאיון, כלומר שאני מעוניינת "לשמוע את דנה חושבת":

198. מורה: ... אני אבקש ממך לחשוב בקול רם. כל מה שאת עושה, מחשבת בראש, תגידי בקול רם, או.קי?

לאחר ההקדמה הזו, החלה דנה לקרוא את התרגיל הראשון שהיה: "כתוב את המספר המתאים (תרגם ממילים למספר): שישה מיליון, שש מאות וחמישה אלף, ותשע".

מיד לאחר מכן, היא הצהירה:

199. דנה: אה, הבנתי. שש עשרה. זה כמו שעושים בכיתה ד', לרשום את המספר.

תחילתו של דו-שיח זה לא נראית יוצאת דופן. אמנם דנה לא סיפקה מיד את התשובה הנכונה, אך היא

בכל זאת הביעה זיהוי עצמי שלפיו היא מבינה מה מצופה ממנה ("אה, הבנתי"). אולם לאחר מספר היסוסים, מחיקות וכתיבת כמה ספרות, התרחשה סטייה משגרת האינטראקציה המקובלת במצבים כגון אלה:

207. דנה: מה זה? זה לבד, זה לבד וזה לבד? (מצביעה על המילים המופרדות בפסיקים).

208. מורה: זה מספר אחד. שישה מליון, שש מאות וחמישה אלף ותשע.

שאלתה של דנה, נוסף להיסוס הארוך (יחסית) שלה לגבי התשובה המצופה, הפרה את שגרת האינטראקציה של "הצבת שאלה על-ידי המורה; תגובה עם תשובה נכונה מתמטית על-ידי התלמיד" שהייתה מזהה את דנה (בעיניי) כמסוגלת לפתור בעיות מסוג זה. עם זה סטייה זו לא הייתה יוצאת דופן במיוחד. אף שהמשימה נלקחה מתכנית הלימודים של כיתה ד', כמה תלמידים אחרים במחקר טעו בה ולכמה מהם היו מעט היסוסים בתחילת הביצוע.

לאחר כמה ניסיונות ועוד היסוסים אירעה עוד אינטראקציה, הפעם בסטייה חזקה יותר מהשגרה המצופה:

239. דנה: אז רגע, איך אני עושה את זה? אני עושה פסיק ואז... אפס, אפס, אפס ואפס אפס אפס אפס? או אני עושה שש-עשרה, אפס אפס אפס פסיק אפס אפס אפס אפס?

240. מורה: את צריכה להכניס את כל המספר בבת-אחת (מסמנת תנועת כיווץ עם שתי הידיים).

241. דנה: אה! אז בלי פסיקים (מהנהנת במהירות, טון דיבור של הקלה).

242. מורה: את יודעת מה נעשה? בואי נמשיך לשאלה הבאה, ואם זה יצלצל לך מוכר, אז אולי נחזור לזה אחר כך, בסדר?

נראה בבירור כי בסוף האינטראקציה הזו זיהיתי את דנה כלא מסוגלת לפתור את התרגיל ומשום כך הצעתי שנתקדם לשאלה הבאה. מה היה בדבריה של דנה שהפר את שגרות האינטראקציה בדרך כזו שגרמה לי לוותר על הפקת התשובה הנכונה ממנה? התשובה הראשונה מצויה בתוכן המתמטי של דברי דנה, ובמיוחד בדרכי התיווך שבהן היא השתמשה. בזמן שהשתמשה דנה בתיווך *סינטקטי*, כלומר היא נשענה בעיקר על ספרות ו"פסיקים" [239, 241], אני דיברתי על המספר בצורה *מועצמת* ("את צריכה להכניס *את כל המספר* בבת אחת"). יתרה מזו, כיוון שאצלי מספרים הפכו לעצמים לפני שנים רבות, התקשיתי לראות אותם אחרת. לכן על שאלתה הראשונה של דנה [207] השבתי ב"זה מספר אחד. שישה מיליון, שש מאות.. ". אולם תשובה זו לא תרמה הרבה לדנה, שכן היא פשוט חזרה על מה שנאמר בדף.

לפיכך המכשול הראשון לדו-שיח מוצלח בין דנה לביני היה מבוסס על הכלים המתמטיים המגוונים מאוד שהיו בידי שתינו. אך יש לזכור כי שוני זה לא היה מיוחד לסיטואציית הריאיון הנוכחית, שכן הוא מאפיין כמעט כל אינטראקציה בין מורה לתלמיד. הסטייה המשמעותית יותר משגרת האינטראקציה הייתה במסרי הזיהוי העצמי של דנה. בעוד שבדרך כלל מצופה שתלמיד המתקשה להבין יכיר בכך בדרך

כלשהי (למשל, על-ידי הבעת בלבול או היסוס), כאן דנה הביעה הבנה מלאה ("אה! אז בלי פסיקים" [241]). בעיניי, לעומת זאת, היא לא הבינה את הנושא כלל.

הדוגמה הממחישה יותר מכול את הסטיות של דנה מאינטראקציות מתמטיות נורמטיביות במהלך הריאיון לקוחה מניסיונה לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

4 חולצות עולות 200 ₪

6 זוגות מכנסיים עולים 300 ₪

רינה קנתה 2 חולצות, ו-2 זוגות מכנסיים

כמה שילמה עבור כל הקנייה?

קטע 2: דנה פותרת את "בעיית החולצות והמכנסיים"

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
580-577	דנה	(לאחר קריאת השאלה בקול רם) ..אמ.. חמישים, חמש מאות, ועוד חמש מאות.. (מביטה אל עבר המורה)
581	מורה	אמרת חמישים ואז חמש מאות. לא הבנתי כל כך.
582	דנה	טוב, זה יוצא חמש מאות, נכון? (מצביעה על הדף)
583	מורה	או.קי.
584	דנה	ו^עוד פעמיים^, חמש מאות (טון קול של "מה הבעיה?") אז זה יוצא.. מאה. לא, יוצא אלף חמש מאות. אויש, רגע (מקישה בעיפרון על השולחן, נשענת על היד, מחייכת במבוכה) אה.. זה יוצא... >כמה זה חמש מאות ועוד חמש מאות?< (מכווצת גבות)
		המורה מבקשת מדנה לקרוא שוב את השאלה ומתחילה לקרוא אותה עבורה: "4 חולצות עולות מאתיים שקל"
589-586	דנה	אה! ארבע חולצות! (המורה ממשיכה לקרוא את כל השאלה)
590	דנה	אה הבנתי! וואי, איך אני יכולה לעשות ארבע ב- אה! ארבע פחות שש (מזדקפת בהתלהבות) עושים (...) זה וזה (מצביעה על 200 ועל 4) פחות זה (6) ופחות זה (2) נכון? כל המספרים עושים פחות.
591	מורה	(מחייכת קלות) מה? ---
592	דנה	(מרימה ידיים בעמדת התגוננות) זה מה שלימדו אותי, אני לא יודעת דרך אחרת
593	מורה	לא, בסדר
594	דנה	אמ.. זה מפליא שאני עדיין זוכרת את זה, אבל סבבה. אה, או.קי. ארבע פחות שש .... (מזדקפת, מרצינה, חושבת רגע ואז מגלגלת עיניים) די^ מה יהיה? (מחייכת, מכסה את הפה). אני לא זוכרת כלום^ (מביטה מטה, מקמטת מצח) אמ.....
601-597		**דנה מסבירה למורה שהיא "תקועה" בחישוב =6-4. המורה מתחילה**

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
		להציע "אולי בדרך אחרת" אבל דנה מתפרצת
604-602	דנה	(סופרת אצבעות) שתיים (המורה: או.קי.) אז אמ... פה זה ביחד שתיים (רושמת "2" ליד השאלה) אמ.. חמש מאות (רושמת 500) ... ארבע (רושמת 4) עכשיו, אני עושה את הכול ביחד, נכון?
605	מורה	או.קי.
608-606	דנה	חמש מאות, ועוד שתיים, ועוד ארבע. אז חמש מאות.. ש- ושש, חמש מאות ושש. (מורה: או.קי.) זה נכון, נכון?
609	מורה	^לא בדיוק^, אבל לא נורא^
610	דנה	**מפילה את העיפרון, תופסת את ראשה בשתי ידיה בהבעה מאוכזבת**

מקרא סימנים: קול גבוה^, >דיבור מהיר<

גם בקטע השיח הזה המוזרות של הביצוע של דנה לא הייתה רק בתוכן המתמטי של דבריה, אלא בעיקר בסטייה שלה מהבעות הזיהוי העצמי המצופות במצב זה. מבחינה מתמטית נראה כי דנה עקבה אחרי חוקים שונים מאוד להשתתפות בשיח מתמטי מאלו של משתתפים מנוסים. כך במקום לקשר את הביטוי "4 חולצות" כסימן *לכפל* (4 פעמים מחיר החולצה), היא ראתה בספרות 4, 6 ו-2 מסמנות שעליה להפחית (או "לעשות פחות" בלשונה) או לחבר אותן באיזושהי דרך מסודרת. ראייה סינטקטית כזו לבעיה מילולית יכולה להיראות מוזרה ביותר, אלא אם נשענים על העובדה ששגרות כפל היו נדירות ביותר בשיח של דנה, וגם כאשר בוצעו, הן לרוב היו רוויות שגיאות. ללא שליטה בכפל לא הייתה לדנה בֵּרֵרה, אלא להשתמש בדרכי החישוב היחידות שבהן היא שלטה, שהן חיבור וחיסור. אך כאמור, המוזר יותר היה הזיהוי העצמי של דנה בכל מהלך הפתרון. בשלבים מסוימים היא זיהתה את עצמה כעוברת מעין "פריצות דרך" במהלך הפתרון ("אה!" [586], "אה, הבנתי!" [590]) בעוד שבעיניי היא לא התקרבה כלל לדרך הפתרון המקובלת. פער זה ניכר בעצמתו הרבה ביותר בשאלתה מלאת התקווה בסוף התהליך ("זה נכון, נכון?" [608]) שנתקלה בשלילה מצדי ובאכזבה רבה מצדה של דנה.

המשך הריאיון המתמטי עם דנה לא היה שונה ברובו מהדוגמאות שהובאו לעיל. בתחילה נראָה שכאשר דנה החלה את הקורס, היו ברשותה הכלים המתמטיים המצופים פחות או יותר מילדים בכיתה ב'. ממצא זה מלמד על כך שזה שנים לא מעטות הייתה דנה שרויה בסיטואציות לימודיות חוזרות ונשנות שבהן ציפו ממנה להשתתף בשיח מתמטי שאיננו תואם את הכלים המתמטיים שברשותה. נראה כי עקב כך היא פיתחה שגרות *אלטרנטיביות* כדי לעמוד (או לכל הפחות לנסות לעמוד) בציפיות הסביבה. נוכל לתאר שגרות אלו כך:

א. בכל פתרון של בעיה או תרגיל מתמטי, הביטי במספרים ונסי למצוא דרך כלשהי לחבר אותם, לחסר אותם או להעביר אותם ממקום למקום על-פי סדר כלשהו.

ב. כיוון שאסטרטגיה א' מוכיחה את עצמה לעתים קרובות כבלתי מהימנה, נסי להעמיד כל מספר או רעיון העולה על דעתך במהלך הפתרון להערכת חיצונית של המורה, כך שתנווטי לכיוון

הנכון לפני שתאבדי את הדרך. עשי זאת במהירות האפשרית כך שאחת מתשובותייך תיתפס על-ידי המורה ותוכרז כ"נכונה".

אם מביטים על הכלים המתמטיים שהיו בידי דנה בשלב זה באשר לאלו שהיו מצופים ממנה, מתחוורת העובדה שלדנה לא היו למעשה הרבה אפשרויות אחרות. כל עוד היא רצתה לזהות את עצמה, ולו חלקית, כמסוגלת ללמוד מתמטיקה (או כ"תלמידה טובה") היה עליה להשתמש באמצעים היחידים העומדים לרשותה, אפילו אלו התמצו בהבעת "הבנה". יתרה מזו, ככל שדנה התרחקה בכישוריה מהשיח המצופה כך הופחתה יכולתה לאמוד ולהעריך במדויק את השתתפותה בשיח. במילים אחרות, ייתכן בהחלט שדנה חוותה את עצמה כ"מבינה" משהו במהלך פתרון בעיית ה"חולצות והמכנסיים", אך הגדרה זו של "הבנה" הייתה שונה מאוד ממה שאני ראיתי כ"הבנה" של דרך הפתרון. כך זיהוי עצמה כ"מבינה" או כ"משתתפת פעילה ומסוגלת" סתר שוב ושוב את הדרך שבה זיהיתי את דנה, והביא לידי כך שגיבשתי לעצמי סיפור על דנה כ"מתקשה מאוד" ואפילו "חסרת סיכוי" במתמטיקה, סיפור שהיה קשה מאוד לשנותו מאוחר יותר.

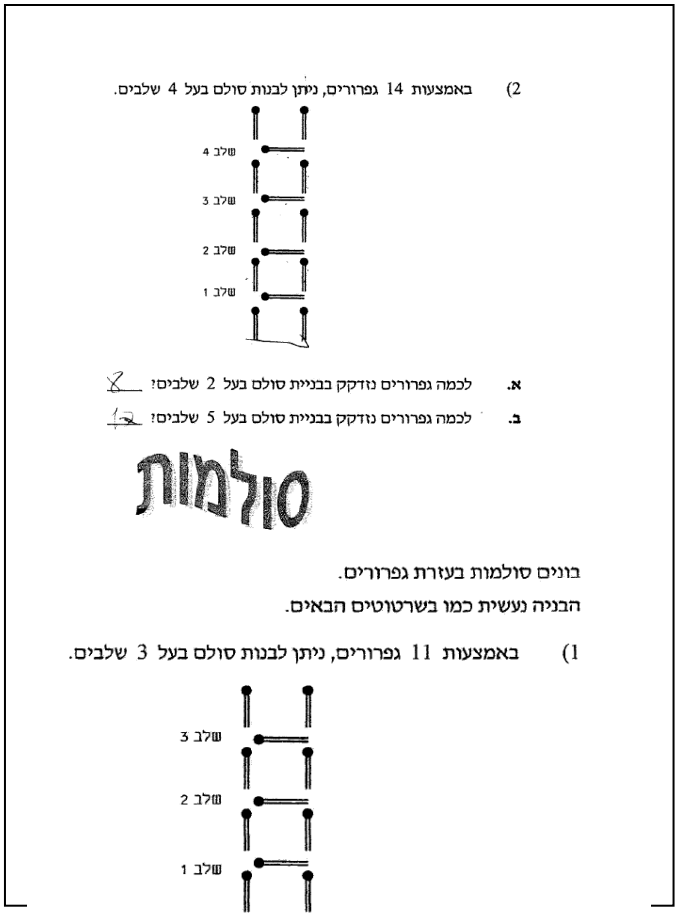
בחלק הבא אנתח כיצד הזהות בגוף שלישי שחיברתי על אודות דנה מהשלבים המוקדמים ביותר של היכרותנו עיכבה אותי מלנהל עמה דו-שיח מתמטי פרודוקטיבי שהיה מאפשר לדנה להתקדם בלמידה.

אינטראקציות למידה-הוראה בין דנה לביני

לאחר שבמהלך הריאיון הראשון יצרנו יחד שגרה שלפיה דנה 'זורקת' ניחושים ואני מעריכה אותם כנכונים או שגויים, לא נשארו סיכויים רבים לשיח אקספלורטיבי ביני ובין דנה. כמו כן הזיהוי שלי אותה כ"מתקשה מאוד" גרם לי להאמין שאין סיכוי גדול להוציא מדנה טיעונים מתמטיים הגיוניים.

עם זה לעתים רחוקות נוצרו עבור דנה בכל זאת הזדמנויות להסביר את חשיבתה. אחת מהן אירעה בשיעור הראשון, כאשר הצבתי לפני קבוצת התלמידים שבה השתתפה דנה (וביניהם היו גם הדסה, חגית ונדב) בעיה מתמטית בלתי מוכרת שתוכננה לעורר דיון על הכללה של חישובים מתמטיים. המשימה נקראה "בעיית הסולמות"[4] והוצגה כלהלן (ראה איור 1):

4. בעיה זו לקוחה מתוך ליבנה, ד', מנצ'יק, נ', בכר, ש', ריבובסקי, נ' ופרוסק, נ' (2003). **נתיבי"ם: פעילויות במתמטיקה לפיתוח יכולת ההכללה** (מהדורת ניסוי). ירושלים: היחידה לחקר החינוך המתמטי ע"ש שמשון עמיצור, בית הספר לחינוך, האוניברסיטה העברית, עמ' 1.



איור 2: בעיית הסולמות – דף העבודה שניתן לתלמידים

השאלה הראשונה והפשוטה ביותר הייתה:

לכמה גפרורים נזדקק בבניית סולם בעל 2 שלבים?

נדב וחגית טענו (נכונה) שהתשובה היא 8, בעוד דנה והדסה התעקשו שהתשובה היא 6. הזמנתי כל אחד מהם להסביר את דרך הפתרון שלו/שלה ולנסות לשכנע את האחרים. בתחילה, חגית הסבירה מדוע התשובה היא 8:

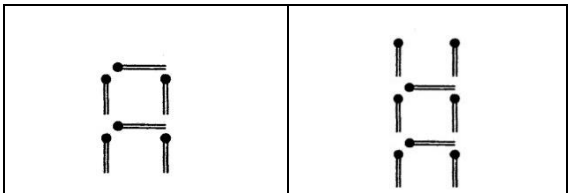
תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
95-90	חגית	אם בונים סולם רגיל... אז צריך כאן (מצביעה על החלק הנמוך של הסולם) שיהיה תומך... נכון? אז כאן יש לך תומך.

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
96	דנה	נו חמודה שלי, זה שש, זה שש!
97	מורה	לא, תקשיבי לה, תקשיבי לה (בטון מעט חסר סבלנות)

למרות הפצרותי שתקשיב לחגית, דנה לא השתכנעה. במקום זאת היא קפצה והציעה הסבר משלה:

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
106	דנה	לא צריך... תדמיינו שיש לכם, רגע רגע רגע, (קמה)
107	הדסה	[אבל הם צודקים לפי דעתי][5]
108	מורה	(מרימה קול) [>רגע רגע רגע<], דנה, שבי, [אם את רוצה להראות להם תציירי על הדף]
109	דנה	[זה ככה כזה] (*מסמנת עם הידיים, מתיישבת*) (בטון מוגזם של "מורה"[6]) תדמיינו לכם, תדמו לכם (*מניפה אצבע*), דמו נא, (*לוחשת לעבר הדסה*) למדתי את זה ב--
110	מורה	ממ
111		*הדסה מעבירה מבטה מדנה למורה, מגחכת קלות ומשעינה ראש לצד (הבעה של "היא עושה שטויות"). דנה מביטה רגע בדף ומהססת בדבריה אך מיד חוזרת לנאום*
116-115	דנה	^או.קי.^ ד-מו לכם שיש לכם (*בקול לוחש, מצביעה על הגפרורים תוך כדי שסופרת*) אחת, שתיים, שלוש ארבע, או.קי.? נגיד. סליחה (*ממלמלת משהו לא ברור, מפשפשת בקלמר. הדסה מושיטה לה מחק*)
117	דנה	(בטון "מורתי") תודה רבה חמודה שלי. רגע, אויש (*מחקת, מהנהנת בתודה מעושה להדסה*)
118	הדסה	(*מגחכת, מביטה במורה*) כרגיל
119	מורה	אממ... או.קי.
120	דנה	דמו לכם שיש לכם (בטון מורתי) אחת, שתיים, שלוש, (טון רגיל) ארבע, חמש שש ושבע (מביטה במורה).
121	מורה	ממ
122	דנה	אופס! (צוחקת) רגע. (סופרת את הקווים בדף) >אחת שתיים שלוש ארבע חמש שש<. שש^ (מוחאת כפיים במהירות ומחייכת חיוך ניצחון)
123	הדסה	או.קי. אני רוצה להגיד משהו
124	דנה	לא! זה שבע בכלל!

בלב המחלוקת בין דנה לחגית בקטע שלעיל היה עניין פשוט למדי. בעוד חגית ונדב מימשו את המילים "סולם עם 2 שלבים" כפי שמצויר באיור 2א, דנה והדסה מימשו אותו כפי שמצויר באיור 2ב.



א
המימוש של חגית

ב
המימוש של דנה

5. סימני [] מסמנים דיבור בו בזמן.
6. תיאור הטון כ'מורתי' לא נועד להעיד על טון הקול המאפיין מורות אלא על הצורה שבה דנה מנסה לדבר. בתרבות הישראלית הפופולרית מורות לעתים מצוירות כבעלות טון קול ספציפי, גבוה ומאנפף. זהו הטון שאותו ניסתה לחקות דנה בקטע הזה.

איור 3: שני מימושים ל"סולם בעל שני שלבים"

אך השתתפותה של דנה בדיון שנועד לפתור את המחלוקת הזו הייתה רחוקה מאוד מלעקוב אחר הכללים המקובלים לשיח מתמטי בין תלמידים. טבלה 1 מסכמת את סטיותיה מהשגרות המקובלות.

טבלה 2: סטיותיה של דנה משגרות הדיון המתמטי המקובלות

	מקובל	הביצוע של דנה
1. היבט מתמטי	מימוש ויזואלי של ה"סולם" כמתואר באיור 2א	מימוש ויזואלי כמתואר באיור 2ב
	מנייה מדויקת של הגפרורים (עד 6 במקרה של מימוש ב' או עד 8 במקרה של מימוש א')	טועה בין מנייה של 6 ומנייה של 7 גפרורים עבור מימוש 2ב
2. היבט הזיהוי העצמי	התנהגות כשוות ערך למשתתפים האחרים	מציגה את עצמה בתאטרליות כ"מורה" של חגית ("מתוקה שלי, זה שש" [96]) ושל הדסה ("תודה, חמודה שלי"[117]).
	הצגת הטיעונים בדרך רגועה ורציונלית	מתרגשת, עומדת, משתמשת בתנועות ובהבעות פנים תאטרליות
	אם טענותייך המתמטיות שגויות, הביעי ספק מסוים	מביעה ביטחון רב בטענותיה גם כאשר המורה רומזת שייתכן שחגית צודקת ("תקשיבי לה, תקשיבי לה" [97])

כפי שנראה בטבלה 1, הסטיות משגרות האינטראקציה המקובלות שביצעה דנה בקטע זה רבות ומשמעותיות. נוכל לזהות את התגובות הרגשיות שסטיות אלו חוללו אצלי, למשל בהרמת הקול שלי בעת שביקשתי מדנה לשבת [108] ובתגובות חסרות הסבלנות שלי ל"הצגה" של דנה [119, 110]. אך אני לא הייתי היחידה שסימנה כי שגרות האינטראקציה המצופות הופרו. הדסה שישבה ליד דנה, הביעה מבוכה ואף התנצלות קלה עבור ההתנהגות של דנה ([111], [118]). דנה, לעומת זאת, לא נרתעה מהתגובות הללו. נהפוך הוא, היא המשיכה ב"הצגה" בלהט רב, ככל הנראה בלתי מודעת לכך שהתנהגותה מזהה אותה בעיני מורתה כמי שאיננה מסוגלת להשתתף בשיח מסוג זה.

סיפור הזהות הזה שרקמתי על דנה היה הרסני עבור המשך האינטראקציות המתמטיות בינינו. מכאן ואילך כמעט שלא הצבתי לפני דנה הזדמנות להתמודד לבד עם בעיה מתמטית. במקום זאת התמקדתי בתרגול החומר שנלמד בבית הספר, בתקווה שאם אפשט אותו ואגיש לה אותו בצורה הברורה ביותר תוך מתן הוראות מפורטות של דרכי הפתרון, אסייע לדנה לצמצם את הפער העצום שנוצר בין יכולותיה הנוכחיות לאלו המצופות ממנה בבית הספר.

הקטע הבא הלקוח מחלקו השני של השיעור הראשון, מדגים סיטואציה אופיינית מאוד לכל אינטראקציות ההוראה-למידה שהיו ביני ובין דנה מכאן ואילך. בקטע זה הצגתי לפני התלמידים דף עבודה ובו תרגילי חיבור עם מספרים מכוונים. בתחילה הסברתי לתלמידים את "שיטת החיצים" שלפיה הם היו אמורים לפתור את התרגילים (חיצים המורים ימינה מסמלים מספרים חיוביים וחיצים המורים שמאלה מסמלים מספרים שליליים). לאחר מכן הגשתי לתלמידים דפים ששורטט עליהם ישר המספרים ושעליהם הם

היו אמורים לתרגל "צעידה ימינה" ו"צעידה שמאלה" באמצעות החיצים כדי לפתור את תרגילי החיבור. כאשר הסברתי את השיטה לקבוצה, דנה שהתה מחוץ לכיתה לכמה דקות. משום כך היא קיבלה "הרצאה מיוחדת" כאשר היא חזרה:

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
6	מורה	את יודעת לעשות חיבור מספרים מכוונים? נגיד מינוס שלוש ועוד מינוס אחד
7	דנה	(*פוזלת הצדה*) נראה לי
8	מורה	בואי אני אזכיר לך את השיטה *(דנה משתעלת ונאנחת)* זאת השיטה שאני מתחילה אתה, עם החיצים (מצביעה על הדף) או.קי.?
9	דנה	*מכחכחת*
10	מורה	חיצים. שמאלה, זה מינוסים
11	דנה	*מהנהנת*
12	מורה	אני מתחילה באפס
13	דנה	אה מקבלים דף כזה? (*מצביעה על דף עם ישר המספרים*)
14	מורה	^כן^. (*דנה מהנהנת שוב, מבטה נודד, נעצר על דף העבודה של נדב*) אני מתחילה באפס ואז יש לי שלוש. התרגיל שלי הוא מינוס שלוש ועוד מינוס אחד. או.קי.? *(דנה פוזלת לעבר הדף שבו המורה מסמנת).*
15	דנה	או.קי. (*פוזלת לעבר נדב*)
16	מורה	ואני מתחילה באפס והולכת שלושה צעדים שמאלה. כי זה מינוס (*דנה מביטה הצדה ולמטה, לא מביטה לעבר מורה*)
17	דנה	מהנהנת, מבט לעבר החלל
המורה נותנת דוגמה נוספת של האופן שבו היא מחשבת תרגיל אחר: את (1+)+(3-) ואז מושיטה לדנה את דף העבודה		

במבט ראשון נראה כי בקטע הזה דנה ואנוכי עוקבות אחר שגרת אינטראקציה שכיחה מאוד בין מורה לתלמידה. בעוד המורה מסבירה כיצד יש לבצע את התרגיל, התלמידה מקשיבה ומהנהנת. אך במבט קרוב יותר נראה שלמעשה לא הייתה כאן שום אינטראקציה מתמטית, אפילו לא מעבר פשוט של מידע מתמטי מהמורה לתלמידה. לא רק אני זו שעשתה את כל החישובים וההסברים, דנה לא הקשיבה כלל, כפי שנראה ממבטה הנודד כלפי חבריה וכלפי החפצים שעל השולחן. בשום נקודת זמן מבטה של דנה לא היה מופנה אל עבר הנקודות על ישר המספרים שהצבעתי עליהן במהלך הסברי.

באותו זמן לא הייתי מודעת כלל לכך שדנה איננה קשובה אלי. זאת משום שדנה ככל הנראה הייתה מנוסה מאוד במעקב אחר היבט הזיהוי העצמי של שגרת האינטראקציה הזו (כולל הנהונים והמהומים במקומות המתאימים). אך שלא במפתיע, מיד לאחר שסיימתי את הסברי, דנה לא הצליחה לפתור אפילו את התרגיל הראשון בדף, אף שזה היה דומה להפליא לתרגיל שזה עתה הדגמתי. כך מיד לאחר שהיא הניחה מבטה על התרגיל, הצהירה דנה ש"זה קשה!" וביקשה שוב הסבר.

אמנם ייתכן שאפשר לייחס כמה מהקשיים של דנה להיעדר קשב ולכך שחלק מן הסברי המורה לא "נקלטו" אצלה מעולם. אך גם כאשר היא הייתה קשובה, עסקה דנה בעיקר בניסיון לגרום לי לייצר

עבורה הוראות מסוג "איך לעשות" את התרגילים. הנה למשל שאלותיה שהופנו כלפיי רק דקות ספורות לאחר הקטע הקודם:

תור דיבור	דובר	מה נאמר (*מה נעשה*)
.1	דנה	אה אה תקשיבי (קמה מהכסא, ניגשת אל המורה)
.2		**מה אני עושה** במצב כזה, שיש לי זה ועוד זה כאילו (מצביעה על ((-1)+(+4)) כאן, אני כותבת את הכי גדול?
.3	מורה	קודם כל זה וזה מצוין (*מסמנת V על תרגיל קודם שדנה פתרה נכון*). מה את שואלת? על פלוס ארבע ועוד מינוס אחד?
.4	דנה	כאילו **מה אני עושה** את ההכי קרוב לאפס, דוגמה פלוס שלוש, מינוס שלוש.
.5	מורה	את מתחילה, תראי. **את עושה**.. אה עם החיצים (*מצביעה עם העיפרון על הדף*) פלוס ארבע זה ימינה, נכון? (מצביעה ימינה) אחד, שתיים.. זה אפס (מצביעה על האפס). אחד שתיים שלוש ארבע. הגעתי לארבע? עכשיו מה אני צריכה להוסיף? מינוס אחד. שזה חץ אחד (מסמנת עם האגודל שמאלה). חץ אחד שמאלה. או.קי.? הגעתי לשלוש.
.6	דנה	(בחוסר סבלנות) נו אז, לא זה אין לי בעיה עם זה. פשוט מינוס או פלוס?
.7	מורה	נו מה זה פה? (מצביעה על (+3) על הציר) פלוס
.8	דנה	אה >פלוס פלוס< (דנה לוקחת את הדף וחוזרת למקום)

כפי שנראה מתגובתה חסרת הסבלנות של דנה [6], הייתה זו **אני**, עכשיו, שלא עקבה אחר שגרת האינטארקציה שהיא ציפתה לה. ההסברים המפורטים שלי כיצד לבצע את החישוב באמצעות חיצים ימניים ושמאליים נראו בעיניה מיותרים. היא התעניינה אך ורק בחיבור הסינטקטי שבין סימן ה+ וסימן ה- אל ספרה נתונה. אם כך, דנה ייצרה שגרת אינטראקציה בינינו מהסוג:

יוזמה: התלמידה שואלת **כיצד לעשות** את התרגיל המתמטי.

תשובה: המורה עונה (רצוי בקצרה ושימוש אך ורק בסימנים המתמטיים ובדרך שאפשר לתפעל אותם).

ניתוח האינטראקציות הרבות ביני ובין דנה לאחר קטע זה הראה כי במהלך השיעור ובמהלך השיעורים הבאים שלאחריו עקבנו אחר השגרה הריטואלית הזו באדיקות. הקלות והמהירות שבהן התכנסנו לאינטראקציית הנכון/לא נכון הזו ניתנת להסבר מתוך שגרות האינטראקציה המוקדמות בינינו **שלא** היו מוצלחות כל כך. בניגוד אליהן (כגון בריאיון הראשון או בקטע "בעיית הסולמות"), כאן התוכן המתמטי היה מוסכם פחות או יותר (שכן אני זו שביצעתי את רובו), ואילו היבט הזיהוי שבאינטראקציות היה תואם לציפיות. בעוד דנה זוהתה על-ידי כ"לא יודעת" וכ"זקוקה להדרכה", זיהתה דנה את עצמה כ"לא יודעת אך מעוניינת ללמוד" וכ"זקוקה להוראות". אם כן, הזיהוי בגוף ראשון והזיהוי בגוף שלישי השלימו זה את זה ולא סתרו זה את זה בשום דרך.

אך למרות ההרמוניה סוג כזה של אינטראקציות ריטואליות של למידה והוראה נשא בחובו מעט מאוד פוטנציאל עבור דנה לאיזושהי למידה משמעותית. כך לא ניתנה לה שום אפשרות להסביר כיצד **היא** מממשת את האובייקטים המתמטיים המדוברים, באילו שגרות **היא** הייתה משתמשת כדי לפתור בעיות

מסוימות, ומדוע אלו יכולות להיות מתאימות או לא מתאימות לנדרש. בקיצור, לא ניתנה לה שום הזדמנות *לשאת ולתת* באשר לדרך שבה היא רואה עצמים או סימנים מתמטיים. משום כך גם לא ניתנה לה אפשרות לשנות ולהתאים את השגרות המשונות שהיא פיתחה במהלך השנים אל אלו המקובלות בשיח המתמטי של המורה ושל כלל החברה המתמטית.

