



מחקר וסיון בחינוך מתמטי

גיליון 3
ינואר 2016

כתב-עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי



תמונת שער: יואל עמית

עורכת:

ד"ר קרני שיר

שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):

- | | |
|--|---------------------|
| מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך | ד"ר מארק אפלבוים |
| מל"מ הטכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | פרופ' דוד בן-חיים |
| דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך | ד"ר הגר גל |
| גורדון – המכללה האקדמית לחינוך | ד"ר אילנה לבנברג |
| לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך | ד"ר טלי נחליאלי |
| שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | פרופ' משה סטופל |
| מכון ויצמן למדע | ד"ר אלכס פרידלנדר |
| המכללה האקדמית הערבית לחינוך | ד"ר אמאל שריף-רסלאן |
| אורנים – המכללה האקדמית לחינוך | פרופ' עטרה שריקי |
| אוניברסיטת תל-אביב | פרופ' דינה תירוש |

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

עריכה לשונית:

יפעת פישור, מכללת שאנן

עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:

תמי יהושע, מכללת שאנן

השופטים של המאמרים בכתב-העת (בסדר אלפביתי) הם:

- | | | |
|--|---|--------------------|
| שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | — | ד"ר גיוני אוברמן |
| מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר מארק אפלבוים |
| מל"מ הטכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | — | פרופ' דוד בן-חיים |
| שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך; אורנים – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר סטלה גידלביץ |
| דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר הגר גל |
| אוניברסיטת בן גוריון | — | פרופ' רון הוז |
| שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | — | פרופ' שרה הרשקוביץ |
| שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך | — | ד"ר אילנה וייסמן |
| דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך | — | גב' ברטה טסלר |
| דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר ניצה כהן |
| האקדמית עמק יזרעאל ע"ש מקס שטרן | — | פרופ' אילנה לביא |
| גורדון – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר אילנה לבנברג |
| מכון ויצמן למדע | — | ד"ר אלכס פרידלנדר |
| מכון ויצמן למדע | — | ד"ר נעמי רובינזון |
| אוהלו – המכללה האקדמית לחינוך | — | ד"ר גילה רון |

Key title: Ktab-ha-'et « mehqar w-'iywn b-hiynwk matematiy »

כתב-העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה



תוכן העניינים

4	דבר העורכת
6	מדור חדשות מתמטיות
	איך עורמים אבטיחים בסככה ביעילות? מעל 400 שנה של לבטים הסתיימו בהישג מתמטי
6	מדהים בקיץ 2014 - נצה מובשוביץ-הדר
30	אפשר גם אחרת – הערכה חלופית בקורס "גאומטריה והוראתה" - בת-שבע אילני ונורית שמואלי
61	הכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה - סאאיד בשארה
75	בעיית חקר כמנוף לפיתוח יצירתיות - חנה לב-זמיר
	מחקר זוטא לאפיון וסיווג שיטות פתרון של בעיה גאומטרית על-ידי פרחי הוראה -
93	קרני שיר, אילנה לביא
	דיון כיתתי/עצמי בשגיאות כמנוף לשיפור הישגיהם וצמצום שגיאותיהם של תלמידים – המקרה
107	של פונקציות טריגונומטריות - אמאל שריף-רסלאן, רג'א אבו שאהין
130	מדור ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל
130	דברים לזכרו של פרופ' שמואל אביטל (1915-2001) - דוד בן-חיים
	רעיונות אחדים על איך ליצור בעיות מתמטיות - שמואל אביטל ושלמה ליביסקנד
132	תרגום: דוד בן-חיים
139	מדור המלצה על ספר
139	הוראת יצירתיות בפתרון בעיות – סתירה מיניה וביה? - שלמה וינר
142	"ללמוד וללמד אנליזה: ספר מתמטי-דידקטי למורה" - עטרה שריקי
145	מדור הוכחות מעניינות
145	הצגת המדור - דוד בן-חיים
146	הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה - אבי סיגלר, משה סטופל
156	הנחיות למחברים

דבר העורכת

הגרפיקאית תמי יהושע, השזורים בדפי המדור, יש תרומה רבה להבנתו.

במדור "ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל" מציג פרופ' דוד בן-חיים את פרופ' שמואל אביטל ז"ל ואת תרגום של המאמר "רעיונות אחדים על איך ליצור בעיות מתמטיות", שכתב פרופ' שמואל אביטל יחד עם פרופ' שלמה ליביסקינד.

במדור "המלצה על ספר" ימליץ לנו פרופ' שלמה וינר על ספרם של פרופ' דורית פטקין ופרופ' אביקם גזית "יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות". בנוסף, תמליץ פרופ' עטרה שריקי על הספר "ללמוד וללמד אנליזה – ספר מתמטי דידקטי למורה", אשר ד"ר גילה רון הייתה מנהלת הפיתוח והכתיבה שלו.

אל גיליון זה מצטרף מדור חדש בשם "הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה", שעורך פרופ' דוד בן-חיים. במדור מציגים ד"ר אבי סיגלר ופרופ' משה סטופל מספר משימות מתמטיות בעלות הוכחות אלגנטיות ומפתיעות.

נוסף על ארבעת המדורים הללו, מופיעים בגיליון גם חמישה מאמרים.

במאמר הראשון ד"ר בת-שבע אילני וד"ר נורית שמואלי משתפות אותנו בהערכה חלופית שעשו בקורס "גאומטריה והוראתה". נוסף להצגת הכלי שעשו בו שימוש, הן מתארות גם מחקר, אשר מטרתו הייתה לבדוק האם וכיצד בודק הכלי את הידע של פרחי ההוראה וקבלת משוב מהנחקרים על הכלי.

המאמר השני מתאר מחקר המשווה בין הוראה



להלן הגיליון השלישי של כתב-העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

על שער הגיליון הנוכחי מוצג צילום עבודת

אמנות של האומן, יואל עמית. התמונה מציגה יצירה צבעונית של ציפורים העפות במבנה של הסימן המתמטי המייצג אינסוף. היצירה לקוחה מסדרת פסלי הקיר הנקראת בשם infinity. עמית עובד עם מתכת בחיתוך לייזר על לוחות עץ צבועים ומייצר תמונות תלת-ממדיות בסגנון "פיקסל-ארט". עמית שואב את השראתו הן מעולם המחשוב והן מתצורות של תנועה בטבע. עבודותיו עוסקות בין השאר גם בסמלים וביחסים מתמטיים כגון יחס הזהב, תנועות גל ואינסוף.

הגיליון השלישי של כתב-העת כולל ארבעה מדורים.

הגיליון נפתח במדור החדשות המתמטיות שכותבת פרופ' נצה מובשוביץ-הדר. בגיליון הנוכחי מוצגת חדשה מרעישה במיוחד: הצליחו להוכיח את השערת קפלר לאחר יותר מ-400 שנה מאז הועלתה לראשונה. במדור מתארת נצה, בשפה ציורית ומרתקת, את הרקע שהביא לידי העלאת ההשערה, האנשים שהיו מעורבים בהעלאת ההשערה, פריצות הדרך שנעשו במהלך השנים, והאופק החדש הנפרש לפנינו עם מתן הלגיטימציה לאימות ממוחשב של הוכחות מתמטיות. אין ספק כי לאירורים של

אחר.

על הפקת כתב-העת והבאתו לדפוס אחראיות תמי יהושע, מנהלת ההוצאה לאור "שאנן", ויפעת פיישר, עורכת הלשון. הן וכל שאר חברי הצוות נרתמו יחדיו לעזרה בהוצאת כתב-העת, ועל כך נתונה תודה והוקרה.

כתב-העת יוצא לאור בזכות השופטים שלנו – חברי הקהילייה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי – אשר נרתמו למשימת השיפוט והחזירו חוות דעת רציניות, שעזרו במיון ובשדרוג המאמרים המופיעים בגליון. תודה גדולה לכולכם.

לסיום, ברצוני לציין כי הוצאת כתב-עת דורשת תמיכה מוסדית ומימון. אני רוצה לנצל את ההזדמנות ולהודות להנהלת מכללת שאנן ולעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש, על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב-העת, ולפרופ' דוד בן-חיים – שתרם מזמנו ומניסיונו העשיר כדי שנוכל כולנו ליהנות מקריאת גיליון זה.

קריאה נעימה ומוצלחה!

ד"ר קרני שיר

עורכת כתב-העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי
ktav.et.rme@gmail.com

מסורתית להכוונה עצמית בלמידה. ד"ר סאאיד בשארה בודק במחקרו הבדלים ביכולת של תלמידים עם לקויות למידה לפתור שאלות אתגר במתמטיקה, בהתייחס לאופן הלמידה בכיתה. המחקר עוסק ביתרונות של גישת ההכוונה העצמית בלמידה במקצוע המתמטיקה.

המאמר השלישי, שכתבה ד"ר חנה לב-זמיר והמאמר הרביעי, שכתבו ד"ר קרני שיר ופרופ' אילנה לביא – עוסקים בפוטנציאל הטמון בפתרון בעיה בדרכים שונות ומגוונות. בשני המאמרים מוצג אוסף גדול של דרכי פתרון ואסטרטגיות שונות שנעשה בהן שימוש לפתרון הבעיה המוצגת. ד"ר חנה לב-זמיר הדגישה במאמרה את הפוטנציאל היצירתי של פתרון בעיית החקר המוצגת ואת חשיבות ביצוע הקשרים בין תכנים מתמטיים אחרים. ד"ר קרני שיר ופרופ' אילנה לביא עוסקות במאמren בחשיבות הדיון הכיתתי ותפקידה של הקבוצה בתהליך הלמידה של הפרט.

המאמר החמישי והאחרון הוא המאמר של ד"ר אמל שריף-רסלאן ורג'א אבו-שאהין. במחקר המתואר במאמר נבדקה השפעתה של שיטת לימוד המתבססת על דיון בבעיות המלוות בשגיאות על ההישגים של התלמידים מצד אחד, והפחתת מספר השגיאות שלהם מצד

מזור חדשות מתמטיות

איך עורמים אבטיחים בסככה ביעילות? מעל 400 שנה של לבטים הסתיימו בהישג מתמטי מדהים בקיץ 2014*

נצה מובשוביץ-הדר

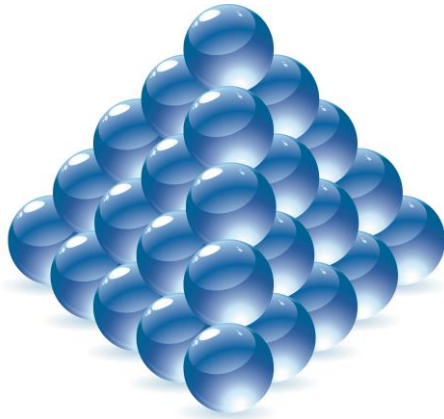
הקדמה: כמה מתפרנס מתמטיקאי?

במרבית המקרים משלמים למתמטיקאי משכורת כדי לחשוב: לחשוב על בעיה חדשה, לחשוב על דרך לפתור בעיה שטרם נמצא לה פתרון, לחשוב על השערה חדשה או לחשוב על שיטה להוכיח השערה שטרם נמצאה לה הוכחה. עוד עיסוק ידוע פחות הוא אימות או חיפוש שגיאות בפתרונות ובהוכחות של מתמטיקאים אחרים. העיתונות המתמטית המקצועית מגייסת את טובי המוחות כדי לאמת תוצאות המוגשות לפרסום על מנת לוודא שאין בהן טעות. זהו שם המשחק במתמטיקה, הוכחה היא קבילה כל עוד לא נמצאה בה שגיאה, שהרי מתמטיקה היא פרי היצירה של המוח האנושי, ומתמטיקאים, ככל אדם, עלולים לטעות.

בחדש אוגוסט 2014 התבררנו על הוכחתה של ההשערה שנודעה בשם "השערת קפלר". את ההשערה הזאת העלה יוהאנס קפלר בשנת 1611, כלומר לפני למעלה מ-400 שנה. רק לאחרונה היא זכתה לאימות באמצעות מחשב וקיבלה הכרה כ"נכונה ללא צל של ספק" מהקהילייה המתמטית. גושפנקה כזאת, של "מאומתת-מחשב", עשויה לסלול את הדרך לעידן חדש במתמטיקה, שבו מכונות עושות את "העבודה השחורה" של בקרה וחיפוש שגיאות, והמתמטיקאים בשר ודם יכולים להתפנות לעסוק ביצירת בעיות חדשות, בפתרונות לבעיות שטרם נפתרו, בחשיבה על השערות חדשות ובהוכחת השערות פתוחות שטרם הוכחו.

מהי השערת קפלר? מה היה הרקע להעלאתה?

אתגר ידוע הניצב לפני הירקנים בכל העולם, הוא למצוא את הדרך הטובה ביותר לערום אוסף של עצמים כדוריים, כמו תפוזים או אבטיחים המוצעים למכירה. בשנת 1611 הציג יוהאנס קפלר (Johannes Kepler, 1571-1630) את הטענה כי כדורים שווים הערוכים שכבה מעל שכבה בעֶרְמָה, שבה בכל שכבה מונח כדור ברווח הנוצר בין כל שלושה כדורים המונחים בשכבה שמתחתיו ומשיקים זה לזה, היא הדרך החסכונית ביותר לאריזתם מבחינת ניצול המרחב. אך קפלר לא הוכיח את השערתו והיא נותרה פתוחה מאות שנים וסיפקה אתגר לדורות של מתמטיקאים שהתעמתו עמו * תודה לתמי יהושע על עיצוב האיורים המופיעים במדור זה.



מאז ועד אוגוסט 2014. אריזה זאת זכתה לכינוי "אריזה הירקנים" כי היא רווחת בשווקי הפירות.

כמה 'אבטיחים' יש בערמה פירמידלית כזאת בת חמש שכבות? נתחיל מלמעלה:

$$S_1=1 \quad \text{בשכבה העליונה:}$$

$$S_2=1+2=3 \quad \text{בשכבה השנייה:}$$

$$S_3=1+2+3=6 \quad \text{בשכבה השלישית:}$$

$$S_4=1+2+3+4=10 \quad \text{בשכבה הרביעית:}$$

$$S_5=1+2+3+4+5=15 \quad \text{בשכבה התחתונה:}$$

$$35 \quad \text{בסה"כ:}$$

עדויות מהמאות הראשונות לספירה, בשפת סנסקריט, מצביעות על כך שכבר אז היה ידוע כי מספר האבטיחים בכל שכבה הוא: $S_i=1+2+3+\dots+i$. יש גם עדויות לכך שכבר אז הייתה ידועה הנוסחה לחישוב מספר האבטיחים הכולל ב- n שכבות שבכל אחת מהן יש $S_i=1+2+3+\dots+i$ אבטיחים:

$$\sum_{i=1}^n S_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

$$\frac{(5+1)^3 - (5+1)}{6} = 35 \quad \text{למשל מספר האבטיחים בערמה בת חמש שכבות הוא:}$$

סר וולטר ריילי (Sir Walter Raleigh, 1554-1618), אריסטוקרט בריטי, שהיה אחד מאנשי החצר



תומס האריוט 1560-1621
(Wikipedia, 2015)

של אליזבת, מלכת אנגליה, ביקש בשנת 1590 מתומס האריוט (Thomas Harriot, 1560-1621), מתמטיקאי ואתנוגרף בוגר אוקספורד, שהיה ידידו ועוזרו המתמטי, למצוא נוסחה לחישוב מספר הפגזים הכדוריים שנערמו על סיפוני האניות שלו בעת העמסתן בתחמושת, לקראת מסע אל "העולם החדש". האריוט, שניהל את חשבונותיו של ריילי, עסק בתכנון ספינותיו ובהנחיית רבי-החובל בכל הנוגע לניווט באמצעות המכשור המתמטי של אותם ימים. הוא הכין טבלה מפורטת בהתאם לצורה של תחתית הערמה ובהתאם לגובהה. מתוך הביוגרפיה של האריוט עולה כי האריוט הסתמך על חישובים של טורים מתמטיים ולא על ספירה ניסיונית (Shirley, 1983).