כיצד נוצרה סיטואציה מצערת זו ומדוע לא הייתי אני המורה מודעת אליה עד לאחר זמן רב מתום הקורס? אחרי הכול בעת הוראת הקורס כבר הייתי מודעת היטב ליתרונות שבשיח מתמטי ולאופנים שבהם כיתות "עשירות בשיח" יכולות לקדם למידה משמעותית (Boaler, 1997; Lampert, 1990). מענה אחד קל יחסית יכול להימצא במגבלות הקשות שהכתיבה תכנית הלימודים. מטבע הדברים, תכנית זו הצריכה כישורי שיח מתמטי משוכללים רבים מאלו שהיו בידי דנה, ואף לא אפשרה זמן מספיק כדי להשלים לעומק את החסר לה. אך תשובה זו איננה מספקת. כפי שנראה בקטעים המופיעים לעיל ובקטעים רבים אחרים מתוך הקלטות הקורס, החמצתי שוב ושוב הזדמנויות לשמוע את חשיבתה המתמטית של דנה או לעודד אותה להשמיע את טיעוניה, ועניין זה לא נגע כלל לתכנית הלימודים. ניתוח הקטעים שלהלן מעלה את ההשערה כי הסטייה של דנה משגרות האינטראקציה המצופות על-ידי ל"דיון מתמטי מקובל" גרמו לכך שאזהה אותה כבלתי מסוגלת להשתתף בשיח מסוג זה. זיהוי זה עם שאיפתה של דנה לזהות את עצמה בכל מחיר כ"מסוגלת" או "מבינה" גרמו לכך ששתינו נתכנס לעבר שגרות מוכרות יותר של "הוראה ישירה".

סיכום והשלכות - המנגנונים שהנציחו כישלון במקרה של דנה

בזמן הקורס נדמה היה שמי שנמצא לצד דנה עושה ככל יכולתו כדי לעזור לה להתקדם במתמטיקה. דנה עצמה הביעה נכונות ורצון, היא קיבלה עוד עזרה ממורתה בבית הספר, מבחנים "מותאמים" ליכולותיה וכמובן הוראה פרטנית בקבוצה שבהדרכתי. אך למרות זאת דבר לא השתפר בהישגיה המתמטיים. נהפוך הוא, הפער בין יכולותיה ובין המצופה ממנה רק הלך וגדל. בריאיון המתמטי בסוף הקורס נכשלה דנה בפתרון כמעט כל התרגילים, כולל הפשוטים ביותר. זאת אף שתרגילים אלו נלקחו מחומרים שהיא תרגלה שוב ושוב במהלך הקורס. כישלון זה לאחר הוראה אינטנסיבית כל כך ודאי היה משמש דוגמה מצוינת לתלמידה "לקוית למידה" בעיני אלו הרואים לקות למידה ככזו שמוכחת על-ידי "היעדר תגובה להתערבות".

אולם הניתוח שערכתי במחקר זה מעלה כי מסקנה כזו תהיה פזיזה בשל היעדר הזדמנויות אמתיות שהיו לדנה במהלך ה"התערבות" הזו להשתתפות מקדמת בשיח מתמטי. בלא הזדמנויות אלו, הוגבלה דנה אך ורק למעקב ריטואלי אחר הוראות, שגם אם לעתים הוא שלב ראשוני הכרחי בלמידה (ראו Sfard & Lavie, 2005), הרי הוא חייב לעבור בסופו של דבר לשלב החקירה שבו התלמידה מפנימה את השגרות והנרטיבים המתמטיים והופכת אותם לשלה. ככל הנראה, דנה לא השתתפה בשיח חקירתי על עצמים מתמטיים מאז השלבים הראשונים מאוד של לימודיה בבית הספר. היא לא הפנימה את עקרונות המבנה

העשרוני, את רוטינות הכפל והחילוק ובוודאי שלא העצימה שברים פשוטים. לפיכך לא היה לה שום סיכוי להשתתף בשיח מתמטי על דרך חקירה כפי שנדרש בכיתה ז'. במקום זאת היא פיתחה דרכים *אלטרנטיביות* להשתתפות בשיח שיאפשרו לה לזהות את עצמה כמשתתפת, ולו השתתפות חלקית.

במובן זה תלמיד לעולם לא נשאר באותו המקום. *משהו* תמיד נלמד, בין שזה מה שהמורה מעוניין שיילמד ובין לאו. במקרה של דנה, הדבר העיקרי שנלמד היה, ככל הנראה, כיצד לזהות את עצמה **כאילו** היא משתתפת בשיח. כלומר היא ניסתה ככל יכולתה לעקוב אחר שגרות האינטראקציה בכיתה, לפחות בהיבט הזיהוי העצמי. ניסיון זה נחל כישלון חרוץ במהלך הקורס והביא בסופו של דבר לידי כך שזיהיתי את דנה כמתקשה עד כדי כך שהיא כמעט "חסרת סיכוי" להתקדמות.

מדוע הפרה דנה בקביעות שכזו את שגרות האינטראקציה המצופות על-ידי ? אחרי הכול מתוך הראיונות עם מורתה, עם היועצת ועם אמה עלה כי היא לא סבלה מקשיי תקשורת, קשיים חברתיים או מבעיות למידה קשות כל כך במקצועות אחרים. התשובה לכך נעוצה ככל הנראה בפער בין הכלים המתמטיים שהיו ברשותה של דנה ובין אלו המצופים עבור השתתפות בשיח. פער זה היה כה גדול עד שהוא לא אפשר לדנה אפילו להעריך אם היא טועה או לא ובאיזה מרחק היא נמצאת ממה שעליה לדעת ולהבין. כלומר לא הייתה לה אפשרות **למקם** את עצמה בשיח.

המקרה של דנה קיצוני למדי. בדרך כלל תלמידים החווים קשיים במתמטיקה אינם מגיעים לפער גדול כל כך ובלתי אפשרי לגישור בין כישוריהם המתמטיים לכישורים המצופים מבני גילם. אך דווקא משום כך המקרה הזה חשוב. ראשית, משום שהמוזרות בהתנהגותה של דנה חשפה מנגנונים של אינטראקציה בין מורה לתלמיד שבדרך כלל שגורים כל כך עד שהם הופכים לשקופים לחלוטין הן למשתתף והן לצופה מהצד. רק הפרות של מנגנונים כאלו יכולות לחשוף אותם, והפרות כאלו אפשר למצוא למכביר אצל דנה. שנית, מקרה זה מראה כיצד אינטראקציות למידה-הוראה אינן בשליטתו הבלעדית של המורה (ראו גם Lefstein, 2008). לבסוף, מקרה זה מראה כי גם במקרים קיצוניים של מה שרבים היו מגדירים כ"לקות למידה מתמטית", עדיין ייתכן ש"האשמה" איננה צריכה להיות מוטלת על כתפי התלמיד (או על הנוירולוגיה של מוחו) בוודאי שלא בלבדית. במקום זאת יש לבדוק היטב מה הם המנגנונים החברתיים והרגשיים שהביאו אותו לידי כישלון, משום שבסופו של דבר אלו הם הדברים שאפשר לשנותם.

מעל הכול מרחפת השאלה האם שינוי חד ועקבי בדרכי ההוראה שאליהן הורגלה דנה בלמידת מתמטיקה היה משנה את מהלך ההידרדרות של הישגיה במתמטיקה. לא יכולנו לענות על שאלה זו באמצעות חקר המקרה הזה. רק מחקר עתידי שבו ייעשה שינוי של דפוסי האינטראקציה במהלך הוראה של תלמידים המוגדרים כ"מתקשים", יאפשר להשיב עליה.

השלכות תאורטיות

ממצאי המחקר הנוכחי התאפשרו בעיקר הודות לייחודיות שבשיטת המחקר התקשורתית. שיטה זו מאפשרת לחקור היבטים רגשיים וחברתיים של **תהליך** הלמידה ולא רק של הלומד או המורה לפני

כניסתם לכיתה (כפי שמתאפשר משאלונים וראיונות). כמו כן היא מאפשרת לחקור בו בזמן תהליכים שנחקרים לרוב בכלים מגוונים (כלים לחקר רגשות לעומת כלים לחקר קוגניציה), וזאת מתוך שימוש במערכת מושגית מאוחדת. כמובן ששיטת הניתוח הזו איננה חפה ממגבלות. מגבלה ברורה אחת היא היכולת ליישם את השיטה על מקרים רבים שיאפשרו את הכללת הממצאים מעבר למקרה הייחודי של דנה. יש צורך בעוד מחקרים שיבדקו את הקשר שבין השתתפות ריטואלית בלמידת מתמטיקה להיווצרות קשיים במקצוע, וגם את הקשר שבין הדרך שבה מורים מזהים את תלמידיהם להזדמנויות הלמידה שהם מציגים בפניהם.

אך למרות מגבלות הייחוד של חקר המקרה של דנה, תוצאותיו מדגישות את הצורך להתחשב לא רק באלמנטים הקוגניטיביים שבלמידת מתמטיקה והוראתה, אלא גם באלמנטים החברתיים והרגשיים. רק באמצעות מבט כולל זה נוכל לראות שקשיים המוצגים לרוב כקוגניטיביים (ולעתים אף מולדים) יכולים להיות תוצר של תהליכים בין-אישיים ורגשיים בכיתה ובסביבה של התלמיד.

היעדר ההתקדמות של דנה למרות הוראה "מותאמת" ואינטנסיבית בעלת מאפיינים ברורים של "הוראה ישירה" (direct instruction) מעלה תהיות באשר להמלצות המושמעות לעתים קרובות למורים המלמדים תלמידים "לקויי למידה". בין המלצות אלה פישוט ההוראות, מתן דפי עבודה מותאמים ושימוש בעזרי זיכרון רבים (menemonics) כדי לסייע לתלמיד לשנן נוסחאות ופרוצדורות לפתרון. אמנם ייתכן שדרכי הוראה אלו אפקטיביות עשויות לסייע לתלמידים בעלי הישגים נמוכים להצליח במבחנים סטנדרטיים. אך עם זה ייתכן שגם שדרכי ההוראה הללו פותרות את הבעיה פתרון שטחי בלבד (אם בכלל), שכן הן אינן מאפשרות לתלמיד להתנסות בלמידה חקירתית בפרט ובהשתתפות עצמאית בשיח מתמטי בכלל. מעל הכול, המסר החשוב ביותר שיש לקבל מהמקרה של דנה הוא ש"קושי" ו"לקות" במתמטיקה יכולים להיות מיוצרים בתהליך דו-צדדי שבו למורה יש תפקיד לא פחות חשוב מזה של התלמיד.

התבוננות-על - כיצד שיטת המחקר התקשורתית שינתה את הזהות שרקמתי לדנה

מאמר זה לא היה יכול להסתיים ללא מילה של רפלקציה על התהליך שאני, מורתה של דנה, חוויתי באמצעות חקר המקרה הנוכחי. אין ספק שהתהליך לא היה נעים במיוחד. ההבנה שֶׁלְּךָ, בהיותך מורה, יש אחריות לכישלון תלמידתך איננה פשוטה לקבלה. אך הבנה זו היא בדיוק המאפשרת למורה לשנות ולשפר את דרכי ההוראה שלו או שלה. מה היה בה, בשיטת חקר השיח, שאִפשר את השינוי הזה? ליתר דיוק, מה היה בה שאפשר את השינוי המהותי בדרך שבה זיהיתי את דנה, וביכולת שלי לראות את אחריותי לגיבוש הזהות הזו?

ראשית, עלי לומר שהשינוי לא חל במהירות או בקלות. פעמים רבות קראתי, תמללתי וניתחתי את קטעי השיח של דנה לפני שהתחוור לפניי עד כמה הדרך שבה אני מזהה אותה 'צובעת' את הדרך שבה אני מפרשת את התמלול. אך החוזק שבצורך להפריד בין *התוכן המתמטי* ובין התוכן *המזהה* שבשיח הוא שהכריח אותי לראות, שלעתים קרובות טיעוניה המתמטיים של דנה לא היו כה מופרכים כפי שחשבתי

בתחילה. הם אמנם היו שונים מהשיח המתמטי שלי, אך היה בהם היגיון פנימי מסוים. כאשר הבנתי זאת יכולתי גם לראות שהביטול שלי וחוסר ההתעניינות שלי בדבריה נבעו לא *ממה* שדנה אמרה אלא *ממי שהיא הייתה* בעיניי, כלומר מהזהות שרקמתי לה. משום כך אני סבורה כי לכלי הניתוח המוצעים במאמר זה יש פוטנציאל רב ללמידה עצמית וגם להכשרה של מורים, ובלבד שהם יהיו מעוניינים ללמוד כיצד לשנות ולשפר את דרכי ההוראה שלהם בכיתה, אם נדרש.

רשימת מקורות

בן-יהודה, מ' (2003). **ניתוח שיח כדרך לחקירת תהליכי חשיבה חשבונית של תלמיד מתקשה** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת חיפה.

הד-מצויינים, ע' (2011). **היבטים רגשיים של למידת מתמטיקה: כיצד האינטראקציה בין הבניית זהות ועשייה מתמטית משפיעות על יעילות הלמידה** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת חיפה.

Andersson, A. (2011). *Engagement in education: Identity narratives and agency in the contexts of mathematics educatio*n (Unpublished doctoral dissertation). Aalborg University, Aalborg.

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(3), 176-247.

Bishop, J. P. (2012). "She's always been the smart one. I've always been the dumb one": Identities in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(1), 34-74.

Black, L. (2004). Differential participation in whole-class discussions and the construction of marginalised identities. *Journal of Educational Enquiry, 5*(1), 34-54.

Boaler, J. (1997). Reclaiming school mathematics: The girls fight back. *Gender and Education, 9*(3), 285-305.

Boaler, J., & Greeno, J. G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics education* (pp. 171-200). Westport, CT: Ablex.

Brubaker, R., & Cooper, F. (2000). Beyond "identity". *Theory and Society, 29*(1), 1-47.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455-468). New York: Psychology Press.

Cazden, C. B. (2001). *Classroom discourse: The language of teaching and learning* (2nd ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(1), 40-68.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. Educational Studies in Mathematics, 23, 99-122.

Davies, B., & Harré, R. (1990). Positioning: The discursive production of selves. *Journal for the Theory of Social Behaviour, 20*(1), 43-63.

Eisenmann, T., & Even, R. (2011). Enacted types of algebraic activity in different classes taught by the same teacher. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(4), 867-891.

Evans, J., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2006). Discursive positioning and emotion in school mathematics practices. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 209-226.

Fletcher, J. M., & Vaughn, S. (2009). Response to intervention: Preventing and remediating academic difficulties. *Child Development Perspectives, 3*(1), 30-37.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology, 97*(3), 493-513.

Geary, D. C., & Hoard, M., K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). New York: Psychology Press.

Gee, J. P. (2000-2001). Identity as an analytical lens for research in education. *Review of Research in Education, 25*(1), 99-125.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities, 30*(1), 20-33.

Goffman, E. (2005). *Interaction ritual: Essays in face-to-face behavior*. New Brunswick, N.J.: Aldine Transaction.

González, J. E. J., & Espínel, G. A. I. (1999). Is IQ-achievement discrepancy relevant in the definition of arithmetic learning disabilities? *Learning Disability Quarterly, 22*(4), 291-301.

Graven, M. (2011). Creating new mathematical stories: Exploring potential opportunities within maths clubs. In H. Venkat & A. Assien (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (pp. 161-170). Johannesburg: AMESA.

Harré, R., & van Langenhove, L. (Eds.). (1999). *Positioning theory*. Oxford, UK: Blackwell.

Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom – Learning mathematics as interplay between mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 128-145.

Ingram, N. (2011). *Affect and identity: The mathematical journeys of adolescents* (Unpublished doctoral dissertation). University of Otago, Dunedin.

Jones, E. D., Wilson, R., & Bhojwani, S. (1997). Mathematics instruction for secondary students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30*(2), 151-163.

Lange, T. (2009). *Difficulties, meaning and marginalisation in mathematics learning as seen through children's eyes* (Unpublished doctoral dissertation). Aalborg University, Aalborg.

Leander, K. M. (2002). Locating Latanya: The situated production of identity artifacts in classroom interaction. *Research in the Teaching of English, 37*(2), 198-250.

Lefstein, A. (2008). Changing teacher practice through the National Literacy Strategy: A micro-Interactional perspective. *American Journal of Education Research, 45*(3), 701-737.

Linchevski, L., & Kutscher, B. (1998). Tell me with whom you're learning, and I'll tell you how much you've learned: Mixed-ability versus same-ability grouping in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 533-554.

Mazzocco, M. M. M., & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia, 53*(1), 218-253.

McCall, G. J., & Simmons, J. L. (1966). *Identities and interactions*. New York: The Free Press.

McDermott, R. P. (1993). The acquisition of a child by a learning disability. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (pp. 269-305). Cambridge: Cambridge University Press.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom*. Cambridge: Harvard University Press.

Montague, M. (2007). Self-regulation and mathematics instruction. *Learning Disabilities Research and Practice, 22*(1), 75-83.

Nasir, N. S. (2002). Identity, goals, and learning: Mathematics in cultural practice. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(2-3), 213-247.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? – Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction, 23*(3), 237-309.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher, 34*(4), 14-22.

Shalev, R. S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M., Badichi, N., Friedlander, Y., & Gross-Tsur, V. (2001). Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities, 34*(1), 59-65.

Solomon, Y. (2007). Experiencing mathematics classes: Ability grouping, gender and the selective development of participative identities. *International Journal of Educational Research, 46*(1-2), 8-19.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 275-298.

Wood, M. B., & Kalinec, C. A. (2012). Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 109-127.

Wortham, S. (2006). *Learning identity: The joint emergence of social identification and academic learning*. New York: Cambridge University Press.



עינת הד-מצויינים

ד"ר עינת הד-מצויינים היא חברת סגל בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. מחקריה עוסקים בתחום ההיבטים הרגשיים והחברתיים של למידת מתמטיקה עם דגש בפיתוח זהות מתמטית, אינטראקציות בין-אישיות בלמידה והשפעות חברתיות ותרבותיות על הלמידה. כמו כן הד-מצויינים עוסקת בחקר ובפיתוח תכניות להכשרת מורים לצורך קיום שיח מתמטי פורה בכיתה ובקשר שבין מחקר לפרקטיקה בשדה החינוך.

קריאת טקסטים מתמטיים בתיכון

אביטל אלבוים-כהן, מכון ויצמן למדע

תקציר

מאמר זה מציג מחקר שמושאו הוראה ולמידה של קריאת טקסטים מתמטיים.[1] אחד מהקשיים שרובצים לפתחה של מערכת החינוך, ובתוכה החינוך המתמטי, הוא היווצרותה של תלות בין תלמיד למורה, אשר מצמצמת מאוד את מרחב ההזדמנויות שבהן התלמיד יכול לפעול וליזום. לכאורה נראה כי העיסוק של תלמידי תיכון בקריאת טקסטים מתמטיים יכול להרחיב ולהעמיק את הידע והמיומנויות המתמטיים שלהם. כמו כן מתוך התבוננות ראשונית עולה כי בפיתוח של מיומנויות קריאה של טקסטים מתמטיים, ובעצם העיסוק בהם, יש דרך לקדם לומד אוטונומי ופעיל שמשתתף בעשייה מתמטית מגוונת מהמקובל. על סמך האמור לעיל יוצג להלן מחקר מסוג מחקר עיצוב (design experiment) שמטרותיו הן לבחון את היתכנותה של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים בכיתות העליונות בתיכון, הלומדות מתמטיקה ברמות הגבוהות לאפיין את ההוראה והלמידה שנגזרות ממנה.

במחקר אני מאמצת השקפת עולם קומוגניטיבית שרואה במתמטיקה על הקשריה המגוונים סוג של שיח. השקפת עולם זו משמשת אותי, בהיותי חוקרת ומורה, בשני תפקידים מרכזיים: כחוקרת היא משמשת מסגרת-על תאורטית שממנה נגזרים השפה וכללי השיח שבאמצעותם ועל פיהם נערך המחקר. כמורה, ההתייחסות של הפרדיגמה הקומוגניטיבית ללמידה מספקת מוטיבציה לעשייה חינוכית שמטפחת כישורים תקשורתיים בכלל ומיומנויות קריאה בפרט.

מבוא

בבסיסה של כל עשייה חינוכית עומדת הנחת היסוד שהמציאות שתיגזר ממנה תהיה טובה יותר מהמציאות שקדמה לה. אני רואה במחקר בחינוך מתמטי כלי שמצד אחד בוחן את האמירה הזו ומצד אחר מעניק לה משמעות, כאשר העשייה בתחום החינוך המתמטי (Sfard, 2005). במאמר זה אני מבקשת לבחון את ההנחה לעיל, ואולי להעניק לה משמעות בזעיר אנפין, כאשר מדובר בעשייה חינוכית שהיא הוראה של קריאת טקסטים מתמטיים. ההתנסות המתוארת להלן היא חלק ממחקר עיצוב שבו כותבת המאמר היא שמעצבת את תכנית ההוראה, מוציאה אותה אל הפועל וחוקרת אותה.[2]

1. באומרי "טקסטים מתמטיים" אני מתכוונת למאמרי העשרה שתוכנם מתמטי, והם מיועדים לתלמידים מתעניינים ולמורים.
2. במאמר אזכיר את המורה בגוף שלישי כדי להבחין הבחנה חלקית לפחות בין התפקידים השונים.

לא יהיה זה מופרך לטעון כי הוראת מתמטיקה בבית ספר תיכון ישראלי (בחטיבה העליונה) מטפחת בעיקר חשיבה אלגוריתמית ושיטות לפתרון בעיות, וכי יש הסכמה שהשלמה מוצלחת של למידה כזאת חייבת להתבטא ביכולת לפתור בעיות מסוג מסוים. מכאן שהעשייה הכיתתית המקובלת מטפחת תלמיד, שבדרך כלל משתף פעולה עם הפעולות שהמורה יוזמת כדי לשפר את סיכויו להצליח בבחינות שבהן יידרש לפתור בעיות דומות. הפעלת תלמידים בקריאה של טקסטים מתמטיים היא ניסיון לפרוץ את התבנית שתוארה לעיל. מטרת המאמר היא לתת טעימה ממה שסוג זה של עשייה חינוכית מאפשר.

אילו טקסטים?

הטקסטים שבחרתי ללמד את קריאתם הם בדרך כלל מאמרי העשרה שמיועדים למורים ולתלמידים מתעניינים ומציגים פנינה מתמטית. פנינה מתמטית היא משהו שאנחנו, אנשי הקהילה שעוסקת במתמטיקה ובחינוך מתמטי, רואים בו יופי: הוכחה לא שגרתית של משפט, שילוב ייצוגים מאיר עיניים, פתרון מקורי של בעיה וכדומה. כמו כן נבחרו הטקסטים כך שיתאימו לכישורים ולידע של תלמידי הכיתות העליונות בתיכון במסלול של חמש יחידות במערכת החינוך הממלכתית (אין שלילה עקרונית של הרחבת הבחירה למסלולי לימוד שונים). חשוב לציין כי אלה טקסטים מתמטיים ולא טקסטים על מתמטיקה, כלומר הם מציגים איזושהי עשייה מתמטית. הבחירה בהוראה של קריאת טקסטים מתמטיים היא בחירה אפשרית כאשר עומדות לנגד עינינו המטרות של הרחבת עולמם המתמטי של התלמידים, טיפוח לומד אוטונומי ובו בזמן שכלול המיומנויות התקשורתיות שלהם.[3] כדי לקבוע האם הבחירה בהוראה של קריאת טקסטים מתמטיים אכן נושאת פרי ויוצרת מציאות רצויה, עליי לבחון את המציאות הזו בכלים של מחקר, ולשם כך עליי לבחור מסגרת תאורטית שתקבע את הכללים ותיתן משמעות למילים שבאמצעותן אוכל להאיר ולבחון את מה שהתרחש.

מסגרת תאורטית - למה קומוגניציה?

אם נלך בעקבות תומס קון בספרו "המבנה של מהפכות מדעיות" (Kuhn, 1962) ונצא מתוך הנחה כי למחקר בחינוך מתמטי יש מאפיינים מסוימים של מדע, הרי שפרדיגמה מחקרית תאורטית היא תמונת עולם שמאומצת על-ידי קהילה של חוקרים בתחום דעת מסוים. זאת כדי לקבוע את משמעותם של מושגי יסוד, את סדר היום המחקרי (מהן שאלות מעניינות) ואת כללי השיח המקובלים בקהילה. לכן קשה להסביר את הבחירה במסגרת-על תאורטית למחקר בחינוך. הבחירה לא יכולה להיגזר באופן רציונלי, שכן המסגרת הנבחרת היא שקובעת (במובן מסוים) הן את הנחות היסוד והן את הגדרת הרציונליות. מקובל לחשוב כי קהילת החוקרים בחינוך מתמטי מתנהלת היום ללא פרדיגמה שלטת (Niss, 2007; Sfard, 2005) וכל חוקר או קבוצת חוקרים מאמצים מסגרת תאורטית אד-הוק שמשרתת אותם במחקר מסוים לפי קריטריונים מעורפלים של פרודוקטיביות.

3. חשוב לציין כי הוראה של קריאת הטקסטים לא נועדה ללמד פרקי מתמטיקה חדשים. אין הכוונה לאמן תלמידים בלימוד עצמאי מספרי לימוד, אלא לחשוף אותם לעולם מתמטי רחב ויפה שנגזר מהמתמטיקה שכבר נלמדה בבית הספר.

הבחירה בקומוגניציה (Sfard, 2008) כמסגרת תאורטית נולדה מתוך צורך עמוק לחיות בתוך עולם מושגי מוגדר היטב. בחרתי בקומוגניציה בעקבות האמונה שחשוב כי מושגי יסוד בתחום המחקר שלי כמו "חשיבה" ו"למידה" יהיו מוגדרים היטב בהגדרה אופרציונלית שאינה משתמעת לשתי פנים. וכן האמונה שתקשורת בין לומדים היא דבר חשוב. הצלילה לתוך התאוריה הקומוגניטיבית גילתה לי כי זו תאוריה חובקת עולם שמאירה את המציאות באור חדש ומציעה לחוקרים כלי עבודה שנראים מבטיחים.

הפרדיגמה הקומוגניטיבית נשענת על ההנחה הוויגוצקיאנית שכל מיומנות אנושית היא תוצר של הפנמת פעולות בין-אישיות שנטועות בהתפתחות הכרונולוגית של התרבות האנושית. לדוגמה, ילד משמיע קולות בתוך הקהילה שהוא חלק ממנה. המבוגרים בקהילה מגיבים לקולות הללו וכך לאט-לאט הקולות משתנים והופכים לדיבור משמעותי. לפי הנחה זו ובאותה דרך, גם מה שאנחנו מכנים חשיבה הוא מימוש אישי של עשייה קולקטיבית שהיא תקשורת בין-אישית. לכן המונח "קומוגניציה" מטרתו להזכיר לנו שוב ושוב כי תקשורת (communication) וחשיבה (cognition) הן ייצוגים שונים של אותה מהות עצמה. לחשוב פירושו לשוחח או לקיים שיח עם עצמך.

ההנחה נוגעת לכל התפתחות אנושית ולפיכך היא מזהה למידה כתהליך שממומש על-ידי השתתפות בשיח, כאשר שיח הוא אירוע תקשורת (או אוסף של אירועים כאלה)[4] שמתנהל לפי דפוסים ייחודיים לקהילה מסוימת. לדוגמה שיח של קהילת חוקרים בחינוך מתמטי, או שיח של תלמידים הלומדים לקרוא בכיתה א' וכדומה. כל שיח מתנהל על-פי כללים המקובלים בקהילה שנקבעים קונטינגנטית[5] לאורך התפתחותו ההיסטורית. סוגי שיח שונים ומגוונים מובחנים זה מזה בארבעה מאפיינים: מילות מפתח והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שְגרות (רוטינות), נרטיבים מקובלים והקשרים ביניהם. להלן אבאר בקצרה את משמעות מאפייני השיח על-פי ספרד (Sfard, 2008):

מילות מפתח והשימוש בהן: מילים שמשמשות את המשתתפים בשיח בדרך ייחודית. למשל, למילה "שיקוף" בשיח מתמטי יכולים להיות שימושים אחרים בשיח יומיומי.

מתווכים ויזואליים: מימוש ויזואלי של אובייקט בשיח (למשל בשיח מתמטי יש כתיב אלגברי, גרפים, סרטוטים וכיוצא באלה).

שְגרות (רוטינות): סדרות של פעולות שחוזרות על עצמן במצבים מסוימים בשיח. שגרה מאופיינת בתנאי התחלה, בתנאי סיום ובפרוצדורה שיוצאת לפועל.

נרטיבים מקובלים: אמירות שהן תיאור של אובייקטים או יחסים בין אובייקטים שרואים אותם בשיח כאמתיים.

על-פי הפרדיגמה הקומוגניטיבית, התבנית הסטנדרטית של למידה באה לידי ביטוי כאשר אדם טירון שעושה את צעדיו הראשונים בתוך קהילת שיח על-ידי חיקוי מושכל של הסובבים אותו, הופך לחבר

4. בשלב זה איני מוצאת לנכון להבחין בין אירוע יחיד לאוסף של אירועים.
5. הכוונה לקביעה שאינה הכרחית, שהרי יש ממד מקרי בתהליך יצירתם של כללי השיח.

בקהילה זו ששותף לשיח ותורם להתפתחותו. אם כך, אנחנו כחוקרים יכולים לזהות למידה על-ידי זיהוי של שינוי בשיח של הלומד שיכול להתבטא בשינויים בכל ארבעת המאפיינים של השיח שצוינו לעיל. כמו כן השינוי בשיח יכול להתרחש בשתי רמות: ברמת האובייקט הדיסקורסיבי וברמת-על שרואה בשיח כולו אובייקט. הלמידה ברמת האובייקט מרחיבה את השיח הקיים באמצעות כללי השיח הקיימים, ואילו למידה ברמת-על רואה בשיח וכלליו אובייקט ועוסקת בשינוי של כללי השיח עצמם. כללי השיח יכולים ללבוש צורות שונות, הם יכולים לעסוק במאפיינים של שיח מתמטי מסוים: למשל בשיח על מספרים טבעיים (או אי-שליליים) מכירים במספר כמשהו שמייצג כמות. כמו כן כללי שיח יכולים להגדיר את הדרך שבה מקובל להציג טענות או להצדיקן (למשל באמצעות המחשה או הוכחה). כללי שיח יכולים להיות גלובליים ולייצג את מה שמאחד לומדי מתמטיקה ומתמטיקאים ברחבי העולם, והם יכולים להיות מקומיים שמאפיינים קבוצת לומדי מתמטיקה במקום ובזמן מסוימים. לפיכך למידה ברמת-על יכולה לכלול סוגים מגוונים החל בהכרת אובייקטים מתמטיים שאינם מוכרים ושלא יכולים להתפתח מתוך השיח המתמטי הקיים, וכלה בהכרת דפוסים חדשים של תקשורת בין משתתפים בשיח. בכל המקרים של למידה ברמת-על, מהלכיה מונעים על-ידי כשל תקשורתי (קונפליקט קומוגניטיבי) שנגזר מחוסר תמימות דעים, שאינו בהכרח מודע, בין המשתתפים בשיח על עצמיו וכלליו. להבדיל מלמידה ברמת האובייקט שיכולה להתקיים קיום חקרני-עצמאי מתוך שימוש בכללי שיח מוכרים ומוסכמים כדי להרחיב ולפתח שיח קיים, הרי למידה ברמת-על יכולה להתממש רק בנוכחות מורה או מומחה, ורק אם מתקיימים תנאים מסוימים שמשמשים הסכם הוראה-למידה בין הטירונים ובין מי שמוביל את השינוי בכללי השיח (Sfard, 2015).

הפרדיגמה הקומוגניטיבית שהיא בעיקרה תאוריה של למידה מספקת גם אמירה נורמטיבית באשר לעקרונות שעלינו ללמד בעזרתם (ליזום שינוי בשיח של תלמידים), זאת בנוסף להיותה מסגרת-על תאורטית שמגדירה את השפה שבה אשתמש במחקר. ראשית, אם חשיבה היא סוג של תקשורת (של החושב עם עצמו), ואם נניח כי אחת המטרות של חינוך מתמטי היא ללמד תלמידים לחשוב כפי שמקובל לחשוב בקהילת העוסקים במתמטיקה, הרי מתבקש שמורים ינהלו קהילות לומדות מתוך טיפוח אינטנסיבי של כישורים תקשורתיים של התלמידים. כמו כן ההבחנה בין סוגים שונים של שינוי שיח (ברמת האובייקט וברמת-על) שתוארה לעיל בקצרה, מכתיבה סוגים שונים של הוראה. הוראה ברמת האובייקט מתאפשרת כאשר כללי השיח מוכרים לתלמידים ואלה יכולים להתנהל על פיהם באופן עצמאי. כאן תרומת המורה לעיצוב השיח של תלמידיה תהיה הקפדה על שימוש נאות בכללי השיח המוכרים. לעומת זאת, הוראה ברמת-על שמקדמת שינוי בכללי השיח, דורשת מהמורה להוביל את תלמידיה צעד אחר צעד, תוך שהיא נשענת על תשתית של אמון בינה ובינם, למצב שבו הם עושים שימוש אוטונומי בכללי השיח החדשים (Ben-Zvi & Sfard, 2007).

חשוב להבחין בין שני סוגים של רוטינות שמשמשות להתפתחותו של שיח בכלל ושל השיח המתמטי הכיתתי בפרט. החקירה היא רוטינה שמטרתה ליצור נרטיבים מקובלים בקהילת השיח. בכיתה המורה יכולה ליצור מצב שבו תלמידים מעורבים בייצור נרטיבים על אובייקטים מתמטיים מתוך בירור תכונותיהם של האובייקטים באמצעות כללי שיח מוכרים. במצב זה אפשר לומר שהתלמידים מעורבים

בשיח בעל מאפיינים אקספלורטיביים. לעומת רוטינה של חקירה, הריטואל הוא רוטינה שמבצע טירון בקהילת שיח רק כדי לקבל חיזוקים מהחברים הוותיקים באותה קהילה. למשל, תלמיד יפעל באופן ריטואלי כדי לרצות את מורתו. השימוש בריטואל כחלק מתהליך של לימוד הוא הכרחי, שכן טירון שאינו בקיא בכלליו של השיח שהוא לומד, יכול לפעול בתוך השיח החדש בשלב הראשון רק באופן ריטואלי (Sfard & Lavie, 2005).

חזרה לטקסטים

לאור האמור לעיל, עליי לבאר למה הכוונה באמירה "ללמד קריאת טקסטים מתמטיים". בעיני רוחי אני רואה הרחבה של סוגי העשייה שמגדירים את השיח המתמטי הכיתתי. בסוף התהליך כאשר התלמידים יהיו מיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים, נראה כי תעמודנה לרשותם עוד אפשרויות לקיום למידה ברמת האובייקט. מכל מקום עד שנוכל להגיד שאכן הושלם התהליך, יש ללמוד פרקטיקה חדשה שמשנה את כללי השיח המקובלים בכיתת המתמטיקה, ומכאן שלמידת הפרקטיקה הזו היא למידה ברמת-על. נזכור כי לפי האמור לעיל, בלמידה כזו למורה יש תפקיד מכריע בהנחלת כללי השיח החדשים. תחילה עליה לרכוש את אמון התלמידים וללמדם לקיים את כללי השיח החדשים באופן ריטואלי כדי לרצות אותה (את המורה), ולאט לאט לחזות בתלמידיה שמאמצים את הכללים כחלק מהשיח של עצמם (למען עצמם).

כדי להבין מהי הפרקטיקה החדשה שאנו מבקשים ללמד, ערכתי מחקר מקדים שבחן את רוטינות הקריאה של קוראים מיומנים (השייכים לקהילות של קוראי טקסטים מתמטיים) כשהם קוראים טקסט מתמטי. חשיפת הפרקטיקות הללו אפשרה הן הצבת מטרות לקורס שמלמד קריאת טקסטים מתמטיים והן הכוונה לסוגי הכלים הפדגוגיים המתאימים להוראתו.

להלן אציין בקצרה את עיקרי הפעולות שקוראים מומחים נוקטים בקוראם טקסט מתמטי (Elbaum-Cohen & Arcavi, 2013):[6]

1. **תרומה עצמאית למהלך הקריאה** – הבעת התייחסות שהקורא "מביא מהבית" והיא משקפת את העדפותיו, תחומי העניין שלו והתרומה שהוא יכול היה לתת אילו כתב את הטקסט. אם נשתמש בשפה הקומוגניטיבית נאמר כי בניתוח קריאת מומחה נמצא ייצוג לשיח המתמטי של הקורא שקדם לשיח שנוצר עם קריאת הטקסט.
2. **פעולות שמשמשות שיח ברמת-על של הקורא עם עצמו מתוך קריאת הטקסט:**

- ניהול ובקרה של פעולות הקורא – כל מה שהקורא עושה כדי לשלוט בניתוב פעולותיו במהלך העבודה. הניהול והבקרה משפיעים על מצבי ההבנה שהקורא רואה בעצמו, ועם זה גם מושפעים מהם.

6. המחקר נערך בשפה שאינה קומוגניטיבית, והצגת ממצאיו תיעשה בגישה מעורבת.

- מתן ביטוי לחוסר הלימה בין השיח של הטקסט (כפי שהוא ניכר בפרשנות הקורא את הטקסט) ובין השיח של הקורא, או מתן ביטוי לחוסר יכולת ליצור פרשנות קוהרנטית למה שמיוצג בטקסט.
- ביצוע פעולות כדי ליישב את חוסר ההלימה לעיל (למשל, לקרוא מחדש פסקה לא ברורה, או לבדוק דוגמה פרטית שמדגימה טענה שמופיעה בטקסט ועוד).
- הסכמה עם הטקסט, מתן ביטוי לתחושת הבנה וציון בהירות של הטקסט.

3. **מתן ביטוי לממד אַפקטיבי** – הקורא חושף את רגשותיו באשר לטקסט ולתהליך הקריאה. לעתים אלה רגשות של תסכול ואכזבה בשל חוסר יכולת להתגבר על מכשלה, ולעתים אלה רגשות של סיפוק וקורת רוח על התמודדות מוצלחת עם מכשלה ואולי גם התמוגגות מיופי מתמטי.

מתוך האמור לעיל אפשר להתרשם כי מה שמאפיין קריאת מומחים הוא היכולת של הקורא לנהל עם עצמו שיח ברמת-על, ולכן נראה כי בשלב הראשון זו המיומנות העיקרית שעל המורה לטפח בבואה ללמד קריאה של טקסטים מתמטיים.

קיימת ספרות עשירה על אודות שילוב של קריאת מאמרים מדעיים בביולוגיה בתכנית הלימודים. מתוכה עולה כי קריאה של טקסטים מדעיים מסוג APL (Adapted Primary Literature) מטפחת אצל התלמידים מיומנויות של התאמה בין חלקים שונים של הטקסט, ומיומנויות של הענקת משמעות לחלקים מגוונים של הטקסט. כמו כן התלמידים מקבלים הזדמנות לבקר את המאמר וגם להתוודע ממקור ראשון לטבעה של העשייה המדעית (Falk & Yarden, 2009; Yarden, Brill, & Falk, 2001). התבוננות במשקפיים קומוגניטיביים על השיח שנוצר בכיתת לומדי הביולוגיה במהלך קריאה של טקסט מסוג APL תגלה כי התפתחות השיח היא בעיקר ברמת-על.

נשים לב כי בהקשר של קריאת טקסטים מתמטיים שיח ברמת-על יכול לשקף שלושה סוגים שונים של עשייה. ראשית, הקורא מנהל שיח (עם עצמו) ברמת-על על אודות הטקסט, שכן הטקסט מייצג שיח, והתייחסות לשיח כאל אובייקט כמוה כניהול שיח ברמת-על. לכן קיומו של שיח ברמת-על הוא חלק בלתי נפרד מתהליך הקריאה, שבסופו הקורא מייצר פרשנות קוהרנטית של הטקסט הנקרא. שנית, כדי שהקורא יוציא אל הפועל את השיח ברמת-על על אודות הטקסט, או כדי שהוא יוכל לייצר פרשנות קוהרנטית של הטקסט, נהוגים אצל מומחים סוגים שונים של פעולות אשר מסייעות בתהליך הקריאה ומנתבות אותה. הפעולות הללו הן אוסף של רוטינות שאותן מפעילים הקוראים במהלך הקריאה. למשל, עצירה בסוף קטע וניסיון לשחזר אותו; ניסיון לנבא מה יהיה המשך הטקסט; בדיקת דוגמה פרטית כדי ליצור פרשנות קוהרנטית של עיקרון גלובלי או להפך; זיהוי טיעון גלובלי מתוך אוסף של פרטים; קבלת החלטות מתי לעצור ולחזור על קריאה של קטע ומתי להמשיך ולהמתין שהתשובה תגיע בהמשך הטקסט וכן הלאה. עבור המומחים שמיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים הפעולות הללו הן רוטינות שמגדירות את כללי השיח. כדי לאפשר שיח שייצור בסופו של דבר פרשנות קוהרנטית של הטקסט הנקרא, כל מומחה יודע מתי לפעול ואיך. לעומת זאת, הרוטינות הללו אינן מוכרות לתלמידים שהם בבחינת טירונים בקריאת טקסטים. לכן ללמד תלמידים לקרוא טקסטים מתמטיים, פירושו לשנות את השיח שלהם, כך

שאותן רוטינות ששגורות אצל המומחים תהיינה שגורות גם אצלם, ותשמשנה עבורם את כללי השיח בקריאת טקסטים מתמטיים. הדוגמה השלישית והאחרונה שמשקפת שיח ברמת-על בהקשר של קריאת טקסטים מתמטיים נוגעת לשאלה "מהי פרשנות קוהרנטית?". הקביעה מהי פרשנות קוהרנטית של טקסט מתמטי ומהי הגמישות הלגיטימית בקביעה זו, גם הן נשענות על כללי השיח המקובלים בקהילת האנשים שמיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים. במחקר זה אתייחס לכללים אלו כאל מובנים מאליהם.

איך מלמדים ניהול של שיח ברמת-על? נקודת המבט הקומוגניטיבית מציעה בניית שיתוף פעולה בהסכמה בין תלמידים ובין מורה שמוליכה אותם צעד אחר צעד. איך פורטים זאת לפרטים? אין זה עיקר המאמר, ולכן אציין כאן בקצרה כי קיבלתי את ההשראה למלאכת ההוראה ולעיצוב הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים מתוך עשייה של עמיתים שלימדו סוגים שונים של פרקטיקות שבתוכן מובנה ניהול של שיח ברמת-על. לדוגמה, הוראת פתרון בעיות מתמטיות (Schoenfeld, 1985; Arcavi, Kessel, Meira, & Smith, 2000) או הוראת מידול מתמטי (Antonius, Haines, Jensen, Niss, & Burkhardt, 2007). כמו כן אפשר להישען על הגות תאורטית שמסכמת את עקרונותיה של הוראה שמטפחת מיומנויות (Collins, Brown, & Newman, 1989). אסכם כי בעיקרון המורה ממשת בהוראתה שלוש פעולות: הדגמה של התנהגות רצויה, בניית סביבה שתאפשר לתלמידים התנסות בסוג זה של התנהגות ונתינת משוב לתלמידים.

מטרת המחקר

המטרה הגלובלית של המחקר הנדון היא בחינת ההיתכנות ואפיון של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים. לשם כך נדרשת הקמת קהילת שיח של מורה ותלמידים שעוסקת בקריאת טקסטים מתמטיים ובחינת מאפייני השיח שנוצר בה. בשל קוצר היריעה אני מבקשת להתמקד במאמר זה בניתוח השיעור הראשון של אחד הקורסים בקריאת טקסטים, ולהדגים מתוך מספר אפיזודות בשיעור זה מהם מאפייני השיח. כמו כן אני מבקשת לבחון את מקומה הייחודי של המורה בתוך קהילת הלומדים. להלן שאלות המחקר שאני מבקשת לענות עליהן במאמר זה:

1. מהם מאפייני השיח בשיעור שבו נלמדת קריאת טקסטים?
2. מה מקומה של המורה בשיח וכיצד פעולותיה תורמות להתפתחותו?

מערך המחקר

תכנון הקורס

ההחלטות לעיצוב הקורס ומאפייניו נגזרו מהספרות המחקרית בתחום (כפי שצוין לעיל). עם זה רוב ההחלטות שהתקבלו בשלב תכנון הקורס להוראת קריאת טקסטים נגזרו משיקולים מקומיים פרגמטיים. הבחירה לעבוד עם תלמידי כיתה י"ב במסלול חמש יחידות לימוד נבעה מכך שאלה התלמידים בעלי המטען המתמטי העשיר ביותר, ולכן יקל למצוא טקסטים שיתאימו ליכולותיהם. כמו כן לכותבת מאמר זה יש היכרות עמוקה עם הוראת מתמטיקה ברמות ובגילים הללו. הצורך לגוון ולהעשיר את התכנים המתמטיים שיוצגו לתלמידים באמצעות טקסטים שונים והזמן המוגבל שעמד לרשות המורה והתלמידים, הביאו לידי חיפוש אחר טקסטים קצרים יחסית, כאלה שאפשר להשלים את קריאתם בשיעור אחד בן 90 דקות (או לכל היותר שני שיעורים). נוסף על ההקפדה על אורכם של הטקסטים ועל תוכנם המתמטי שלא יחרוג מיכולותיהם של תלמידי י״ב במסלול חמש יחידות, הוקפד על בחירת טקסטים "יפים" שפורסמו בספר או בכתב עת. שיקולים אסתטיים לבחירת טקסטים אינם מקריים, הם מייצגים ערכים שאימצה קהילת העוסקים במתמטיקה ובחינוך מתמטי. למשל הוכחת משפט מורכב בדרך פשוטה שדורשת ידע מוקדם מינימלי, או פתרון של בעיה מסקרנת מסוג השונה מהבעיות המקובלות בכיתה וכדומה (Dreyfus & Eisenberg, 1986). אותם ערכים אסתטיים הם חלק ממה שיש להנחיל לתלמידים כדי שיצמחו ויתפתחו כחלק מקהילת העוסקים במתמטיקה.

מחקר עיצוב

כפי שנאמר בהקדמה, המחקר בכללותו מוגדר כמחקר עיצוב ולכן הוא בעל אופי איטרטיבי (Brown, 1992). ההוראה והלמידה נבחנים במספר מחזורים כך שבכל מחזור מיושמים הלקחים מהמחזורים שקדמו לו. משום כך על עיצובו של הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים נעשה מקצה שיפורים אחרי כל התנסות בהפעלתו. מחקר חלוץ מצומצם (קריאת ארבעה טקסטים) בכיתה י"ב של מסלול חמש יחידות יצר את ההתנסות הראשונה. אחריו התקיימו עוד שני קורסים ממושכים יותר בקבוצות קטנות של שלושה-ארבעה תלמידים (שוב תלמידי י"ב במסלול חמש יח"ל), ובסוף כל שלב הוסקו מסקנות לקראת ההפעלה הבאה. במאמר זה אני בוחרת לא להציג את מאפייני המחקר כמחקר עיצוב ולדון בהם, אלא לענות על שאלות המחקר מתוך התעמקות בשיעור יחיד במנותק מתהליך עיצובו.

מורה-מעצבת-חוקרת

כפי שצוין לעיל, כותבת מאמר זה משמשת בשלושה תפקידים מקבילים: מעצבת סביבת הלמידה, מורה וחוקרת. לריבוי התפקידים יש מספר השלכות אפשריות שנובעות בעיקר מהקושי להפריד הפרדה מוחלטת בין התפקידים השונים המצויים אצל אותו אדם. חלק מן ההשלכות הן רצויות, למשל יחסי הגומלין בין המורה ובין המעצבת של סביבת הלמידה יכולים להיות פוריים הן מנקודת המבט של המעצבת והן מנקודת המבט של המורה. המעצבת יכולה להיות נשכרת מניסיונה של המורה בפרקטיקה

של הוראה סטנדרטית ומההיכרות שלה עם תלמידי תיכון ועם המתמטיקה שהם מכירים. המורה יכולה להיות נשכרת מהיכרות עמוקה עם סביבת הלמידה שבתוכה היא צריכה לתפקד. יחסי הגומלין הבעייתיים הם יחסים שבהם מעורבת החוקרת. עיניה של החוקרת צריכות להיות כל הזמן פקוחות לאיתור כל שביב של מידע שיכול להעשיר את ממצאי המחקר. היותה של החוקרת גם מורה מפצל את תשומת הלב שלה בתוך המציאות הנחקרת. כעת עליה מצד אחד לתת מענה לדרישות הסיטואציה החינוכית ולצורכי תלמידיה ומצד שני להתבונן על הסיטואציה החינוכית "מבחוץ" באופן בלתי מוטה, כך ששיקולי המורה אינם מנחים את פעולותיה. תפקידה של המורה הוא תפקיד תובעני (גם בקבוצה של שלושה תלמידים), כי היא צריכה להיות ערנית וקשובה לצורכיהם של התלמידים בכל רגע ורגע. הצורך הנוסף לפקוח בו בזמן גם "עין חוקרת" מקשה על ביצוע מיטבי של שני התפקידים. לכאורה, מימוש תפקיד המורה והחוקרת על-ידי אותו אדם מניב את הגדלת הסיכוי שכל אחד מהתפקידים לא יתבצע היטב. אם כן, נשאלות השאלות מדוע לא להקפיד על הפרדה בין תפקיד המורה ובין תפקיד החוקרת, ומדוע בכל זאת יש חוקרות שבוחרות לחקור את הוראתן הן (Lampert, 1990). אחת התשובות האפשריות על שאלות אלה היא כי דווקא נקודת המבט המיוחדת של המורה החוקרת היא המעניינת שמניבה תובנות שקשה להניב בדרך אחרת. איחוד של הפרסונה הנושאת בתפקידים השונים אמנם מאפשר התנגשות בין התפקידים, אבל גם מאפשר הפריה הדדית ייחודית ביניהם, שאולי לא הייתה מתקיימת אלמלא איחוד התפקידים (Tabach, 2011). מכאן אני מסיקה שאין איסור קטגורי לְהֵיות המורה והחוקר אדם אחד. עם זה נראה כי התנאי לאיחוד מוצלח של התפקידים השונים באדם אחד הוא הקפדה על תיעוד מדוקדק מאוד של נקודות המבט השונות כדי שכל תפקיד יישא קול ברור ומובחן. בעבודה שנדונה במאמר זה שלב העיצוב תועד ביומן שמפרט את השיקולים שהביאו לידי קבלת ההחלטות, וכמו כן המורה ניהלה יומן שמתעד את התנסותה בניהול השיעורים. החוקרת קיבלה את היומנים הללו וכן את הקלטות השיעורים והראיונות עם התלמידים כחומר הגלם לעריכת המחקר.

התלמידים

כפי שצוין לעיל, בשני הקורסים המלאים של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים נבחנת הוראת קריאה זו בקבוצות קטנות, וזאת כדי לאפשר בחינה לעומק של התהליכים שחווה כל אחד מהמשתתפים. במאמר זה אני מבקשת לעסוק בקבוצה השנייה שבה נלמד הקורס. הקבוצה מנתה שלושה תלמידים (בנים) מאוכלוסייה מבוססת משני בתי ספר תיכון עירוניים בעיר במרכז הארץ, שהגיעו מתוך סקרנות ועניין לקורס שהתקיים במוסד אקדמי באותה עיר. אחד מהתלמידים לומד בכיתה י' והשניים האחרים בכיתה י"ב. אחד מהתלמידים בכיתה י"ב והתלמיד שבכיתה י' השלימו את לימודי המתמטיקה במסלול חמש יחידות ונבחנו בבחינת הבגרות (האחד במסגרת בית-ספרית מואצת והשני למד לבד). השלישי היה תלמיד בכיתה י"ב במסלול רגיל של חמש יח"ל. אפשר לומר מתוך התרשמות של המורה בקורס כי שלושת התלמידים שייכים לחלק העליון של תלמידי מסלול חמש יחידות בארץ.

פדגוגיה

בשיעור הראשון בקורס השתמשה המורה בכלים פדגוגיים מגוונים כדי לתת לתלמידים תמיכה מרבית כשהם פועלים בתוך שיח שכלליו עדיין אינם מוכרים להם. כמו כן התמיכה נועדה להציג לפני התלמידים את כללי השיח שהם יכולים לאמץ.

- הטקסט חולק למספר חלקים כך שכל חלק הוצג לתלמידים רק אחרי שהושלמה קריאתו של החלק הקודם.
- קריאת הטקסט נעשתה בקול רם על-ידי תלמיד שהתנדב לתפקיד.

הכלים הללו נועדו לתת למורה שליטה מרבית על המקום בטקסט שבו נמצאים התלמידים בקריאה (התלמידים לא יכולים להתקדם בחופשיות בקריאת הטקסט). עם זה תלמיד יכול להחליט שחלוקת טקסט לקטעים והשלמת כל קטע לפני שממשיכים בקריאת הקטע הבא, היא אסטרטגיה שהוא בוחר להתמיד בה בשלב שבו הוא הופך לקורא עצמאי.

- הדיון על הטקסט הנקרא התנהל בעל-פה ולא בשימוש בדפי עבודה ובהתבטאות של התלמידים בכתב על הטקסט שקראו. הדיון בעל-פה נועד ליצור חשיפה מרבית של כל תלמיד לשיחים של כל שאר המשתתפים.

בעקבות מאפייני קריאת טקסטים מתמטיים על-ידי מומחים שצוינו בקצרה לעיל, תוכננה ההתערבות המילולית של המורה כך שתקדם ותעודד שיח של התלמידים ברמת-על (על גווניו השונים).

- בראשית הקריאה הנחתה המורה את התלמידים כי מטרת הקריאה היא להפיק מהטקסט את המרב ולהבין אותו ככל שיוכלו, ולכן עליהם לעצור את הקריאה כל אימת שהם מוצאים לנכון.
- המורה השאירה לעצמה את הזכות לעצור את הקריאה משני טעמים, האחד כדי לערוך סיכומי ביניים של הטקסט שנקרא ולעודד את התלמידים לנבא את מה שייקרא בהמשך. השני כדי לשאול שאלות ולוודא שהתלמידים מרגישים כי הם מבינים את מה שהם קוראים.

גם כאן המטרה היא שבאמצעות ההתנסות בדיון במהלך קריאת הטקסט, ייחשפו התלמידים לפרקטיקות שיוכלו לאמץ כשיהיו קוראים עצמאיים.

הטקסט הראשון

הטקסט שנבחר כדי לפתוח את הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים הוא מאמר מאת זלמן אוסיסקין מאוניברסיטת מישיגן שפורסם ב-1968 ב-Mathematics Teacher (Usiskin, 1968) (תרגום של המאמר מובא בנספח א). המאמר מגדיר "בעיות שקולות" כבעיות שאפשר לפותרן באמצעות "אותה מתמטיקה".[7] כדי להדגים זאת במאמר מוצגות שש בעיות שהפתרון של כולן כרוך בפתרון המשוואה

7. הביטויים במירכאות הם ניסוחים הלקוחים מתוך הטקסט.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ עבור p ו-q שלמים.[8]

נראה כי המטרה העיקרית של המאמר שפורסם בעיתון המיועד למורים, היא להעשיר את עולמם המתמטי של אלה ולקוות שיעשו שימוש בבעיות מסוג זה בכיתתם. שכן כפי שנאמר בו "ניתן להשתמש בקבוצות של שאלות כאלה כדי להדגים את כוחה של פיסת מתמטיקה מופשטת בפתרון של בעיות שבמבט ראשון קשה לראות את הקשר ביניהן". על פניו נראה כי אף שאין על כך הצהרה מפורשת, לפתרון של בעיות מגוונות על-ידי אותו פורמליזם מתמטי יש ערך אסתטי בכל קהילות העוסקים במתמטיקה, ואוסיסקין מבקש לשתף את קוראיו בהתרשמות מהיופי שמוצג במאמר.

המאמר נבחר להיות הטקסט הראשון שנקרא בקורס משלוש סיבות עיקריות: 1. המסר האסתטי שהמאמר מקדם; 2. הפשטות של המתמטיקה שנדרשת כדי להבין את המאמר; 3. כיוון שהמאמר קצר, אפשר למצות את הקריאה בפרק זמן סביר (עד תשעים דקות – שיעור כפול).

כפי שצוין לעיל, האסטרטגיה של הקורס הייתה להתחיל עם תמיכה רבה מהמורה ובהדרגה לצמצם אותה, מתוך בחינה של התנהלות התלמידים ותחושה שהכלים שפורטו לעיל מתחילים להיות מופנמים. חלוקת הקריאה לקטעים שימשה מכשיר פדגוגי שמאפשר ומזמין את עצירת הקריאה למטרות של רפלקציה והתבוננות מסכמת על החלק שנקרא (חלוקת הטקסט מסומנת בנספח א).

כלי ניתוח נתונים

אפיון השיח הקולקטיבי שהתפתח בשיעור יתבצע בניתוח מספר אפיזודות נבחרות על סמך ההבחנות שהמסגרת הקומוגניטיבית מציעה. כלומר זיהוי שיח ברמת האובייקט לעומת זיהוי שיח ברמת-על, וכמו כן אפיון השיח באמצעות ארבעת מאפייני השיח שמציעה הפרדיגמה הקומוגניטיבית: מילות מפתח והשימוש בהן, מתווכים וויזואליים, רוטינות ונרטיבים מקובלים. כמו כן תתמקד ההתבוננות במורה ובדרך שבה היא תורמת להתפתחות השיח.

בתוך ההקשר של השיח המסוים שנבחן כאן, ארבעת מאפייני השיח יכולים להאיר צדדים שונים של מה שהתרחש בשיעור.

מילות מפתח והשימוש בהן: אפשר למיין את מילות המפתח הנוכחות בשיח שנסב על קריאת טקסטים מתמטיים לפי דובריהן: התלמידים, המורה או הטקסט. כל אחד מהמשתתפים תורם לשיח הנוצר מילים שנשאבות מתוך עולמו הפרטי שמשקף את קהילות השיח המגוונות שבהן הוא משתתף. כמו כן אפשר לבחון את מידת העיצום (objectification)[9] שמשקפות המילים שבהן משתמש כל אחד מהמשתתפים בשיח, ואם הן משקפות פעולה או שם עצם.

8. מעניין לשים לב כי המתמטיקה של פתרון המשוואה נמצאת בהחלט בהישג ידם של התלמידים, אך עם זה אפשר לומר במידה רבה של וודאות כי התלמידים לא פגשו משוואה דיופנטית אחת במהלך לימודיהם.
9. אפשר לראות בלימוד מתמטיקה מעבר משיח של פעולות לשיח של עצמים.

מתווכים ויזואליים: אפשר לבחון באיזו מידה נעשה שימוש במתווכים ויזואליים, מי יוזם את השימוש בהם, מה הם מלמדים על העצמים שהם מייצגים ועד כמה המתווכים הוויזואליים שמופיעים בטקסט הופכים להיות חלק מן השיח השגור אצל התלמידים.

רוטינות (שגרות): תבניות שיח שחוזרות על עצמן כאשר בסוף התהליך יהיה מוסכם על המשתתפים בשיח מתי מפעילים את השגרה ומתי יוצאים ממנה. שגרות יכולות לפעול על אובייקטים מתמטיים אך גם יכולות לשמש כנורמות שמארגנות שיח. במחקר המתואר כאן, זיהוי שגרות יכול לתרום לאפיון כללי השיח. בהקשר של קריאת טקסטים, אימוץ של שגרה יכול ללמד אותנו על כללי השיח בתהליך הקריאה. למשל שגרה היא שקובעת מתי לגיטימי להפסיק את הקריאה, או תפקידו של מי לשאול שאלות שעולות במהלך הקריאה ותפקידו של מי לענות עליהן. ייתכן שכאשר השיח נמצא בשלב של היווצרות, השגרות תהיינה בעיקר בולטות בהיעדרן או חסרות כללים ברורים של מתי מפעילים את השגרה ומתי יוצאים ממנה.

נרטיבים מקובלים: נרטיב מקובל בשיח מתמטי הוא אמירה על אובייקט או על יחסים בין אובייקטים שהקהילה מתייחסת אליה כנכונה. בשיח הנוצר כשלומדים לקרוא טקסטים מתמטיים, נרטיבים יכולים להופיע למשל בטקסט עצמו, אבל אז לא ברור האם התלמידים יכולים לקשר בין התואר "מקובל" לנרטיב שמופיע בטקסט. מעניין לבחון מה צריך להתקיים בהקשר הנדון כדי שנרטיב יוכרז כמקובל.

לצד מאפייני השיח שפורטו לעיל, יש לנתח את התכתובים כך שנוכל להבחין בין שיח ברמת אובייקט ובין שיח ברמת-על. כפי שצוין לעיל, שיח ברמת-על יכול להופיע בדרכים מגוונות. אעסוק בשני סוגים עיקריים: ראשית, כל תגובה תקשורתית על אלמנט של שיח היא "שיח על שיח" ולכן שיח ברמת-על. אפשר לשער מלכתחילה כי קריאת טקסט מתמטי היא פעולה שמזמינה שיח ברמת-על, שכן מן הראוי שהקורא יגיב על טקסט (שיח מתמטי) שהוא קורא. שנית, שיח ברמת-על יכול להיות כל תגובה על כללי השיח שמתנהל, ומכיוון שהשתתפות פעילה בשיעורים שמושאם הוא קריאת טקסט היא פרקטיקה שאינה שגורה אצל התלמידים, הרי שצפוי כי כללי השיח והדיון בהם יעלו אל פני השטח.

חשוב לציין כי ארבעת מאפייני השיח וההבחנה בין שיח ברמת אובייקט ושיח ברמת-על הם בבחינת כלים מתודולוגיים שמטרתם לשרת את המחקר בתוך הקשרו הייחודי. אין הכוונה לערוך סקירה שיטתית של מילות מפתח, שגרות וכדומה ובכך לראות את אפיון השיח הנוצר. הציפייה היא שבמהלך התבוננות בתכתובים יהיה אפשר לבחור את הכלים המתאימים ביותר כדי להוציא לאור את עיקרי הדברים.

ניתוח וממצאים

להלן אציג את ניתוחם של כמה קטעים מתוך התכתוב של השיעור הראשון בקורס השני שבאמצעותו הוסקו מאפייני השיח שמתפתח בתוך קבוצה שלומדת לקרוא טקסטים מתמטיים. הקטעים מוצגים לפי סדר התרחשותם:

קטע ראשון

הקטע להלן נלקח מתחילת הקריאה בשיעור הראשון. התלמידים הונחו לקרוא בתורם בקול רם, ולעצור את הקריאה ולשאול שאלות כל אימת שימצאו לנכון. כל שמות התלמידים המופיעים בקטעים הבאים הם שמות בדויים. אורן בחר להיות הראשון שיקרא את הטקסט בקול רם לפני הקבוצה.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
47	אורן	"במאמר זה שתי בעיות נקראות שקולות אם אפשר לפתור אותן בעזרת אותה מתמטיקה. בעיות שקולות מדגימות את אחת התכונות החשובות ביותר של המתמטיקה היכולת להשתמש במושג תאורטי אחד כמודל עבור רעיונות שונים." להמשיך?
48	מורה	מישהו רוצה לשאול משהו? יש כאן משהו ש...
49	יוני	א...יש לי שאלה.
50	מורה	אהמ
51	יוני	אהמ... כשמתכוונים "בעזרת אותה מתמטיקה" למה בעצם מתכוונים? כאילו, באותם כלים מתמטיים?
52	מורה	בשלב הזה אני לא יודעת אם זה כתוב כאן. אולי זה דבר ש...יובהר בהמשך.
53	יוני	אוקיי
54	מורה	אהמ... כי, כי הוא לא אמר את זה, הוא אמר... מין פסקת פתיחה כזאתי ש...ש...הוא לא הבהיר. אם יהיו לנו שאלות בהמשך אולי ננסה להבין לפי מה שנאמר כאן.
55	אורן	אפשר ל... "אפשר בקלות לייצר דוגמאות לכך. אם המושג התאורטי הוא לדוגמה צירופים, כמו בהסתברות, ניתן להשתמש במושג זה כדי לקבוע את חוקי מנדל בביולוגיה, לחשב מקדמים בינומיים, לחשב הסתברויות של משחקי קלפים, למצוא את ה.. את מספר המצולעים מסוגים שונים עם נקודות אקראיות כקודקודים, וכן הלאה, כמעט ללא הגבלה. אבל..."
56	מורה	שנייה שנייה... אהמ... יוני... זה ענה במשהו על "למה הכוונה?"
57	יוני	אהמ... נראה לי... שכאילו ש...אני חושב שכן שבגלל שכאילו... אהמ... מושגים מסוימים שכאילו הגדרות מסוימות בכל מיני דברים יכולים להשתמש לכל מיני...
58	דן	לפי דעתי זה לא ענה על כך.

נשים לב שבפתיחת המאמר כמעט שאין אזכור של מושגים מתמטיים, אלא בעיקר הנחת המסגרת לסיפור שיסופר בהמשך. אורן התחיל בקריאה ואף שהמורה נתנה הנחיה לעצור את הקריאה כל אימת שהתלמידים מוצאים לנכון לעשות זאת, אורן לא היה בטוח אם הוא רשאי לעצור, והוא שאל את המורה האם להמשיך בקריאה. המורה ביררה אם יש למישהו שאלה (48), וזאת כדי להזכיר שזהו הסימן שיהיה מקובל על קבוצת הקוראים להפסקת קריאה מצד אחד, ומצד שני להשאיר סימן שאלה בסוף האמירה שלה, כלומר בסופו של דבר זו תהיה אחריות של התלמידים לקבוע מתי עוצרים ומדוע. בהקשרים אחרים שאלה כזאת של מורה יכולה להיות רמז "עבה" לכך, שיש כאן מקום להבהרות והסברים. לעומת

זאת, במקרה זה שיקפה המורה את העצירה של אורן והדגימה לתלמידים מה המשמעות של עצירה שכזאת. אפשר לראות בפעולה זו של המורה ניסיון לקדם את התהליך של יצירת כללי שיח מקובלים (רוטינות) אצל קהילת הקוראים.