לאחר שהגיע לפתרון, שאל האריוט את עצמו, כדרכם של מתמטיקאים: האם יש דרך טובה יותר לערום את הכדורים? כזאת שהכדורים בה צפופים יותר ותופסים פחות מקום על הסיפון?

עם הבעיה הזאת פנה האריוט בשנת 1606 במכתב אל המתמטיקאי-הפיסיקאי-האסטרונום הגדול של אותה תקופה – יוהאנס קפלר. קפלר ודורות של מתמטיקאים בעקבותיו, עסקו בשאלה – מהי

הצפיפות המקסימלית של מארז כדורים שווים במרחב? נשאלת השאלה – איך מודדים צפיפות? ואיך קובעים שהיא מקסימלית?

איך קובעים צפיפות מקסימלית של אריזת כדורים שווים?

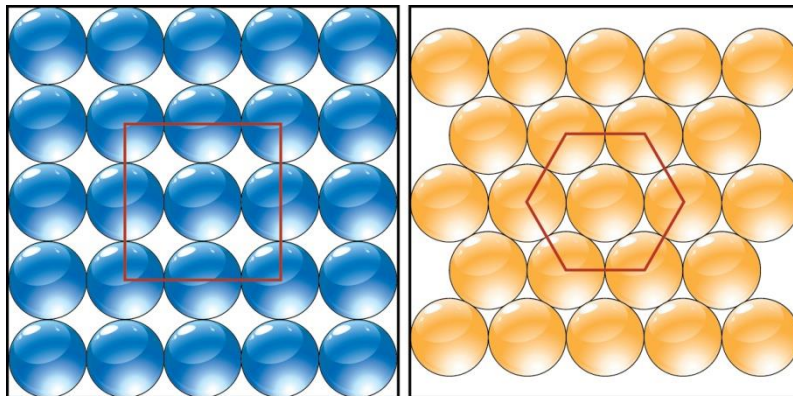


(Jimmy2bellies, 2009)

הדרך הטבעית היא לקחת ארגז ולנסות לארוז בו כמה שיותר כדורים שווים, ואז לבדוק איזה חלק של נפח הארגז תופסים הכדורים. בהינתן ארגז מסוים, שיטת האריזה היא שקובעת את הצפיפות לעומת זאת הדרך המתמטית היא להגדיר צפיפות כדי להשתחרר מהדיון בצורת הארגז, מתמטיקאים מטפלים במרחב כולו כאילו הוא קובייה בעלת מידות אינסופיות. הצפיפות מוגדרת כתשובה על השאלה: איזה חלק (או אחוז) של המרחב נתפס על-ידי הכדורים בשיטה מסוימת של אריזתם ב"קובייה אינסופית"? כדי להבין את המושג

צפיפות במרחב האינסופי, נתבונן בכל זאת במארזים סופיים. הנה כך – נתבונן בשתי אריזות באיור 1 ונבחן את ההבדלים ביניהן, וגם נבדוק היטב איזו מהן צפופה יותר.

נתחיל מהשכבה התחתונה:



אריזה ריבועית

אריזה משושה

נניח שרדיוס כל כדור הוא יחידה אחת, ומידות הארגז הקובייתי הן $10 \times 10 \times 10$ יח'. באיור 1 נוכל להבחין בקלות, כי באריזה הריבועית הרווחים הנוצרים בין הכדורים גדולים יותר מאשר הרווחים הנוצרים בין הכדורים באריזה המשושה, ואילו בשכבה אחת של ארגז קובייתי נכנסים 25 כדורים באריזה הריבועית ורק 23 באריזה המשושה. איזה חלק משטח הבסיס תופסים הכדורים? או ליתר דיוק, איזה חלק משטח הבסיס תופסים שטחי המעגלים שהם חתכי הרוחב של הכדורים?

$$\text{– באריזה ריבועית } 73\% < \frac{23 \times \pi \times 1^2}{10 \times 10} = \frac{23\pi}{100}$$

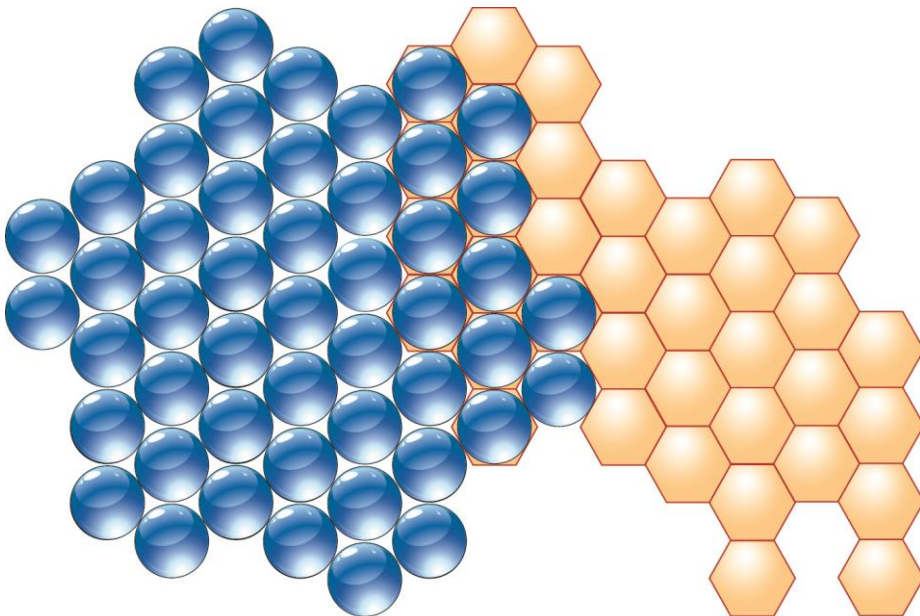
$$\text{– באריזה משושה } 78\% > \frac{25 \times \pi \times 1^2}{10 \times 10} = \frac{25\pi}{100}$$

אריזה משושה של שכבה אחת נראית כאילו היא חסכונית פחות מאריזה ריבועית. האם הרווחים הקטנים יותר בין הכדורים שלה יתנו לה עדיפות כשנעבור למישור האינסופי ומספר הכדורים בשכבה אחת בכל מארז יהיה אינסופי?

בשנת 1611 קפלר טען (אך לא הוכיח) שמערך משושה של כדורים שווים בשכבה אחת, אשר בה כל כדור נוגע בשישה אחרים סביבו, הוא המערך הצפוף ביותר.

בעצם מדובר בחתך ב"קו המשווה" של הכדורים, או בכיסוי של המישור בעיגולים, למשל במטבעות שוות.

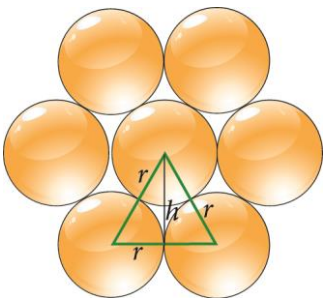
אגב, מערך כזה נקרא גם "מערך חלת הדבש". אפשר להבין את מקור השם מהתבוננות באיור 2.



בשנת 1890 ניתנה לראשונה הוכחה מתמטית לכך שאי אפשר לכסות בעיגולים שווים חלק גדול יותר של המישור מזה שמכוסה על ידיהם במערך משושה. אבל רק בשנת 1940 נתן לכך המתמטיקאי ההונגרי, לאסלו פייג'ה-טות' (László Fejes Tóth, 1915-2005), הוכחה שעומדת בכל הדרישות הקפדניות של הקהילייה המתמטית. הוכחות יפות של השערת קפלר במישור הדו-ממדי אפשר לראות אצל קסלמן וטו (Casselman, n.d.; Thue, 2001).

מהי צפיפותו של המערך המיוחד הזה? כלומר מהו החלק היחסי של המישור שהעיגולים הערוכים במערך משושה מכסים אותו?

הארייט חישב זאת: המערך המשושה של העיגולים במישור מצטיין בכך שכל עיגול בו מוקף בשישה עיגולים המשיקים לו. המרכז של כל אחד משישה העיגולים נמצא בקדקוד של משושה משוכלל והעיגול השביעי, המוקף, מרכזו במרכז המשושה. במילים אחרות, מרכזי העיגולים נמצאים בקדקודיהם של שישה משולשים שווים צלעות. על המישור כולו אפשר לחשוב כעל אוסף של משולשים שכולם חופפים, שווים-צלעות וצמודים זה לזה. לפיכך כדי לדעת איזה חלק של המישור כולו תופסים העיגולים, מספיק לחשב את החלק שהם תופסים בשטח של כל אחד מהמשולשים (ראה איור 3). בכל משולש יש שישית משלושה עיגולים. שטחו של כל אחד מהעיגולים הוא πr^2 .



איור 3

לפיכך השטח שהעיגולים תופסים בכל משולש הוא: $3 \times \frac{1}{6} \pi r^2 \approx 1.571r^2$.

נשאר רק לחשב איזה חלק מהווה שטח זה משטחו של המשולש. כל משולש כזה הוא שווה-צלעות ואורכה של כל צלע שלו הוא $2r$. כדי לחשב את שטחו, עלינו למצוא תחילה את גובהו.

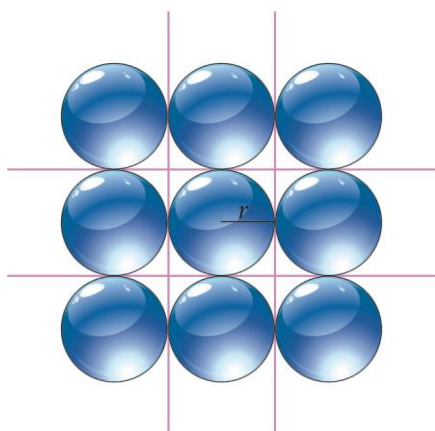
לפי משפט פיתגורס: $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}r$, לפיכך שטח המשולש הוא:

$$\frac{2r \times \sqrt{3}r}{2} = \sqrt{3}r^2 \approx 1.732r^2$$

ובכן, הצפיפות של אריזה משושה של עיגולים שווים במישור היא $\frac{1.571}{1.732} \approx 0.907$, כלומר מעל 90%.

לעומת זאת מהי הצפיפות של האריזה הריבועית של עיגולים שווים במישור?

על המישור כולו אפשר לחשוב כעל אוסף של ריבועים חופפים צמודים זה לזה, שכל אחד מהם כולא עיגול אחד (ראה איור 4). הצפיפות במישור כולו היא

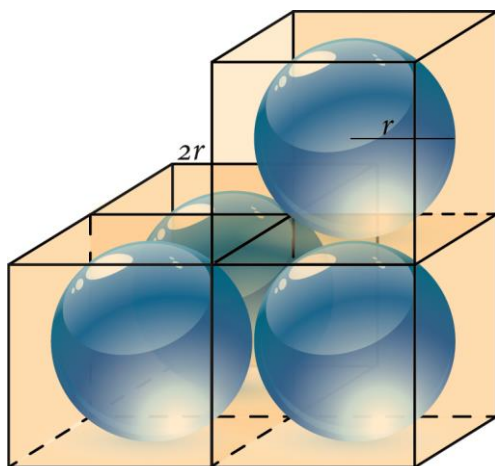


איור 4

על-כן היחס בין שטחו של כל עיגול (πr^2) לבין שטחו של כל ריבוע כזה (שכל אחת מצלעותיו אורכה

$$(2r) \cdot \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 : (2r)$$

כלומר עיגולים במערך ריבועי מכסים פחות מ-80% משטח המישור. כאמור, מערך המשושה, שהוכח כ"מנצח" מבין כל המערכים האפשריים במישור, צפיפותו מעל 90%. תוצאה זו מעידה שבחישוב הצפיפות של עיגולים, המעבר מחלק סופי מוגבל של המישור (ראה איור 1) למישור האינסופי יכול לשנות את תוצאת החישוב.



איור 5

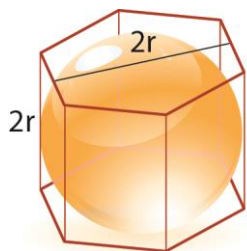
נחזור למרחב ונשים מעל לשכבה הראשונה את השכבות הבאות זו על זו. באריזה הריבועית אפשר למשל לשים את השכבה השנייה של הכדורים ממש מעל השכבה הראשונה וכך הלאה שכבה מעל שכבה. במארו האינסופי המתקבל בדרך זו, כל כדור נוגע בשישה שכנים, ארבעה בשכבתו, אחד מעליו ואחד מתחתיו. זאת ועוד, את המרחב אפשר למלא ב-100% בקוביות שוות (שש פאות) שכל אחת מהן כוללת כדור אחד (ראה איור 5), כך שאת הצפיפות של האריזה הזאת, אפשר לחשב על-ידי חישוב היחס בין נפחו של כדור אחד לנפחה

של קובייה שהוא כלוא בה. נפח הכדור הוא: $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3$. נפח הקובייה הכוללת אותו הוא:

$2r \times 2r \times 2r = 8r^3$, לפיכך הצפיפות של האריזה הזאת היא: $\frac{4.2}{8} \approx 0.52$, כלומר את מחצית המרחב

תופסים הכדורים באריזה מסוג זה.

האם אפשר לשפר?



איור 6

במקום לשים שכבות של האריזה הריבועית אחת על השנייה נעשה זאת עם אריזה משושה, שכבר במישור היא "מנצחת". בכמה כדורים נוגע כעת כל כדור? – בשמונה שכנים, שישה באותה שכבה ועוד אחד מעליו ואחד מתחתיו. זאת ועוד, אפשר לכלוא כל כדור במנסרה משושה משוכללת שהיא גוף בעל שמונה פאות הממלא את המרחב ב-100% (ראה איור 6). לפיכך אפשר לחשב את הצפיפות של האריזה

הזאת על-ידי חישוב היחס בין נפחו של כדור אחד לנפחה של מנסרה משושה שהוא כלוא בה.

$$\text{נפח הכדור הוא: } \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3.$$

נפח המנסרה:

$$2\sqrt{3}r^2 \times 2r = 4\sqrt{3}r^3 \approx 6.9r^3$$

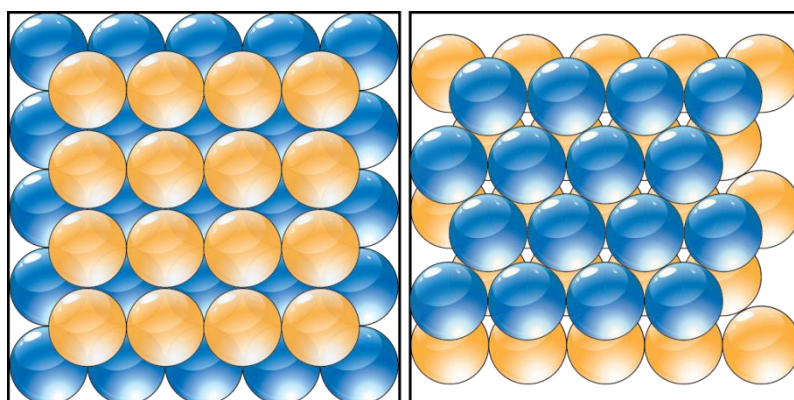
לכן הצפיפות של האריזה הזאת היא: $\frac{4.2}{6.9} \approx 0.61$ כ-60%.