הפסקת הקריאה שיזם אורן יצרה דיון קצר בפסקה שפותחת את הטקסט. יוני שאל (51) למה מתכוונים כשאומרים "בעזרת אותה מתמטיקה". בשלב זה של הלימוד (יש להזכיר כי אנחנו נמצאים בראשיתו של השיעור הראשון) שאלות התלמידים, של אורן בהתחלה וכעת של יוני, הופנו אל המורה. המורה בחרה לענות על שתי השאלות שהופנו אליה בשאלות משלה, בעיקר כדי להדגיש שבסיטואציה הנוכחית יש עוד אפשרויות לקבלת תשובה. למשל תשובתה על השאלה של יוני היא בעצם הפניה לחפש את התשובה בטקסט עצמו. שוב כמו קודם, אפשר לראות בפעולת המורה משהו שנועד לקדם התפתחות של כללי שיח. כשקוראים טקסט ומתעוררת שאלה, אפשר לחפש את התשובה עליה בטקסט עצמו. יתרה מזו, אם לא מוצאים את התשובה בטקסט בשלב הזה, אפשר לחפשה במה שנאמר בו בהמשך, והחיפוש הזה צריך להיות אקטיבי. אחרי קריאת הפְּסקה הבאה המורה עוצרת את הקריאה ומעודדת את יוני לברר האם שאלתו שלא קיבלה מענה בפסקה הראשונה, מקבלת מענה כעת. המורה שוב מעודדת את התלמידים לקיים קריאה אקטיבית שמחפשת בטקסט תשובות על שאלותיהם. אפשר להגיד שהמורה מבקשת להנחיל לתלמידים את כללי השיח בדרך "רכה", שכן אין כאן הנחתת כללים נוקשים, אלא הצעה לאימוץ הליכים. התלמידים בשלב זה רשאים לאמץ את הכללים או לדחותם, אך הם חייבים לחוות אותם.

קטע שני

הקטע להלן לקוח מתוך קריאת שש הבעיות שכותב המאמר מתכוון לפתור בעזרת "אותה מתמטיקה" (כפי שצוין לעיל).

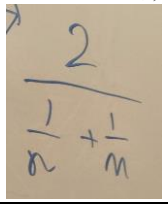
תור דיבור	דובר	מה נאמר
76	אורן	"בעיות. להלן שש בעיות שקרובות לקיום שלוש הדרישות. הביעו את חצי כסכום של שני שברי יחידה. שבר יחידה הוא מהצורה אחד חלקי n כאשר n הוא שלם חיובי. א... שתיים. מצאו את כל המלבנים בעלי אורכי הצלעות שהם מספרים שלמים אשר שטחם שווה מספרית להיקפם."
77	מורה	למה הם אומרים מספרית?
78	יוני	א... כי... זה יחידות שונות.
79	מורה	אוקיי. יש לנו פה שטח לעומת היקף. אז... השוויון יכול להיות רק שוויון מספרי.
80	אורן	אהמ
81	מורה	אוקיי

הקטע לעיל מדגים כי מעורבות המורה בדיון אינה לובשת גוון אחיד. היא לא מעבירה את ניהול השיח (קביעה מתי עוצרים ועל אילו שאלות עונים) לתלמידים. היא שומרת לעצמה את הרשות לעצור ולשאול לפי ראות עיניה. בקטע המוצג לעיל הפנתה המורה את תשומת לבם של התלמידים לצירוף מילים אחד בטקסט (שווה מספרית) שמעניין לגלות מה משמעותו. התשובה על שאלת המורה לא נמצאת בטקסט שנקרא, ולכן אפשר לראות בשאלה זו הדגמה לסוג אחר של רגישות בקריאה שכדאי שהתלמידים יפתחו

כשהם לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים. במובן מסוים התלמיד נדרש לנהל שיח עם הפרשנות שלו עצמו לטקסט שהוא קורא, ועליו לבחון בכל שלב ושלב האם זו יוצרת תמונה קוהרנטית של הטקסט. לכאורה נראה כי העצירה של המורה בתור 77 יכולה לעודד סוג זה של רגישות שחיונית לעיצובה של פרשנות קוהרנטית לטקסט.

קטע שלישי

הקטע להלן עוסק באובייקט מתמטי שמופיע בטקסט.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
82	אורן	לאילו זוגות של שלמים חיוביים יש ממוצע הרמוני שגודלו ארבע? א... מה זה ממוצע הרמוני?
83	דן	שתיים חלקי אחד חלקי n ועוד אחד חלקי m.
84	אורן	לא יודע
85	יוני	שנייה
86	דן	שתיים חלקי... את רוצה להתכבד ולרשום?
87	מורה	לא לא מה פתאום?
88	דן	(קולות של כתיבה על הלוח) 

בקריאת הבעיה השלישית אורן לא הכיר את המושג "ממוצע הרמוני" ולכן עצר את הקריאה ושאל. מעניין לשים לב כי העצירה של אורן שונה מהעצירה של המורה בקטע הקודם. כאן המושג "ממוצע הרמוני" לא מוכר לאורן ולכן הוא שואל מה פשרו. לעומת זאת העצירה הקודמת שיזמה המורה כוונה לביטוי שלכאורה אינו זר לתלמידים, ולכן עצירתה הדגימה להם שגם כשנדמה לנו שאין מקום לתהיות, ייתכן שאפשר להעניק לטקסט משמעות שלא בלטה בקריאה ראשונה. נראה ששאלתו של אורן לא לוותה במבוכה מסוג כלשהו, ושמתן הלגיטימציה לשאול שאלות מתממש. המושג "ממוצע הרמוני" לא נלמד בתכנית הלימודים (זו מילת מפתח שנעדרת מהשיח הבית-ספרי), לכן המורה צפתה מראש את הקושי שיתעורר ותכננה לנהוג לפי אחת משתי אפשרויות: לתת לתלמידים את הנוסחה שמגדירה ממוצע הרמוני, או להמליץ לפניהם להתאזר בסבלנות עד שההגדרה תופיע בטקסט עצמו. המורה לא ציפתה שאחד התלמידים יכיר מראש את הגדרת המושג,[10] וזו הייתה הפתעה משמחת לגלות שדן השתתף בעברו בשיח מתמטי עשיר והוא הרגיש בטוח בעצמו לתרום לשיח הנוכחי ולהעשירו. הוא מצא לנכון להבהיר את המושג "ממוצע הרמוני" במתן ייצוג ויזואלי וכתיבת הנוסחה על הלוח.

10. התלמיד לא היה יכול לקרוא את ההגדרה מהטקסט, שכן הקריאה נעשתה בחלקים והחלק הרלוונטי עדיין לא חולק לתלמידים.

מעניין להתבונן במקומה של המורה בתוך האינטראקציה הסובבת על השאלה של אורן והתשובה של דן. לכאורה המורה מיותרת כאן, היא לא יזמה את השאלה והיא לא ענתה עליה. למרות זאת, אולי כהומאז' לתפקיד המסורתי של מורה בכיתתה (או אולי בציניות), ביקש דן להעניק למורה את הכבוד לרשום את הנוסחה על הלוח. המורה סירבה, אולי כדי להדגיש שמקומה בשיח הנוכחי שונה במובן מסוים ממקומה המסורתי בכיתה שלומדת מתמטיקה. אפשר לומר שתפקידה של המורה כאן הוא לדעת מתי להיעלם ולהזמין את התלמידים שימלאו את החלל.

נתמקד כעת במילים "ממוצע הרמוני" שמייצגות אובייקט מתמטי שהטקסט נשען עליו. התשובה של דן על שאלתו של אורן כללה את ההגדרה הפורמלית של ממוצע הרמוני או במילים אחרות, בהינתן שני מספרים טבעיים, איך אנחנו מחשבים את הממוצע ההרמוני. במקרה זה המילים ותיווכן הוויזואלי מייצגים את פעולת החישוב. בהמשך, כפי שנראה בקטע הרביעי שלהלן, יוני מבקש לקבל מאפיינים נוספים של האובייקט המתמטי "ממוצע הרמוני".

קטע רביעי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
89	יוני	כן, אבל מה זה אומר?
90	דן	זה הממוצע ההרמוני של m ו-n
91	מורה	אה, זה m ו-n ?
92	דן	כן
93	מורה	אוקיי
94	יוני	זה ההגדרה של ממוצע הרמוני? אבל מה זה... מה זה בעקרון אומר? כאילו בסדר נוסחה, אבל מה זה אומר?
95	דן	אה, אתה שואל אותי שאלה קשה.
96		(צחקוקים ברקע)
97	דן	כן... ממוצע כמו שיש לך ממוצע חשבוני, כמו שאני אגיד לך m ועוד n חלקי שתיים, למה אני קורא דווקא לזה ממוצע. כי במקומות מסוימים זה תוצאה מאוד מעניינת.
98	יוני	אז...
99	דן	וגם זה במקומות מסוימים אחרים תוצאה מאוד מעניינת. לכן קבעו את זה כממוצע הרמוני לראות שיש אי שוויוניים נורא יפים שבהם זה... נכנס. אז זה למה נתנו לזה שם מיוחד, זה הכול.

יוני לא הרגיש מסופק מהגדרת המושג "ממוצע הרמוני" שנתן דן. הוא רצה לדעת "מה זה אומר?" אפשר לפרש את האמירה של יוני ככמיהה להיכרות עמוקה יותר עם המושג המתמטי "ממוצע הרמוני" מתוך אמונה שיש למושגים מתמטיים משמעות שחורגת מהגדרתם הפורמלית.[11] גם כאן, כמו במקרה של דן, אפשר לראות שהשיח המתמטי של יוני הוא עשיר ובין כלליו יש רוטינות של העמקה במימוש (ריאליזציה) של מושגים מתמטיים חדשים. נראה שיוני רצה להכיר היטב את המושגים המתמטיים שהטקסט מציג לפניו. אפשר לחשוב על מספר כיווני העמקה, למשל מהו מקור השם "ממוצע הרמוני"?

11. אפשר לראות בכך ניסיון להרחיב ולהעמיק את עץ המימושים של המושג "ממוצע הרמוני" (Sfard, 2008).

איזה ייצוג גאומטרי עשוי להיות לממוצע ההרמוני של שני קטעים שאורכיהם m ו-n, וכיוצא באלה. דן ש"הרגיש טוב" עם העובדה שהוא הכיר את ההגדרה של המושג, לא ידע לענות על שאלתו של יוני וזה העמיד אותו, ואולי גם את הסובבים אותו, במבוכה מסוימת (ראו תורות 95-96). דן מיד התעשת ונקט גישה מינימליסטית יותר. מבחינתו, אם קיימת הגדרה של מושג מתמטי, כנראה שיש דברים מעניינים להגיד עליו. בשלב זה תפקידה של המורה היה להחליט באיזו דרך להמשיך את הדיון. האם להמשיך את הקו שהתווה יוני ולחפש במקורות חיצוניים את המשמעות הנסתרת של הממוצע ההרמוני או להסתפק בהגדרה האלגברית. ההחלטה של המורה נבעה ממגוון של שיקולים והנחות מוקדמות. בקורס הזה המטרה העיקרית היא קריאת הטקסט היטב, ובו בזמן טיפוח מיומנויות של קריאת טקסט אצל התלמידים. בהקשר רחב יותר הכמיהה של יוני להעמקה היא כמיהה לגיטימית ורצויה והמסר החינוכי בדרך כלל צריך לעודד התנהגות כזאת. ייתכן שבקורס אחר אפשר להעלות על הדעת מצב שבו מורה תשתמש בקריאת טקסט גם כדי להעמיק בהכרת מושגים מתמטיים שקשורים בדרך כלשהי לאותו טקסט. אבל זה לא היה המצב בקורס שמתואר במאמר זה. כאן מכיוון שהמטרה העיקרית היא ללמד את התלמידים לקרוא היטב את הטקסט, הוחלט כי הכרת המושגים שמופיעים בטקסט תיעשה במידה שהיא משרתת את קריאת הטקסט.[12] המורה שמכירה את הטקסט של אוסיסקין, יודעת שקריאה מיטבית של הטקסט יכולה להתקיים גם בלי להעמיק במשמעות המושג ממוצע הרמוני, ולכן היא מאפשרת התדיינות קצרה של התלמידים (בהמשך הקטע שלא מצוטט כאן) ומורה על המשך הקריאה. אפשר להסיק מכאן, שבשיח שנסב על קריאת טקסט מתמטי, ההעמקה בפרשנות של המילים והמושגים שמוצגים בטקסט נעשית מתוך דיאלוג עם הטקסט, ונגזרת מהשימוש שנעשה בהם בטקסט.[13] אילו בתוך השיח שמיוצג בטקסט הייתה נדרשת משמעות מעמיקה של המושג, הצורך הזה היה גורר היערכות מתאימה מצד המורה. בקורס המתואר במאמר זה נבחרו הטקסטים כך שלא תידרש התעמקות נוספת על השיח המקובל בלימודי מתמטיקה בכיתות י"ב של מסלול חמש יחידות לימוד. ההתנסות שמודגמת בקטע לעיל מלמדת שיש תלמידים שהשיח המתמטי שלהם עשיר ואִתם אפשר לשקול, בהינתן הזמן המתאים, את הרחבת השיח שנרקם סביב קריאת הטקסט גם למקומות רחוקים יותר.

קטע חמישי

הקטע שמצוטט להלן התרחש אחרי סיום קריאת החלק הראשון של הטקסט (חלוקת הטקסט לקטעים מצוינת בתוך הטקסט שבנספח).

12. ההחלטה לא להעמיק במשמעויותיהם של מושגים מסוימים אין בה כדי לרפות את ידיהם של התלמידים להמשיך ולשאול שאלות העמקה. ההחלטה אם לענות עליהן נשארת בשלב זה בידיה של המורה.
13. ייתכן שיש כאן מקום לגישה ביקורתית כלפי ההחלטה של המורה ובירור האם היה אפשר להעביר לתלמידים את ההחלטה האם להעמיק או לא להעמיק במשמעות של "ממוצע הרמוני", אך דיון זה חורג מגבולות המאמר.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
199	מורה	אוקיי. אהמ... אז אז... קראנו את החלק הראשון. יש לכם איזושהי סברה. לאן אנחנו הולכים מכאן?
200	דן	תכלס... ממם
201	מורה	מה? איך ימשיך המאמר הזה?
202	דן	סליחה. איך הוא ימשיך? למה הכוונה?
203	מורה	כן כן. כאילו קראנו את החלק הראשון. יש לנו עוד.. א.. ארבעה חלקים. ואני, כאילו לפני שאני פורשת לכם את כל ה... ה... מאמר הזה אני סקרנית לדעת... א... מה נראה לכם? מה הולך להיות השלב הבא?
204	דן	אהמ... יסביר אולי למה הבעיות הן שקולות?
205	מורה	אוקיי, בשביל להסביר שהבעיות הן שקולות, מה הוא צריך לעשות?
206	דן	לפתור אותם?
207	יוני	אולי להראות כאילו שיש קשר בין כל מיני תחומים שהם לא בהכרח קשורים למתמטיקה, שהם... שהקשר ביניהם נעשה דרך המתמטיקה.
208	דן	אוו... להראות מקרה כללי.
209	יוני	זה גם
210	דן	לפתור אותם?
211	מורה	אוקיי... אוקיי אהמ. אז יש לנו כאן השערות. אפשרות אחת אמרנו... א... לפתור את הבעיות. אחר כך להראות א... שזו אותה מתמטיקה. פספסתי משהו?

בקטע זה אנו רואים כי המורה ניסתה לגרום לתלמידים להתבונן התבוננות רפלקטיבית על מה שהם קראו כדי לצפות מראש את מה שיופיע בהמשך הטקסט, ובכך לתת הזדמנות לקיום שיח ברמת-על על אודות מה שנאמר בטקסט ומה שייאמר בו בהמשך. אפשר לראות בכך ניסיון לטעת שגרה שתלווה את התלמידים בכל פעם שיקראו טקסט מתמטי. השגרה תהיה מורכבת מהתחלה שמסומנת ברגע שמסיימים לקרוא קטע מובחן בטקסט, מניסיון לנבא מה יהיה בחלק הבא של הטקסט ולאחר מכן בדיקה האם הניבויים מתאימים למה שכתוב בטקסט. הרוטינה הזו אינה חלק מהמיומנויות שהתלמידים מכירים, ולראייה דן שואל בתור 202: "למה הכוונה?". לכן בשלב זה המורה היא שמעוררת את הדיון וגם מרכזת את מסקנותיו. השערות התלמידים נרשמו על הלוח ואחרי קריאת החלקים השני והשלישי של הטקסט (החלקים שבהם מתבצעת הרדוקציה של הבעיות לְמה שנקרא במאמר "אותה מתמטיקה"), יזמה המורה דיון על אותן השערות. להלן ראשיתו של הדיון:

קטע שישי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
460	מורה	אוקיי... אז... מישהו מוכן בבקשה להגיד לי... אם... הוא ענה על ההשערות שלנו.
461	יוני	א... על הלפתור הוא ענה.
462	מורה	באמת?
463	יוני	כאילו הוא ענה... הוא ענה את ה...
464	אורן	הוא לא פתר
465	יוני	הוא לא פתר, הוא פתר את זה בכלליות... הוא נתן את זה... הוא נתן א... פתרון כללי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
466	דן	הוא הראה שהבעיות שקולות
467	יוני	כן
468	אורן	אהמ
469	מורה	הוא הראה שהבעיות שקולות זאת אומרת שהוא עשה את שתיים. נכון?
470		(דיבור בערבוביה)
471	יוני	אז לפתור לא
472	מורה	אבל הוא לא פתר. נכון?
473	יוני	לא

בקטע לעיל נראה שיוני לא הבחין בין העמדת הבעיות על "אותה מתמטיקה" ובין פתרונן. המורה לא מכריעה הכרעה חד-משמעית האם, כפי שטען יוני, פתר הטקסט את הבעיות. תחת זאת היא שאלה "באמת?" כדי לטעת ספק בקביעה של יוני. לאחר מכן אורן שלל את קביעתו של יוני, ודן ניסח את דעתו כי הטקסט הראה שהבעיות שקולות. תיעוד השערות התלמידים והדיון בהן אחרי קריאת הקטעים הרלוונטיים נתנו לתלמידים הזדמנות לנסח במילותיהם שלהם את מה שקראו ולעמת את הפרשנות שלהם עם ההשערות המתועדות. ניהול שיח על אודות השיח שמיוצג בטקסט מאפשר לתלמידים לקיים בקרה על הפרשנות שלהם לגבי הטקסט. בשלבים הראשונים של הקורס המורה היא שניהלה את הדיון והשתתפה בתהליכי הבקרה בקוותה שככל שיתקדם הקורס ותתפתח מיומנות התלמידים בקריאה, הם יוכלו לממש בעצמם שגרות של בקרה על הפרשנות שלהם לגבי הטקסט. אפשר לראות בהליך שתואר לעיל דוגמה להוראת כללי שיח בקריאת טקסטים מתמטיים.

סיכום

ההתבוננות במשקפיים קומוגניטיביים בשיעור ראשון בקורס של קריאת טקסטים מתמטיים מלמדת על מאפייני השיח הנוצר של קהילת הלומדים ועל הפעולות שהמורה נוקטת כדי לקדם את התפתחותו הרצויה. להלן אענה על שאלות המחקר על סמך הממצאים.

שאלה ראשונה: מהם מאפייני השיח בשיעור שבו נלמדת קריאת טקסטים?

חשיפת רמות השיח השונות שיוצאות אל הפועל אצל קהילת הלומדים מלמדת על נוכחות בולטת של שיח ברמת-על לסוגיו השונים. נוכחותו של שיח ברמת-על, שבו מתייחסת קהילת הלומדים לטקסט, היא מובנת מאליה כאשר לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים (ראו את הקטע השישי כולו). עם זה סוג מסוים של עיסוק במה שנאמר בטקסט כרוך בהחצנה של הקורא את תחושת ההבנה שלו, למשל שאלתו של יוני בקטע הראשון (תור 51). כיוון שזהו השיעור הראשון, השאלה הזאת צומחת מתוך יזמה של המורה ומכוונת אל המורה, אבל יש לראות בה ניצן לתופעה שתלך ותתעצם בהמשך הקורס. בסופו של דבר, על התלמידים לגלות רגישות לתחושת ההבנה שלהם את הטקסט ולתת לה ביטוי פומבי. כמו כן אפשר

לראות בשיעור זה את ראשיתו של תהליך שבו התלמידים מגלים שהרוטינות שהם רגילים אליהן מבית הספר (המורה היא השואלת את התלמידים, שאלות התלמידים מופנות אל המורה) מוחלפות אט-אט ברוטינות (או בכללי שיח) שמגדילות את אחריותו של התלמיד ליצור פרשנות קוהרנטית לטקסט שהוא קורא.

שאלה שנייה: מה מקומה של המורה בשיח וכיצד פעולותיה תורמות להיווצרותו?

מקומה של המורה בשיח שנוצר שונה ממקומה המסורתי בכיתה בית-ספרית. אם בכיתה בית-ספרית רגילה המורה היא היוזמת של כל אחד מרכיבי השיעור והאחראית על הוצאתם אל הפועל, הרי שבשיעור שבו לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים, כוחה של המורה הוא לעתים ביכולת שלה לתת לדברים להתנהל ללא התערבותה. המורה יכולה לצעוד "צעד אחורנית" גם (ואולי בעיקר) כאשר הדברים לא התנהלו כמתוכנן ולתת לתלמידים להתנסות לבד בניהול השיח. דוגמה לכך אפשר לראות בקטעים השלישי והרביעי שבהם המורה מאפשרת לתלמידים ללבן בינם ובין עצמם מהו ממוצע הרמוני והאם ההגדרה שנתן דן היא הגדרה מספקת.

ההתמקדות בפעולותיה של המורה (להבדיל מהמקומות שבהם היא בולטת בהיעדרה) חושפת שתי גישות שבאמצעותן היא מבקשת להפוך את התלמידים לשותפים בקהילת קוראי הטקסטים המתמטיים. גישה אחת כרוכה בהפעלת התלמידים לפי כללי השיח המקובלים בקהילה. למשל, בקטע החמישי המורה מבקשת מהתלמידים לשער מה יופיע בהמשך הטקסט, ובקטע השישי היא מבקשת מהם לבדוק האם השערותיהם אכן מתאימות לטקסט שקריאתו הושלמה. ההנחיה המפורשת של המורה היא שמביאה את התלמידים לידי התנסות פעילה בהתבוננות רפלקטיבית, שהיא אחת מעמודי התווך של קריאת טקסטים. גישה נוספת מכוונת את התלמידים לאימוץ כללי השיח המקובלים בקריאת טקסטים מתמטיים מתוך התבוננות במורה שמדגימה את השימוש בהם כחלק שוטף מהשתתפותה בשיח. במילים אחרות, התנהלות המורה כקוראת של טקסט מתמטי יכולה לשמש מודל עבור התלמידים. המורה מדגימה לתלמידים כלים שיסייעו בידם לבנות פרשנות קוהרנטית של הטקסט שהם קוראים (למשל עצירת הקריאה בראשית הקטע השני או המשך הקריאה בתור 52 בקטע הראשון כדי למצוא את התשובה על הקושי בהמשך הטקסט). הדגמת השימוש בכלים הללו מעודדת את התלמידים לעצור ולקיים רפלקציה בעצמם על הפרשנות המתהווה של הטקסט. נוסף על כך, בכל שלב המורה מציבה מראה לפני התלמידים ומשקפת את הדרך שבה הם פועלים ומפרשים את הטקסט (למשל השאלה בתור 56 בקטע הראשון או תור 462 בקטע השישי), ובכך היא מקדמת את המיומנויות הרפלקטיביות שלהם. ההנחה הסמויה היא שכל תלמיד בסופו של דבר יאמץ לעצמו את ההתנהגויות והשגרות שמצד אחד מתאימות לו עצמו, ומצד שני תאפשרנה לו השתתפות פעילה ותורמת בשיח של העוסקים במתמטיקה דרך קריאת טקסטים.

רשימת מקורות

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M., & Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the teacher. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Ed.), *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 295-305). New York: Springer.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. P. (2000). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 1-70). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Éducation et Didactique, 1*(3), 123-142.

Brown, A. L. (1992). Design experiment: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986, February). On the aestheticsof mathematical thought. *For the Learning of Mathematics, 6*(1), 2-10.

Elbaum-Cohen, A., & Arcavi, A. (2013). *Characterization of reading mathematical texts by experts*. Unpublished manuscript, Weizmann Institute of Science.

Falk, H., & Yarden, A. (2009). "Here the scientists explain what I said." Coordination practices elicited during the enactment of the results and discussion sections of adapted primary literature. *Journal in Science Education, 39*(3), 349-383.

Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions.* Chicago: University of Chicago press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not a question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to utopia. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Charlotte, NC: Information Age.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando , Florida: Academic Press.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 393-413.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating.* Cambridge: Cambrige University Press.

Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. In D. Scott, & E. Hargreaves (Eds.), *The sage handbook of learning* (pp. 129-138). London: Sage.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? – Early numerical thinking revisited. *Cognition and Insrtuction, 23*(2), 237-309.

Tabach, M. (2011). The dual role of researcher and teacher: A case study. *For the Learning of mathematics, 31*(2), 32-34.

Usiskin, Z. (1968, April). Six non trivial equivalent problems. *The Mathematics Teacher, 61*(4), 388-390.

Yarden, A., Brill, G., & Falk, H. (2001). Primary literature as a basis for a high-school biology curriculum. *Journal of Biological Education, 35*(4), 190-19



אביטל אלבוים-כהן

מורה למתמטיקה בתיכון על שם אהרון קציר ברחובות. בוגרת המחזור הראשון של תכנית רוטשילד-ויצמן למורים. משלימה בימים אלה את כתיבת עבודת הדוקטורט שלה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע. העבודה עוסקת בנושא "הוראה ולמידה של קריאת טקסטים מתמטיים בתיכון" בהנחיית פרופסור אברהם הרכבי.

נספח א

שש בעיות לא טריוויאליות שקולות[1]

מאת זלמן אוסיסקין[2]

במאמר זה שתי בעיות נקראות *שקולות* אם אפשר לפתור אותן בעזרת *אותה* מתמטיקה. בעיות שקולות מדגימות את אחת התכונות החשובות ביותר של המתמטיקה, היכולת להשתמש במושג תיאורטי אחד כמודל עבור רעיונות שונים.

אפשר בקלות לייצר דוגמאות לכך. אם המושג התיאורטי הוא לדוגמא "צירופים" כמו בהסתברות, ניתן להשתמש במושג זה כדי לקבוע את חוקי מנדל בביולוגיה, לחשב מקדמים בינומיים, לחשב הסתברויות של משחקי קלפים, למצוא את מספר המצולעים מסוגים שונים עם נקודות אקראיות כקדקודים, וכן הלאה, כמעט ללא הגבלה.

אבל קשה ליצור דוגמאות טובות כאשר נדרשות בעיות שקולות בטווח מצומצם יותר, או כאשר ב"אותה מתמטיקה" אין הכוונה למתמטיקה מאותו תחום או נושא שעוֹשֶׂה שימוש באותם רעיונות. כדי לדייק, אני מנסה למצוא בעיות שמקיימות את התנאים הבאים:

1. הבעיות צריכות להיות *זהות* מבחינה מתמטית, עד רמת המספרים בהם משתמשים כדי לפתור את הבעיות.
2. עד שלב הפתרון אי אפשר למצוא בבעיות עצמן רמזים לְהֶיוֹת הפתרון זהה. הבעיות צריכות להיות, עד כמה שניתן, מנושאים זרים בַּמתמטיקה או ביישומיה
3. הבעיות צריכות להיות בתוך גבולות המתמטיקה של בית הספר התיכון. ככל שהבעיות פשוטות יותר כן ייטב.

בעיות

להלן שש בעיות שקרובות לקיום שלוש הדרישות.

1. הביעו את $\frac{1}{2}$ כסכום של שני שברי יחידה. (שבר יחידה הוא מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר n הוא שלם חיובי.)
2. מצאו את כל המלבנים בעלי אורכי צלעות שהם מספרים שלמים אשר שטחם שווה מספרית להיקפם.
3. לאילו זוגות של שלמים חיוביים יש ממוצע הרמוני שגודלו 4?
4. מכפלתם של שני מספרים שלמים חיובית ושווה לפעמיים סכומם. מצאו את כל זוגות השלמים האפשריים.
5. בהינתן נקודה P, מצאו את כל המספרים הטבעיים n כך ששטח שמסביב ל-P יתמלא במצולעים משוכללים חופפים בעלי n צלעות כך שהמצולעים לא יכסו אחד את השני.
6. עבור אילו שלמים חיוביים $n>2$ הביטוי n-2 מחלק את $2n$?

יתכן וכבר הצלחתם להבין כי פתרון חלק מהבעיות הללו דורש מתמטיקה זהה. אם כך, תנאי מספר 2 לא מתקיים עבורכם. אני מקווה כי רוב הקוראים יגלו בהפתעה את השקילות המתמטית של הבעיות. **סוף חלק ראשון**

כדי להראות את השקילות, נראה כי פתרון כל אחת מהבעיות עומד על פתרון המשוואה שמאפיינת את הבעיה הראשונה.

רדוקציה של הבעיות

בעיה 1

אם $\frac{1}{2}$ הוא הסכום של שני שברי יחידה, אז $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, כאשר p ו-q הם שלמים חיוביים. (את המשוואה נפתור בשלב מאוחר יותר.)

בעיה 2

נסמן ב-l וב-w את האורך והרוחב של המלבן המבוקש. מכיוון שהשטח וההיקף שווים מספרית, מתקיים

$$2l+2w=l\cdot w$$

$$\Rightarrow 2(l+w)=l\cdot w$$

$$\Rightarrow \frac{l+w}{l\cdot w}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{w}=\frac{1}{2}$$

מכיוון ש l ו- w הם שלמים חיוביים, המשוואה שקבלנו היא מאותה צורה כמו המשוואה של בעיה 1.

בעיה 3

הממוצע ההרמוני של שני מספרים x ו- y הוא

$$\frac{2\cdot x\cdot y}{x+y}$$

יהיו x ו- y שלמים חיוביים, מתוך התנאי הנתון בבעיה נסיק,

$$\frac{2\cdot x\cdot y}{x+y}=4$$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot y}{x+y}=2$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{1}{2}$$

למשוואה האחרונה אותה צורה כמו למשוואה אליה הגענו בבעיה 2 ששקולה למשוואה בבעיה 1.

בעיה 4

יהיו x ו- y שני שלמים, נסמן ב-z את מכפלתם, $z>0$. x ו- y בהכרח חיוביים, כי סכומם ומכפלתם חיוביים. מתוך התנאי הנתון בבעיה נרשום, $x\cdot y=z$, ו- $x+y=\frac{z}{2}$. ומכאן נסיק כי

$$x+y=\frac{x\cdot y}{2}$$

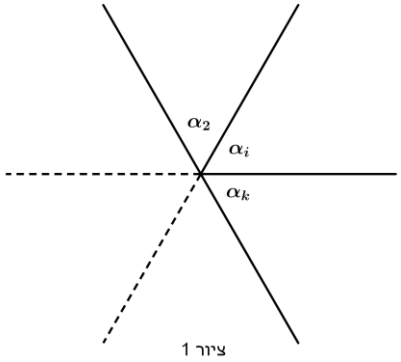
$$\Rightarrow \frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{1}{2}$$

המשוואה האחרונה זהה למשוואה אליה הגענו בבעיה 3 ולכן היא שקולה למשוואה של בעיה 1. **סוף חלק שני**

בעיה 5

זוהי הבעיה הקשה ביותר לאפיון. נסמן ב-k את מספר המצולעים עם קדקוד ב-P. אם המצולעים הם משוכללים כך שאינם "עולים אחד על השני" וחופפים זה לזה, אז, לפי הסימון בציור 1, נקבל:

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots\alpha_k=\frac{360^\circ}{k}$$



ציור 1

אבל אם α_i הוא מידתה של זווית של מצולע משוכלל במעלות, אז מתקיים

$$\alpha_i = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}, 1 \le i \le k$$

ואז

$$\frac{360}{k} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{n-2}{n}$$

$$\Rightarrow 2n = (n-2)k$$

$$\Rightarrow 2n + 2k = nk.$$

לפי תנאי הבעיה, n ו- k בהכרח שלמים חיוביים, לכן משוואה זו שקולה למשוואה הראשונה בבעיה 2.