כמצופה אריזה זאת צפופה יותר מהקודמת.

האם יש עוד דרכים למלא שכבה מעל שכבה?

כמובן. אפשר ליצור שכבה שנייה לא רק בהצבת הכדורים מעל לכדורים בשכבה התחתונה, אלא

גם בהצבת הכדורים ברווחים הנוצרים בין הכדורים (ראה איור 7).

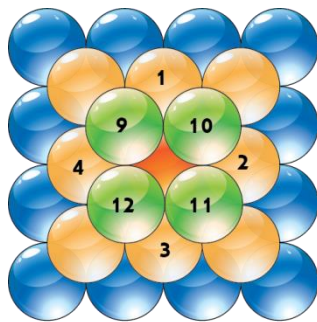


אריזה ריבועית

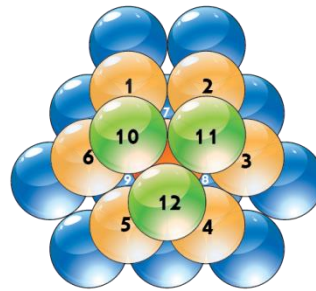
אריזה משושה

איור 7

למרבה ההפתעה בשני המקרים, באריזה הריבועית ובאריזה המשושה, מספר הכדורים, אשר בהם נוגע כל כדור שנמצא ממש בתוך חלל האריזה אחרי שממלאים בדרך זו את השכבות זו על גבי זו, הוא 12. כיוון שבאריזה הריבועית כל כדור נוגע בארבעה אחרים בשכבה שלו, בארבעה מהשכבה התחתונה ובארבעה בשכבה שמעליו, ובאריזה המשושה כל כדור נוגע בשישה כדורים בשכבה שלו, בשלושה בשכבה שמתחתיו ובשלושה אחרים בשכבה שמעליו (ראה איור 8).



אריזה ריבועית



אריזה משושה

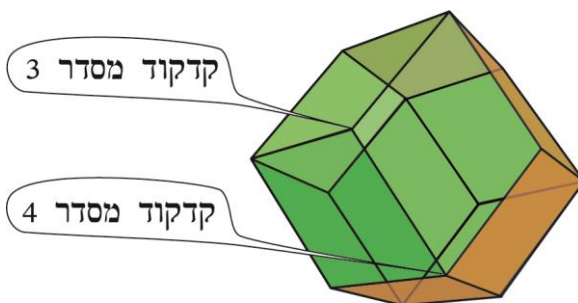
איור 8

באיזו משתי האריזות האלו מנוצל חלק יותר גדול של נפח הארגז? ומה קורה אם ה"ארגז" הוא אינסופי, כלומר במרחב כולו?

קפלו עשה את החשבון והופתע לגלות שלשתיהן יש אותה צפיפות בדיוק.

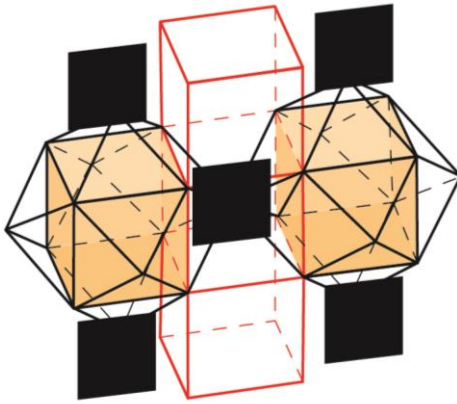
בשתי האריזות הכדורים תופסים כ-74% (כ-3/4) מהמרחב! כדי לאמת זאת יש לנקוט בשיטה דומה לזו שכבר נקטנו בה: לחלק את המרחב כולו לתאים שווים בכל המרחב, לבדוק מהו נפח הכדורים בכל תא, לחשב את היחס בינו לבין נפח התא ובכך לחשב את הצפיפות, ולוודא שהתוצאות המתקבלות בשתי האריזות אכן שוות. אבל מתברר שכבר הצעד הראשון אינו פשוט. הקושי נעוץ בסידור המרחבי של הכדורים: כאמור, בכל אחת משתי האריזות האלו כל כדור מוקף ב-12 כדורים המשיקים לו. נוסף על כך, ה"שקע" בין כל רביעיית כדורים באריזה הריבועית "עמוק" יותר מהשקע בין כל שלושה כדורים באריזה המשושה. האם אפשר לחלק את המרחב כולו לתאים שווים המתאימים לכל אחת מהאריזות האלו?

מתברר שאפשר!



איור 9

התריסרון המעויני הוא גוף בעל 12 פאות חופפות, אשר כולן בצורת מעוין. הוא יסייע לנו בחישוב הצפיפות של שתי האריזות (!) כי יש לו שני סוגים של קדקודים – מסדר 3 ומסדר 4 (ראה איור 9): בכל קדקוד מסדר 3 נפגשות שלוש פאות (יש שמונה קדקודים כאלה), ובכל קדקוד מסדר 4 נפגשות ארבע פאות (יש שישה קדקודים כאלה).



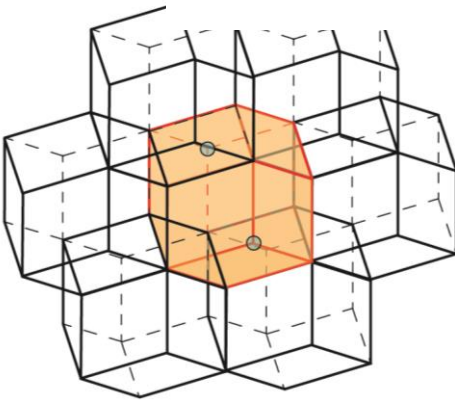
איור 10

קל לבנות תריסרון מעויני: לוקחים קובייה שצלעה a , ובונים על כל אחת משש הפאות שלה פירמידה ריבועית ישרה שגובהה $a/2$.

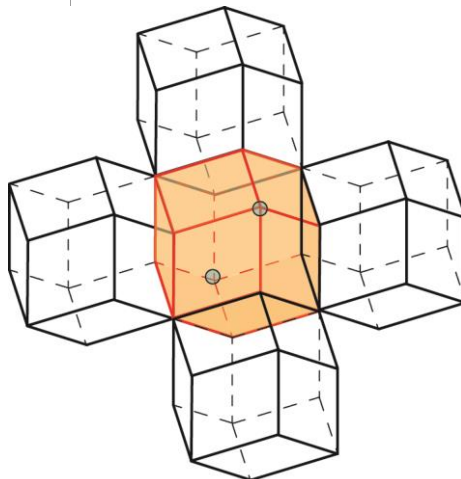
כדי להוכיח שהתריסרון המעויני הוא גוף שממלא את המרחב בלי רווחים, נמלא את המרחב בקוביות שמידתן $a \times a \times a$, נצבע אותן לסירוגין בשחור-לבן, כך שכל קובייה שחורה מוקפת בשש קוביות לבנות ולהפך. נוציא את הקוביות השחורות ונבנה על הפאות של הקוביות הלבנות פירמידות ישרות בגובה $a/2$. החללים שנוצרו יתמלאו לגמרי, כי במקום כל קובייה שחורה יש

עכשיו שש פירמידות, והמרחב "ארוז" בתריסרונים מעוינים (ראה איור 10).

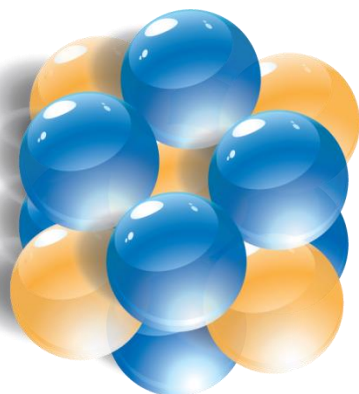
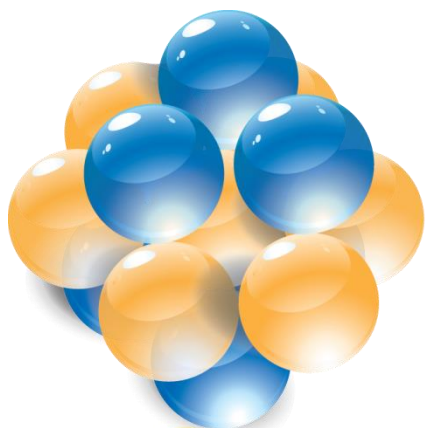
התריסרון המעויני ממלא לגמרי את המרחב, בלי רווחים. באריזה המרחבית של התריסרונים המעוינים כל אחד מהם חולק פאה משותפת עם 12 תריסרונים מעוינים שכנים. אפשר לראות זאת כך: שש פאות מסביבו ועוד שלוש מלפנים ושלוש מאחור (ראה איור 11), או ארבע מסביבו ועוד ארבע מלפנים וארבע מאחור (ראה איור 12).



איור 11



איור 12



איור 13

על כן אם נמלא את כל המרחב בתריסרונים מעוינים שווים ונכניס לכל אחד מהתריסרונים כדור שנושק ל-12 הפאות, נקבל אריזה משושה של כדורים שווים במרחב או את האריזה הריבועית. לאמתו של דבר, שתיהן הן אותה אריזה (!) מזוויות ראייה אחרות (ראה איור 13).

זוהי אריזת הירקנים (ראה איור 14).

ומהי הצפיפות שלה (אם תשתרע מהדוכן לכל המרחב)?

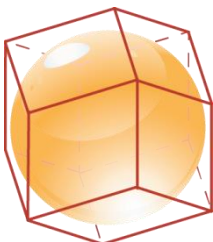


איור 14

החישוב מראה שנפחו של התריסרון המעויני הכולא כדור שרדיוסו r הוא:

$$4\sqrt{2}r^3 \approx 5.66r^3 \text{ ונפח הכדור הוא: } \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3. \text{ לפיכך הצפיפות של כל אחת מהאריזות}$$

האלו היא: $\frac{4.2}{5.66} \approx 0.74$, כלומר כ-75% (3/4) מהמרחב האינסופי (ראה איור 15).



בשנת 1611 האסטרונום המתמטיקאי יוהנס קפלר, בן הארבעים, פרסם ספרון קליל בשם "על פתותי שלג משושים", שהקדיש כשי לשנה החדשה לאחד מידידיו. בספרון זה הוא ניתח בין השאר את המבנה של כוורת הדבורים וגם את המבנה של גרעיני הרימון (ראה איור 16), וטען שעם הבשלת הפרי, הגרעינים העגולים נדחסים ומקבלים כל אחד צורה של תריסרון מעויני. באיור 16 רואים את האריזה של גרעיני הרימון בתוכו.

קפלר הוסיף וטען בלי לנמק, כאילו זה מובן מאליו, שני דברים:

1. האריזה הריבועית של כדורים שווים והאריזה המשושה של



איור 16

כדורים כאלה הן שקולות.

2. במרחב התלת-ממדי אין אריזה של כדורים שווים, בעלת צפיפות גדולה יותר. זאת האריזה הכי יעילה.

הטענה הראשונה נבדקה על-ידי קפלר עצמו. הוא חישב את הצפיפות של כל אחת מהאריזות האלו וקיבל 74% בערך. כדי להוכיח את הטענה השנייה נדרשו ארבע מאות שנה!

יוהאנס קפלר



יוהאנס קפלר (1571-1630)

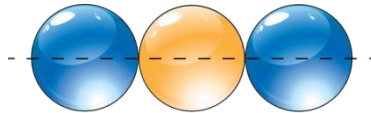
(Stern~commons wiki, 2005)

קפלר נולד בעיר קטנה בגרמניה למשפחה קשת יום, אב נוח לרגזו ואם מחרחרת ריב. בהיותו בן שלוש, ברח אביו מהבית, התגייס לצבא ונעלם. בבית-הספר הצטיין יוהאנס בלימודים, ולמד בהמשך גם לטינית (שפת המדע באותה עת), אך היה מתקוטט עם חבריו, מתווכח עם המורים ורוכש לו בקלות אויבים. בגיל 18 החליט להכשיר את עצמו כאיש-דת. לקראת סיום ההכשרה חיפש עבודה ככומר, אולם למורת רוחו, נשלח בהמלצת מוריו לעבוד כמורה למתמטיקה ואסטרונומיה בבית-הספר של הכנסייה הפרוטסטנטית בעיר גראץ. בניגוד למצופה ממנו, התאהב שם בנערה וביקש את ידה, אך משפחתה דרשה שיוכיח שהוא בא ממשפחה טובה. זה לא היה קל, אך בסופו של דבר, הם נישאו בשנת 1597. קפלר החל אז להתעניין בלוח השנה, באסטרונומיה ובאסטרונומיה.

בשנת 1599 אחרי שהסתכסך ועזב את העיר גראץ, קיבל מינוי בפראג, כעוזרו של טיכו בראהה – אסטרונום נודע ששירת כמתמטיקאי החצר של הקיסר רודולף. עם מותו של טיכו בראהה, ירש קפלר את המשרה המכובדת. בשנת 1612 אשתו ואחד מילדיו נפטרו והוא עזב מדוכא את פראג, עבר לעיר לינץ באוסטריה וכעבור שנה נישא שנית. בשנת 1615 ניהתה עליו צרה חדשה עם האשמתה של אמו כמכשפה, אשמה הגוררת אחריה עונש מוות. אף שידע על אופייה התככני של אמו, נחלץ הבן להגנתה ונלחם על זיכונה במשך שש שנים, עד שהצליח לשחרר אותה ב-1621. קפלר נחשב לנסיך האסטרונומיה. בזכות יכולותיו המתמטיות למדנו כי כוכבי הלכת נעים במסלולים אליפטיים סביב השמש, הנמצאת באחד המוקדים; כי הם נעים במהירויות לא אחידות, וכי מחזורי ההקפה פרופורציוניים למרחקיהם מהשמש. הוא היה גם סופר בתחום המדע הבדיוני. בעשור האחרון לחייו כתב קפלר פנטזיה בשם סומניום (בלטינית – החלום). הסיפור הוא על מסע אל הירח בעת ליקוי חמה באמצעות כוחות אפלים. יש בו תיאור מפורט למדי על מראה כדור-הארץ מהירח. מקצתו דמיוני ומקצתו אוטוביוגרפי. הסיפור נחשב לחיבור המדעי הרציני הראשון על אסטרונומיה ירחית. בשנת 1630 בגיל 59, חלה קפלר ונפטר כשהוא עטור תהילה.

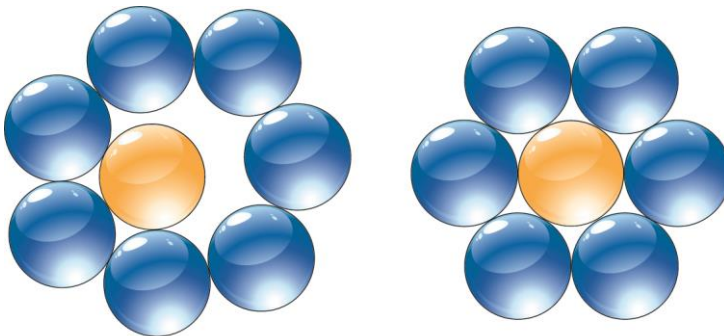
אריזת הכדורים

כאמור, העלה קפלר את ההשערה שהאריזה הכי צפופה של כדורים שווים במרחב היא "אריזת הירקנים" התופסת בערך $3/4$ מהמרחב. כדי לבחון את ההשערה לעומקה נבדקה שאלה אחרת: מהו המספר המקסימלי של כדורים שווים שמשיקים לכדור אחד? קל להבין שבממד אחד, כלומר לאורך קו ישר, התשובה היא 2 (ראה איור 17).



איור 17

בשני ממדים, כלומר במישור, התשובה היא 6, כי אין רווחים ואין מקום לכדור שביעי (ראה איור 18).



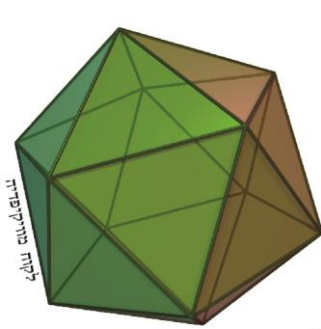
איור 18

בשלושה ממדים זה פחות ברור.

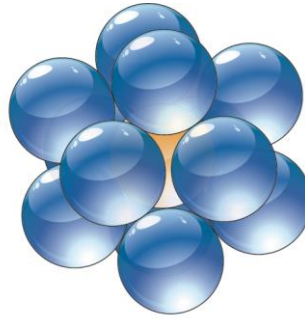
כזכור, הצביע קפלר על שתי דרכים (שהן אחת), אשר אפשר לארגן בהן 12 כדורים שווים כך שישיקו לכדור אחד השווה להם גם הוא, בלי רווחים ביניהם, אבל האם אין דרך אחרת לכך? מתברר שיש! ויותר מאחת! אפשר למשל, בין 13 כדורים שווים, לסדר 12 כדורים סביב כדור אחד שמרכזו במרכז של עשרימון (איקוסהדרון) משוכלל ומרכזי ושאר הכדורים נמצאים ב-12 קדקודי העשרימון.¹ בסידור כזה יש רווחים ביניהם (ראה איור 19) ומתעוררת השאלה: האם בסידור כזה אין מקום לעוד כדור אחד ביניהם? השאלה עוררה מחלוקת.

איור מס. 19

1. עשרימון הוא אחד מחמשת הגופים המשוכללים. הוא עשוי מ-20 פאות שכולן משולשים חופפים שווים-צלעות ויש לו 12 קדקודים.

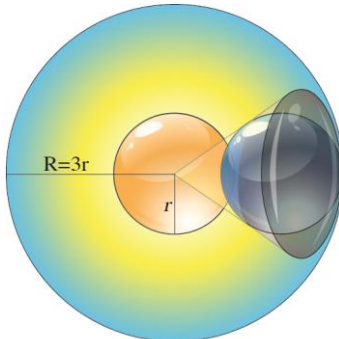


אור 19



בשנת 1694, ניטש ויכוח נוקב בין אייזק ניוטון (Isaac Newton, 1642-1727), איש קיימברידג', לבין דייויד גרגורי (David Gregory, 1659-1708), איש אוקספורד, על השאלה שזכתה בשם "בעיית הנשיקה":

מהו המספר המקסימלי של כדורים שווים שמשיקים במרחב לכדור אחד, השווה להם? שני האסטרונומים דנו במיקום של גרמי השמיים סביב השמש וכך הגיעו לשאלה הזאת. כאן נחלקו הדעות – גרגורי היה לא רק הצעיר בין השניים, אלא גם מדען פחות ידוע ובדרך כלל נטה לקבל את דברו של ניוטון כבר-סמכא. בכל זאת, גרגורי טען שצריך להיות אפשרי לארגן 13 כדורים שווים, כך שישקו לכדור אחד, ואילו ניוטון טען ש-12 הוא המספר הכי גדול. הנימוק של גרגורי היה משכנע למדי: נשים את כל הכדורים השווים ($r=1$) הנושקים לכדור מרכזי אחד בעל אותו רדיוס, בתוך כדור-על שרדיוסו גדול פי שלושה ($R=3$). נדמיין פנס במרכז הכדור הגדול שמאיר על הכדורים. נוצרת צללית של כל כדור על הדופן הפנימית של הכדור הגדול (ראה איור 20). החישוב מראה שהצללית תופסת קצת יותר מ- $1/15$ משטח הדופן. לפיכך טען גרגורי, יש מקום אפילו ל-14 כדורים ובוודאי ל-13 סביב הכדור המרכזי. צריך רק למצוא דרך נכונה לסדר אותם סביבו. ניוטון דבק באריזות של קפלר שאין בהן רווחים בין כדורים המשיקים לכדור אחד וטען שאי אפשר למצוא סידור של 13 כדורים שווים שישקו לכדור מרכזי אחד השווה להם. רק בשנת 1953, 259 שנה לאחר מכן, התברר והוכח שניוטון צדק!



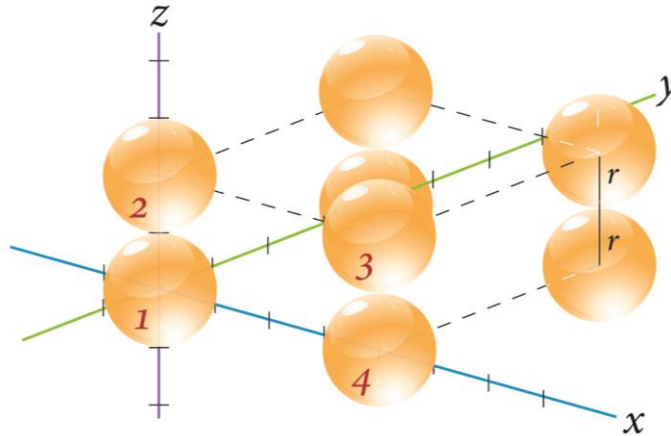
אור 20

אפשר לסדר 13 כדורים שווים משיקים לכדור מרכזי השווה להם, רק אם מגדילים את רדיוסו r במעט, ל- $1.04557r$ (Schutte & van der Waerden).

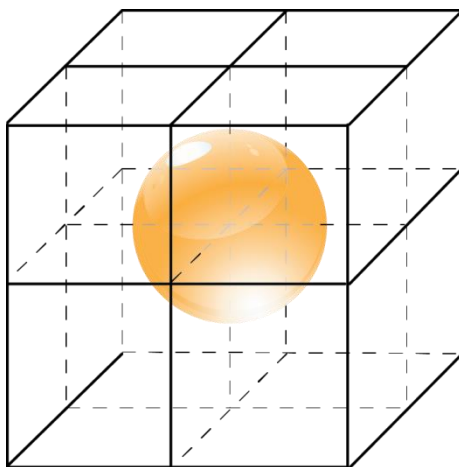
פריצת דרך ראשונה

המיפוי של הנקודות במרחב התלת-ממדי, שבהן מוצבים מרכזי הכדורים מתאפשר כמקובל במערכת צירים מאונכים זה לזה: x, y, z הנחתכים בנקודה אחת – ראשית הצירים. לכל נקודה במרחב יש מקום משלה המתאפיין על-ידי מרחקיה משלושת המישורים $x-y$; $y-z$; $z-x$. שלישיית המספרים (הסדורה!) הזאת היא "השם המזהה" של הנקודה. גם למרכז של כל כדור בכל אריזה במרחב יש "שם מזהה תלת-ספרתי". המתמטיקאי האגדי של המאה התשע-עשרה, קארל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), בחן את האפשרויות הרבות לארוז כדורים שמרכזיהם

נמצאים בנקודות בעלות "זהות" מיוחדת במרחב – נקודות השריג. נקודות אלו הן הנקודות בעלות שלושה שיעורים שלמים, כלומר נקודות השריג הן הקדקודים של תיבות, אשר פאותיהן מקבילות למישורים $x-y$; $y-z$; $z-x$ ומידות האורך, הרוחב והגובה שלהן ניכרות במספרים שלמים של יחידות שנקבעו על הצירים. ברור שכל מידות התיבה חייבות להיות לפחות כפליים מהרדיוס של הכדור הכלוא בתוכה (ראה איור 21).



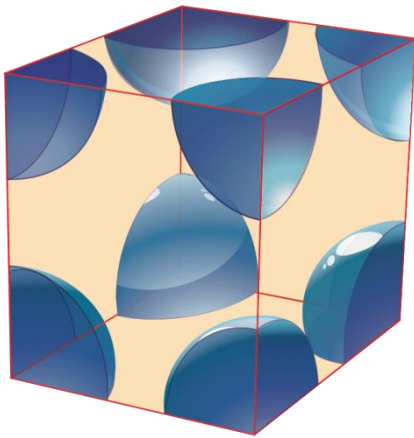
איור 21



איור 22

גאוס ידע ששלושת הצירים לא מוכרחים להיות ניצבים זה לזה, ואז נקודות השריג יוצרות "תיבות" נטויות והכדורים בתוכן מסתדרים אחרת בהתאם. עם הידע הזה ניגש גאוס לבחון בחינה מתמטית את השערתו של קפלר באשר לאריזה המרחבית של כדורים שווים בעלת הצפיפות המקסימלית. הוא שם לב לכך שבמערכות צירים אחרות, נקודות השריג יוצרות "תאים" בעלי צורות ונפחים אחרים. אבל המשותף לכולן הוא שכל נקודת שריג משותפת לשמונה תאים, והיא המרכז של כדור אחד (ראה איור 22).

לכן כל כדור מתחלק בין שמונה תאים ובכל תא יש שמונה שמיניות של כדורים. במילים אחרות, חלקי הכדורים המוכלים בתא אחד הם בנפח של כדור שלם (ראה איור 23).



איור 23

בשריג "הרגיל" (שבו הזוויות בין כל שני צירים הן בנות 90°) התיבה הקטנה ביותר שאפשר לחשוב על שמונה קדקודיה כמרכזי שמונה כדורים שווים ברדיוס r , היא קובייה שמידותיה $2r \times 2r \times 2r$ ונפחה $8r^3$. כזכור, נפח הכדור הוא $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3$, כ-50% מנפח הקובייה.

גאוס הצליח להוכיח שעל-ידי עיוות מערכת הצירים אפשר להקטין את הנפח של התא המינימלי לכל היותר ב-29.3% כך שנפחו $\sim 5.66r^3$. הצפיפות המקסימלית שאפשר להשיג היא אפוא $\frac{4.2}{5.66} \approx 0.74$ בדיוק כפי ששיער קפלר. זאת הייתה

פריצת דרך משמעותית, אך עדיין לא הוכחה מלאה להשערת קפלר. גאוס הוכיח בכך את השערת קפלר לאריזה מרחבית "מסודרת", אריזה בנקודות של שריג. מבין כל האריזות האלה, האריזה הריבועית היא זו שנמצאה כבעלת הצפיפות הגדולה ביותר. אבל אולי יש אריזה "מבולגנת" יותר שצפיפותה עולה על זאת?

אנחנו בראשית המאה התשע-עשרה והשערת קפלר משנת 1611 עשתה רק צעד ראשון לקראת הוכחתה. השאלה הקשה של האריזה המרחבית הצפופה ביותר של כדורים שווים שאיננה קשורה לנקודות של שריג, עדיין פתוחה. והיא תחכה להוכחה או להפרכה עוד שנים רבות.

קארל פרידריך גאוס

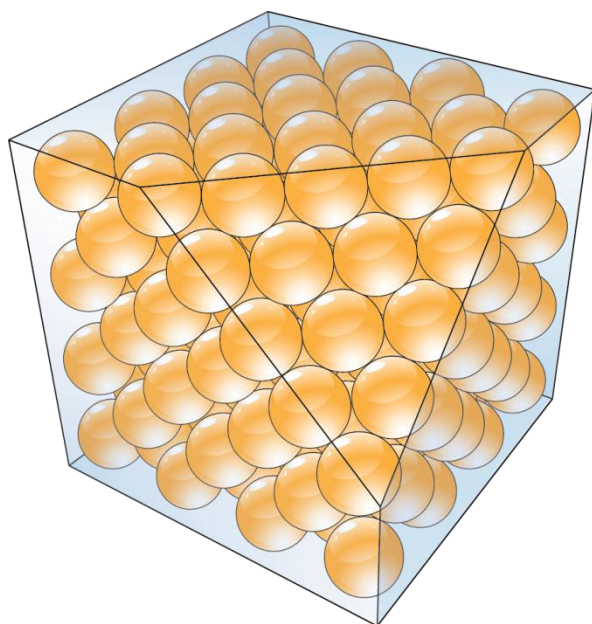


קארל פרידריך גאוס
(1855-1777)
(Biermann, 1887)

גאוס, יליד גרמניה, היה בן לאב שתלטן ומחוספס שפרנסתו הייתה דלה ולאם שלא ידעה קרוא וכתוב. הוא גילה יכולות יוצאות דופן מגיל צעיר. בהיותו בן שלוש, כך אומרים, תיקן טעויות בניהול החשבונות של אביו; בכיתה ג הפתיע את המורה לחשבון שהטיל על הכיתה משימה קשה ומייגעת – לחבר את כל המספרים מ-1 עד 100 – המורה קיווה שזה ייתן לו שקט לזמן מה. גאוס בן השבע קפץ מיד עם התשובה 5,050, וגם הסביר: יש 50 זוגות שסכומם 101. ייאמר לזכותו של המורה ושל עוזרו (לימים פרופסור למתמטיקה) שהם לא נזפו בילד, אלא טיפחו את הכישרון הצעיר שהתגלה. בגיל 11 גאוס התקבל לגימנזיום והמשיך ללמוד, בניגוד לרצון אביו שהעדיף שבנו יצא לעבוד וירוויח למחיתו. בגיל 14 הוא סיים את התיכון וזכה במלגת קיום מכובדת המתחדשת מדי שנה בשנה עד גיל 30. בגיל 15

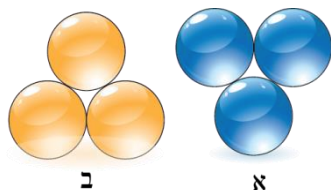
התחיל בלימודים אקדמיים וראה את עבודותיהם של מתמטיקאים דגולים מהמאות השבע-עשרה והשמונה-עשרה: ניוטון, אוילר ולגרנז'. לפני שסיים את הלימודים עבר לגטינגן, שהייתה מרכז מדעי ראשון במעלה והמשיך להצטיין לא רק במתמטיקה, אלא גם באסטרונומיה ובשפות. כחלק מעבודת הדוקטורט, בגיל 22, הוא הוכיח את המשפט היסודי של האלגברה (קיום n שורשים מרוכבים לפולינום ממעלה n). בהיותו בן 30 קיבל את ניהול מצפה הכוכבים בגטינגן והתמסר לאסטרונומיה. כאן התוודע לעבודתו של קפלר והודות לאחת ההברקות הרבות שהיו לו, הוא אישש במידת מה את השערתו.