בעיה 6

אם n-2 מחלק את $2n$, אז $2n = (n-2)k$, כאשר k שלם. משוואה זו זהה לאחת המשוואות בבעיה 5, ולכן בעיה 6 ניתנת לרדוקציה לבעיה 1. **סוף חלק שלישי**

משוואה דִיוֹפַנְטִית

הראינו כי את כל שש הבעיות אפשר לפתור על-ידי המשוואה שהוצגה בבעיה 1. בגלל תנאי הבעיות, זוהי משוואה דיופנטית ופתרונה מעניין.

1. נתבונן ב- $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, כאשר p ו-q הם שלמים חיוביים.
2. לא יתכן כי יתקיימו $\frac{1}{4} > \frac{1}{q}$ וגם $\frac{1}{4} > \frac{1}{p}$ (שהרי אז הם לא יסתכמו ל- $\frac{1}{2}$), לכן לפחות אחד מ- $\frac{1}{p}$ ו- $\frac{1}{q}$ חייב להיות גדול או שווה ל- $\frac{1}{4}$. נניח כי $\frac{1}{p} \ge \frac{1}{4}$.
3. אז p=1, 2, 3, או 4.
4. p=1 $\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{q} \Rightarrow$ q=-2, מה שלא יתכן, כי q חיובי.
   - p=2 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{q} = 0$ מה שאין לו פתרון. p=3 $\Rightarrow q$=6.
   - p=4 $\Rightarrow q$=4.
5. מכיוון שהמשוואה המקורית סימטרית ביחס ל-p ו-q אנחנו מקבלים תוצאות תואמות כאשר $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{4}$.
6. קבלנו שלושה פתרונות: $(p,q)=(3,6)$, $(p,q)=(4,4)$ או $(p,q)=(6,3)$. **סוף חלק רביעי**

פתרונות

כעת כל הבעיות פתורות.

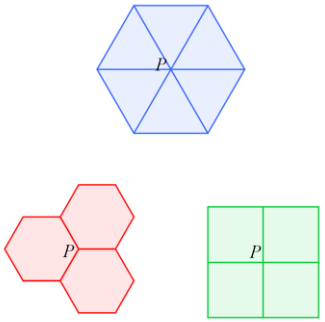
בעיה 1 - התשובה היא $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

בעיה 2 - שי שני מלבנים שמקיימים את התנאים: האחד הוא 4×4 והשני 3×6.

בעיה 3 - יש שני זוגות של מספרים שלמים שהממוצע ההרמוני שלהם הוא 4. 4 ו-4 או 3 ו-6.

בעיה 4 - הזוגות זהים לאלה שבבעיה 3.

בעיה 5 - המצולעים המשוכללים הזהים היחידים שממלאים את המישור סביב נקודה P בלי חפיפה ובלי רווחים הם שישה משולשים שווי צלעות, ארבעה ריבועים ושלושה משושים משוכללים, כפי שמוצג בציור 2.



ציור 2

שישה משולשים, ארבעה ריבועים, שלושה משושים

בעיה 6 - התשובה היא שהביטוי n-2 מחלק את $2n$ כאשר n=3, n=4, או n=6. (בבעיה המקורית התנאי n>2 מבטיח ש n-2 יהיה חיובי, אחרת גם n=1, n=0 או n=-2 הם פתרונות).

סיכום

אפשר להשתמש ב- 6 השאלות השקולות והלא טריוויאליות הללו בלימודי האלגברה. ניתן למצוא בקלות קבוצת שאלות שקולות בגיאומטריה. ניתן להשתמש בקבוצות של שאלות כאלה כדי להדגים את כוחה של פיסת מתמטיקה מופשטת בפתרון של בעיות שבמבט ראשון קשה לראות את הקשר ביניהן. **סוף חלק חמישי ואחרון**

---

1) אביטל אלבוים-כהן תרגמה מאמר זה לעברית. ראו: Z. Usiskin (1968). Six nontrivial equivalent problems. The Mathematics Teacher, 61(4), 388-390.

2) זלמן אוסיסקין (Zalman Usiskin) הוא חוקר בחינוך מתמטי מאוניברסיטת מישיגן בארצות הברית.

שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה[1]

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

תקציר

בעבור מתמטיקאים הגדרות הן האמצעי היחיד לזיהוי עצמים מתמטיים. אולם כפי שהמחקר בחינוך מתמטי מראה, אין זה כך עבור תלמידים רבים. חקר המקרה שלפנינו מתחקה אחר תהליכי למידה בקרב סטודנטיות להוראת מתמטיקה, הלומדות פונקציות בהכשרתן כמורות לעתיד. לשם כך אימץ מחקר זה את המסגרת התקשורתית לחקר השיח. אנו מעוניינות לענות על השאלה: אילו תהליכי למידה קשורים לשימוש בהגדרות לשם זיהוי עצמים מתמטיים? בייחוד, מהו מנגנון הלמידה המאפשר לתלמידים לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה? הממצאים מדגימים תהליך שבמהלכו תלמידים מאמצים הגדרה מתמטית כמבחן יחיד לזיהוי עצם נתון כפונקציה. תהליך זה כולל פירוק ההגדרה למרכיביה ודיון בכל אחד מהם באמצעות מנגנון של קונפליקט תקשורתי.

מילות מפתח: ניתוח שיח; גישה סוציו-תרבותית ללמידה; הגדרות; תהליכי למידה; קונפליקט תקשורתי.

מבוא

למידת מתמטיקה כרוכה בין השאר בפיתוח השיח המתמטי של הלומד באופן שיאפשר לו להשתמש במילים מתמטיות בדרך המקובלת על-ידי הקהילה המתמטית. לכן למידת הגדרות של מילים מתמטיות היא יסוד הכרחי בלמידת מתמטיקה. אולם כפי שעולה ממחקרים רבים, קיים פער בין ההיכרות של לומדים עם הגדרות פורמליות במתמטיקה ובין יכולתם להשתמש במילים מתמטיות בהתאם להגדרתן. מחקרים אלה מראים כי תלמידים נוטים להתעלם מהגדרות פורמליות של מושגים מתמטיים גם כאשר הם מסוגלים לצטט אותן בעל-פה (למשל Fischbein, 1996; Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz & Vinner, 1984; Vinner, 1990; Wilson, 1990).

במהלך שני העשורים האחרונים יש עלייה במחקרים שטוענים כי אי אפשר להפריד בין שפה ובין למידת מתמטיקה (Chapman, 2003; Lemke, 2003; Morgan, 2005; O'Halloran, 2005; Pimm, 1987;

1. הקרן הישראלית למדע מימנה את המחקר הזה, מס' 446/10.

Schleppegrell, 2010; Veel, 1999). מחקרים אלה עוסקים בפיתוח שפה מתמטית בכיתת המתמטיקה ומתמקדים בשאלות, כמו כיצד משתמשים תלמידים במילים מתמטיות שונות? כיצד נלמדים שימושים אלה במילים?

במאמר זה אנו רואות במחקרים אלה נקודת מוצא כדי לשאול את השאלות: אילו תהליכי למידה קשורים לזיהוי מתוך הגדרה של עצמים מתמטיים על-ידי סטודנטים להוראה? בייחוד מהו מנגנון הלמידה המאפשר לסטודנטים להוראה לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה? במילים "זיהוי מתוך הגדרה" אנו נותנות דעתנו על תהליך של זיהוי עצמים מתמטיים לפי ההגדרה שלהם ולא על זיהוי לפי מראה או תכונות אחרות. כדי לענות על שאלות אלה אימצנו את הגישה התקשורתית לבחינת הפעולות שמבצעים סטודנטים כדי להגדיל את יעילות התקשורת ביניהם. במחקר זה בדקנו שיעורים שבהם סטודנטיות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי נדרשו לזהות עצמים שונים כפונקציה. לשם כך הן השתתפו בדיונים שהתמקדו במילים המופיעות בהגדרת המושג "פונקציה". במהלך הדיון נמצאה עדות לשינוי בשיח של הסטודנטיות באשר לשימוש שלהן במילה "פונקציה". במאמר זה ננתח את הפעולות של הסטודנטיות שנראה, כי הן קשורות לשינויים בדרך שבה הן השתמשו במילה פונקציה. המחקר מתמקד בנושא של פונקציות בשל מרכזיותו במתמטיקה הבית-ספרית ומעבר לה.

רקע תאורטי

בפרק זה נעסוק תחילה בהגדרות במתמטיקה, נסקור מחקרים על הגדרות בהקשר המתמטי הבית-ספרי בכלל ועל הגדרות של מושגים הקשורים לפונקציות בפרט. כמו כן נציג את עיקרי הגישה התקשורתית לחקר הלמידה.

הגדרות במתמטיקה

הייחוד של הגדרות במתמטיקה נובע מהמבנה ומהדיוק המאפיינים אותן. כבר במאה הרביעית לפני הספירה עסק אריסטו במושג של הגדרה מדעית, כולל המבנה והדרישות המייחדות אותו, בספריו *Topics VI* ו-*Posterior Analytics II*.

הגדרה מדעית צריכה לעמוד בדרישות הבאות: 1. הקבוצה המוגדרת על-ידי כל אחת מהתכונות המופיעות בהגדרה בנפרד גדולה יותר מקבוצת החיתוך המתקבלת כאשר עוסקים בכל התכונות יחד; 2. הגדרה צריכה להיות מנוסחת בעזרת מושגים קודמים (Euclid, 1956), כלומר המושגים שבהם נעשה שימוש בעת הגדרת מילה צריכים להיות מוגדרים קודם לכן.

בניסוח הגדרה יש לנסח את הסוג (genus) ואז להבחין (differentia) בין המילה המוגדרת ובין שאר המושגים השייכים לאותו הסוג:

A correct definition must define a thing through its genus and its differentiae, and these

> belong to the order of things which are absolutely more intelligible than, and prior to, the species. For annul the genus and differentia, and the species too is annulled, so that these are prior to the species (Aristotle, 384-322 BC).

הגדרות מתמטיות הן מדויקות וכוללות תנאים הכרחיים ומספיקים שעל פיהם אפשר לקבוע האם עצם נתון משמש דוגמה למושג. ההגדרה צריכה לכלול את הסוג והאבחנות, להיות מינימלית ולא מעגלית (Copi, 1972).

הגדרות נחוצות למטרת דיוק, וגם כדי להבטיח שכל האנשים משתמשים באותה המילה שימוש דומה. השימוש במילים במתמטיקה לפי הגדרותיהן הוא תנאי הכרחי ליצירת שיח קוהרנטי, שבו המשתתפים כולם יכולים להיות בטוחים כי הם מדברים על אותו הדבר. בייחוד מיון של דוגמאות ואי-דוגמאות של עצמים מתמטיים על-פי ההגדרה יביא לידי מיון זהה של בני-שיח שונים.

חוקרים רבים בחינוך מתמטי עמדו על מרכזיותה של ההגדרה במתמטיקה וגם על מרכזיותה בתהליכי למידה והוראה בבית הספר ובתארים מתקדמים (Godino, Batanero, & Font, 2007; Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005).

הגדרות ושימוש במילים

השימוש במילים מתמטיות נקבע על-פי ההגדרות שלהן. בבית הספר זה לא בהכרח המקרה. מחקרים רבים בתחום החינוך המתמטי התמקדו בדרך שימוש בהגדרות בשיעורי המתמטיקה ובדרכים שבהן תלמידים משתמשים במילים המוגדרות (Alcock & Simpson, 2002; Meehan, 2002) וכן הבחינו בין הגדרת המושג (concept definition) ובין הדימוי למושג (concept image) הנוגע לאוסף הדימויים שיש ליחיד על מושג נתון (Vinner, 1982). מחקרים מגוונים בחנו את תפקיד ההגדרה בבניית מושגים מתמטיים ובהתגברות על תפיסות מוטעות (De Villiers, 1994; Fischbein, 1996; Freudenthal, 1973; Hershkowitz & Vinner, 1983; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, & Tabach, 2015; Vinner, 1982). ברוב המחקרים נחקרו הגדרות מתמטיות בתוך המסגרת המושגית של "המשגה של תלמידים" או "המשגות" (Conceptualization) (Fischbein, 1996; Hershkowitz & Vinner, 1983; Mountwitten, 1994; Tall, 1991; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1982; Vinner & Hershkowitz, 1980), או תפיסות תלמידים כלפי הגדרות במתמטיקה (Edwards & Ward, 2004; Shir & Zaslavsky, 2002; Zaslavsky & Shir, 2005).

מחקרים רבים תיעדו את הפער בין ההגדרה הפורמלית של מושג שנלמדה בבית הספר ובין הדרכים שבהן תלמידים השתמשו במושג (Hershkowitz & Vinner, 1984; Meehan, 2002; Wilson, 1990). כמה מחקרים אף ניסו להסביר את הפער. כך בגאומטריה ההסבר העיקרי לכך נוגע לתאוריה של פישביין על "מושגים צורניים"[2] – Figural concepts (Fischbein, 1993), ולרעיון שדיון נפרד להיבטים

2. פישביין עסק בטבע הדואלי של צורות גאומטריות הכולל היבט פורמלי והיבט צורני. בתאוריה צורה גאומטרית היא ישות הנשלטת שליטה מוחלטת ובלעדית על-ידי הגדרה, ולכן היא מושג מופשט. אולם בפועל, לעתים קרובות התכונות הוויזואליות של הצורות, כמו

הצורניים והפורמליים של צורות גאומטריות עלול להביא לידי רעיונות לא עקביים על צורות גאומטריות (Fischbein & Nachlieli, 1998; Furinghetti & Paola, 2000), או לאי-התאמה בין הגדרות מתמטיות ובין הגדרות מילוניות (Edwards & Ward, 2004; Vinner, 1990, 1991; Wawro, Sweeney, & Rabin, 2011; Wilson, 1990).

עם התפתחותן של תאוריות הרואות בשפה ולמידה קרובות שאי אפשר להפריד ביניהן, נערכו מחקרים שהמשיגו מתמטיקה כשיח או שפה (Chapman, 1995; Pimm, 1987; Morgan, 2005; Solomon, 2006). בעבודתו פורצת הדרך, עסק פים (Pimm, 1987) בהבדלים שבין השימוש היומיומי במילים ובין השימוש שלהן בשפה מתמטית. ההבדלים נבעו לא רק משימוש שונה באותה מילה, אלא גם ואולי בעיקר מהדרך שבה נקבע השימוש במילה. במתמטיקה דיוק נובע בין השאר משימוש במילה לפי הגדרתה הפורמלית. דוגמה לכך אפשר למצוא במחקרן של קים, פריני-מנדי וספרד (Kim, Ferrini-Mundy, & Sfard, 2012). הן חקרו שתי קבוצות של תלמידים הדוברים שפות שונות: עבור האחת, המילה אינסוף הייתה חלק מהשיח היומיומי ולכן התלמידים השתמשו במילה מתמטית זו ("אינסוף") בהקשרים יומיומיים לפני הלימוד הפורמלי שלה. עבור הקבוצה השנייה, המילה אינסוף לא הייתה חלק מהשפה היומיומית ולכן התלמידים לא השתמשו במילה הזו לפני הלמידה הבית-ספרית. החוקרות מצאו כי לאחר הלימוד הפורמלי התלמידים בכל קבוצה השתמשו במילה בדרך אחרת בהקשר המתמטי.

מחקרים אחרים בחנו את הסוגיה של הגדרות מתוך שימוש במסגרת בלשנית הנשענת על בניית ידע או יצירת משמעות (Schleppegrell, 2007). מסגרת זו עוסקת בשאלה כיצד בניית משמעות, הנתפסת כפעולה אקטיבית הנוצרת מתוך אינטראקציה בקבוצות לומדים, נבנית באופן חברתי (Borasi, 1992; Chapman, 2003; Halliday & Hasan, 1985). מחקרים אלה התמקדו באינטראקציה וראו בדיונים העוסקים במשמעות כמהותיים ללמידה. בדיונים אלה ההגדרות מילאו תפקיד מרכזי כאמצעי לבניית משמעות (למשל Herbst, Gonzales & Macke, 2005; Kobiela, & Lehrer, 2015). ועדיין עולה מהמחקר כי פעמים רבות זה לא המצב בבתי הספר. מורגן (Morgan, 2005) טוענת כי בעוד מתמטיקאים רואים הגדרות כישויות דינמיות שנוצרו על-ידי גורם אנושי, ההגדרות המופיעות בספרי הלימוד הן לרוב סטטיות ואינן כוללות סוכן אנושי. לפי סלומון (Solomon, 2006), תלמידים לומדים הגדרות, משפטים והוכחות כחלק מלמידה מכוונת, שינון וביצוע פרוצדורות, ולא בדרך של משא ומתן המשמעותי ללומדים. צ'פמן (Chapman, 1995) טוענת כי ההגדרות המופיעות בספרי הלימוד מניחות כי קיימים קשרים מסוימים בין מושגים, ולכן היא מדגישה את תפקיד המורה בפענוח קשרים אלה.

גודל, צורה ואפילו צבע, הן שמשתלטות על החשיבה (Fischbein, 1993).

פונקציות והגדרות

נושא הפונקציות מופיע לרוב במפורש בתכנית הלימודים במתמטיקה של חטיבות הביניים (משרד החינוך, 2012), ומשמש יסוד מרכזי במהלך הלימודים בבית הספר התיכון ומעבר לו. יותר מכך, בחינה מדוקדקת של תכנית הלימודים בבית הספר היסודי מגלה נושאים כמו דגמים, וריאציות ושינוי (כבסיס ללימודי אנליזה) שבמהותם הם פונקציות. אפשר לתאר פונקציות כמושג מופשט בעזרת מערכות סימבוליות, כמו ביטויים אלגבריים וגרפים. לפיכך נושא הפונקציות הוא אחד הראשונים במתמטיקה הבית ספרית, שבהם הבנת תלמידים לגבי מערכת סמלים אלגברית וגרפית יכולה להתפתח מתוך היזון הדדי (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). תלמידים ניצבים מול קשיים מגוונים במהלך שימוש בביטויים אלגבריים ובגרפים, ועדיין המחקר מראה כי למידה משולבת של שתי המערכות תומכת בפיתוח הבנת התלמידים לגבי כל מערכת בנפרד.

פונקציות עשויות לשמש במידול תופעות המובאות בדרך מילולית, נומרית או ויזואלית. כיוון שפונקציות הן רעיון רב-שכבתי מורכב, מרכיב חשוב בהבנתן הוא השטף במעבר בין מערכות ייצוג שונות של אותה הפונקציה (Even, 1990). המורכבות הטמונה בלמידת פונקציות הופכת נושא זה לכר פורה למחקר על תהליכי למידה והוראה.

ואכן, מושג הפונקציה נחקר כמעט חמישה עשורים. המחקר על למידת פונקציות עבר כמה שינויים בפרק זמן זה: מיָדע של לומדים בנקודת זמן נתונה (Even, 1990; Piaget, 1957; Zaslavsky, Sela, & Leron, 2002) לחקר תהליך הלמידה עצמו; מיָדע על שימוש בעדשה מחקרית קוגניטיבית בלבד (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Schoenfeld, Smith III, & Arcavi, 1993; Schwarts & Hershkowitz, 1999) לאימוץ גישות סוציו-תרבותיות ללמידה (Moschkovich, 2004); ממחקר היחיד הלומד במעבדה (Chiu, Kessel, Moschkovich, & Muñoz-Nuñez, 2001) למחקר כיתה (Nachlieli & Tabach, 2012; Walter & Gerson, 2007) ואף לחקר הרצאות בנושא פונקציה באוניברסיטאות (Viirman, 2014); מסביבות נייר ועיפרון לסביבות טכנולוגיות (Keller & Hirsch, 1998; Yerushalmy, 2006). עם זה מחקרים שהתמקדו בניתוח של תהליכי למידה בכיתה ולא רק של הישגי הלומדים בתום התהליך הם מעטים. במחקר כיתה אפשר להתמקד בתהליכי למידה, הוראה או ביחסים שבין הוראה ללמידה. המיקוד יכול להיות בלומד היחיד, בקבוצה או במליאה. המחקר הנוכחי אימץ גישה סוציו-תרבותית ומתמקד בחקר הלמידה בקבוצה כדי לזהות את ניסיונות הלומדים להשתמש במילה "פונקציה".

תלמידים נתקלים בקשיים מגוונים בבואם ללמוד על פונקציות בכלל ועל סוגים מסוימים של פונקציות בפרט. נמצא כי פונקציה קבועה, פונקציה המוגדרת בחלקים ופונקציה המוגדרת בתחום בדיד (למשל מוגדרת עבור המספרים הטבעיים בלבד) אינן מזוהות כפונקציות על-ידי לומדים (Even, 1990; Leinhardt et al., 1990; Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986). בדרך כלל לומדים רבים סבורים כי פונקציה מוגדרת על-ידי ביטוי סימבולי בלבד (Even, 1990; Markovits et al., 1986). כמו כן הפונקציה הקווית משמשת אב-טיפוס במובן שלעתים קרובות לומדים פועלים על בסיס ההנחה

המוטעית שרק גרף יחיד של פונקציה יכול לעבור בין שתי נקודות נתונות במישור – הגרף של פונקציה קווית (Even, 1990; Markovits et al., 1986; Schwarts & Hershkowitz, 1999).

הקושי המרכזי של תלמידים בנושא פונקציה בחלקים הוא שהם סבורים כי חוק התאמה אחד צריך להיות תקף לכל התחום שבו הפונקציה מוגדרת (Vinner, 1983). לפיכך, התלמידים לא מקבלים כללי התאמה שונים כרלוונטיים לתחומים שונים של הפונקציה (Markovits et al., 1986).

מחקרים שבחנו את השימוש בהגדרות של פונקציה ככלי לזיהוי דוגמאות ואי דוגמאות הראו כי לעתים לומדים המסוגלים לצטט את ההגדרה, פועלים בדרכים הסותרות את ההגדרה (Tall & Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). נראה למשל את מחקרו של וינר (Vinner, 1991) שבחן 147 תלמידי תיכון בכיתות י'-י"א. הוא מצא כי מתוך 57% שהיו מסוגלים לנסח הגדרה נכונה לפונקציה, רק שליש השתמשו בהגדרה שימוש נכון וזיהו פונקציות מתוך דוגמאות נתונות. הוא הסיק כי "תלמיד התיכון הממוצע שאינו מתמחה בכיוון מדעי, לא פיתח את הרגלי החשיבה הדרושים להקשר מדעי. תלמידים המשיכו להפעיל הרגלי חשיבה יומיומיים גם בהקשרים מדעיים" (שם, עמ' 73).

ממצאי המחקרים שדווחו לעיל מבוססים על נתונים שנאספו באמצעות שאלונים וראיונות, ולפיכך דיווחו על ידע לומדים בנקודת זמן נתונה. מחקר קודם שלנו עקב אחרי תהליכי למידה-הוראה בקרב לומדים בכיתה ז' שלמדו בקורס שהתנהל חודשיים בערך, והם נחשפו לראשונה לראשית האלגברה בכלל ולפונקציות בפרט (Nachlieli & Tabach, 2012). מצאנו כי לומדים יכלו להשתתף בשיח על פונקציות בלי לעסוק ישירות בעצם המתמטי המתהווה – פונקציה. הלומדים הצליחו להתאים לבעיות את רוטינות הפתרון שלהן באמצעות רמזים (מילות מפתח שהופיעו בניסוח הבעיות) שהיו רגישים אליהם מתוך ניסיון העבר שלהם כלומדים. הסקנו כי אף שהלומדים עדיין היו בשלב מוקדם של הלמידה, השתתפותם בקורס הניחה בסיס מוצק לשיח העתידי שלהם באשר לפונקציות. במחקר הנוכחי צפינו בסטודנטים שלמדו את נושא הפונקציה בפעם השנייה כדי לאפיין את תהליכי הלמידה הקשורים ללמידת פונקציות.

הגישה התקשורתית לחקר הלמידה

הגישה התקשורתית (קומוגניטיבית)[3] (Sfard, 2007, 2008) היא גישה סוציו-תרבותית לחקר תהליכי למידה. במסגרת זו "חשיבה" מוגדרת כהפנמה של תקשורת של היחיד עם עצמו – לאו דווקא מילולית.[4] שיח הוא סוג מיוחד של תקשורת שכולל פעולות מגוונות הנתפסות כלגיטימיות ותגובות על פעולות אלו. ככל תחום אקדמי אחר, מתמטיקה נחשבת כסוג של שיח, כלומר סוג של תקשורת שאפשר לאפיין אותו על-ידי ארבעה משתנים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, רוטינות ונרטיבים מקובלים.

מילים והשימוש בהן: לכל שיח מקצועי יש אוצר מילים הייחודי לו. מילים והשימוש בהן הוא מרכזי

3. הגישה התקשורתית נקראת גם הגישה הקומוגניטיבית (commognition). המילה **קומוגניציה** היא שילוב של שתי מילים, תקשורת (**קומו**וניקציה) וחשיבה (קו**גניציה**), ובכך מדגישה איחוד מושגי זה.
4. זה נמצא בהלימה לתאוריה של ויגוצקי על פונקציות מנטליות עיליות המופיעות תחילה במישור החברתי, ורק לאחר מכן מופנמות (Vygotsky, 1986).

לשיח, כי פעמים רבות המילים מכתיבות מה אפשר לומר על העולם. לדוגמה, המילים פונקציה, שיפוע או קבוצה משמשות בשני שיחים – המתמטי והיומיומי. ועם זה השימוש בהן שונה בכל אחד מהשיחים. שני המשפטים הבאים: "הפונקציה של מחשבים בחיינו השתנתה באופן משמעותי בעשור האחרון" ו"הגרף של פונקציה קווית הוא קו ישר" כוללים את המילה פונקציה. ועדיין כל משפט צמח בשיח שונה – ההגדרה של המילה פונקציה במשפט הראשון שונה מהמשפט השני.

מתווכים ויזואליים: אלה הם עצמים שפועלים כחלק מן התקשורת. מתווכים ויזואליים בשיח מתמטי כוללים ביטויים סימבוליים המתווכים רעיונות, כמו מספרים וגרפים. בעוד שהשיח היומיומי מתווך בעיקר בדימויים של עצמים מוחשיים הקיימים בדרך שאינה תלויה בשיח מסוים במציאות, רוב הסמלים והמתווכים בשיח המתמטי נוצרו למטרות תקשורת. מתווכים ויזואליים של פונקציה כוללים בעיקר גרפים, תרשימים, טבלאות, ביטויים סימבוליים ועוד. לעתים רואים במתווכים אלה "ייצוגים של פונקציות" המשקפים עצם קיים. אולם אנו רואים באובייקטים המתמטיים עצמים דיסקורסיביים הנוצרים בתוך השיח ועל ידו, ולכן נשתמש בצמד המילים "מתווכים ויזואליים".

רוטינות: רוטינות הן קבוצה של כללי-על המגדירים דפוסי תקשורת החוזרים על עצמם במצבים דומים. לדוגמה, הרוטינה המקובלת לזיהוי עצמים מתמטיים כוללת בחינה – האם העצם ממלא אחר התנאים המצוינים בהגדרה למילה זו. לכן כדי לזהות התאמה כפונקציה, יש לברר האם ההתאמה ממלאת אחר התנאים המפורטים בהגדרת פונקציה. כלומר רוטינות לזיהוי עצמים מתמטיים הן מתווכות הגדרה (ההגדרה מתווכת את הקביעה), ואילו רוטינות לזיהוי עצמים בשיח היומיומי הן לעתים קרובות על-פי מראה, צליל או מאפיינים אחרים.

נרטיבים מקובלים: אלה הם סיפורים שיכולים להיתפס כנכונים על-ידי הקהילייה המתאימה. נרטיבים מקובלים במתמטיקה הם אותם סיפורים ההופכים להיות "עובדות מתמטיות", כמו אקסיומות, הגדרות ומשפטים. נרטיבים אלה הם תוצאות מתומצתות (condensed) של סיפורים שהתפתחו ברבות הימים. כך למשל הגדרה לפונקציה היא נרטיב שהוא תוצאה של שינוי רעיונות של מתמטיקאים לעניין פונקציה. שינויים אלה נגרמו פעמים רבות עקב שינויים בתחומים מתמטיים והתפתחות של תחומים חדשים.[5]

על-פי הגישה הקומוגניטיבית, למידה היא שינוי בשיח המתמטי של הלומד. שינוי זה יכול להיות בכל אחד מארבעת המאפיינים של השיח המתוארים לעיל. אפשר להבחין בין למידה ברמת העצמים (object-level) או ברמת-העל (meta-level). למידה ברמת עצמים מרחיבה את השיח הקיים של המשתתפים, כלומר מרחיבה את מגוון הרוטינות ו/או הנרטיבים המקובלים של המשתתפים הקשורים לעצמים מסוימים. לעומתה, למידה ברמת-על כוללת שינויים בכללי-העל של השיח, בכללי המשחק, והם התוצר של רפלקציה על השיח הקיים בכללותו. כך למשל השיח המתמטי של ילד על המספרים הטבעיים בטרם פיתח את השיח שלו על שברים, כולל את הנרטיב (שאינו בהכרח מפורש או מודע) ש"פעולת הכפל

5. המילה נרטיב נראית פעמים כמטעה בכך שהיא נראית כשייכת לממד זמן ברור בעוד הגדרות, אקסיומות ומשפטים נראים "חסרי זמן". אולם קיימים גם "סיפורים" חסרי ממד זמן. למשל "דולפינים הם יונקים" הוא סיפור החסר את ממד הזמן. הגדרות מתמטיות הן נרטיבים כיוון שהם התפתחו באמצעים תקשורתיים בקהילייה של המתמטיקאים, והם שבים ומתוקשרים בקהיליית הכיתה.

מגדילה". הרחבת השיח של הילד על מספרים, מהטבעיים בלבד למספרים הרציונליים, כוללת שינויים בכללי-העל של השיח, כמו אלה הנוגעים לפעולת הכפל.

התפתחות שיח ברמת-על יכולה להיות בעלת אופי אופקי או אנכי. התפתחות בכיוון אופקי כרוכה בשילוב של שיחים נפרדים לשיח אחד על-ידי איחודם לשיח חדש. לדוגמה, התפתחות אופקית של שיח על פונקציות כוללת איחוד של כמה שיחים – שיח על ביטויים סימבוליים, שיח על גרפים ושיח על פעולות על מספרים (Nachlieli & Tabach, 2012). התפתחות אנכית כרוכה בשילוב שיחים קיימים עם שיח-העל שלהם עצמם (Sfard, 2008). במאמר זה נביא דוגמה מפורטת של התפתחות אנכית של שיח על פונקציות (ראו פרק הדיון). למידה ברמת-על יכולה להיות תוצאה של שיח מפורש על הדרכים שבהן יש להשתמש במילים. קונפליקט תקשורתי עשוי להיות המנגנון שעומד בבסיסה של התפתחות שיח זו.

קונפליקט תקשורתי: מצב שבו בני השיח משתתפים בשיח עם כללי-על שונים נקרא קונפליקט תקשורתי. כפי שהגדירה ספרד:

> The phenomenon that occurs when seemingly conflicting narratives are coming from different discourses – from discourses that differ in their use of words, in the rules of substantiation, etc (Sfard, 2007, p. 578).

קונפליקט תקשורתי יכול להיפתר בכך שתלמידים מקבלים ומאמצים את דרכי השיח של משתתף מומחה (Sfard, 2007). כלומר כדי לפתור קונפליקט תקשורתי בני השיח צריכים לבטא באופן מפורש את הדרכים שבהן הם משתמשים במילים, להקשיב זה לזה, לזהות את ההבדלים בדרכי השימוש במילה ואז להסכים על דרך שימוש מקובלת. על-פי ספרד, זהו השימוש של המומחה או של משתתף מרכזי בשיח (Sfard, 2008). כלומר פתרון של קונפליקט תקשורתי כולל השתתפות בדיון ברמת-על על דרכים לשימוש במילים (ראו דוגמה בהמשך מאמר זה).

שיטות

שאלת המחקר

אילו תהליכי למידה קשורים לשימוש בהגדרות לשם זיהוי עצמים מתמטיים? בייחוד מהו מנגנון הלמידה המאפשר לתלמידים לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה?

המשתתפים במחקר ואיסוף הנתונים

הנתונים למחקר זה נלקחו מפרויקט שמתמקד בזיהוי תהליכי למידה והוראה במהלך קורס חובה בנושא של פונקציות. המשתתפות הן סטודנטיות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, הלומדות בשנה א' במכללה להכשרת מורים במרכז הארץ. כל 18 הסטודנטיות שהשתתפו בקורס, למדו בעבר את הנושא "פונקציות" בעת לימודי המתמטיקה בתיכון, ועברו בהצלחה את בחינות הבגרות. כל הסטודנטיות הן מעל גיל 19 והן בעלות נתוני רקע מגוונים, כולל רמת לימודי המתמטיקה שלהן בתיכון. את הקורס

לימדה במכללה מרצה בעלת תואר דוקטור בהוראת המתמטיקה זה למעלה מעשור.