סוף המאה התשע-עשרה: סיוע מכיוון בלתי צפוי



איור 24

הקריסטלוגרף וויליאם בארלו (William Barlow, 1845-1934) התעניין בסידור של אטומים ובמבנה החומר ולא בכדורי התותח. בשנת 1883 הוא הוכיח את מה שקפלר ואפילו האריוט אמרו מזמן – שהאריזה הריבועית והאריזה המשושה הן אותה אריזה משתי נקודות תצפית שונות (ראה איור 24). עשרים וארבע שנים לאחר מכן הפתיע שוב בארלו, אשר הוכיח שהאריזה הזאת אינה היחידה בעלת הצפיפות של 74% בערך – שהיא הצפיפות המקסימלית לפי השערת קפלר. יתרה מזו, הוא הראה שיש אינסוף אריזות מגוונות שצפיפותן שווה לצפיפות הזאת. הא כיצד?

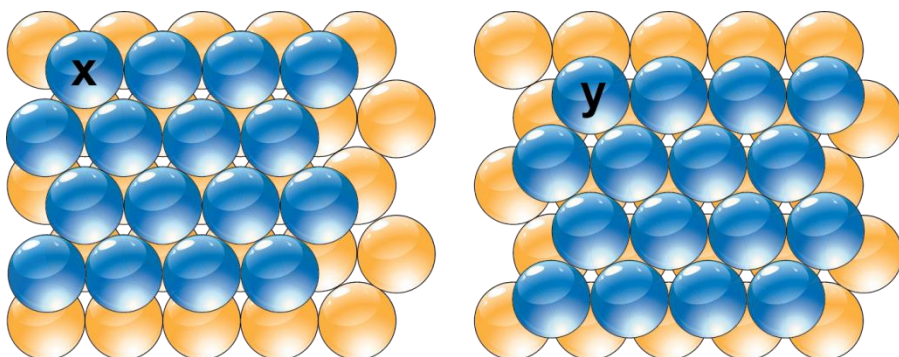


איור 25

במאמר שפרסם בארלו בעיתון יוקרתי של החברה המלכותית לכימיה עם כימאי ממנצ'סטר בשם ג'קסון פופ, הם מסבירים זאת כך:

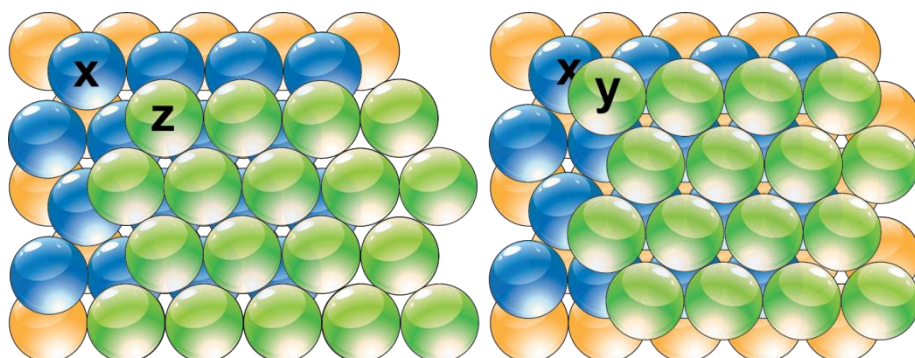
נתבונן בשכבה אחת של אריזה משושה. הרווחים בין כל שלושה כדורים סמוכים בה – הם משני סוגים (ראה איור 25).

לכן את הכדורים בשכבה שמעליה אפשר להניח בשתי צורות, X או Y , ברווחים מסוג א או מסוג ב בהתאמה (ראה איור 26).



איור 26

נבחר באחת מהשתיים, למשל ב-X. גם בשכבה הזאת יש כמובן שני סוגי רווחים כמו בקודמת. סוג א נמצא בדיוק מעל למרכזי הכדורים של השכבה התחתונה וסוג ב נמצא בדיוק מעל לרווחים שעליהם מונחת אפשרות Y. השכבה השלישית יכולה אפוא להסתדר באחת משתי דרכים: Y או Z (ראה איור 27).



איור 27

גם בכל אחת מהשכבות הבאות יש שתי אפשרויות והמסקנה היא שסידור השכבות יכול להיות $XZYXYZ...$, או $XYXYZY...$, או $XZXZYZY...$, או כל סדרה אחרת מבין אינסוף האפשרויות ליצור שרשרת (אינסופית) של X, Y, Z (בלי חזרות). המשותף לכל אינסוף האריות המגוונות הללו הוא, שכל כדור נושק ל-12 כדורים אחרים ולכולן אותה צפיפות. זו הצפיפות שקפלר שיער במאה השבע-עשרה שהיא הגדולה ביותר ושרק במאה התשע-עשרה גאוס הוכיח זאת לראשונה לכל אריות השריג. חשוב לציין כי אין להסיק מכאן שכל אריזה, שבה כל כדור נושק ל-12 אחרים, היא בעלת אותה הצפיפות.

העבודות של גאוס המתמטיקאי והמדען המהולל ושל בארלו הקריסטלוגרף עם פופ הכימאי, הביאו לידי הבנה מעמיקה יותר של השערת קפלר, אבל לא להוכחתה ולא להפרכתה. המאה העשרים בפתח והשערת קפלר ממשיכה להטריד את הקהיליה המתמטית.

מה עלה בגורלה של השערת קפלר במאה העשרים?

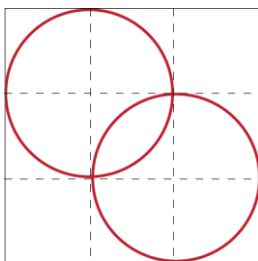
המתמטיקאים פתחו את המאה העשרים בכנס בינלאומי שהתקיים בפאריס בשנת 1900. בהרצאת הפתיחה התכבד דיוויד הילברט (David Hilbert, 1862-1943), מתמטיקאי מהשורה הראשונה, שהאמין בלהט כי בזכות ההתמדה והודות לכושר ההנמקה האנושי, כל בעיה מתמטית ניתנת לפתרון (אגב, כיום, בעקבות משפט גידל, אנחנו יודעים שהילברט טעה באמונתו. גידל הראה כי יש השערות הנקראות "בלתי כריעות", שאותן אי אפשר להוכיח ועם זאת גם אי אפשר להפריך). בפתיחת הכנס הציג הילברט 23 בעיות פתוחות במתמטיקה, סקר אותן והעמיד אותן כאתגר לקהילייה המתמטית בפרוס המאה העשרים. עד היום רוב הבעיות נפתרו, אך לא כולן. השערת קפלר הופיעה ב"רשימת הילברט" כחלק ג של בעיה 18.

כאמור, קפלר שיער וגאוס הביא תימוכין לכך שהצפיפות המרבית של כדורים שווים במרחב היא הצפיפות של אריזה משושה (74.05%~), המשמשת חסם תחתון לצפיפות המרבית. הצפיפות המרבית לא יכולה להיות קטנה יותר. כדי להוכיח שקפלר צדק, צריך להוכיח שזוהו גם החסם העליון לצפיפות המרבית. כלומר שהיא לא יכולה להיות גדולה יותר מ-74.05%~. כיוון שמובן מאליו שאי אפשר למלא את המרחב יותר מ-100%, חייב להימצא בין 100% לבין 74.05%~ הפתרון לצפיפות המרבית. המרוץ להקטנת החסם העליון העסיק את המתמטיקאים במהלך המאה העשרים כולה. ההצלחה הראשונה הייתה של הנס בליכפלדט (Hans Frederick Blichfeldt, 1873-1945), מתמטיקאי אמריקאי, בן למהגרים מדנמרק, אשר פילס את דרכו והפך לדיקן הפקולטה למתמטיקה של אוניברסיטת סטנפורד הידועה. במאמרו משנת 1919 הוא הוכיח שצפיפות הכדורים לא יכולה לעלות על 88.3% ובשנת 1929 שיפר ל-84.3%. אילו היה מצליח למצוא אריזה שזו צפיפותה, זו הייתה מכת-מוות להשערת קפלר, אבל השערת קפלר נשארה בלי הכרעה בינתיים. בשנת 1947 נכנס לתמונה רוברט רנקין (Robert Alexander Rankin, 1915-2001), מתמטיקאי סקוטי, שהשתחרר באותו זמן משירות צבאי בעת מלחמת העולם השנייה. הוא שיפר את התוצאה של בליכפלדט ל-82.7%. המתמטיקאי ההונגרי, לאסלו פייז'ה-טוֹת' (László Fejes-Tóth, 1915-2005), בנה תאי חלוקה של המרחב, תא לכל כדור, על-ידי חלוקת החללים הריקים שבין שני כדורים שכנים שווה בשווה בין שני התאים השכנים. היה ברור שככל שהתאים קטנים יותר, כן הכדורים צפופים יותר. פייז'ה-טוֹת' העלה את ההשערה שהתא הכי קטן הוא התריסרון המשוכלל, אבל הבעיה הייתה שהתריסרון איננו ממלא את המרחב ב-100% ולכן החישוב של היחס בין נפח כדור הכלוא בתריסרון ובין נפח התריסרון, לא הביא לתוצאה המקווה. בשנת 1953 הוא הצליח להראות שכדי להוכיח את השערת קפלר, מספיק לחשב את הצפיפות במספר סופי (אבל גדול מאוד...) של מקרים אחרים. הוא הציע תכנית עבודה שהייתה "יריית הפתיחה" לטיפול בהשערת קפלר באמצעות מחשב, בהנחה שכוח המחשוב ילך וישתפר בעתיד.

והנה זה קורה...

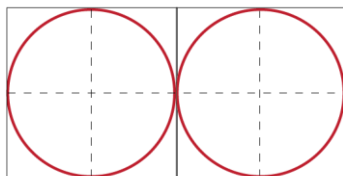
בין המתמטיקאים שעבדו לפי התכנית שהתווה פייז'ה-טות' היה מתמטיקאי יליד סין בשם וו-יי שִׁיאָנְג (Wu-Yi Hsiang, 1938), שהתחנך בטייוואן וקיבל את הדוקטורט בפרינסטון בשנת 1964. הוא קיבל מינוי בפקולטה למתמטיקה באוניברסיטה היוקרתית של קליפורניה בברקלי, ובשנת 1990, כשהיה פרופסור מן המניין, שלח לאחדים מעמיתיו המתמטיקאים הודעה קצרה וברורה: "מצ"ב הוכחת השערת קפלר, להערותיכם...". כעבור זמן מה, בשנת 1991, הוא הגיש את ההוכחה שלו לפרסום בעיתון מתמטי שיצא לאור בברקלי.

ספר השנה של אנציקלופדיית בריטניקה לשנת 1992 מציין כהישג הגדול של שנת 1991 את הוכחתו של שִׁיאָנְג להשערת קפלר. בינואר 1993 הוא הוזמן לשאת את הרצאת הפתיחה בנושא 'הוכחת השערת קפלר' בכנס השנתי המשותף של שני האיגודים המתמטיים הגדולים של ארה"ב: AMS-MAA. התגובות של עמיתיו, שהיו מטובי המתמטיקאים של המאה העשרים, לא איחרו לבוא (ג'ון קונוויי, איאן סטוארט, ניל סלואון ואחרים). בהוכחה של וו-יי שִׁיאָנְג משנת 1990 נמצאו הרבה "נפנופי ידיים" ("קל לראות ש...", "באופן דומה מוכיחים...") ונימוקים לא מלאים. הוא מתקן אך הביקורת נמשכת. הוא מגיב בבוטות ("חובבים", "לא מבינים") ועם זאת, הוא חוזר ומפרסם מאמרי תיקון זה אחר זה. באמצע שנת 1993 וו-יי שִׁיאָנְג מתחיל לחזור בו מדעתו ומפרסם תכנית עבודה בת 88 עמודים, שתביא לידי השלמת ההוכחה שלו. בשנת 1994 פרסם מתמטיקאי אמריקאי אחר בשם תומאס היילס (Thomas C. Hales), שהיה אז בן 36 ופרופסור-חבר באוניברסיטת מישגן, מאמר מקיף ומעמיק על מצבה העדכני של השערת קפלר. במאמרו הוא קובע קביעה חד-משמעית שלהשערה עדיין אין הוכחה. עוד הוא מוסיף שבשנת 1993 דאגלס מודר (Douglas J. Muder) השיג את החסם העליון הכי נמוך שידוע – 77.31%. לדברי היילס, התכנית של וו-יי שִׁיאָנְג נראתה מבטיחה, אך כל עוד לא בוצעה – הטענה של קפלר היא בחזקת השערה. היילס גם מותח ביקורת חריפה ומנומקת היטב על ה"הוכחה" שפירסם וו-יי שִׁיאָנְג ומביא שגיאות רבות שנמצאו בה. בין השאר כותב היילס כך:



הנה ציטוט מהטיעון של וו-יי שִׁיאָנְג: "אם לתא מסוים אי אפשר להכניס מספר כדורים, אז אי אפשר להכניס אותם לתא קטן יותר".

היילס ממשיך וממחיש באיור (ראה איור 28) שזה לא נכון אפילו לשני כדורים בשכבה אחת. שני כדורים שרדיוס כל אחד מהם שווה ל-1 לא נכנסים לשטח של 3×3 , אבל הם כן נכנסים לשטח קטן יותר של 2×4 . עוד מוסיף היילס במאמרו:



איור 28

במאמר הראשון של וו-יי שִׁיאָנְג הטיעון נשען על ההנחה שבכל משולש מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך המשולש. הנחה כזאת מגבילה את המשך הטיעון למשולשים שכל זוויותיהם חדות. במשולשים קהי-זווית מרכז המעגל החוסם נמצא מחוץ למשולש.

שגיאות אחרות שנמצאו בפרסומים של וו-י' שִׁיאָנג הן בעלות אופי פחות אלמנטרי, אבל "השורה התחתונה" היא כדברי ג'ון קונוויי, אחד המוחות היצירתיים ביותר במתמטיקה בת זמננו:

...nobody who has read Hsiang's proof has any doubts about its validity: It is nonsense...

וו-י' שִׁיאָנג עזב את ברקלי בשנת 1997 וחזר לארץ מוצאו, הונג קונג. הוא ממשיך לעסוק במתמטיקה ולפרסם את ממצאיו. תומאס היילס לא הרפה מעיסוקו בהשערת קפלר.

עבודתו הדרמטית, רווית התסכול והעקשנות של תומאס היילס 1994-2014



תומאס היילס (1958-)
(Hirling, 2015)

תומאס היילס הוא מתמטיקאי אמריקאי יליד 1958, אשר קיבל את הדוקטורט בגיל 26 באוניברסיטת פרינסטון המהוללת, לאחר שני תארים קודמים בסטנפורד ושנת מלגה בקיימברידג'. כיום הוא פרופסור מן המניין באוניברסיטת פיטסבורג.

הביקורת הנוקבת של היילס על ה"הוכחה" של וו-י' שִׁיאָנג נשענה על התמצאות מעמיקה בכל קורותיה של השערת קפלר ובפרט ברעיונות של פיז'ה טות' משנת 1953, המבטיחים שאפשר להוכיח אותה רק אם יהיה כוח חישוב חזק די הצורך למיצוי מספר סופי גדול למדי של אפשרויות לאריות הכדורים.

בשנת 1994 התווה היילס אסטרטגיה בת חמישה שלבים, אשר תוביל אותו ל"ניצחון" על השערת קפלר. בשנת 1996 הוא יצא למסע הרצאות באוניברסיטאות אחדות, הסביר את הרעיונות המרכזיים בתכניתו, תיאר את התקדמותו וציין בגילוי לב שהוא מצפה לסיים את ההליך בתוך שנתיים. ואכן, ב-9 באוגוסט 1998, יחד עם תלמידו סמואל פֶּרְגֶּסון, הוא שלח מייל לרשימת תפוצה גדולה של מתמטיקאים-עמיתים והודיע בחגיגות:

אחרי 6 שנות עבודה, התכנית הושלמה והוכתרה בהצלחה! כל הפרטים – באתר האינטרנט שלי <http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/>.

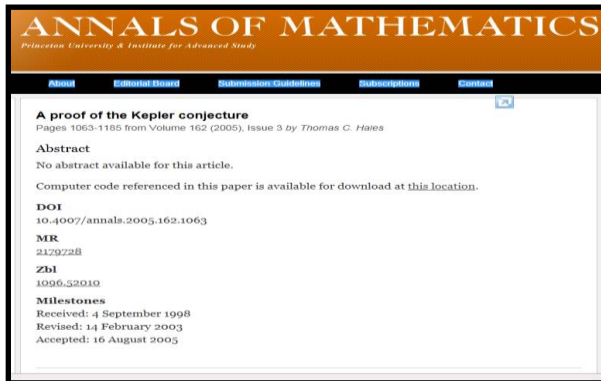
היילס הראה שאף כי יש מספר אינסופי של אפשרויות לערום כדורים שווים, אפשר להפריד את כולן למספר סופי (אלפים רבים) של תצורות המייצגות את אינסוף האפשרויות. הוא השתמש בתכנת מחשב כדי לבדוק את כל התצורות הללו.

הפרסום של כל הפרטים באינטרנט הציב אתגר לא קל לפני הקהילייה המתמטית. ההוכחה משתרעת על פני סדרת מאמרים בת 250 עמודים וכוללת עוד שלושה ג'יגה בייט של תכניות מחשב ונתונים. כדי לעקוב אחר פרטיה, צריך להבין את הטקסט, להוריד את תכניות המחשב, להריץ אותן ולוודא שאין בהן טעויות.²

2. מצב דומה קרה ב-1976, כאשר אָפֶל והייקן הכריזו על הוכחתם בסיוע מחשב של ההשערה על כך שארבעה צבעים מספיקים לצביעת כל מפה מדינית. גם הם, כמו תומאס היילס, הצליחו להראות שאפשר לצמצם את הבעיה למספר סופי (גדול...) של מקרים ובחנו אותם אחד אחד. כך הפכה השערת ארבעת הצבעים בן-לילה למשפט, אף כי האשור של ההוכחה של אפל והייקן התעכב חודשים רבים. אבל ב-1998, כשרשת התקשורת באינטרנט כבר הפכה לכלי זמין ומוכר לכל מתמטיקאי בכל העולם, הציפייה הייתה שהאשור של ההוכחה של היילס יקרה הרבה יותר מהר.

את ההרצאה הראשונה לאחר השלמת ההוכחה נשא היילס בספטמבר 1998 בכנס בינלאומי על סימטרייה שהתקיים בטכניון והתקבל בתשואות רמות. הקהל המגוון של באי כנס ISIS היה אוהד ולא הציג שאלות קשות. המבחן האמיתי היה כעבור שישה חודשים במכון ללימודים מתקדמים בפרינסטון. במשך ארבעה ימים נשאלו שאלות נוקבות והיילס השיב על כולן ונטע במשתתפים הרגשה שההוכחה שלו מבוססת היטב. לכן הוזמן היילס להגיש את ההוכחה לפרסום בכתב-העת היוקרתי *Annals of Mathematics*. העורך הזהיר אותו כי שנים-עשר מומחים יבדקו את ההוכחה, ולכן הבדיקה עלולה לקחת זמן. היילס לא נרתע, הוא רצה שההוכחה שלו תיבחן כיאות וקיווה שתקבל גושפנקה שהיא נכונה מעל לכל צל של ספק. יו"ר ועדת השופטים היה גאבור פייז'ה-טות', בנו של לאסלו. גם הוא מתמטיקאי הונגרי בעל שם. התהליך היה ארוך ומייגע ובשנת 2003, לאחר חמש שנים שבמהלכן צוות של שנים-עשר מטובי המתמטיקאים בחן את ההוכחה, כתב גאבור לעורך:

הצוות משוכנע ב-99% שההוכחה נכונה אבל לא נוכל להמשיך לעסוק בכך – אנחנו מותשים...



פייג'ה-טות' נאלץ ליצור תקדים היסטורי, הוא מכריז שהוא מוותר! אבל היילס לא מוותר. הוא הכין מהדורה מקוצרת של ההוכחה, שהייתה בת 120 עמודים, וכעבור עוד שנתיים, בנובמבר 2005, זכתה המהדורה המקוצרת לפרסום ב-*Annals* (ראה איור 29). היילס הקדיש את המאמר ללאסלו פייז'ה-טות', אשר נפטר באותה שנה.

היילס לא ויתר גם על רצונו להגיע לידי הכרה במהדורה המורחבת, הכוללת חישובים גיאומטריים ובדיקות ממוחשבות. הוא חתר לאישורה מעל לכל צל של ספק ופתח בהליך חדש.

בשנת 2003 הוא השיק פרויקט בינלאומי שיתופי מתמשך ופתוח להצטרפות לכל המעוניין: F.P.K: Formal – FLYSPECK הוא קרא בשם <http://code.google.com/p/flyspeck/>. לפרויקט הוא פירוש 'טלאי' ויש המכנים אותו 'המעופף'). Proof Kepler (בתרגום מאנגלית: 'פלייפק' פירוש 'טלאי' ויש המכנים אותו 'המעופף').

מטרתו להביא לידי כך שהוכחות באמצעות מחשב יהפכו להוכחות קבילות בהיותן בדוקות ומאושרות מעל כל צל של ספק על-ידי הקהילה המתמטית. הצוות, בהנהגתו של היילס, השתמש בשתי תכנות שהן עזרי בדיקה של הוכחות פורמליות הנקראות Isabelle ו-HOL Light. שתיהן בנויות סביב גרעין מוצק ואמין של לוגיקה ומסוגלות לבדוק בקפידה כל שרשרת של טענות לוגיות כדי לאתר בהן שגיאות או לאשר שהן טענות אמת.

כעבור אחת-עשרה שנה, באוגוסט 2014 התבשרנו כי המאמצים של היילס ומתמטיקאים רבים שהצטרפו אליו נשאו פרי. הספקות של המתמטיקאים באשר להוכחה הנשענת על בדיקה של מאות

מקרים באמצעות מחשב, נובעים מהיעדר היכולת לוודא בידי אדם, שאין טעויות בעבודת המחשב. המתמטיקאים של פרויקט פלייסק והיילס בראשם, הצליחו לפתח תכנות מחשב שעושות את הליך האימות הזה. לאחר שהושלמה המשימה אמר היילס:

אני מרגיש כעת צעיר בעשר שנים. מעתה מתמטיקאים לא צריכים כבר לבזבז את זמנם בבדיקת הוכחות לפני פרסומן. התכנות שלנו עושות את זה, והמתמטיקאים יכולים להתפנות ליצירה של הוכחות חדשות!

לאחר פרסום ההוכחה אמר היילס:

יש לי קופסא מלאה ברעיונות שדחיתי את העבודה עליהם כל עוד לא הושלמה העבודה על הוכחת השערת קפלר. נקווה שהפרויקט הבא לא יארך 20 שנה!

המתמטיקאים, עמיתיו של היילס, מאמינים שבעקבות ההישג הזה יגדל מספר המתמטיקאים הסומכים על המחשב לצורך אימות הוכחות. בסוף המאה העשרים גרמו הוכחות באמצעות מחשב לסערה. במאה העשרים ואחת, אימותן באמצעות מחשב הוא הבשורה הגדולה.

רשימה מוערת של מקורות והמלצות לקריאה נוספת

Conway, J. H., & Sloane, N. J. A. (1999). *Sphere packings, lattices and groups* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.

Coxeter, H. S. M. (1961). *Introduction to geometry*. New York: Wiley.

Joyce, H. (2003, April 30). Kepler's conjecture [Review of the book *Kepler's conjecture*, by G. G. Szpiro]. *plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue25/reviews/book4>

Szpiro, G. G. (2003). *Kepler's conjecture: How some of the greatest minds in history helped solve one of the oldest math problems in the world*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons.

על תומאס היילס:

Hirling, B. (2015). *Mathematik raetsel Thomas Hales* [Image]. Retrieved from http://www.zeit.de/wissen/2015-07/mathematik-raetsel-thomas-hales/wide__250x141

מאמרים של תומאס היילס על הוכחת השערת קפלר:

Hales, T. C. (1994). The status of the Kepler conjecture. *The Mathematical Intelligencer*, 16(3), 47-58.

Hales, T. C. (2002). *An overview of the Kepler conjecture*. Retrieved from <http://arxiv.org/pdf/math/9811071v2.pdf>

Hales, T. C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162(3), 1065-1185. Retrieved from <http://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>

ההוכחה של היילס בראשי פרקים:

Hales, T. C. (2001). *Cannonballs and honeycomb*. Retrieved from <http://www.math.pitt.edu/articles/cannonOverview.html>

על פרויקט פלייסק וההודעה על ההישג של שנת 2014:

Flyspeck. (2014). Retrieved from <https://code.google.com/p/flyspeck/wiki/AnnouncingCompletion>

The Flyspeck Project. (2014). Retrieved from <http://code.google.com/p/flyspeck/>

Proof confirmed of 400-year-old fruit-stacking problem. (2014, August). *New Scientist*. Retrieved from <http://www.newscientist.com/article/dn26041-proof-confirmed-of-400yearold-fruitstacking-problem.html#.VEqh-iKUeky>

על יוהאנס קפלר:

Stern~commonswiki. (2005). *Johannes Kepler* [Image]. Retrieved from https://he.wikipedia.org/wiki/קפלר#/media/File:Johannes_Kepler.jpg

על קארל פרידריך גאוס:

Biermann, G. (1887). *The mathematician and philosopher Carl Friedrich Gauss* [Oil painting]. (Submitted by Bcrowell~commonswiki). Retrieved from https://he.wikipedia.org/wiki/קארל_פרידריך_גאוס#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

על החוברת הקטנה של קפלר בנושא "פתותי השלג המשושים" שבה העלה את ההשערה המפורסמת:

Ball, P. (2011, December 22). 400 years of snowflakes [Web log post]. Retrieved from <http://philipball.blogspot.com/2011/12/400-years-of-snowflakes.html>

ועוד מקורות אחדים:

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. New York: H. H. & Co.

Hales, T. (2005). *Computer resources for Kepler's conjecture*. Retrieved from <http://annals.math.princeton.edu/supplemental/2005/162-3/p01/>

Mathematical mysteries: Kepler's conjecture (1997, August 31). *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue3/xfile>

Pinch, R. (1997, August 31). Coding theory: The first 50 years. *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue3/codes/index.html>

Rogers, C. (1964). *Packing and covering*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weisstein, E. W. (n.d.). Kepler conjecture. *Wolfram Mathworld*. Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/KeplerConjecture.html>

Zong, C. (1999). *Sphere packings*. New York: Springer.

על תומאס האריוט:

Shirley, J. W. (1983). *Thomas Harriot: A biography*. Oxford: Clarendon Press.

Wikipedia. (2015). *Thomas Harriot* [Image]. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Harriot

Jimmy2bellies (2009). *Cannon* [Image]. Retrieved from <https://pixabay.com/en/cannon-old-military-history-war-887345/>

Faherty, A. (2009, March 1). Thomas Harriot: A lost pioneer. *+plus magazine* <http://plus.maths.org/content/thomas-harriot-lost-pioneer?src=aop>

ההוכחה של THUE משנת 1890 שאריזה משושה במישור היא מינימלית (השערת קפלר ב-2 ממדים):

Casselman, B. (n.d.). *Packing pennies on an infinite table top: An illustrated proof of Kepler's conjecture in 2D*. Retrieved from <http://www.math.sunysb.edu/~tony/whatsnew/dec00/paper.html>

Thue (2001). *Cannonballs and honeycomb*. Retrieved from <http://www.math.pitt.edu/articles/thue.xml>

על התריסרון המעויני:

Newbold, M. (n.d.). *Mark Newbold's Rhombic Dodecahedron Page*. Retrieved from <http://dogfeathers.com/mark/rhdodec.html>

Umer, K. (n.d.). *The synergetics hierarchy of concentric polyhedral* (Part 1 of 2). Retrieved from <http://www.grunch.net/synergetics/volumes.html>

על בעיות אריזה של כדורים:

Schütte, K., & van der Waerden, B. L. (1953). Das Problem der dreizehn Kugeln. *Mathematische Annalen*, 125(1), 325-334.

Wikipedia (2015). *Sphere packing*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing

Wikipedia (2015). *Kissing number problem*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Kissing_number_problem

על בעיית הנשיקה (גם בספרו של Szpiro הנ"ל):

Szpiro, G. (2003, January 1). Newton and the kissing problem. *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/content/newton-and-kissing-problem>

על הקריסטלוגרף – ויליאם ברלו:

Barlow, K. (1935). *William Barlow: Crystallography*. Retrieved from <http://www.barlowgenealogy.com/england/famous/williamcrystal.htm>

על ההרצאה הכי מפורסמת בהיסטוריה של המתמטיקה: הילברט 1900, פאריס:

Weisstein, E. W. (n.d.). Hilbert's Problems. *Wolfram Mathworld*. Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html>

על הכללה של משפט קפלר לממדים גבוהים יותר:

Courier, C. (2006, December 6). Untidy packing can have its advantages. *International Journal of High-Energy Physics*. Retrieved from <http://cerncourier.com/cws/article/cern/29771>

Torquato, S., & Stillinger, F. H. (2006). New conjectural lower bounds on the optimal density of sphere packings. *Experimental Mathematics*, 15, 307-331.

חדשות משנת 2009 ומשנת 2011 על מילוי המרחב בפיאונים:

Conway, J. H., Jiao Y., & Torquato, S. (2011). New family of tilings of three-dimensional Euclidean space by tetrahedra and octahedra *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(27), 11009-11012. doi: 10.1073/pnas.1105594108

Mathematical association of America. (2009). *Packing of Tetrahedra illuminates nature of matter*. Retrieved from <http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=mathNews&sa=view&newsId=650>

Mathematical association of America. (2011). *Tiling 3-D Space by Tetrahedra and Octahedra*. Retrieved from <http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=mathNews&sa=view&newsId=1151>

Torquato, S., & Jiao, Y. (2009). Dense packings of the platonic and Archimedean solids. *Nature* 460, 876-879. doi:10.1038/nature08239

המחשה עם אנימציה של פיאונים הממלאים את המרחב:

miscellaneous examples of curious polyhedra. (2008). Retrieved from http://www.ac-noumea.nc/math/polyhedr/misc_poly_.htm

במאמר הבא כלולות גם פריסות הניתנות לבנייה:

Inchbald, G. (1996). *Five space-filling polyhedra*. Retrieved from http://www.steelpillow.com/polyhedra/five_sf/five.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedral-octahedral_honeycomb

[במדור החדשות המתמטיות של גיליון מס' 1](#) הופיעה כתבה קצרה על בעיית ABC (בעברית). באוקטובר האחרון הופיעה בעיתון NATURE כתבה מקיפה ומעניינת מאוד על הבעיה הזאת. המעוניינים ימצאו אותה [כאן](#) (באנגלית).