כל השיעורים היו בעלי מבנה דומה – פתיחה במליאת הכיתה מלווה בעבודה בקבוצות. המרצה כינסה את הקבוצות לדיון מליאה מסכם. בכל קבוצה היו שלוש-ארבע סטודנטיות. את הקבוצות יצרו הסטודנטיות והן נשארו יציבות בכל הקורס. תיעדנו בווידֵאו את דיוני המליאה בכל 14 השיעורים בקורס ותכתבנו אותם. במהלך השיעורים רשמנו רשימות שדה וצילמנו את העבודה הכתובה של הסטודנטיות. כמו כן במהלך עבודת הקבוצות הקלטנו את עבודתן של שתי קבוצות מסוימות שנבחרו באקראי.

ניתוח הנתונים

כדי לזהות תהליכי למידה אימצנו את המסגרת התקשורתית לניתוח שיח (Sfard, 2008) שתיארנו לעיל. הניתוח כלל סקירה מקיפה של הנתונים כדי לאתר חלקים בשיח שבהם הסטודנטיות היו מעורבות בזיהוי פונקציות במהלך העבודה בקבוצות. התוצאה של הסקירה העלתה שעיסוק זה רווח בשיעורים 4 ו-5, ופעילויות אלה לא נצפו בשיעורים אחרים. כדי להבין טוב יותר את תהליכי הלמידה הקשורים בזיהוי פונקציות, חיפשנו את חלק השיעור שבו המרצה הציגה לראשונה את המילה פונקציה בכיתה. לאחר מכן ניתחנו את כל התכתובים של עבודת הקבוצות שבהם התרחש זיהוי פונקציות והתמקדנו בנרטיבים וברוטינות הקשורים לזיהוי פונקציות.

בפרק הבא נציג חלק מן עבודת הקבוצות שנבחרו כך שיאפשרו לקורא ליצור תמונה שלמה של תהליך הלמידה שחוו הסטודנטים.

ממצאים

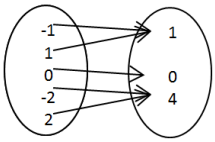
בחלק זה נתאר חמישה קטעים שלקחנו משני שיעורים עוקבים (שיעורים 4 ו-5), שבהם הסטודנטיות היו מעורבות בפעילות לזיהוי פונקציות. עבור כל אחד מהקטעים נציג את ההקשר ואת התכתוב הרלוונטי מלווה בניתוח. הניתוח מתמקד בתהליכים הקשורים לשימוש של הסטודנטיות במילה "פונקציה". נציג תחילה את רצף הפעילויות בשיעורים.

רצף הפעילויות בשיעורים

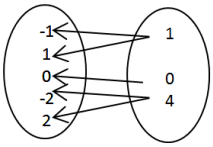
המרצה הציגה במפורש את המילה "פונקציה" בהצגת ההגדרה שלה. המרצה ליוותה את הצגת ההגדרה בדוגמה ובאי-דוגמה (בלוויית דיאגרמות), והראתה כיצד ההגדרה משמשת לקביעה האם מדובר בפונקציה (שימוש מתוך הגדרה במילה, קטע 1). לאחר מכן הסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות כדי לברר האם טבלאות נתונות הן דוגמאות לפונקציה (קטעים 2 ו-3), והאם גרפים נתונים הם דוגמאות לפונקציה (קטע 4). לבסוף נערך דיון במליאת הכיתה כדי לברר האם גרף נתון הכולל עצמים לא מוכרים (עיגולים מלאים וריקים), משמש דוגמה לפונקציה (קטע 5).

קטע 1: הגדרת המילה "פונקציה"

שיעור 4 כלל דיון מליאת כיתה על שתי התאמות: האחת מתאימה מספר לריבועו (איור 1) והשנייה מתאימה מספר לשני השורשים הריבועיים שלו (איור 2).



איור 1: דוגמה לפונקציה



איור 2: דוגמה ללא-פונקציה

המרצה השוותה בין ההתאמות והתמקדה בכמה מקורות לכל תמונה ובכמה תמונות לכל מקור. המרצה הציגה את המילה "פונקציה" כחלק מרצף ההוראה המתוכנן בשיעור (ראו תכתוב 1). הצגה זו כללה את הגדרת המילה. עד לרגע זה המילה "פונקציה" לא נאמרה במהלך הקורס.

תכתוב 1: מגדירים "פונקציה"

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מרצה	בואו נדבר על פונקציות, כולם, בואו נרשום פונקציה. היום אנחנו מכירים פונקציה ואנחנו נעשה עכשיו פעילות על זה, אוקי? פונקציה, התאמה.
2	מרצה	פונקציה, התאמה המקיימת שלכל מקור מתאימה תמונה יחידה עם שני קווים תחת ליחידה. [במהלך הכתבה היא רושמת על הלוח: "פונקציה, התאמה המקיימת שלכל מקור מתאימה תמונה יחידה."]
3	מרצה	אוקי, לפי ההגדרה הזאת האם זאת פונקציה? [מצביעה על איור 1]
4	סטודנטיות	כן.
5	מרצה	האם זאת פונקציה? [מצביעה על איור 2]
6	סטודנטיות	לא.
7	מרצה	אוקי, מה שאני רוצה עכשיו זה לחלק לכן משימה...

המרצה הכתיבה הגדרה פורמלית למילה פונקציה[6] והדגישה חלקים מסוימים – "קו כפול מתחת ל[מילה] יחידה" (2). לאחר שקיבלו את ההגדרה, זיהו המשתתפות את שתי הדיאגרמות המוצגות על הלוח כדוגמה וכאי-דוגמה למילה פונקציה. המרצה ביקשה מהסטודנטיות במפורש לעסוק בהגדרה כדי לקבוע האם מדובר בדוגמה לפונקציה (3). הסטודנטיות לא הפגינו כל קושי בשימוש במילה פונקציה בדיון על שתי הדיאגרמות (4, 6), ולא התנגדו לשימוש בהגדרה כמתווך לזיהוי פונקציה. השיחה הסתיימה כאשר המרצה שינתה את מבנה הפעילות וביקשה מהסטודנטיות לעבוד בקבוצות קטנות על דף עבודה שכלל כמה טבלאות. באשר לכל טבלה התבקשו הסטודנטיות לזהות האם מדובר בפונקציה.

קטע 2: לכל מקור יש תמונה

6. אף שיש הגדרה פורמלית שונה למילה פונקציה, הגדרה זו מופיעה בספרי לימוד רבים.

הסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות כדי לענות על השאלה האם הטבלאות הנתונות מתווכות פונקציה (למשל ראו איור 3). מתוך ההיבט המתמטי הן ניסו להבחין בין טבלאות שיכולות להיות מתווכים ויזואליים של פונקציה ובין אלו שלא. המרצה הסתובבה בין הקבוצות העובדות, וביקשה מקבוצות שהגיעו למסקנות סותרות לגבי הזיהוי של אותן טבלאות לשבת יחד ולהגיע להסכמה. בשל כך יצרו קבוצות I ו-II קבוצה חדשה (תכתוב 2) וקבוצות III ו-IV יצרו אף הן קבוצה חדשה (תכתוב 3).

השיחה בין הסטודנטיות בקבוצה I (תמי, לימור וספיר[7]) לסטודנטיות בקבוצה II (אריאל וגיל) ניסתה להבהיר האם התאמה b היא פונקציה (איור 3).

X	Y
5	4
1	0
3	2
0	-1
2	

איור 3: התאמה b – האם היא פונקציה?

תכתוב 2: לכל מקור יש תמונה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	תמי	I	למה זה פונקציה? [מסתכלת באיור 3]
2	אריאל	II	איקס מינוס אחד
3	לימור	I	יפה, אבל
4	ספיר	I	אין לך תמונה, ל-2
5	גיל	II	אז זה, אבל, אה... לא דיברנו על זה
6	לימור	I	נכון, הגענו למסקנה הזאת לבד, לפי ההגדרה
7	אריאל	II	זהו, כי לא דיברנו על זה שחייב להיות מקור לכל תמונה
8	ספיר	I	לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור מתאימה תמונה יחידה
9	אריאל	II	לכל מקור... [מתחילה לקרוא את ההגדרה]
10	גיל	II	אבל חייבת להיות תמונה?
11	סטודנטיות	I	כן, בטח!
12	אריאל	II	לכל מקור מתאימה תמונה יחידה [מסתכלת בהגדרה במחברת]
13	גיל	II	אז לא הבנו את זה בשלושת השיעורים אחרונים
14	ספיר	I	זה לא קשור לשיעורים! זה קשור לעכשיו.
15	לימור	I	זה לא קשור, זה הגדרה שעכשיו קיבלנו
16	תמי	I	זה רק בגלל ההגדרה
17	אריאל	II	רגע, וב- c [עוברת להשוות את הסעיף הבא]

7. כל השמות במאמר זה הם בדויים.

מבחינת התוכן, 17 תורי הדיבור יכולים להיות מחולקים לשלושה חלקים: תורים 1-7, [8]7-12 ו-13-17. הדיון המובא כאן עוסק בכל חלק בנפרד.

חלק א: אי-ההסכמה (תורים 1-7)

קבוצה II זיהתה את ההתאמה b כפונקציה על-פי הביטוי "איקס פחות אחד" (2) המקשר בין התחום וטווח הנתונים. קבוצה I זיהתה את ההתאמה b כלא פונקציה על-פי מקור שאין לו תמונה מתאימה "אין תמונה ל-2" (4). נראה שהסטודנטיות בשתי הקבוצות מסכימות על הטענות ברמת עצמים ("איקס מינוס אחד" הוא מתווך ויזואלי המבטא את הקשר בין הנתונים בטבלה, וכן למקור "2" אין תמונה). הסכמה זו באה לידי ביטוי במילים "יפה" (3) ו"נכון" (6). כמו כן כל קבוצה זיהתה את הטבלה כפונקציה או כ"לא פונקציה" על-פי כלל כלשהו. כלומר הזיהוי מתווך על-ידי נרטיב. לכן אנו רואות בשימוש של שתי הקבוצות במילה "פונקציה" תוצר של בחירה ברמת-על.

אם כך, אי-ההסכמה בין הקבוצות היא ברמת-על, כפי שעולה מהשימוש במילים "אבל" (3), "אה" (5) ו"זהו" (7).

בעוד שקבוצה I רואה בהפרה של דרישה המופיעה בהגדרה סיבה לדחיית טבלה b כפונקציה (4), קבוצה II שואלת על הרלוונטיות של ההגדרה: "אז זה, אבל, אה... לא דיברנו על זה" (5). השימוש במילה המצביעה (deictic) "זה" אינו ברור. היא יכולה לעסוק ברעיון הכללי של שימוש בהגדרה כנרטיב רלוונטי, או לעסוק בעובדה שבטבלה b למקור 2 אין תמונה. תגובת קבוצה II לקבוצה I כוללת את המילים "אה" בתור 5 ו"זהו" בתור 7 המרמזות על כך שהסטודנטיות של קבוצה II לא נדרשו לסוג זה של טיעון ולרלוונטיות של ההגדרה במקרה זה, כפי שעשו הסטודנטיות מקבוצה I.

חלק ב: שימוש בכמת "לכל" (תורים 7-12)

השימוש בכמת "לכל" עומד במרכז קטע זה. בעוד שקבוצה I השתמשה בכמת "לכל" כעדות להיצמדות להגדרה המתמטית (תורים 8, 12), קבוצה II שואלת על הנחיצות שלו כפי שנלמד מהשימוש במילה "חייבת" בשאלה "אבל חייבת להיות תמונה?" (10). כדי להבין טוב יותר את מהות אי-ההסכמה נבחן לעומק את תורי דיבור 7 ו-8:

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
7	אריאל	זהו, כי [אנחנו] לא דיברנו על זה שחייב להיות מקור לכל תמונה
8	ספיר	לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור יש תמונה יחידה

התגובה של ספיר בתור 8 כוללת התנגדות ("לא, אבל"). כדי להבין למה היא מתנגדת, נתנו דעתנו על המשתתפים בכל אמירה. בתור 7 המשתתפים הם "אנחנו" (משתתף אנושי), בעוד שבתור 8 המשתתף הוא "ההגדרה". כמו כן בתור 7 הפעולה היא "לא דיברנו", ואילו בתור 8 ההגדרה פסיבית ("לפי"). כלומר ייתכן שספיר מתנגדת לכך כי "אנחנו" ומה שאנו אומרים (או לא אומרים) הם בעלי הסמכות

8. הערה: תור 7 שייך לשני חלקים. לעתים הגבולות שבין חלקי השיח הם מטושטשים.

לקבוע את השימוש במילה "פונקציה". כמו כן בתור 7 אריאל מאתגרת את הצורך בקיום תמונה לכל מקור. בתגובתה, ספיר מצטטת כי "לכל מקור יש..", כלומר היא מדגישה שחייבת להיות תמונה לכל מקור (8). נראה כי אריאל מסכמת חלק זה בציטוט מה שנראה כפתרון של אי-ההסכמה: "לכל מקור חייבת להיות תמונה" (12).

חלק ג: קבלת חוקי המשחק (תורים 13-17)

חלק זה נפתח בתגובתה של גיל (קבוצה II) על אי-ההסכמה: "אז לא הבנו את זה בשלושת השיעורים האחרונים" (13). השימוש במצביע (deictic) "זה" מרכזי להבנה מה בעיניה של גיל חיוני כדי לפתור את המטלה, ולא הובן מאז תחילת הקורס. המילה "זה" יכולה לעסוק בכמה דברים: (1) הרעיון שהנרטיב המתווך זיהוי פונקציה הוא ההגדרה, כלומר בתהליך של החלטה האם התאמה b היא פונקציה, הדרישות המופיעות בהגדרה צריכות להתמלא; (2) כדי שההתאמה b תתווך פונקציה, "לכל מקור צריכה להיות תמונה" (מיקוד מקומי-ספציפי); (3) קיומו של ביטוי סימבולי המתווך את ההתאמה אינו רלוונטי להחלטה האם מדובר בפונקציה.

תורים 14-16 מראים כי לפחות שלוש מתוך ארבע סטודנטיות בקבוצה I רואות בהגדרה את הנרטיב שעל פיו המילה פונקציה צריכה להיות בשימוש. עדיין לא ברור בשלב זה האם סטודנטיות מקבוצה II מקבלות את הפרשנות הזו של ההגדרה ואת הרלוונטיות שלה כנרטיב המכריע בשאלה האם התאמה נתונה היא פונקציה. עם זה הן לא מביעות התנגדות. קטע זה מסתיים במעבר של הסטודנטיות לדיון בהתאמה הבאה (17).

סיכום קטע 2

טבלה 1 מסכמת את הנרטיבים והרוטינות שהעלו הסטודנטיות בניסיון לקבוע האם התאמה b מתווכת פונקציה.

טבלה 1: נרטיבים ורוטינות של סטודנטיות לזיהוי פונקציות

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
2	התאמה שאפשר לתאר בעזרת ביטוי סימבולי היא פונקציה (קבוצה II)	מציאת ביטוי סימבולי המתאר את ההתאמה הנתונה. אם נמצא ביטוי כזה, אז מדובר בפונקציה.	(2) איקס פחות אחת
2	התאמה שאפשר לתווך על-ידי הגדרה היא פונקציה (קבוצה I)	בחן האם הדרישות הרשומות בהגדרה מתמלאות. אם כן, זוהי פונקציה. אם לפחות דרישה אחת מופרת, זו לא פונקציה.	(4) אין לך תמונה, ל-2 ... (6) נכון, הגענו למסקנה הזאת לבד, לפי ההגדרה. (8) לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור מתאימה תמונה יחידה. (15) ... זה הגדרה שעכשיו קיבלנו

קטע 3: תמונה היא יחידה

בינתיים שתי קבוצות אחרות (קבוצה III: נועה ומאי, וקבוצה IV: פזית ואפרת) דנו בשאלה האם התאמה d (איור 4) היא פונקציה. רק קבוצה III זיהתה התאמה זו כפונקציה.

X	Y
7	5
9	5
11	5
8	5
1	5

איור 4: התאמה d – האם היא פונקציה?

תכתוב 3: תמונה היא יחידה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	פזית	IV	ב-d החלטנו שזה לא (פונקציה), כי כל מקור צריך תמונה יחידה. כאן, יש תמונות דומות.
2	נעה	III	כן, אבל אם היה רק חמש אחד, הייתן צודקות, אבל יש כמה חמש-ים
3	פזית	IV	כן, אבל אם תנסי לייצג את זה עם דיאגרמת ואן, אז לא תכתבי את החמש חמש פעמים
4	מאי	III	אבל זה לא רלוונטי. לכל מקור יש תמונה אחת. אפילו אם תכתבי כמה מקורות
5	נועה	III	אבל זו אותה תמונה
6	...		
7	נועה	III	אבל כאן זה גם אותה תמונה [מצביעה על איור 1 על הלוח]
8	מאי	III	לתמונה יכול להיות כמה מקורות
9	אפרת	IV	אני לא חושבת שזה נכון
10	מאי	III	היא [המרצה] הגדירה את זה ככה. לכל מקור יש תמונה אחת
11	אפרת	IV	אבל איבר, אם הוא חוזר, זה עדיין נחשב איבר אחד
12	מאי	III	לא רלוונטי. אבל התמונה, אה... למקור יש תמונה אחת
13	אפרת	IV	אבל איבר יחיד שחוזר על עצמו
14	...		
15	פזית	IV	היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה
16	...		
17	פזית	IV	אז זה לא יחיד
18	נעה	III	זה יחיד לכל מקור
19	מאי	III	זה לא משנה. כמו שהיא (המרצה) אמרה שזה (מתייחסת לאיור 1) ... כאן יש לך פונקציה, יש לך שני מקורות כאן, וזו אותה תמונה
20	פזית	IV	מקור, אבל אין לך אותה תמונה
21	מאי	III	1 זה אותה תמונה. פעם אחת 1 ופעם אחת (-1).[9]

9. התלמידות עוסקות במספרים הרשומים בתרשימי ואן על הלוח (איור 1). רשמנו את המספרים (1 ו- 1-) ולא את המילים (אחת ומינוס אחת) כי זה מה שרשום על הלוח.

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
22	פזית	IV	אני לא חושבת כך
23	אפרת	IV	אבל יש תמונה יחידה כי זה מוצג בטבלה. אם זה היה מיוצג בדיאגרמת ואן,
24	מאי	III	זה לא משנה, כי לכל מקור יש תמונה אחת
25	פזית	IV	יש לנו תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות
26	פזית	IV	לכל מקור יש תמונה אחת. אז זה יכול להיות. לכל מקור יש תמונה אחת. זה לא משנה איזו תמונה זו...
27	מאי	III	ההגדרה היא שלכל מקור יש תמונה יחידה. לא שלכל תמונה יש מקור יחיד
28	אפרת	IV	הבנתי את זה
29	מאי	III	בואו נמשיך

מבחינה תוכנית, 29 תורי הדיבור הללו יכולים להתחלק לשלושה חלקים: תורי דיבור 1-18, 19-24, ו-25-29. נעסוק בכל חלק בנפרד.

חלק א: אי-ההסכמה (תורים 1-18)

בשונה מהדוגמה הקודמת, נראה כי הסטודנטיות משתי הקבוצות (קבוצות III ו-IV) מסכימות כי ההגדרה היא הנרטיב שעל פיו יש להשתמש במילה פונקציה (תורים 1, 2). עם זה הקבוצות חלוקות באשר לתשובה, כפי שנראה בתכתוב את השימוש הנרחב במילה "אבל" (תורים 2-5, 7, 11-13). אי-ההסכמה ממוקדת בשאלה כיצד לפרש את ההגדרה הנתונה, ובעיקר כיצד להשתמש במילה "יחידה": האם תמונה צריכה להיות יחידה בכל הטווח (כלומר התמונות שונות זו מזו, למשל בתור 2), או האם תמונה צריכה להיות יחידה למקור מסוים (למשל תור 5)?

אף שהדיון נערך בין שתי קבוצות שנראה כי הגיעו להסכמה בתוך כל קבוצה, יותר משני קולות נשמעים. בעוד פזית ואפרת (קבוצה IV) משמיעות רעיונות דומים, מאי ונעה (קבוצה III) משמיעות רעיונות אחרים.

קבוצה IV דוחה את הרעיון שהתאמה d היא פונקציה (תור 1). עבור קבוצה IV (פזית ואפרת), המילה "יחידה" משתמעת כ"שונה מאחרות בטווח", ולכן הדרישה כי "לכל מקור יש תמונה יחידה" אינה מתמלאת. כדי להדגיש את טענתן כי הטווח מורכב מאיבר יחיד, הן מציעות לשרטט דיאגרמה רלוונטית (פזית בתור 3 ואפרת בתור 23). יתרה מזו, בתור 15 פזית מציינת במפורש את מה שלדעתה הוא מקור אי-ההסכמה בין שתי הקבוצות: "היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה". פזית מבחינה בין המילים "אחת" ל"יחידה" בתמונות.

קבוצה III קיבלה את התאמה d כפונקציה, אף שלכל משתתפת בקבוצה הייתה סיבה אחרת. מאי דנה בהגדרה הנתונה, קיבלה אותה כנתון מתמטי, ואף איתרה את הקושי של חברותיה בשימוש בהגדרה. לעומתה, נעה ראתה בכל חזרה על המספר 5 איבר שונה, כפי שנלמד מהטיעון שלה "כן, אבל אם היה רק חמש אחד, הייתן צודקות, אבל יש כמה חמש-ים" (תור 2). עבור נעה הטווח כולל אלמנטים מגוונים כיוון שיש "כמה חמש-ים". היא כן דנה בדרישה שלכל מקור תהיה תמונה אחת (תור 18), אבל נראה

כי היא נמנעת מהקושי שמבטאות הסטודנטיות בקבוצה IV בשל ההנחה השגויה כי החמש-ים שונים.

חלק ב: לקראת פתרון (תורים 19-24)

בחלק א ציינו הקבוצות במפורש את השימוש השונה שלהן במילה "יחידה" ואת הרוטינות הנגזרות מכך לזיהוי פונקציה. ועדיין אי-ההסכמה נותרה בעינה. חלק ב מראה את התהליך שבו מגיעים לפתרון.

בתור 19 עסקה מאי בדוגמה של פונקציה שנתנה המרצה קודם לכן (איור 1), כדי להדגים את דרך השימוש שלה במילה "יחידה". מאי הראתה כי בדוגמה זו, אף שהטווח כלל איברים שונים (תמונות), לכל תמונה יש שני מקורות. נראה כי אי-ההסכמה בחלק זה היא ברמת העצמים – הסטודנטיות דנו בדוגמה שקודם לכן הייתה מקובלת על המרצה והסטודנטיות כדוגמה לפונקציה (תכתוב 1).

בתורים 23-24 הסטודנטיות משוות את הרעיונות שמתווכים על-ידי הדיאגרמות למטלה שלפניהן המתווכת על-ידי טבלאות.

חלק ג: הפתרון (תורים 25-29)

בסיום הדיון קבוצה IV מקבלת כי התאמה d מתווכת פונקציה. שינוי זה ניכר בתורי דיבור 25 ו-26 (פזית) ו-28 (אפרת). בתורים 25 ו-26 אנו עדים לשינוי בשיח של פזית – מדיבור על משתתף אנושי ("יש לנו", תור 25) לדיבור על עצמים מתמטיים ("לכל מקור יש", תור 26).

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
25	פזית	יש לנו תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות.
26	פזית	לכל מקור יש תמונה אחת. אז זה יכול להיות. לכל מקור יש תמונה אחת. זה לא משנה איזו תמונה זו.

לסיכום, נראה כי לפחות שלוש פעולות תרמו לשינוי: שינוי במתווכים (ניסיון לתאר את התאמה d בעזרת דיאגרמה כדי להדגיש שהטווח כולל איבר יחיד); דיון על דוגמה לפונקציה שהציגה המרצה ונשארה על הלוח, הארת העובדה שלתמונה יכול להיות יותר ממקור יחיד (איור 1); ומעל לכול, תגובה מפורשת על הגדרה של פונקציה ועל פירושים אפשריים שונים לדרישות המופיעות בהגדרה. שימוש אפשרי (או שימוש שגוי) של הדרישות נדון במפורש. ספרד (Sfard, 2008) ראתה בסוג כזה של שינוי בשיח של לומדים על פונקציות שינוי ברמת-על כי הוא מערב שינוי בכללי המשחק – באיזה אופן משתמשים במילים. בתור 27 מאי חוזרת על ההגדרה שנתנה המרצה ומוסיפה "לא שלכל תמונה יש מקור יחיד". התוספת הזו מעידה על הבנתה את אבן הנגף עבור סטודנטיות מקבוצה IV.

סיכום קטע 3

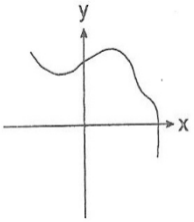
שתי הקבוצות עבדו על-פי הנרטיב "התאמה שניתן לתווך על-ידי ההגדרה הנתונה היא פונקציה" (ראה טבלה 2). הדיון בתכתוב זה מתמקד בדרך שבה כל קבוצה השתמשה במילים "יחידה" ו"תמונה".

טבלה 2: נרטיבים ורוטינות של הסטודנטיות לשימוש במילים "יחידה" ו"תמונה"

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
3	התאמה שבה לכל	יש לבדוק, עבור כל מקור	(4) לכל מקור יש תמונה אחת. אפילו אם תכתבי

	מקור יש תמונה יחידה היא פונקציה.	בנפרד, אם יש לו תמונה. אם כן, ההתאמה היא פונקציה (קבוצה III).	כמה מקורות. (8) לתמונה יכול להיות כמה מקורות. (10) היא [המרצה] הגדירה את זה ככה. לכל מקור יש תמונה אחת. (18) זה יחיד לכל מקור. (24) כי לכל מקור יש תמונה אחת. (27) ההגדרה היא שלכל מקור יש תמונה יחידה. לא שלכל תמונה יש מקור יחיד.
3	התאמה שבה למקורות שונים יש תמונות שונות, היא פונקציה (קבוצה IV).	לכל מקור, בדוק אם יש לו תמונה אחת. אז, בדוק האם כל התמונות שונות זו מזו. אם שני התנאים מולאו, אז ההתאמה היא פונקציה.	(1) כי כל מקור צריך תמונה יחידה. כאן, יש תמונות דומות. (5) אבל זו אותה תמונה. (15) היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה. (25) יש לנו תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות.

קטע 4: שימוש במתווך שונה



איור 5: ג

הדיון הבא התרחש בשיעור העוקב (שיעור 5) בזמן שעבדו הסטודנטיות בקבוצות קטנות על דף עבודה. דף העבודה כלל 20 גרפים, והסטודנטיות התבקשו לסמן את הגרפים המתווכים פונקציות. השיחה בין שתי הסטודנטיות (שתיהן מקבוצה III, תכתוב 3) התחילה אחרי שכל אחת מהן סיימה את המשימה לבדה. הסטודנטיות השוו את הפתרונות שלהן, וראו כי תשובותיהן מנוגדות זו לזו (איור 5). בתכתוב להלן נראה את השיחה ביניהן.

תכתוב 4: שימוש במתווך שונה לפונקציה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מאי	III	למה זו לא פונקציה? [מצביעה על גרף c (איור 5)]
2	נעה	III	כי אם זה לא ריבוע, זה קו ישר
3	מאי	III	רגע, אבל דיברנו על מקורות,
4	נעה	III	איזה קשר יש לזה עם מקור ותמונה?
5	נעה	III	לא משנה, אני אכתוב את זה. במקרה הגרוע המרצה תגיד שזה טעות

בשיעור הקודם שתי הסטודנטיות היו באותה הקבוצה. בשיחה זו הסטודנטיות השתמשו בנרטיבים אחרים כדי לקבוע האם גרף נתון מתווך פונקציה. בעוד מאי השתמשה בהגדרה המקובלת (תור 3), נראה כי נעה נשענת על נרטיב קודם שלה לגבי גרף של פונקציה (תור 2). לפי נעה, גרף של פונקציה יכול להיות של קו ישר או של פרבולה – גרף של פונקציה מהמעלה השנייה. כל גרף אחר יזוהה כ"לא פונקציה". זאת אף שבשיעור הקודם, במהלך העבודה על טבלאות, שתי הסטודנטיות השתמשו בהגדרה הנתונה כנרטיב המקובל לקביעת השימוש במילה פונקציה. הסטודנטיות לא הגיעו להסכמה, אך בחרו לא להתווכח (תור 5). כל אחת רשמה את התשובה שלה והמתינה שהמרצה תקבע מה התשובה הנכונה.

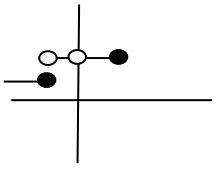
סיכום קטע 4

טבלה 3 מסכמת את הנרטיבים והרוטינות שמעלות הסטודנטיות בבואן לקבוע האם גרף נתון (איור 5) מתווך פונקציה.

טבלה 3: נרטיבים ורוטינות של הסטודנטיות לשימוש במילה "פונקציה" עבור מתווך גרפי

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
4	יש שני סוגי פונקציות: קוויות (הגרף שלהן הוא קו ישר) וריבועיות (הגרף שלהן הוא פרבולה).	זיהוי הגרף המתאר את ההתאמה. אם הגרף אינו של קו ישר או של פרבולה, אז ההתאמה אינה פונקציה.	(2) כי אם זה לא ריבוע, זה קו ישר.
4	ההגדרה של פונקציה רלוונטית למתווך טבלאי, אבל לא למתווך גרפי.	כדי לזהות האם עצם נתון הוא פונקציה, יש לזהות את המתווך. אם המתווך הוא גרפי, יש לפעול לפי הרוטינה הקודמת.	(4) איזה קשר יש לזה עם מקור ותמונה?
4	הגדרה היא הנרטיב הקובע את השימוש במילה גם כאשר העצם מתווך כגרף.	לזיהוי עצם, יש לבחון אם הוא ממלא אחר התנאים המצוינים בהגדרה.	(3) ... אבל דיברנו על מקורות

קטע 5: האם גרף b מתווך פונקציה?



לאחר שהסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות, פתחה המרצה בדיון מליאה על דף העבודה. הדיון התחיל באזכור גרף b (איור 6). גרף זה מתאר פונקציה בחלקים, רעיון שלא הוצג או נדון קודם לכן בכיתה.

איור 6: גרף b

תכתוב 5: שימוש במתווך אחר לפונקציה

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מרצה	תגידו לי, מה אתן אומרות על y? אה, על [גרף] b, סליחה.
2	פזית	ב-b, כן, כן, אה, אני קצת מהססת, כי
3	מרצה	בואי, שתפי אותנו, אנחנו נעזור לך
4	פזית	יש נקודה שהיא כאילו מוגדרת, ויש, כאילו, לכל, אה, לכל איקס יש וואי יחיד ומצד שני, לאיקס הזה יש עוד וואי...

שיחה זו מתמקדת בשאלה "כיצד יש להשתמש במילה (פונקציה)?". נראה כי אין ספק בשימוש בהגדרה כנרטיב הקובע את השימוש במילה (תור 4), וההגדרה מצוטטת כמו בתכתוב 1. עם זה הגרף הנתון (גרף b) כולל סמלים שעדיין הסטודנטיות לא מכירות (עיגול ריק ועיגול מלא). הניסיונות של פזית לקבוע האם הגרף מתווך פונקציה נמצאים בהתאמה להגדרת פונקציה (תור 4).

תכתוב זה מראה כי אפילו אחרי שהסטודנטיות קיבלו את ההגדרה של פונקציה כנרטיב היחיד הקובע האם גרף נתון מתווך פונקציה, עדיין עלולים להיות מכשולים, כמו סמלים לא מוכרים המתווכים רעיונות שטרם נידונו.

דיון

פרק זה עונה על השאלה: אילו תהליכי למידה קשורים לזיהוי מתוך הגדרה של עצמים מתמטיים על-ידי תלמידים? כפי שצוין לעיל, אנו רואות למידה כשינוי בשיח של הלומדים (Sfard, 2008). בקטעי השיח שהובאו לעיל עמדנו על מספר שינויים בשיח הסטודנטיות לגבי פונקציה, שסיפקו עדות ללמידה. שינויים אלה כללו שינוי ברמת-על של קבלת ההגדרה כנרטיב היחיד לזיהוי, וכן שינוי בעיסוקן במילים "יחידה", "לכל" ו"פונקציה". בעוד שזיהוי במתמטיקה הוא תמיד מתוך הגדרה, זה לא תמיד המצב בבתי הספר (Hershkowitz & Vinner, 1984; Wilson, 1990). גם במקרים שבהם דנים בהגדרות במפורש עם התלמידים והם יכולים לצטט הגדרות פורמליות, לא כל התלמידים משתמשים בהן לזיהוי עצמים מתמטיים.

מחקרים למיניהם מראים שהעיסוק בהגדרות ובתפקיד שלהן במתמטיקה, ובעיקר בדיונים על ההגדרות מאפשר ללומדים לפתח מושגים מתמטיים מגוונים (Dawkins, 2014; Ouvrier-Buffet, 2011). אנו טוענות כי הקונפליקט התקשורתי עומד בבסיס התהליך שאִפשר את השינויים בשימוש שעשו הסטודנטיות בהגדרה כנרטיב לזיהוי עצמים. תכתובים 2 ו-3 הראו כיצד הסטודנטיות זיהו את המהות של אי-ההסכמה (הקונפליקט) ביניהן, וכי הקונפליקט נפתר. כדי שזה יתרחש, הגדירו הסטודנטיות במפורש את השימוש שהן עושות במילה פונקציה, וכן את הנרטיבים והרוטינות שעל פיהם הן קבעו אם עצם נתון (טבלה או גרף מסוימים) מתווך פונקציה. מעבר לכך, כדי לפתור את הקונפליקט, הסטודנטיות היו צריכות להבין כיצד עמיתותיהן משתמשות במילה (למשל, המילה "לכל" בתכתוב 2 והמילה "יחידה" בתכתוב 3). אז היה עליהן להגיע להסכמה על השימוש שלהן במילים באופן שיהיה קוהרנטי עם השימוש המתמטי. בתוך כך הן שילבו את השיח שלהן ברמת העצמים (לגבי פונקציה ספציפית) עם שיח-העל (לגבי הגדרה של מילה מסוימת, וכן לגבי עצם הרעיון של הגדרה כאבן הבוחן לזיהוי פונקציה). לכן זוהי דוגמה ללמידה ברמת-על שהיא תוצאה של התפתחות אנכית של השיח (לגבי פונקציות).

שימו לב כי בתכתובים 2 ו-3 התקיימה שיחה בין התלמידות ללא משתתף מומחה בקבוצה. הן ראו בהגדרה "קולו של המומחה". כלומר חשיפה לשיח של המומחה (Sfard, 2008) עשויה להספיק כדי לפתור קונפליקט תקשורתי במצבים מסוימים. לפיכך קונפליקט תקשורתי יכול להיפתר לא רק בעזרת מעורבות פעילה של משתתף מומחה, אלא גם על-ידי מתווך המביא את קולו של המומחה. אנו לא טוענות כי ההגדרה עצמה מספיקה ללמידה ברמת-על, שכן ידוע שלעתים קרובות תלמידים אינם רואים בהגדרה אבן בוחן לזיהוי עצמים מתמטיים (Vinner, 1990). טענתנו היא כי אפשר ליצור סיטואציות למידה מורכבות שבהן ההגדרה מספקת את תפקיד המומחה.

כפי שנמצא במחקרים אחרים, קונפליקט תקשורתי עשוי להיפתר לעתים ברמה מקומית ולא להביא עמו שינוי ארוך טווח בכללי-העל של השיח של הלומדים. כמו כן ייתכן שהשינוי לא ייראה בהכרח בהקשרים אחרים (לגבי עצמים אחרים או מתווכים מסוג אחר). כך לדוגמה סינקלייר ומוס (Sinclair & Moss, 2012) וכן ספרד (Sfard, 2007) הראו כי ילדי גן שהשתמשו בהגדרה ככלי לזיהוי משולשים, לא השתמשו בהגדרה לזיהוי ריבועים. העדויות שלנו מלמדות על כך שהקונפליקט התקשורתי שזוהה

בתכתובים 2 ו-3 נפתר לאחר שהושגה הסכמה על השימוש במילה "פונקציה". אולם לפחות עבור סטודנטית אחת ההסכמה הייתה מקומית בלבד. כך בעוד שיש בידינו עדות כי בסוף שיעור 4 רוב הסטודנטיות השתמשו במילה "פונקציה" כפי שמקובל במתמטיקה (על-פי ההגדרה), איננו יכולות לומר כי עבור סטודנטיות אלו ההגדרה תשמש תמיד ככלי היחיד לזיהוי עצמים מתמטיים. תכתוב 4 מדגים את האופי התובעני מבחינת זמן ואנרגיה הכרוכים בתהליך פתרון קונפליקט תקשורתי. תכתוב זה מדגים עוד כי לעתים לומדים מעדיפים לא להגיע להסכמה, אלא לפסוע במשעול הקל ולחכות לגזר הדין של המורה. בכך הם מחמיצים הזדמנות ללמידה.

מה היו התכונות המיוחדות של המקרים שהובאו במאמר זה ואפשרו למידה ברמת-על? על-פי בן-צבי וספרד (Ben-Zvi & Sfard, 2007) כדי שתתרחש למידה ברמת-על, כל המשתתפים צריכים להסכים, גם אם זו הסכמה סמויה, לשלושה היבטים יסודיים של תהליך התקשורת: השיח המוביל, התפקיד שלהם בשיח ואופיו של השינוי המצופה. בתכתובים שהוצגו במאמר זה כל שלושת ההיבטים מולאו ויש עדות ללמידה ברמת-על. גם השיח המוביל היה קוהרנטי דיו עם השיח המתמטי המקובל לגבי זיהוי מתוך הגדרה של עצמים. הסטודנטים האחרים (או לפחות חלקם) קיבלו שיח זה כמוביל. השינוי המצופה – של זיהוי פונקציה על-פי ההגדרה – הושג חלקית כפי שעולה מתכתוב 4.

לסיום נציין שלוש תוצאות ממחקר זה באשר להוראה. הראשונה, שינוי ברמת-על בשיח יכול להיות תלוי מתווך, ולכן על המורה לעסוק במתווכים שונים של אותם עצמים כדי לעזור ללומדים לקשר ביניהם ולפתח שיח מוכלל.

השנייה, במתמטיקה הבית-ספרית הגדרת בורבאקי (Bourbaki) לפונקציה הנשענת על תורת הקבוצות, אינה מוצגת ללומדים כי היא נחשבת מופשטת. ההגדרה המוצגת במתמטיקה הבית-ספרית (שבה השתמשה המרצה במחקר זה) נתפסת כנגישה ללומדים. עמדנו על שני מוקדים של קושי בהגדרה זו. להלן מוקדים אלה: (1) יחידות התמונה עבור מקור מסוים; (2) הכמת "לכל". על המורה להתחשב בשני מוקדים אלה בעת הוראת פונקציות, שכן לומדים צריכים לפרק את ההגדרה למרכיביה בטרם יוכלו להשתמש בה.

התוצאה השלישית, לומדים יכולים להשתתף ואפילו ליזום דיון ברמת-על שהוא חיוני ללמידה ברמת-על, למשל כדי ללמוד שזיהוי עצמים במתמטיקה הוא מתוך הגדרה. ייתכן שהדיון שהודגם בפרק זה התאפשר הודות לידע קודם של הסטודנטיות, ולעובדה שהן לומדות נושא זה בפעם השנייה. דרושים עוד מחקרים כדי לאשש או להפריך סוגיה זו.

מבחינה מחקרית, אף שהנושא של למידת פונקציות נחקר רבות על יסוד תאוריות שונות, ההסתכלות בעיניים תקשורתיות על תהליכי הלמידה אפשרה הארה של היבטים אחרים שהיו סמויים עד כה, היבטים הקשורים ללמידת מתמטיקה בכלל ואינם מוגבלים לתחום תוכן מתמטי מסוים.

רשימת מקורות

משרד החינוך (2012). תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז', ח', ט' בכל המגזרים. אוחזר מתוך http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Chatav/TachnitLimudim/

Alcock, L., & Simpson, A. (2002). Two components in learning to reason using definitions. In *Proceedings of the second international conference on the teaching of mathematics*, Crete, Greece. Retrieved from http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap110.pdf

Aristotle (384-322 BC). Topics, VI, 4 (W. A. Pickard-Cambridge, Trans.). In D. L. Slider (Ed.), *Logos virtual library*. Retrieved from http://www.logoslibrary.org/aristotle/topics/604.html

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Éducation and Didactique, 1*(3), 117-134.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education, 7*(3), 243-362.

Chapman, A. P. (2003). Language practices in school mathematics: A social semiotic approach. Lewiston, NY: The Edwin Mellen.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J. N., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to grasp linear function: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction, 19*(2), 215-252.

Copi, I. M. (1972). *Introduction to logic* (4th ed.). New York: Macmillan.

Dawkins, P. C. (2014). How students interpret and enact inquiry-oriented defining practices in undergraduate real analysis. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*(1), 88-105.

De Villiers, M. D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *American Mathematical Monthly, 111*(5), 411-424.

Euclid (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (T. Heath, Trans., 2nd ed., Vol. 1). New York: Dover Publications.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521-544.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E. (1996). The psychological nature of concepts. In H. Mansfield, N. A. Pateman, & N. Bernardz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 102-119). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2000). Definition as a teaching object: A preliminary study. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima* (Vol. 2, pp. 289-296). Hiroshima, Japan: The Nishiki Print Co.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1985). *Language, context and text: Aspects of language in a social-semiotic perspective*. Geelong, Victoria, Australia: Deakin University.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How can geometry students understand what it means to "define" in mathematics? *Mathematics Educator, 15*(2), 17-24.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The Role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 223-228). Rehovot: Weizmann Institute of Science.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concept in elementary geometry – A reflection of teacher's concepts? In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the Eighth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 63-69). Darlinghurst, Australia: Mathematical Association of New South Wales. (ERIC Document Reproduction Service No. ED306127).

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(1), 1-17.

Kim, D. J., Ferrini-Mundy, J., & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 86-108.

Kobiela, M., & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(4), 423-454.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215-234). Ottawa, Ontario: Legas.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28.

Meehan, M. (2002). Students meeting advanced mathematics for the first time: Can mathematics education research help. *Irish Mathematical Society Bulletin*, *49*, 71-82.

Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education, 19*(2), 102-116.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 49-80.

Mountwitten, M. (1994). Acquisition of mathematical concepts by means of definitions and examples by elementary school students (A study submitted for Ph.D.). The Hebrew University, Jerusalem.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51-52*(3), 10-27.

O'Halloran, K. (2005). Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images. Continuum Press.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: In-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Piaget, J. (1957). *Logic and psychology*. New York: Basic books.

Pimm, D. (1987). Speaking mathematically: Communications in mathematics classrooms. London & New York: Routledge & Kegan Paul.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 51-73.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, *23*(2), 139-159.

Schleppegrell, M. J. (2010). Language in mathematics teaching and learning: A research review. In J. N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 73-112). Charlotte, NC: Information age publishing.

Schoenfeld, A. H., Smith III, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*

(Vol. 4, pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schwarts, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concepts? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362-389.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 201- 208). Norwich, United Kingdom: PME.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shapes identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research, 51-52*(3), 28-44.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 373-393.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, *47*(3), 497-509.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. In F. Christie (Ed.), *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes* (pp. 185-216). London: Cassell.

Viirman, O. (2014). The functions of function discourse–university mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International journal of mathematical education in science and technology*, *45*(4), 512-527.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions – the case of a tangent. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 24-28). Antwerpen: Universitaire Instelling.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: Their causes and function in learning mathematics. *Focus on learning problems in mathematics, 12*(3-4), 85-98.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplis (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, CA: University of California, Lawrence Hall of Science.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language* (A. Kozulin, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 203-233.

Wawro, M., Sweeney, G., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics, 78*(1), 1-19.

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on learning problems in mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(5), 356-387.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 119-140.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.



ד"ר טלי נחליאלי
ראש התכנית "הוראה ולמידה" לתואר שני במכללת לוינסקי לחינוך וראש תכנית "דלתא" להכשרת מורים מצטיינים למתמטיקה ומדעים. תחומי המחקר שלה מתמקדים בשיח המתמטי המתפתח בשיעורי המתמטיקה, וכן בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.



פרופ' מיכל טבח
חברת סגל בכיר באוניברסיטת תל-אביב בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי. במחקריה היא עוסקת בין השאר בסוגיות העולות מתוך שילוב טכנולוגיה בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובהתפשטות ידע מתמטי בכיתה. מיכל חוקרת באמצעות גישת המחקר התקשורתית זה כעשור.

מאמר תגובה: מה משתקף מהגיליון לגבי התפתחות התאוריה הקומוגניטיבית דרך מימושיה?

בוריס קויצ'ן, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מיקוד התגובה

בדומה לבני אדם, תאוריות מדעיות חוות תקופות שונות במהלך חייהן. אחד האירועים הקריטיים לאדם צעיר הוא עזיבת הבית המחבק של הוריו ויציאה לעולם הגדול לקראת החיים העצמאיים. שמונה שנים בלבד עברו מפרסומו של הספר *Thinking as communicating*, אך אפשר לומר שהתאוריה הקומוגניטיבית-התקשורתית של אנה ספרד "יוצאת מהבית" במובן הבא. תלמידיה של אנה ממשיכים להשתמש בתאוריה במחקריהם שנערכו יחד אתה או בלעדיה, וחוקרים נוספים שמצאו את התאוריה "בשוק החופשי" של תאוריות, בחרו להשתמש בה כמו כן. גיליון מיוחד זה שיוצא לאור אחרי שני גיליונות מיוחדים על התאוריה הקומוגניטיבית בכתבי עת בינלאומיים, מעיד על כך.

נוסף על כך, הגיליון מעיד על כך שהתאוריה היא "חיה". מחשבה זו חלפה במוחי באחד הסבבים של קריאת המאמרים שבגיליון. עצרתי ושאלתי: "אין מושג כזה! מהי הכוונה?". לאחר שיח של שעתיים עם עצמי ובעצה אחת עם תומס קון (Kuhn, 1977) ניסחתי חמש שאלות שעזרו לי להבחין בין המושגים שבהם נהגתי להשתמש באופן אינטואיטיבי: "תאוריה חיה" ו"תאוריה דוגמטית". הנה השאלות:

האם חוקרים שמשתמשים בתאוריה מסוימת מסבירים מדוע הם בחרו בה?

אם כן, הכיצד? כנראה שאם תאוריה היא "דוגמטית", אין לחסידיה צורך להסביר את בחירתם מפני שהם לא שוקלים אלטרנטיבות.

האם התאוריה משתנה עם הצטברות נתונים חדשים? בפרט, האם מילון מושגיה מתפתח? כנראה שאם תאוריה היא "דוגמטית", מילון מושגיה נשאר ללא שינוי.

האם אפשר להשתמש באלמנטים מסוימים של תאוריה ולא להשתמש באלמנטים אחרים? כמו כן, האם ניתן להשתמש בקוהרנטיות באלמנטים של תאוריה שבנידון בשילוב עם אלמנטים של תאוריות אחרות?[1]

1. הקורא יכול לשים לב ששאלה זו היא וריאציה של הקריטריון השני של "תאוריה טובה" על-ידי תומס קון: "Second, a theory should be consistent, not only internally or with itself, but also with other currently accepted theories applicable

כנראה שאם תאוריה היא "דוגמטית", אפשרויות אלה אינן פתוחות.

האם שימוש בתאוריה מביא לתועלת "ברורה", קרי, תועלת שאפשר להסביר אותה ולשכנע בה גם את אלה שלא משתמשים בתאוריה או לא מכירים אותה? במילים אחרות, האם מסקנות והשלכות של מחקר שנשען על תאוריה מסוימת נשארות "מעניינות" גם כשמנסחים אותן בשפה אחרת או אפילו ב"שפה פשוטה"?[2]

כנראה שאם התאוריה היא "דוגמטית", צריך להפוך לחסיד שלה כדי להעריך את מסקנותיה והשלכותיה.

האם חוקרים שמשתמשים בתאוריה מציינים שאלות פתוחות שעדיין אין אפשרות להשיב עליהן במונחים של התאוריה או אפשר להשיב עליהן במונחים של תאוריות אחרות? כנראה שאם תאוריה היא "דוגמטית", חסידיה לא נוטים להכיר את מגבלותיה ולא נוטים לתת קרדיט לתאוריות אחרות.

במאמר תגובה זה אתמקד בשאלות הנזכרות לעיל.

לפני שאתחיל אעיר שלוש הערות במקום. **אחת**, השאלות לעיל מזמנות דיון על מאפיינים של תאוריה כמשתקפים ב**אוסף** נתון של מאמרים, ולא בכל מאמר בנפרד. במילים אחרות, בשביל לנמק את המסקנה "תאוריה מסוימת היא חיה", תשובה על כל שאלה עבור כל מאמר שבאוסף לא בהכרח אמורה להיות "כן". עם זאת, האוסף כולו אמור להתאפיין על-ידי חמש התשובות החיוביות. **השנייה**, למותר לציין שבין הקצוות "תאוריה חיה" לבין "תאוריה דוגמטית" (קרי, חמש תשובות על השאלות לעיל הן שליליות) יש מגוון אפשרויות. **שלוש**, בחרתי לדון בשאלות הללו בקשר לתאוריה הקומוגניטיבית לא מכיוון שתאוריה זו דורשת הצדקה נוספת או הגנה – ששת המחקרים המרשימים שמובאים בגיליון מדברים בעד עצמם בקול חזק דיו – אלא בגלל תקוותי שעיסוק בשאלות עשוי לגלות נטיות מעניינות בהתפתחות התאוריה. סיבה נוספת היא יהבי שהשאלות הללו עשויות להיות שימושיות גם בדיונים העתידיים על תאוריות נוספות שנמצאות "בשוק" בתחום שלנו.

מדוע קומוגניציה?

שימוש בתאוריה הקומוגניטיבית הוא המאפיין המאחד את כל המחקרים שהוצגו בגיליון זה. לכן לא היה מובן מאליו שהמחברים והמחברות יבחרו לפרט מדוע הם אימצו את התאוריה דווקא בגיליון הזה. עם זאת, הסברים מתאימים מופיעים ברוב המאמרים שבגיליון.

עירית לביא ואנה ספרד מזכירות לקורא שהצורך בפיתוח התאוריה התקשורתית התעורר במחקרים הקודמים שלהן על חשיבה מספרית (בפרט Sfard & Levi, 2005), כאשר "...נתקלנו בתופעות שלא מצאנו להן הסבר או אף אזכור בספרות שסקרה את הנושא" (עמ' 23). לביא וספרד ממשיכות ומסבירות שהן חשדו ששימוש בתאוריות הקיימות עלול לגרום לכך שתופעות מעניינות תחמוקנה מעדשותיהן

to related aspects of nature" (Kuhn, 1977, p. 357).

2. שאלה זו היא בתהודה עם קריטריון הפשטות (simplicity) של תומס קון (Kuhn, 1977) עבור "תאוריה טובה".

התאורטיות של החוקרים. הסבר זה אומר לקורא שהחוקרות כן שקלו אלטרנטיבות. נוסף על כך, הנימוק מסוג "ללא תאוריה חדשה לא היה אפשר לזהות ולחקור תופעות מעניינות" מתחבר היטב לאחד העקרונות הבסיסיים של התפתחות המדע, הוא העיקרון הידוע בשם "תערו של אוקאם" (באנגלית, Occam's razor). כוונתי לגרסתו האונטולוגית של העיקרון: *אין לטעון טענה או להניח ישות, אם אין בה צורך כדי להסביר משהו*.[3] לצורך העניין אכנה את הנימוק הזה שמצאתי במאמרן של עירית לביא ואנה ספרד בכינוי "בהתאם לתערו של אוקאם".

אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח כותבות בתחילת מאמרן שעניינו אפיון שיח כיתתי בנושא "מעגל": "חוקרים שונים חקרו שיח זה [שיח כיתתי] בהסתמכות על כלים שונים ותאוריות שונות" (עמ' 70). החוקרות בחרו לא לפרט את הכלים והתאוריות שהוזכרו במשפט זה אלא להשתמש באסטרטגיית כתיבה אותה אכנה בשם "ישירות לעניין". בהתאם, ענאבוסי וטבח עוברות מיד להצגת שתי תאוריות שעל שילובן נשען המחקר, התאוריה הקומוגניטיבית והתאוריה SFL (Systemic Functional Linguistics). בעיניי, האסטרטגיה "ישירות לעניין" מבורכת ביותר (או לפחות צריכה להיות מבורכת) בתחום שלנו. עם זאת, בכובע של קורא שבחר לחפש במאמרי הגיליון תשובות על השאלה "מדוע קומוגניציה?", נשארתי עם ניחושים בלבד. הניחוש הטוב ביותר שלי (כאן ברצוני לבטא את שמחתי שבמאמר מסוג "מאמר תגובה" יש מקום לניחושים) הוא שהחוקרות ראו בשילוב של שתי תאוריות פוטנציאל לאפיין את השיח הכיתתי באופן מקיף. נראה שהשיקול העיקרי בבחירת המסגרת התאורטית היה חוזק מתודולוגי של כל תאוריה והרצון לבדוק את הפוטנציאל של שילובן. באופן דומה, שי כספי כותב במבוא למאמרו שאימוץ הגישה הקומוגניטיבית מאפשר לו "למלא את החסר" (עמ' 94) במחקרים קודמים על פיתוח חשיבה אלגברית, אך לא מפרט על הנושא ועובר "ישירות לעניין".

טלי נחליאלי ומיכל טבח משתמשות באסטרטגיה אחרת שאותה אכנה "הדגשת המשכיות". הן מתחילות את מאמרן באמירות שבדיעבד אפשר לפרשן כך: רעיונות קומוגניטיביים או תקשורתיים מושרשים בהיסטוריה של מחקר בחינוך מתמטי. אמירותיהן מתבססות על מקורות ספרותיים רבים. בפרט הן טוענות: "במהלך שני העשורים האחרונים יש עלייה במחקרים שטוענים כי אי אפשר להפריד בין שפה ובין למידת מתמטיקה" (עמ' 171-170). החוקרות ממשיכות באמצעות ציון הקשר בין שאלות שבהן עסקו מחקרים קודמים על השפה המתמטית (שאלות על שימושים במילים מתמטיות מסוימות על-ידי לומדים ושאלות על דרכי לימוד השימושים האלה) ובין שאלות המחקר שלהן (שאלות על תהליכי למידה ומנגנונים הקשורים בה לזיהוי עצמים מתמטיים על-ידי פרחי הוראה). לסיכום, מאמרן מציג שרשרת לוגית שמסבירה לקורא את ההחלטה של החוקרות לאמץ את הגישה התקשורתית והכוללת את המהלכים הדיסקורסיביים הבאים: למידה-שפה, שפה-תקשורת, תקשורת-הגישה התקשורתית.

עינת הד-מצוינים בונה רציונל לאימוץ של הגישה הקומוגניטיבית בהדרגה, ובמשמעות מסוימת, ברוח של הגישה הקומוגניטיבית עצמה. ניתן לכנות את האסטרטגיה שלה בכינוי "עיצום הדרגתי של מושגים

3. סובר (Sober, 1979) מייחס נוסח זה של העיקרון לבוינחר (Boenher). כמו כן, ראה בקר (Baker, 2004) לדיון בתערו של אוקאם בהקשר לבניית תיאוריות מדעיות, וקויצ'ו (Koichu, 2008) לדוגמאות של שימוש בעיקרון זה במחקר בחינוך מתמטי.

מרכזיים". נזכיר שמאמרה של עינת דן בשורשיה של התופעה הנפוצה למדי: יש תלמידים "חלשים" ותלמידים שאינם מסוגלים ללמוד מתמטיקה "למרות כל ניסיונות ההוראה" (עמ' 121). אחרי דיון במספר גישות לחקר התופעה, החוקרת פונה לגישה הסוציו-תרבותית ומתחילה לדון בדוגמאות ממחקרים קודמים. בדיון זה מופיעים ביטויים, כמו "זיהתה את עצמה כתלמידה טובה במתמטיקה", "חישובים באופן ריטואלי", "השתתפות חקירתית", "עיצום" (objectification), ו"שיח מתמטי" (עמ' 122). נראה שעינת מנסה לעזור לקורא להתרגל לשפה התקשורתית ולהשתכנע שזו (השפה) הייתה מועילה במחקרים שנעשו בעבר. עינת מציגה את המונחים החשובים למחקרה באופן טבעי ולא לגמרי פורמלי, ורק לאחר מכן מגדירה אותם במדויק, בתת-פרק על כלים קומוגניטיביים. לקורא כמוני, גישה זו אינה משאירה ספק שהחלטת החוקרת להשתמש בגישה הקומוגניטיבית הייתה מחושבת היטב מתוך הידיעה על היתרונות והמגבלות של גישות אלטרנטיביות.

אביטל אלבוים-כהן דנה בשאלה "למה קומוגניציה?" במפורש, בתת-פרק נפרד של מאמרה. היא עונה על השאלה משתי פרספקטיבות, זאת של חוקרת וזאת של מורה. בפרט, היא כותבת:

> הבחירה בקומוגניציה (Sfard, 2008) כמסגרת תאורטית נולדה מתוך צורך עמוק לחיות בתוך עולם מושגי מוגדר היטב. בחרתי בקומוגניציה בעקבות האמונה שחשוב כי מושגי יסוד בתחום המחקר שלי כמו "חשיבה" ו"למידה" יהיו מוגדרים היטב בהגדרה אופרציונלית שאינה משתמעת לשתי פנים. וכן האמונה שתקשורת בין לומדים היא דבר חשוב. הצלילה לתוך התאוריה הקומוגניטיבית גילתה לי כי זו תאוריה חובקת עולם שמאירה את המציאות באור חדש ומציעה לחוקרים כלי עבודה שנראים מבטיחים (עמ' 147).

בקצרה, דיוק, טווח וחוזק מתודולוגי של התאוריה משכו את אביטל להשתמש בה.[4] ברצוני להזכיר שמאפיינים אלה צוינו ואף הודגשו בכל מאמר תגובה שבגיליונות המיוחדים הקודמים על התאוריה הקומוגניטיבית (Forman, 2012; Kieran 2012; Presmeg, 2016).

לסיכום: משתקף מהגיליון שחוקרים וחוקרות שמשתמשים בתאוריה הקומוגניטיבית בדרך כלל מוצאים לנכון להסביר מדוע הם בחרו בה. כמו כן, משתקף שההסברים הם שונים ומגוונים עד כדי כך שלא לגמרי ניתנים לשילוב באוסף קוהרנטי כלשהו של הסברים (למשל, ראו את "בהתאם לתערו של אוקאם" ו"הדגשת המשכיות"). כמובן, אין שום צורך לאחד את ההסברים שחוקרים בעלי רקע שונה מביאים במאמריהם על מחקרים בנושאים למיניהם. אם כך, לאן אני חותר? למסקנה הבאה: נראה כי התאוריה הקומוגניטיבית היא עשירה דיה כדי למשוך חוקרים וחוקרות מסיבות שונות.

האם מילון המושגים של התאוריה מתפתח עם הצטברות נתונים חדשים?

4. שימו לב: דיוק (accuracy) וטווח (scope) הם הקריטריונים הראשון והשלישי של "תאוריה טובה" לפי תומס קון (Kuhn, 1977).

הגיליון מעיד על התפתחות המילון הקומוגניטיבי המקורי[5] (קרי, המילון שהציגה ספרד [Sfard, 2007, 2008]).

אפשר למצוא במאמרים שבגיליון שני סוגים של שינויים:

(א) **שינויים לרוחב** – הוצגו מונחים שמכנים סוגים של שיח, סוגים של שגרות או תופעות נוספות שלא זוהו או לא נחקרו בעבר; (ב) **שינויים לעומק** – הוצגו שינויים בהגדרות המושגים שבלבה של התאוריה בגרסתה המקורית.

א. דוגמאות לשינויים לרוחב

לא פלא שהתאוריה הקומוגניטיבית ה"יוצאת מהבית" מתפתחת לרוחב. הגיוני מאוד שמחקר על סיטואציה של למידה או הוראה שלא נחקרה בעבר (או לא נחקרה בעבר באמצעות הגישה הקומוגניטיבית) מציע מונחים חדשים המתאימים לסיטואציה.

למשל, המונח המרכזי במחקרו של שי כספי (המאמר הוא גרסה מתורגמת ומקוצרת של כספי וספרד [Caspi & Sfard, 2012]) הוא "מטה-אריתמטיקה ספונטנית". המונח הוצג בהמשך לדיון ב**אלגברה כמטה-שיח אריתמטי** שמופיע בספרה של ספרד (Sfard, 2008). המונח הוא דוגמה מצוינת להתפתחות של המילון הקומוגניטיבי לרוחב עם הצטברות נתונים חדשים. למעשה, תפקיד המונח הוא להצביע על מהות התופעה שבמוקד המחקר של כספי: התפתחות שיח אלגברי החל מצורתו הבלתי פורמלית ועד לצורתו הפורמלית כנלמד בבית ספר.

דוגמה נוספת באה ממחקרן של ענאבוסי וטבח. החוקרות זיהו שגרות והיגדים מקובלים בסיטואציה ספציפית שלא נחקרה בעבר, במהלך שיעורים עם פרחי הוראה בנושא "מעגל". לכינוי של אחת השגרות השתמשו החוקרות במונח הקיים בתוך המערך המושגי הקומוגניטיבי, "שימוש במתווכים ויזואליים" (עמ' 78). לשגרה אחרת הן הציעו שם הידוע מהספרות העוסקת באסטרטגיות להוראה, "חזרה על אמירות התלמידים" (revoicing) (עמ' 79). כמו כן, היו לא מעט מקרים שבהם היה לחוקרות צורך להמציא שמות לשגרות שהן זיהו, כמו "פנייה לתלמידים בשמם" (עמ' 78) או "הצהרה על תחילת השיעור" (עמ' 77) ועוד. כאמור, המאמרים בגיליון כוללים דוגמאות רבות מסוג זה.

5. למותר לציין שהצגת מונחים חדשים אינה אינדיקטור יחיד או הכרחי לכך שלמחקר ישנה "תרומה תאורטית". תרומה תאורטית של מחקר באשר לתאוריה מסוימת יכולה לבוא לידי ביטוי במגוון אופנים. למשל, מחקר יכול לחזק או להחליש סטטוס אפיסטמולוגי של טענות התאוריה, להרחיב טווח שימושיה, להראות קשר חדש בין התאוריה שבנידון לבין תאוריות אחרות ועוד.

ב. דוגמאות לשינויים לעומק

בקשר למונח רוטינה או שגרה

המונח "רוטינה או שגרה" הוא אחד ממונחי הלבה של התאוריה הקומוגניטיבית. אנה ספרד (Sfard, 2008) מגדירה אותו כך:

> *Routine* may be defined as a set of meta-rules that describe a repetitive, goal-directed discursive action (goal-directed means that the action is undertaken as a re-action to a well-defined type of situations) (p. 208)

נתבונן בשלוש הגדרות של המושג שמופיעות בגיליון:

1. בסקירה של יסודות התאוריה, טלי נחליאלי ומיכל טבח מגדירות במאמרן "רוטינות" כ"דפוסי תקשורת החוזרים על עצמם במצבים דומים" (עמ' 176).

2. אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח משתמשות בהגדרה הבאה: "שגרות – אלה דפוסים קבועים לעשיית דברים שחוזרים על עצמם המוגדרים היטב בפעולות בני השיח" (עמ' 72).

3. עירית לביא ואנה ספרד משתמשות בנוסח הבא בתחילת מאמרן: "רוטינות הן דפוסי עשייה שחוזרים על עצמם. מהותה של פעולה רוטינית בכך שהיא משחזרת ביצועים אשר נצפו בעבר במצבים דומים. הזדמנויות להופעת רוטינות נוצרות, על כן, כאשר אותה מטלה חוזרת על עצמה שוב ושוב" (עמ' 25).

כפי שאפשר לראות, הגדרות 1-3 הן כולן ברוח של ההגדרה המקורית, אך אינן זהות. שאלתי את עצמי: האם וריאציות במילים (למשל, "דפוסים טיפוסיים" בהגדרה 1 ו"דפוסים קבועים" בהגדרה 2) מבטאות וריאציות במשמעות? חשבתי ששאלה זו עשויה להיות מעניינת מאחר שהווריאציות כנראה אינן תוצאות של ענייני תרגום מהשפה האנגלית לשפה העברית. ואמנם, מיכל טבח מעורבת בנוסח הגדרות 1 ו-2, ואנה ספרד עצמה מעורבת בנוסח הגדרה 3. לביא וספרד מצטטות את וויטגנשטיין: "משמעותה של מילה היא אופן השימוש בה" (עמ' 24). ברוח רעיון זה הסתכלתי על שימושים במושג "רוטינה או שגרה" במאמרים שבגיליון. לצורך העניין אתמקד במאמר של ענאבוסי וטבח ובמאמר של לביא וספרד.

ראיתי שאחלאם ענאבוסי ומיכל טבח **סופרות** כמה פעמים מופיעה בגוף הנתונים כל רוטינה שהן זיהו. חשבתי: הביטוי "דפוסים קבועים" בהגדרה 2 אכן יותר מתאים לצורך הספירה מאשר הביטוי המעורפל יחסית "דפוסים טיפוסיים" שבהגדרה 1. נראה כי אחלאם ומיכל השתמשו בזכותן כחוקרות לפרש את ההגדרה המקורית בדרך שאינה סותרת אותה, אך משרתת היטב את כוונתן להשתמש באלמנטים של ניתוח כמותני.