ראו גם בנושא זה: Kennell, J. (2015, December 30). Mathematician solved a nearly impossible maths problem.

The Science Explorer. retrieved from <http://thescienceexplorer.com/universe/mathematician-solved-nearly-impossible-maths-problem>



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המסדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.

אפשר גם אחרת - הערכה חלופית בקורס "גאומטריה והוראתה"

בת-שבע אילני ונורית שמואלי
המכללה האקדמית בית ברל

תקציר

בשנים האחרונות חלה תפנית בהתייחסות להוראת המתמטיקה. לאור השינויים והמגמות החדשות, התעורר צורך בכלים להערכת התלמידים המותאמים לשינויים בהוראה. במאמר זה נציע כלי להערכה שנקרא "דו"ח משולב" – כלי הערכה הבנוי משלושה שלבים: מבחן קבוצתי, דיון ומבחן יחיד. כלי זה שימש במחקרנו להערכת הקורס "גאומטריה והוראתה".

מטרת המאמר היא להציג מצד אחד את הכלי עצמו שהוא יעיל להערכה בייחוד בהוראה שיתופית, ומצד אחר להציג מחקר שמטרתו הייתה לבדוק האם וכיצד הכלי בודק את הידע של פרחי ההוראה תוך מתן ביטוי למיומנויות ולשונות שביניהם ולעבודה השיתופית. כמו כן מטרתו לקבל משוב מהנבדקות על הכלי בעקבות החשיפה אליו והשימוש בו.

במחקר השתתפו 35 פרחי הוראה ומורות למתמטיקה משתי כיתות במכללה למורים במרכז הארץ, אשר הוערכו בעזרת ה"דו"ח משולב". מתוך הממצאים אפשר לראות שהכלי בדרך כלל משקף את הידע של הסטודנטיות, בודק את הבנת המושגים המתמטיים ואת הידע המתודי. כמו כן אפשר לראות מתוך המשוב כי הסטודנטיות מעוניינות להשתמש בכלי זה להערכת תלמידיהן.

ייחודו של הכלי הוא בכך שהוא מתאים את דרך ההערכה לשינויים שחלו בדרך ההוראה. כמו כן השימוש בכלי הוא דוגמה לסטודנטים כיצד להתאים הערכה לדרך הוראה.

מילות מפתח: חלופות בהערכה; הוראת גאומטריה.

חבוא

בעשור האחרון, הערכת הישגים היא אחד הנושאים החשובים והמרכזיים המעסיקים את קברניטי מערכת החינוך. החל משנות השמונים, מדינות שונות, ביניהן ישראל, החלו לבחון את האופן שבו הן מעריכות את תלמידיהן. המסקנה הייתה שבהתאם לאופן שבו מעריכים – כך מלמדים (Firestone, Winter, & Fitz, 2000; Watt, 2005).

הערכה מסורתית היא מבחנים שאינם נותנים מידע מספק על יכולות התלמיד. הם מדגישים יותר פרטי ידע עובדתיים, ומתמקדים בפרוצדורות ובמיומנות ברמה נמוכה ללא העמקה ודיון (משרד החינוך,

(2014). כמו כן הפעלת צורת הערכה אחת גרמה הטיה לטובת קבוצת לומדים מסוימת ואינה מקנה תמונה מקיפה על יכולות שאר הלומדים. כדי להגיע לכמות גדולה ומגוונת של לומדים דרושות כמה מתודות לאיסוף אינפורמציה הערכה (Watt, 2005). הוראה משולבת הערכה היא פתוחה ורגישה יותר להבדלים האישיים ומשקפת הבנה עמוקה ורחבה של הלומדים (Birenbaum et al., 2006).

המגמות החדשות בעולם מדגישות את הצורך בפיתוח יכולות הלומדים בפתרון בעיות, חשיבה ביקורתית, שאילת שאלות, שימוש יעיל במידע ועוד (משרד החינוך, 2014; NCTM, 2000, 2004). כיוון שהכלים הסטנדרטיים אינם מעריכים מיומנויות אלה, נוצר הצורך לבנות כלי הערכה חדשים ולהשתמש בהם בבואנו להעריך את הלומדים (בירנבוים, 1997; Birenbaum et al., 2006).

במאמר זה נציג כלי ההערכה שנבנה לצורך הערכתם של פרחי הוראה למתמטיקה בבית-הספר היסודי בקורס "גאומטריה והוראתה" (אילני ושמואלי, 2000). הקורס התמקד בהכרת הצורות הגאומטריות, הקשרים ביניהן, תכונותיהן וכן בהיבטים דידקטיים כלליים. הקורס ניתן כסדנה תוך שימוש באמצעי המחשה רלוונטיים לנושאים הנלמדים. כמו כן שולבו בקורס דרכי הוראה ושיטות דידקטיות מגוונות והוצגו בו מחקרים ותאוריות כמו התאוריה של ואן-הילה (רייז, ואן דורמלין-אברהמי ופטקין, 1996), אשר עוסקים בשלבי החשיבה הגאומטרית של תלמידים.

דרך ההוראה כללה עבודה בקבוצות הטרוגניות תוך שימת דגש בעבודה במשימות אותנטיות הדורשות חקר וגילוי, דיונים ושיחות מתמטיות בתוך הקבוצות ובמליאה. כמו כן הושם דגש בשימוש בשגיאות אופייניות של תלמידים במהלך ההוראה ובחשיבות השימוש באמצעי המחשה.

נעשה ניסיון להתאים את דרכי ההערכה בקורס לדרך ההוראה שלנו. השימוש בכלי ההערכה נועד לבדוק את הידע המתמטי והמתודי של הסטודנטיות בגאומטריה, לתת ביטוי לתהליכי חקירה בקבוצה, לידע האישי ולשוונות בין הסטודנטיות.

כדי להתאים את דרכי ההערכה לדרך ההוראה בקורס, השתמשנו בכלי הערכה שפיתחנו על-פי רעיון של אילני ושמואלי (Ilany & Shmueli, 1999) בקבוצת המתמטיקה במכון ויצמן למדע. כלי זה בנוי משלושה שלבים ומכונה "דו"ח משולב" כפי שיפורט במתודולוגיה. השאלות שנשאלו בכלי הותאמו במיוחד לקורס.

השאלות שניתנו ב"דו"ח משולב" נבנו על סמך קשיים ותפיסות שגויות בגאומטריה כפי שמופיעים בספרות המקצועית (Hershkowitz, 1989; Rodriguez, 2008).

מטרת המאמר היא להציג מצד אחד את הכלי עצמו שהוא יעיל להערכה במיוחד בהוראה שיתופית, ומצד אחר להציג מחקר, אשר מטרתו לבדוק האם הכלי "דו"ח משולב" בודק את הידע של פרחי ההוראה, תוך מתן ביטוי למיומנויות התלמידים, לשונות ביניהם ולתהליכי ההתמודדות בעבודה בקבוצה. כמו כן ביקשנו מהנבדקות לקבל משוב על הכלי בעקבות החשיפה אליו והשימוש בו.

רקע תאורטי

המאמר עוסק בכלי הערכה חלופי. הרקע התאורטי יתמקד ברציונל לחלופות בהערכה ובהערכה חלופית בהוראת המתמטיקה.

הרציונל לחלופות בהערכה

הערכה היא רכיב בלתי נפרד מתהליך ההוראה-למידה, ובהיעדרה לא יכולה להתרחש למידה שיטתית (בירנבוים, 1997; Wiliam, 2011; Black & Wiliam, 1998). בשנים האחרונות הערכה חלופית זוכה לתשומת-לב בשיח החינוכי כיוון שהיא מתמקדת בתהליך הלמידה ולא רק בתוצר המוגמר, מזמנת אפשרות ביצוע של מטלות אותנטיות, כלומר מטלות הלוקחות מהחיים היום-יומיים. היא מעוררת עניין ואתגר אינטלקטואלי, מספקת מידע אמין על למידת הפרט ובודקת כשירויות מגוונות, בפרט אלה הנחוצות לו לצורך תפקוד בחברה בת זמננו. היא גם אנטי-תזה להערכה שהייתה שלטת ולוותה בחוסר שביעות רצון, בפרט מצד אנשי מקצוע (בירנבוים, 1997; לוי, 1996; Shepard, 2000).

המונח "הערכה חלופית" (Alternative Assessment) עוסק בדרכים מגוונות שמשמשות בהן לצורך הערכת הישגי תלמידים. יש המשתמשים במונח זה כאשר כוונתם היא כל צורת הערכה למעט מבחן רב-בִּרְה. אחרים מתכוונים להערכת ביצועים של מטלות משמעותיות הרלוונטיות לחיי היום-יום של הלומד (בירנבוים, 1997; לוי, 1996).

בירנבוים (1997) מאפיינת את הגישה המסורתית להערכת הישגים באמצעות המינוח "תרבות בחינה" ואת ההערכה החלופית במינוח "תרבות הערכה". בגישה המסורתית מעריכים באמצעות בחינה שלא תמיד מתאימה לדרך ההוראה. כיוון שתהליך הלמידה מבוסס על העברת חומר מהמורה לתלמידיו בשיטת ההרצאה, נדרש הלומד בבחינה רק להראות כי שינן את החומר. בגישה זו אין קשר בין ההוראה שהתרחשה בכיתה ובין ההערכה. תפקידו של המבחן הוא הערכה מסכמת בלבד, ותוצאות המבחן הן משוב לאחר תהליך הלמידה. כשהמורה מחבר בחינה, המטלות אינן קשורות למציאות הלומד, הן סגורות או דורשות מתן תשובה קצרה ויש רק תשובה אחת נכונה (בירנבוים, 1997; לוי, 1996; Anderson, 1998; Shepard, 2000).

תרבות ההערכה האלטרנטיבית היא ניגוד לקודמתה, שכן היא מדגישה את שילוב ההערכה בתהליך ההוראה-למידה, ולכן מדברים על תרבות ההל"ה (הוראה-למידה-הערכה). המורה המלמד את הכיתה מנצל את ההערכה לצורכי מעקב אחרי הלומד, חשיפת דרכי חשיבתו וכן לשיפור ההוראה. ההוראה ממוקדת בהבנה מעמיקה ובנייה אקטיבית של הידע על-ידי הלומד, מכאן שההערכה בתרבות זו כוללת גם חשיבה מסדר גבוה ולא רק שינון וזכירה. יתרה מזו, בתרבות זו האחריות על הלמידה עוברת למגרשו של הלומד (בירנבוים, 1997, 2013; Anderson, 1998).

הערכה חלופית בהוראת המתמטיקה

מסמך הסטנדרטים הבינלאומיים להוראת מתמטיקה (NCTM, 2000, 2004) מציע לשנות את פני החינוך המתמטי ולהיערך מחדש לקראת המאה העשרים ואחת. המסמך מייחס חשיבות מיוחדת לחשיבה עצמאית וביקורתית.

במסמך ממליצים למורים רבים להורות מתמטיקה שונה מדרך ההוראה שחוו בזמנם כתלמידים בשיעורי המתמטיקה. בסטנדרטים אלה מומלצים חמישה שינויים מרכזיים שיש לעשות בסביבה הלימודית המאפיינת את שיעורי המתמטיקה, כדי שתעניק לתלמידים עוצמה.

לדוגמה:

1. מעבר לכיתה המהווה קהילייה מתמטית והתרחקות מכיתה שהיא אוסף של יחידים.
2. מעבר לביסוס טענות על ראיות תוך שימוש בכלים של הלוגיקה והמתמטיקה, והתרחקות מהמורה כסמכות בלעדית לתשובות נכונות.
3. מעבר לשיקול דעת והנמקות מתמטיות והתרחקות משינון של פרוצדורות.
4. מעבר להעלאת השערות, המצאה ופתרון בעיות והתרחקות במקום התמקדות במציאת התשובה הנכונה בלבד.
5. מעבר לקישור בין עקרונות ונושאים מתמטיים על יישומיהם השונים והתרחקות מהתייחסות אל המתמטיקה כאל אוסף של מושגים ומיומנויות מבודדים בלי קשר ביניהם.

במסמך מושם דגש בפיתוח דרכי חשיבה ואסטרטגיות לפתרון בעיות יותר מאשר פיתוח מיומנויות חישוב והיבטים טכניים אחרים של מושגים מתמטיים. הדיון בתהליכי הפתרון של משימות מורכבות וניתוחם מודגש יותר מאשר בדיקת נכונותן של תשובות סופיות. כמו כן מוצעות מסגרות למידה מגוונות כמו עבודת יחיד ועבודה בקבוצות בהרכבים שונים.

בגישה החדשה להוראת המתמטיקה חשיבותן של שאלות חישוב ושל שאלות מילוליות קצרות הניתנות "לתרגום" לתרגיל פשוט – הולכות ופוחות. בשל כך, חשוב לכלול הן בהוראה והן בהערכה משימות בעלות פתרון לא אלגוריתמי הדורשות חשיבה ברמה גבוהה יותר. לדוגמה התמודדות עם שאלות בלתי שגרתיות, בעיות שלא קיימת בעבורן סכמת פתרון ידועה מראש, אלא בעיות המצריכות חשיבה יצירתית (Schoenfeld, 1982), או שימוש בשאלות פתוחות מחיי היום-יום היכולות לשמש ככלי המתאים להדריך ולהעריך תלמידים בתחום פתרון בעיות לא שגרתיות (Clarke & Sullivan, 1992). בשאלות פתוחות יש לכל תלמיד אפשרות לבחור באסטרטגיה המתאימה לרמה הקוגניטיבית שלו.

קארסנטי (1993) טוענת שבשאלות פתוחות, לא שגרתיות ומעוררות חשיבה, אפשר לחקור את התשובות לעומק ולחשוף הרבה מהתכונות המתמטיות של הלומד, כגון מקוריות וביקורת עצמית.

המטלות שהוזכרו לעיל נקראות **מטלות אותנטיות**, כלומר מטלות בעלות ערך, הדורשות מהתלמיד להפעיל שיפוט ולהשתמש בידע לפתרון בעיה בהקשר ממשי – הקשר שבו נתקלים בבעיות כאלה בחיים. מטלה אותנטית מורכבת ואינה מוגדרת באופן חד-משמעי, היא בעלת שלבים אחדים ואין לה תשובה נכונה אחת. ביצוע המטלה דורש הפעלת שיפוט בבחירת הידע המתאים ואופן יישומו, מיומנויות בקביעת סדר עדיפויות וארגון השלבים של הבהרת הבעיה ודרכי הפתרון. המטלה יכולה להתבצע על-ידי

תלמידים אחדים בסיטואציה טבעית, בלי הגבלה של זמן, כלים ומקורות (בירנבוים, 1994). ההשתתפות במטלות אותנטיות מניעה את התלמידים לעמוד בעבודה הקשה הנדרשת במהלך הלמידה, מאחר שלעבודה האותנטית יש ערך מעבר להפגנת מיומנויות בבית-הספר; מטלה אותנטית מאפשרת לתלמידים לעשות שימוש מקיף יותר בשכלם, ולכן תהיה להם מעורבות גדולה יותר בהישג אותנטי. נמצא, שתלמידים הלומדים בכיתות שמקדמות את ההישגים האותנטיים הם תלמידים מעורבים יותר. אתגרים אותנטיים מטפחים כישורים לחשיבה בסדר גודל גבוה יותר ומטפחים את היכולת לפתור בעיות, כישורים שיהיו שימושיים הן ליחיד והן לחברה. יש סיכוי רב יותר שהשליטה הנרכשת בבית-הספר במהלך עבודה אותנטית, תועבר לחיים שמחוץ לבית-הספר.