עירית לביא ואנה ספרד פיתחו את ההגדרה המקורית בכיוון אחר, והיו גלויות בכך. בדיון מרתק במונחים "אותה מטלה" ו"שחזור פעולה" (עמ' 25), החוקרות טענו שאין שחזור מושלם של מצב שהיה בעבר, ואין העתק מושלם של פעולה שבוצעה בעבר. אפשר לומר שעירית ואנה פירטו את המונח "מצב שהוגדר

היטב" שבהגדרה המקורית, והדגישו שדווקא אין **מצבים קבועים** בעיניים של לומד. בתום דיון זה (עמ' 26) הן מגדירות את המונח "הרוטינה המופעלת בידי הלומד ב'מצב מטלה'" באמצעות מונחי-עזר, כגון **מצב המטלה, מרחב תקדימים והליך**. בהמשך הן מגדירות מחדש את המונחים **רוטינה של ריטואל, רוטינה של מעשה ורוטינה של חקירה**. נוסף על כך, שמתי לב שהמונח "שיח" שמופיע בהגדרה המקורית ובהגדרה 2, אינו מופיע (לפחות לא בגלוי) בהגדרה 3 ובהגדרה של "רוטינה מופעלת במצב מטלה" (עמ' 26). חשבתי: נראה שהחוקרות שמות במרכז עבודתן את ההבחנה בין "רוטינות מעשיות ורוטינות דיסקורסיביות" (עמ' 26). כמובן, זאת בלא להמעיט בערך של המושג "שיח" בתאוריה כולה.

מתבקשת שאלה – מה גרם לחוקרות להציע שינויים כה משמעותיים בהגדרות הלבה של התאוריה? זאת כנראה בגלל הצטברות הנתונים החדשים. ואמנם, אם נסתכל בשימוש במונחים שלעיל במחקרן של לביא וספרד, נראה שההגדרות החדשות מתאימות היטב לטיב הנתונים שנאספו, אותם אפשר לתאר כ"יחסית הרבה מעשים – יחסית מעט מילים". רוטינות מסוג מעשה היו מרכזיות בפעילותו של מעיין בן שנתיים ושמונה חודשים בתחילת המחקר. בנוסף לכך, ההגדרות החדשות מתאימות היטב לדיון באחת התופעות הבולטות של המחקר: פעילותו של מעיין הייתה רגישה מאוד לשינויים "קטנים" בדרך שבה הוצגה בפניו המטלה "איפה יש יותר?". לסיכום, נראה שדגשים בהצגת התאוריה הקומוגניטיבית הותאמו (בדיעבד?) לטיב הנתונים.

בקשר למושג למידה

שינוי נוסף (ואולי יותר עדין) אפשר למצוא בנוגע לשימוש במושג **למידה**. לצורך העניין, אמשיך לדון בדוגמאות מתוך מאמריהן של ענאבוסי, טבח, לביא וספרד.

בהתאם לתאוריה, ענאבוסי וטבח מתייחסות ללמידה כשינוי באחד מארבעת מאפייני השיח לפחות, שהם: **מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים או חזותיים, היגדים או נרטיבים מקובלים** (*endorsed narratives*), **רוטינות או שגרות**. כשהחוקרות מזהות שינוי במרכיב מסוים של שיח, הן משתמשות בעקביות בביטוי "התרחשה למידה" (עמ' 83, 86, 87, 88).

במאמרן של עירית לביא ואנה ספרד, *למידה מתפרשת* (גם בהתאם לתאוריה) כ"תהליך של הפיכת הלומד למשתתף מיומן של שיח מתמטי" (עמ' 31). בדומה לענאבוסי וטבח, לביא וספרד מתייחסות לשינוים במרכיבי השיח של מעיין כעדות ללמידה. למשל, שינוי הדרגתי בשימוש במילים כמו "הרבה" או "אין יותר" מתויג כ"למידה" בטבלה 1 (עמ' 37). עם זאת, החוקרות רואות את מהות הלמידה בהקשר של אינדיווידואליזציה של שיח מתמטי, ובהתאם לכך משתמשות בקריטריונים "מחמירים" ללמידה. בפרט, הן שמות דגש בעצמאות הלומד ומסבירות: "הלמידה תושלם כאשר הלומד יהפוך למשתתף פעיל, יוזם, מיומן ועצמאי, המסוגל להשתמש בשיח זה לפי רצונו ולצרכיו. במקביל, הרוטינות תהפוכנה מריטואלים לחקירות" (עמ' 31). משפט זה הוא העדשה התאורטית העיקרית בניתוח של תהליך התפתחות החשיבה המספרית של מעיין. משתקף מהמאמר כי לא כל שינוי בשיח של מעיין, אלא שינוי (קונסיסטנטי?) בסוג של הרוטינות, נתפס על-ידי החוקרות כעדות להתפתחות משמעותית.

הנחתי: לוּ אחלאם ומיכל היו משתמשות בקריטריון "שינוי ברוטינות, מריטואלים לחקירות, הוא עדות ללמידה משמעותית", הן כנראה לא היו יכולות לפרש את הלמידה שהן חזו כ"למידה שהושלמה". זאת מפני שרוטינות של ריטואל משתקפות באפיזודות שהחוקרות בחרו להציג במאמר. חשבתי: בשני המחקרים החוקרות מגיעות למסקנות שלמידה התרחשה, ואפילו שלמידה ברמת-על התרחשה, אך הסיפורים והקריטריונים שמאחורי המסקנות הם שונים למדי,[6] למרות ששני המחקרים נשענים על אותה הגדרה תאורטית של למידה.

לסיכום: משתקף מהגיליון כי המילון הקומוגניטיבי המקורי מתפתח הן לרוחב והן לעומק. התאוריה כוללת מידה מסוימת של גמישות בשימוש בהגדרות הבסיסיות, בהתאם לסיטואציות ומטרות מחקר שונות. כמו כן, קיימות וריאציות בהגדרות אופרטיביות. עובדה זו מצביעה על כך שהמילון הקומוגניטיבי כנראה ימשיך להשתנות ולהתפתח (ראו המשך של דיון בעניין זה בתת-הפרק במאמרה של אלבוים-כהן).

האם התאוריה ניתנת לשילוב עם תאוריות אחרות? באילו אלמנטים של התאוריה משתמשים יותר ובאילו משתמשים פחות?

שילובים

העדות הגלויה ביותר לאפשרות לשלב אלמנטים של התאוריה הקומוגניטיבית עם תאוריות נוספות באה ממחקרן של אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח. פיתוח כלי מחקר שמשלב אלמנטים של שתי תאוריות, התאוריה הקומוגניטיבית ו-SFL (Systemic Functional Linguistics), הוצהר ברציונל למחקר. אחלאם ומיכל מציגות את שתי התאוריות בצורה שמאפשרת לקורא להבין מדוע הן בחרו לשלב דווקא אותן. בפרט, ניתן להבין ששיח ומרכיביו במובן הקומוגניטיבי מתחברים היטב לשיח ותפקידיו במובן של SFL (קרי, תפקיד תוכן, תפקיד בין-אישי ותפקיד ארגוני). נראה שהתפקיד הארגוני של השיח שירת כתמריץ העיקרי לשילוב. באמצעותו החוקרות קישרו את פעילות ההוראה ופעילות הלמידה. לא קל לקבוע קשר זה באמצעות כלים קומוגניטיביים בלבד (ראו דיון על המשגת המושג הוראה התאוריה הקומוגניטיבית שבמאמר ההקדמה של טלי נחליאלי ומיכל טבח).

ראוי לציין שהשילוב הוכיח את עצמו כמועיל למרות השוני הקיים בין הנחות היסוד של התאוריות. במונחים של פרדיז'ר, בקנר-אשבש וארזרלו (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008), אסטרטגיה של קשירת קשרים בין תאוריות כך שמושגיהן משתלבים במסגרת מושגית אחת, אך הנחות היסוד של התאוריות לא בהכרח ניתנות לשילוב קוהרנטי, נקראת "combining":

6. כמובן, יש לקחת בחשבון שענאבוסי וטבח חיפשו שינויים בתהליך קצר יחסית של מספר ימים, לעומת לביא וספרד שדיווחו על שינויים בתהליך של 18 חודשים ובכל זאת ציינו שתקופת המחקר לא הייתה ארוכה דיה כדי להשלים את הסיפור על התפתחות של "שיח חקירתי מאוחד" (עמ' 66).

> The networking strategies of combining and coordinating are typical for conceptual frameworks, which do not necessarily aim at a coherent complete theory but at the use of different analytical tools for the sake of a practical problem or the analysis of a concrete empirical phenomenon. Combining theoretical approaches does not necessitate the complementarity or even the complete coherence of the theoretical approaches in view (ibid, p. 173).

מחברים ומחברות אחרים אינם מצהירים על כוונתם לשלב בין תאוריות. עם זאת, כל מאמר שבגיליון כולל מושגים שניתן לשייך לתאוריות מתאוריות שונות, לא רק לתאוריה הקומוגניטיבית. אין הפתעה בכך: התאוריה הקומוגניטיבית מקושרת היטב לתאוריות אחרות ובמידה מסוימת נשענת על תובנות שפותחו באמצעות תאוריות אחרות.

לדוגמה, עינת הד-מצוינים משתמשת בהסתמך על ספרד ולביא (Sfard & Levi, 2005), במושג "זהות" שהוגדר באופן הקומוגניטיבי, כאוסף סיפורים משמעותיים ומקובלים בנוגע לאדם, שבמקום לדבר על מה בן אדם עושה הם (הסיפורים) מדברים על "מי הוא". בדיון עדין ומעניין על פיתוח "ארגז כלים מושגי" (עמ' 123) לצורך מחקרה, עינת מזכירה לקוראים שמות של חוקרים רבים שהשתמשו במושג "זהות" בעבר בהקשרים שונים ובהתאם להגדרות שונות. ואמנם, המושג "זהות" אינו "קומוגניטיבי", אך הוא נכנס למילון הקומוגניטיבי יחד עם הגדרתו המיוחדת. זאת בדומה למושגים נוספים, כמו "חשיבה", "שיח", "מעשה", "למידה" ועוד.

באילו אלמנטים של התאוריה משתמשים יותר ובאילו משתמשים פחות?

רוב המחקרים שבגיליון מתמקדים בהתפתחות של שיח, ולכן לא פלא שארבעה מרכיבים של שיח הפכו לאלמנט התאוריה המוזכר ביותר. בארבעה מתוך ששת המחקרים (מאמריהם של לביא וספרד, ענאבוסי וטבח, כספי, אלבוים-כהן, נחליאלי וטבח), ארבעה מרכיבים של שיח משרתים כקטגוריות לניתוח. בשני מחקרים (של כספי והד-מצויינים) ניתן למצוא התייחסות לחלק מן המרכיבים. בין המרכיבים, המרכיב "רוטינות או שגרות" הוא הנפוץ ביותר. אלמנט נפוץ נוסף הוא ההבחנה בין למידה או שיח ברמת העצמים (object-level) ובין למידה או שיח ברמת-העל (meta-level).[7]

ומה לגבי מונחי התאוריה שבהם המחברים והמחברות נוטים להשתמש פחות? החלטתי לעקוב אחרי שימוש במושגים "חשיבה" ו"קוגניציה", המונחים שבתאוריה הקומוגניטיבית אמורים להיות חשובים. מצאתי שהמילה "קוגניציה" מופיעה אך ורק בהסברים אטימולוגיים של המילה "קומוגניציה". כמו כן, מצאתי שברוב המאמרים המילה "חשיבה" מוזכרת בסקירת יסודות התאוריה (למשל, חשיבה היא תקשורת של בן אדם עם עצמו או חשיבה היא שיח פנימי), אך בדרך כלל אין שימוש במילה "חשיבה"

7. ראוי לציין שנורמה פרסמג (Presmeg, 2016) הגיעה לאותה מסקנה במאמר התגובה שלה על חמישה מאמרים שפורסמו בגיליון מיוחד של- ESM (Educational Studies in Mathematics) על התאוריה הקומוגניטיבית.

מעבר לכך. רק במאמר של עירית לביא ואנה ספרד מצאתי שימוש במילה "חשיבה" לצורכי המחקר (כגון "חשיבה מספרית"). בנוסף לכך, רק במאמרים של לביא וספרד ושל כספי מצאתי שימושים יומיומיים במילה (למשל, "לאחר חשיבה מאומצת הגענו אז למסקנה..." [לביא וספרד, עמ' 23]).

אם כך, לאן אני חותר? אינני בטוח, כיוון שהרבה סיבות יכולות להיות מעורבות בשימוש המוגבל במילים "קוגניציה" ו"חשיבה" במאמרי הגיליון. ייתכן (כאן ברצוני שוב לבטא את שמחתי שבמאמר זה יש מקום לניחושים) שלרוב המחברים והמחברות פשוט לא היה צורך או מקום להשתמש במילה זו. ייתכן שהמשתמשים והמשתמשות בתאוריה הקומוגניטיבית מפתחים סגנון כתיבה זהיר במיוחד שבו אין מקום לשימוש יומיומי במושגים שהוגדרו בתוך התאוריה. ייתכן ששימוש מוגבל במילה "חשיבה" מצביע על כך שאפשר להיעזר באלמנטים נבחרים של התאוריה בלי לאמץ אותה בשלמותה. ואמנם, חוקרים וחוקרות רבים בחינוך מתמטי ניגשים ל"שיח" בתור "חלון לחשיבה" ומשתמשים בביטויים, כמו "חשיבה משתקפת בשיח".[8] נראה שגישה זו אינה מסתדרת היטב עם הגישה הקומוגניטיבית שבה "חשיבה היא סוג של שיח". עם זאת, אני לא רואה שום סיבה הגיונית שלפיה חוקרים וחוקרות המשתמשים בגישה "שיח הוא חלון חשיבה" אמורים להימנע משימוש בכלי מחקר שפותחו בתוך התאוריה הקומוגניטיבית, כמו ארבעה מרכיבים של שיח שהוזכרו לעיל. ולבסוף, ייתכן שלמרות ש"חשיבה" מוגדרת בתוך התאוריה, עדיין אין אפשרות להשתמש בהגדרה זו באופן אופרטיבי, לפחות לא בשלב הנוכחי של התפתחות התאוריה ולא בשלב הנוכחי של התפתחות וזמינות הטכנולוגיות לאיסוף נתונים.

בקשר ל"ייתכן" האחרון ולסיכום של תת-פרק זה, ברצוני להתחבר למילים שבהן נורמה פרסמג (Presmeg, 2016) בחרה לסיים את מאמרה:

> Having read Sfard's (2008) book again, carefully, in preparing to write this commentary [i.e., a commentary in a special issue of ESM on commognition], I am struck by how little of her theory is actually operationalized in the conceptual frameworks of these five papers. They are, indeed, a beginning. But embracing, as it does, both individual and collective learning of mathematics, and indeed its teaching too, the commognitive theoretical framework still has much unrealized potential to be useful in mathematics education research at all levels (p. 430).

8. משפט זו נשען על מספר כה גדול של מקורות בספרות המקצועית שלא מצאתי לנכון להביא אותם.

האם שימוש בתאוריה מביא לתועלת "ברורה"?

כנהוג בפרסומים מדעיים בתחום שלנו ומעבר לו, המאמרים בגיליון הם עתירי מונחים מקצועיים מיוחדים. עם זאת, כמעט בכל מאמר שבגיליון מוצאים דיון בתוצאות והשלכות בשפה פשוטה יחסית.[9]

עירית לביא ואנה ספרד דנות בתוצאה העיקרית של מחקרן (אפיון תהליך התפתחות והתאחדות של סוגים שונים של שיח) באמצעות המטפורה של "התפתחותו של שיח מתבטאת בהפיכת תערובות לתרכובות" (עמ' 65). כמו כן, לקראת תום המאמר החוקרות מציינות את מסקנות המחקר והשלכותיו בשפה מותאמת לא רק לחוקרים אלא למורים והורים. בהיותי מורה והורה למדתי מהמאמר על החשיבות של היווצרות אסוציאציות בהקשרים שמעודדים התאחדות, הבנתי טוב יותר מדוע תגובות של ילדים על שאלות לכאורה "ברורות" של מבוגרים יכולות להיות כה כך מגוונות, ונחשפתי לדרכים שונות לשאול "איפה יש יותר?". כמובן, מורים והורים אחרים עשויים ללמוד גם דברים נוספים מהמאמר.

לקראת סוף מאמרו, שי כספי פונה ישירות למלמדים אלגברה בבית ספר ובמילים פשוטות מתאר נתיב הוראה שנובע מהמודל התיאורטי שהוא בנה. נוסף על כך, מורה למתמטיקה יכול למצוא במאמרו של כספי תמיכה לעמדה (הלא לגמרי מקובלת בקרב המורים) שלשיח מתמטי לא פורמלי של לומדים כדאי להתייחס לא רק כתופעה בלתי נמנעת, אלא גם חיונית, כתופעה שהיא משאב להוראה. כמן כן, המאמר כולל רעיונות פדגוגיים מעשיים ולא טריוויאליים. למשל, למדתי מהמאמר מה ניתן לצפות מהשאלה "מהו הכלל לחישוב של איבר כלשהו?" לעומת השאלה "מהו האיבר הכללי?" (עמ' 117).

במאמרה של עינת הד-מצויינים, החלק "סיכום" בתת-הפרק "סיכום והשלכות – המנגנונים שהנציחו כישלון במקרה של דנה" הוא דוגמה מצוינת נוספת להתנסחות בשפה פשוטה וזהירה. עינת מסכמת את המקרה של דנה כך: "הדבר העיקרי שנלמד היה, ככל הנראה, כיצד לזהות את עצמה **כאילו** היא משתתפת בשיח" (עמ' 140). חלק מן הדיון במקרה נערך בשילוב מונחים מיוחדים כמו "מעקב ריטואלי אחר הוראות" ו"דנה לא השתתפה בשיח חקירתי", וחלק אחר באמצעות הביטויים שנמצאים במילון יומיומי של כל מורה (למשל, "פער בין הכלים המתמטיים שהיו ברשותה של דנה לבין אלו המצופים עבור השתתפות בשיח" ו"לא הייתה לה אפשרות **למקם** את עצמה בשיח" [עמ' 140]). אם נשתמש במילים של ג'ון מיסון (Mason, 1998) אפשר לומר שעינת הצליחה לספר סיפור בדרך שיוצרת תהודה עם סיפורים של אחרים ומעוררת זיכרונות על חוויות דומות בקרב קוראי המאמר.

כאמור, אביטל אלבוים-כהן תיארה במאמרה את חוויותיה בהיותה חוקרת ומורה. בהתאם לכך, בתת-הפרק "סיכום" היא דנה בתוצאות המחקר הן בשילוב מונחים קומוגניטיביים והן בשפה פשוטה יחסית. השימוש בשפה שמקובלת בקרב מורים למתמטיקה בולט במיוחד בחלק הדיון על מיקומה של מורה בשיח. למשל, אחרי משפט שכולל את המונח "אימוץ כללי השיח", אביטל כותבת: "במילים אחרות,

9. למותר לציין שלכל מחקר צריכה להיות תועלת, אך לא לכל מחקר יכולה להיות "תועלה ברורה", כפי שהגדרתי אותה בתחילת מאמרי זה. הגיוני שלא לכל מאמר שבגיליון היה מקום לדיונים "בשפה הפשוטה". למשל, אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח ציינו כי החדשנות של מחקרן היא בעיקר במתודולוגיה של שילוב בין שתי תאוריות. ייתכן שבגלל המיקוד הנבחר, החוקרות נצמדו לשפה בשילוב מונחים מיוחדים (למשל, רוטינות, נרטיבים מקובלים) הן בתשובות על שאלות המחקר והן בדיון המסכם בתוצאות.

התנהלות המורה כקוראת של טקסט מתמטי יכולה לשמש מודל עבור התלמידים. המורה מדגימה לתלמידים כלים שיסייעו בידם לבנות פרשנות קוהרנטית של הטקסט שהם קוראים" (עמ' 164). מבחינתי, זאת עדות ברורה לכך שאביטל מפנה את מאמרה הן לקוראים בקיאים בתאוריה הקומוגניטיבית והן לקוראים אחרים.

שילוב מאוזן של "שפה קומוגניטיבית" ו"שפה פשוטה יחסית" מופיע גם במאמרן של טלי נחליאלי ומיכל טבח. למשל, תוצאות המחקר סוכמו בתקציר באופן הבא: "הממצאים מדגימים תהליך שבמהלכו תלמידים מאמצים הגדרה מתמטית כמבחן יחיד לזיהוי עצם נתון כפונקציה. תהליך זה כולל פירוק ההגדרה למרכיביה ודיון בכל אחד מהם באמצעות מנגנון של קונפליקט תקשורתי" (עמ' 170). לא צריך להיות מומחה בתאוריה הקומוגניטיבית כדי להעריך את הממצאים ולהתעניין בהם. כמו כן, השלכות המחקר נוסחו כעצות למורים שלא בהכרח בקיאים בתאוריה הקומוגניטיבית. לדוגמה, ניתן ללמוד מהמאמר על מקורות קושי מתמטיים של פרחי הוראה בהקשר להגדרת המושג "פונקציה".

לסיכום: משתקף מהגיליון שהחוקרים והחוקרות שמשתמשים בתאוריה הקומוגניטיבית בדרך כלל דנים בתוצאות של מחקריהם הן ב"שפה קומוגניטיבית" והן ב"שפה פשוטה יחסית". נראה שהם דואגים לכך שלפחות חלקים מסוימים במאמריהם יהיו נגישים לא רק לחוקרים בתחום של חינוך מתמטי אלא לקהל הרחב של מורים.

שאלות שעדיין פתוחות

ארבעה מתוך שישה מחקרים שבגיליון (מאמריהן של לביא וספרד, ענאבוסי וטבח, הד-מצויינים ואלבוים-כהן) כוללים שאלות מפורשות למחקר עתידי שאמור להתגבר על מגבלות של המחקרים שהוצגו. בהתאם למסורת הקיימת בתחום שלנו, הפסקאות האחרונות של המאמרים כוללות הצעות, כגון לשחזר את מחקר שהוצג, להמשיך אותו מהנקודה שבה הוא עצר, ולהרחיבו למקרים נוספים, לאוכלוסיות נוספות או לנושאים מתמטיים נוספים. בשני המאמרים שבגיליון (מאמרן של לביא וספרד ומאמרן של ענאבוסי וטבח) המחברות הלכו אף מעבר למסורת. איעזר במאמרים אלה ובמאמר ההקדמה כדי לדון בכיוונים אפשריים של ההתפתחות העתידית של התאוריה הקומוגניטיבית.

מתודולוגיות חדשות?

לקראת תום מאמרן מציעות אחלאם ענאבוסי ומיכל טבח מהלך מחקר עתידי שהוא שונה ממהלכי המחקרים שהוצגו בגיליון. הן שואלות: "האם יהיה מומלץ לבנות מודלים פדגוגיים שונים ולבחון באמצעות שתי התאוריות (קומוגניציה ו-SFL) את תהליכי הלמידה שמתרחשים בעקבות כל מודל, ובסופו של דבר להמליץ או לא להמליץ על המודל שנבנה?" (עמ' 90). חשבתי: נראה שעיסוק בשאלה זו דורש שימוש במתודולוגיות שלמיטב הבנתי עד היום לא היו משויכות לכלי מחקר בהקשר לתאוריה הקומוגניטיבית. האם השאלה הזאת היא סימן לכך שבעתיד התאוריה הקומוגניטיבית תהיה שימושית (עם תאוריות אחרות) גם במחקרים השוואתיים? אם כן, זאת תהיה התפתחות מעניינת ובלתי צפויה.

הוראה - מהי?

טלי נחליאלי ומיכל טבח במאמר ההקדמה מציינות ש"הוראה אינה מוגדרת הגדרה מפורשת בגישה הקומוגניטיבית" (עמ' 17). לעומת זאת, שלושה מתוך ששת המחקרים שבגיליון עוסקים בהוראה. האם זה סימן לכך שבעתיד הקרוב תופיע הגדרה קומוגניטיבית מפורשת ושימושית למושג *הוראה*? בואו נראה. בתת-הפרק "הוראה בהסתכלות קומוגניטיבית: עקרונות מרכזיים", טלי ומיכל סוקרות התפתחויות בכיוון זה עד כה. הן מזכירות לנו שבן-צבי וספרד (Ben-Zvi & Sfard, 2007) דנו ב**הוראה לקראת למידה ברמת-על**. כמו כן, הן מציינות שבמאמר אחר שלהן (Nachlieli & Tabach, 2015) מופיעה הבחנה בין המונחים "פדגוג" ל"לומד" באמצעות התייחסות לשאלה "מי מוביל שיח ומעשה?". בהמשך לתת-הפרק טלי ומיכל בונות קשר מעניין בין התאוריה הקומוגניטיבית לבין התאוריה של פעילות (קרי, הוראה היא סוג של תקשורת ותקשורת היא סוג של פעילות), ואז מגדירות **הוראה** כך: "אפשר להגדיר הוראה בתור פעילות תקשורתית המונעת מהרצון של היחיד לשנות את השיח של הלומד לכיוון של השיח המוביל" (עמ' 17). ולבסוף, ההתפתחויות התאורטיות שמופיעות במאמרן של עירית לביא ואנה ספרד מביאות בסיס ראוי נוסף להגדרת המושג "הוראה". חשבתי: ברוח הדיון על יחסי גומלין לא פשוטים בין פעילות המראיינת ובין שינויים במעשים של מעיין, ובהסתמך על המונח "מרחב תקדימים", מועמד נוסף להגדרת **הוראה** במונחים הקומוגניטיביים יכול להיראות כך: **הוראה** היא פעילות תקשורתית על-ידי פדגוג שמיועדת להרחבת מרחב תקדימים שבהם לומד או לומדת יכולים להשתמש כאשר הוא או היא יתמודדו עם המטלות העתידיות. אני חושב שהגדרה זו הייתה יכולה להיות מתאימה למחקר שהוצג במאמרן של לביא וספרד, ואולי גם למחקרים אחרים שבגיליון.

כיצד מתרחש פתרון בעיות?

לסיום תת-פרק זה בחרתי להגיב למקום שבו פתרון בעיות כסוגיה מחקרית נמצא בתאוריה הקומוגניטיבית. כידוע, השפה הקומוגניטיבית שמבוססת על המונחים "קונפליקט תקשורתי", "רוטינות של חקירה" ו"אינטראקציות בין מומחים לטירונים בשיח" היא ישימה לחלק מן הסיטואציות שבהן יש צורך להסביר כיצד רעיון לפתרון בעיה נולד, אך לא לכל הסיטואציות.[10] שמחתי לראות התייחסות חדשה לסוגיה זו במאמרן של עירית לביא ואנה ספרד. ברצוני לצטט:

> נציין, כי מצב של מרחב תקדימים ריק ייתכן גם אצל מומחה לשיח המוצא את עצמו במצב מטלה בלתי מוכר. כדי לפתור את הבעיה שלפניה הוא עומד, ידרוש המומחה לרוב לעבור אל שיח אחר, וליתר דיוק, יהיה עליו ליצור קישורים ממרחבי תקדימים של רוטינות בשיח הנוכחי אל מרחבי תקדימים של שיח אחר. פריצה מעין זו של גבולות השיח נחשבת למעשה יצירתי (עמ' 26, הערת שוליים מס' 2).

האם מילים אלה הן סימן לכך שבעתיד התאוריה הקומוגניטיבית תתרום תרומה משמעותית גם למחקר

10. ראו קויצ'ו (Koichu, 2015) לדיון בנושא.

העוסק בשאלות על כיצד פתרון בעיות מתרחש וכיצד יצירתיות מתמטית פועלת ומתפתחת? אם כן, זאת תהיה התפתחות מעניינת וחשובה ביותר.

לסיכום: משתקף מהגיליון שהתאוריה הקומוגניטיבית היא "חיה" גם במובן הבא: המשתמשים והמשתמשות בתאוריה מכירים את מגבלותיה ומציעים שאלות מעניינות למחקר עתידי.

מילות סיכום

כמובן, המסקנה שהתאוריה הקומוגניטיבית היא "חיה" הייתה מתבקשת. עם זאת, העיסוק בשאלות שבהן בחרתי על מנת להבחין בין המושגים "תאוריה חיה" לבין "תאוריה דוגמטית" עזר לי להבין טוב יותר מספר נטיות בהתפתחות התאוריה. בפרט, ראינו במאמרי הגיליון עדות לדברים אלה:
ניתן לבחור בתאוריה מסיבות שונות מאוד.
התאוריה היא גמישה ומתפתחת הן לרוחב והן לעומק.
התאוריה ניתנת לאימוץ חלקי ולשילוב עם תאוריות אחרות.
בדרך כלל, מימושיה של התאוריה מביאים לתועלת "ברורה".
ישנם סימנים לכך שהתאוריה תתרחב לתחומי מחקר נוספים שהיא עדין לא חבקה.
במהלך קריאה מעמיקה של המאמרים בגיליון מחשבתי חזרה לא מעט לטענה שטלי ומיכל ניסחו בהתאם לעתיד רצוי של התאוריה הקומוגניטיבית במאמר ההקדמה שלהן (עמ' 13). טלי ומיכל מביאות את אמונתן שאימוץ התאוריה הקומוגניטיבית על-ידי חוקרים וחוקרות שכעת משתמשים במסגרות מושגיות שונות (ולא לגמרי קונסיסטנטיות) עשוי לשפר את התקשורת בתחום שלנו. כמו כן, התרשמתי שהן רואות את עתיד התאוריה בכך שהיא תהפוך למין "תאוריה מאחדת" בתחום שלנו.

ברצוני להודות שגיליון זה לא עזר לי לגבש את דעתי בעניין האם אכן התאוריה תתפתח בכיוון של התאוריה המאחדת, והאם התפתחות כזו היא רצויה. החוזק של התאוריה הקומוגניטיבית הוא נהיר, אך החשש שלי שהפיכתה לתאוריה מאחדת, אם יקרה דבר כזה למרות הבדלים תרבותיים רבים בין חוקרים שונים ובין אסכולות למיניהן, תתרחש ב"מחיר גבוה". ההיסטוריה של התפתחות התחום הצעיר שלנו מלמדת אותנו שמגוון גישות תאורטיות לתופעות מרכזיות כמו "למידה" מייצג לא רק בעייתיות, אלא גם תועלת ואפילו צורך. בפרט, קיום של מגוון גישות תאורטיות מעשיר את התחום מבחינה אינטלקטואלית ומבחינה תרבותית. כמו כן, ההיסטוריה מלמדת אותנו שבתאוריות בעלות תפקיד מאחד עלולים להתעורר סימנים של דוגמה, שכעת לא מצאתי אותם במאמרי הגיליון. התאוריה הקומוגניטיבית "יוצאת מהבית" בהצלחה רבה, וברצוני לבטא את תקוותי שהיא תמשיך להיות חיה, מתרחבת, מביאה תובנות חדשות, מלמדת, אך לא מאחדת, לפחות לא בשלב זה של חייה.

רשימת מקורות

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings and the learners autonomy. *Education et didactique*, *1*(3), 117-134.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51-52*(3), 45-65.

Forman, E. A. (2012). Commentary: Expanding and clarifying the commognitive framework. *International Journal of Educational Research*, *51*, 151-154.

Kieran, C. (2012). Commentary: Characterizing meta-level mathematical discourse and accounting theoretically for its development – The instructional and the spontaneous. *International Journal of Educational Research*, *51*, 146-150.

Koichu, B. (2008). On considerations of parsimony in mathematical problem solving. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulova (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273-280). Morelia, Mexico.

Koichu, B. (2015). Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts. In Krainer, K., & Vondorova, N. (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2668-2674). Charles University in Prague, Czech Republic.

Kuhn, T. (1977). *The essential tension: Selected studies in scientific tradition and change.* Chicago: University of Chicago Press.

Mason, J. (1998). Researching from the inside in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 357-377). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2015). The discursive routine of personifying and its manifestation by two instructors. *CERME 9 - Ninth Conference of European Research in Mathematics Education*. Prague, Czech Republic.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40*(2), 165-178.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 423-430.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambrige University Press.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, *23*(2), 237-309.

Sober, E. (1979). The principle of parsimony. *The British Journal for the Philosophy of Science*, *32*(2), 145-156.



פרופ"מ בוריס קויצ'ו

חבר סגל בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה שבטכניון, ראש קבוצת המתמטיקה. תחום המחקר שלו הוא למידה דרך פתרון בעיות ולמידה לקראת פתרון בעיות מתמטיות. חלק מעבודתו נוגע בשאלה כיצד ניתן ליישם תובנות על פתרון וחיבור בעיות על-ידי תלמידים מחוננים ומתמטיקאים לטובת כלל התלמידים ומורים למתמטיקה.