בבעיות אלו אפשר להגיע לדרכי פתרון מגוונות ומקוריות, ולפיכך הן מאפשרות את בחינת יכולתו המתמטית של התלמיד, ואפשר להדגיש את תהליך הפתרון ולא דווקא להתמקד בתוצאה הסופית. בהערכת יכולתו המתמטית של התלמיד יש חשיבות רבה **למעקב אחר תהליך הפתרון** ואחר תהליכי החשיבה המנחים את התלמיד. מטלות מסוג זה מתאימות לשמש ככלי הערכה בהתאם למגמות החדשות בהוראת המתמטיקה. כדי ליצור זיקה בין הלמידה וההוראה בכיתה לבין ההערכה יש לתת מטלות הערכה מתאימות לדרכי ההוראה. כיוון שאנו שואפים לבסס את ההוראה והלמידה בכיתה על תהליכי חקר וגילוי המתבצעים במהלך פתרון בעיות (זוהר, 2013), הערכת תלמידים צריכה אף היא להתבסס על משימות מסוג זה. דרך ההוראה תכלול עבודה בקבוצות הטרונגיות תוך שימת דגש בעבודה במשימות אותנטיות הדורשות חקר וגילוי, דיונים ושיחות מתמטיות בתוך הקבוצות ובמליאה. להלן היעדים שאליהם נשאף להגיע בעזרת כלי ההערכה: לבדוק את יכולת התלמיד לנמק ולהציג את פתרונותיו; לבדוק את יכולתו לקשור קשרים בין תחומים שונים במסגרת מתמטית לבדוק האם נלמדה מתמטיקה משמעותית ולא מנותקת; לבדוק האם נוצר ידע בעל ערך ללומד.

השינויים בתכנים ובסגנון הוראת המתמטיקה מחייבים שינויים מקבילים גם בתהליך ההערכה (MSEB, 1993; NRC, 1993). בשל כך הוצעו דרכים וכלים מגוונים להערכת תלמידים כתחליף או כתוספת להערכה המקובלת באמצעות מבחנים (Stenmark, 1991).

לאור הנאמר לעיל עולה צורך להתאים את כלי הערכה לגישות ההוראה החדשות. כיוון שבקורס "גאומטריה והוראתה" ההוראה הייתה משולבת בלמידה בקבוצות תוך עיסוק במשימות אותנטיות בגאומטריה, נבנה כלי ההערכה חלופי מתאים לדרכי ההוראה בקורס. מחקר זה בדק האם וכיצד כלי ההערכה בודק את הבנת המושגים המתמטיים ואת הידע המתודי (כמו יכולת הכנת פעילות לתלמידים), תוך מתן ביטוי למיומנויות התלמידים ולשונות ביניהם ולתהליכי ההתמודדות בעבודה בקבוצה. כמו כן ביקשנו לקבל משוב מהנבדקות על הכלי בעקבות החשיפה והשימוש בו. במאמר זה נציג יישום של הכלי עם פרחי הוראה ומורים בנושא הגאומטריה.

שיטת המחקר

למחקר שתי מטרות עיקריות

1. לחקור את הכלי "דו"ח משולב" בקרב פרחי הוראה במהלך קורס "גאומטריה והוראתה" כדי לבדוק אם כלי ההערכה החלופית אכן בודק את הידע של פרחי ההוראה תוך מתן ביטוי למיומנויות של הנבדקות ולשונות ביניהן ולעבודה בקבוצות.
 2. לקבל משוב מהנבדקות על הכלי בעקבות החשיפה אליו והשימוש בו.
- מתוך המטרות נגזרו שלוש שאלות המחקר:
1. כיצד הכלי בודק את הידע המתמטי והמתודי של פרחי הוראה בגאומטריה לבית-ספר יסודי?
 2. כיצד הכלי ניכר בעבודה השיתופית, בידע האישי ובשונות בין הנבדקות?
 3. כיצד רואות הנבדקות את תרומת הכלי ללמידה?
- שאלות 1-2 עוסקות במטרה א, ושאלה 3 עוסקת במטרה ב.

האוכלוסייה והמסגרת

אוכלוסיית המחקר כללה 35 סטודנטיות, מקצתן פרחי הוראה ומקצתן מורות מתמחות במתמטיקה לבית-הספר היסודי, הלומדות בקורס סמסטריאלי "גאומטריה והוראתה" לבית-הספר היסודי במכללה האקדמית בית ברל. המחקר נערך בשתי כיתות: 19 סטודנטיות בכיתה אחת ו-16 סטודנטיות בכיתה השנייה. האוכלוסייה בקורסים הייתה הטרוגנית, כיוון שכללה סטודנטיות מתמחות ולא מתמחות למתמטיקה ומורות מהשטח (מהמגזר הערבי והיהודי) שבאו להשלים תואר האקדמי או למדו במסגרת השתלמויות מורים.

* במסגרת המכללות האקדמיות להכשרת מורים יש מסלול מיוחד להתמחות במתמטיקה לבית-ספר יסודי, אבל במכללה שנערך בה המחקר, גם הסטודנטים האחרים צריכים לקחת את הקורס "גאומטריה והוראתה".

נישת ההוראה

הקורס הועבר לפי הגישה של למידה שיתופית (בן דוד, 2012; לזרוביץ ולזרוביץ, 2007). הסדנה מועברת בקבוצות הטרוגניות מבחינת רמת המתמטיקה והניסיון בהוראה, התנסות ושימוש בעזרי לימוד שונים, התנסות במשימות חקר, שיחות ודיונים.

כלי המחקר

במחקר זה השתמשנו בשלושה כלי מחקר:

א. "דו"ח משולב"

כלי המחקר העיקרי שהשתמשנו במחקר. את כלי זה פיתחה בשנת 1997 קבוצת "כולם" – מתמטיקה לכיתה הטרוגנית מקבוצת המתמטיקה במכון ויצמן (רובינזון ואחרים, 2004).

לכלי שלושה שלבי הפעלה:

שלב 1 – המבחן הקבוצתי (נספח א1): הסטודנטיות עובדות בקבוצות על פעילות, וכותבות דו"ח קבוצתי על העבודה הקבוצתית שנעשתה. כל קבוצה כותבת דו"ח אחד למסירה למורה, בלי התערבותו. הדו"ח הקבוצתי מאפשר לשקף את התהליך שעברה הקבוצה, כולל השערות מוטעות. הסטודנטיות מתרגלות להיות מודעות לתהליכים שהן עוברות, להתבטא בתוך הקבוצה ולהסביר לאחרים ולנהל שיח מתמטי. כמו כן הדו"ח הקבוצתי יכול לאפשר לתלמידים חלשים ללמוד מתלמידים חזקים. למבחן הקבוצתי נבנה מחוון מתאים.

שלב 2 – דיון כיתתי (נספח ב1): תפקיד הדיון לסכם ולגבש את עבודת הקבוצות השונות. הדיון מסתמך על עקרונות מתמטיים הקשורים לפעילות שהכינה המורה/המרצה מראש, וכן על התרשמות המורה/המרצה מהפעילות בקבוצות ומהקשיים שהתעוררו במהלך העבודה בקבוצות האחרות. כמו כן תפקיד המורה/המרצה בדיון הוא להגיע עם הסטודנטיות להכללה, להסתכלות גלובלית ולרמת העמקה גבוהה.

שלב 3 – דו"ח יחיד (נספח ג1): בשלב זה הסטודנטיות עונות על שאלון אישי ומגישות דו"ח אישי. בשאלון מופיעות שאלות הקשורות לעבודה שנעשתה בשיתוף הקבוצה בשלב 1. כל סטודנטית נבדקה בשלב זה באיזו מידה היא מסוגלת לענות על שאלות המסתמכות על העבודה הקבוצתית. למבחן יחיד נבנה מחוון מתאים.

לדו"ח יחיד יש שתי מטרות מרכזיות:

1. בדיקת הידע האישי של הסטודנטיות בנושא שבו עבדו עם הקבוצה, אך באופן אישי. דבר זה מאפשר לקבל מידע על הידע האישי של כל סטודנטית. סטודנטיות, היכולות להגיע להרחבה ולהעמקה בנושא בעצמן, יכולות להראות יכולת זו בעבודת היחיד.
2. יצירת מוטיבציה למעורבות של כל אחד מחברי הקבוצה בעבודה הקבוצתית, מתוך ידיעה שכל אחד עתיד להישאל על כך כפרט.

חשוב לבצע את שלבים 1 ו-2 באותו שיעור או בשיעור שאחריו. שלב 3 ייערך בשיעור נוסף לאחר שהמורה עיין בדו"חות של שלב 1. כדי להשתמש בכלי להערכה בקורס, יש לבנות ולשבץ שאלות ודיונים המתאימים לנושאים הנלמדים בקורס. כלי הערכה זה מתאים לדרך הוראה העובדת בגישה של למידה שיתופית (למידה בקבוצות).

לשם הערכת הידע של הסטודנטיות בקורס, בנינו דו"ח משולב המתאים לנושאים שנלמדו בקורס (נספח 1). המשימות, שנבחרו לדו"ח המשולב, כללו משימות דידקטיות ומשימות מתמטיות בנושאים שעסקנו בהם בקורס. במבחן הקבוצתי שילבנו שאלות שבדקו שליטה במושגים מתמטיים, מודעות לשגיאות אופייניות, הכרת אמצעי המחשה שונים ושילובם בהוראה. בשלב השני נערך דיון שעיקרו היה סיכום העקרונות המתמטיים והדידקטיים הקשורים למשימה הקבוצתית ובחרנו להתמקד בחסרונות וביתרונות של כל אחד מהמודלים ולדון באמצעי המחשה נוספים שאפשר להשתמש בהם (את חלקם גם הכרנו במהלך הקורס). בשלב השלישי, במבחן היחיד, נתנו שאלות המבוססות על המבחן הקבוצתי והדיון הכיתתי. בשאלה הראשונה הסטודנטיות היו צריכות להציע אמצעי המחשה כלשהו שונה מזה שבדו"ח הקבוצתי, כאשר בקורס הכירו אמצעי המחשה שונים שחזרנו עליהם בדיון הכיתתי. השאלות האחרות

התבססו על המשימות במבחן הקבוצתי.

לבדיקת הידע של הסטודנטיות בנינו מחוון למבחן היחיד ומחוון למבחן הקבוצתי עם קריטריונים ספציפיים האופייניים לכל שאלה – כל קריטריון מקבל ערך כמותי כאשר כל אחד מהקריטריונים מפורט ומוסבר (דוגמאות למחוון בנספח 2). הגדרנו רמות ביצוע שונות במטלת הביצוע, ובכל אחד מהדו"חות נתנו "ציון כללי" (מקסימום 100) לפי רמות הביצוע. ההערכה ניתנה לסטודנטית על סמך שילוב בין עבודתה בחלק הקבוצתי (50%) ובין עבודתה בחלק היחיד (50%). הציון לקורס התבסס על הביצוע במספר משימות, ואחת מהן הייתה משימת הערכה זו.

ב. שאלון משוב

בתום הקורס הועבר שאלון לנבדקים. השאלון כלל היגדים העוסקים בעמדות כלפי הערכה בכלל וכלפי הכלי "דו"ח משולב" בפרט. בנוסף ניתנה שאלה פתוחה, שבה התבקשו הנבדקות לתת משוב על הכלי ושילובו בעבודתם.

ג. ראיונות

לצורך בדיקה מעמיקה ומקיפה של ממצאי השאלונים, נערכו ראיונות עם מדגם של עשר נבדקות (שנבחרו אקראית), שבו התבקשו הנבדקות לתת משוב על הכלי ושילובו בהערכה. הראיונות שימשו לתיקוף הממצאים מתוך השאלונים.

מהלך המחקר

מחקר פעולה כשיטת מחקר

א. בניית "דו"ח משולב"

בנינו "דו"ח משולב" המתאים לנושאים שנלמדו בקורס. המשימות שנבחרו ל"דו"ח המשולב" כללו משימות דידקטיות ומשימות מתמטיות בנושאים שעסקנו בהם בקורס. במבחן הקבוצתי שילבנו שאלות שבדקו שליטה במושגים מתמטיים, מודעות לשגיאות אופייניות, הכרת אמצעי המחשה שונים ושילובם בהוראה.

ב. הפעלת הכלי בסיום הקורסים

ה"דו"ח המשולב" הופעל בשלושה שלבים:

שלב 1 – הסטודנטיות עבדו בקבוצות של שלוש-ארבע סטודנטיות בקבוצה. הן כתבו דו"ח קבוצתי על העבודה והגישו אותו. משך ההפעלה המתוכנן היה שעה וחצי בערך.

שלב 2 – בשיעור שאחרי השלב הראשון נערך דיון כיתתי 20 דקות בערך. בדיון זה סוכמו וגובשו עבודות הקבוצות השונות.

שלב 3 – הסטודנטיות ענו על הדו"ח האישי. שלב זה נמשך שעה וחצי בערך.

ג. העברת שאלון משוב על הכלי בעקבות החשיפה והשימוש בו

ד. בסיום הקורס נערכו ראיונות אישיים

ממצאים

התוצאות בשתי הקבוצות היו דומות ולכן נציג בפירוט רק את התוצאות של קבוצה אחת. נפרט את התוצאות שהתקבלו בדו"חות הקבוצתיים (ראה דוגמה לדו"ח קבוצתי בנספח 1א), בדו"חות היחיד (ראה דוגמה לדו"ח יחיד בנספח 1ג), בניתוח שאלון העמדות והראיונות.

לבדיקת המבחן היחיד והמבחן הקבוצתי בנינו מחוון עם קריטריונים ספציפיים האופייניים לכל שאלה, שבהם כל קריטריון מקבל ערך כמותי כאשר כל אחד מהקריטריונים מפורט ומוסבר (ראה דוגמאות למחוון בנספח 2). הגדרנו רמות ביצוע שונות במטלת הביצוע, ובכל אחת מהדו"חות נתנו "ציון כללי" (מקסימום 100) לפי רמות הביצוע. הציון נקבע על-פי הממוצע בין עבודת הסטודנטית בחלק הקבוצתי (50%), ובין עבודתה בחלק היחיד (50%).

כמו כן יוצגו לדוגמה ניתוח של שאלה מתוך הדו"ח הקבוצתי – אחד שהגדרנו טוב והשני לא טוב, וניתוח של שאלה מתוך דו"ח יחיד – אחד שהגדרנו טוב והשני לא טוב.

תוצאות כלליות לדוגמה של כיתה 1 בדו"ח הקבוצתי ובדו"ח היחיד

הטבלה הבאה מראה את ציוני הסטודנטיות באחוזים בשני הדו"חות הקבוצתי והיחיד ואת ממוצע הציונים.

טבלה מס' 1: ציוני כיתה 1 (באחוזים)

סטודנטית	ציון דו"ח קבוצתי A	ציון דו"ח יחיד B	הפרש בין ציון קבוצתי לציון היחיד a-b	ציון ממוצע של שני הדו"חות
1	קבוצה א 80	67	13	74
2		82	-2	81
3		82	-2	81
4		88	-8	84
5	קבוצה ב 88	75	13	82
6		99	-11	94
7		90	-2	89
8		66	22	77
9	קבוצה ג 87	88	-1	88
10		90	-3	88
11		66	21	77
12		82	5	85
13	קבוצה ד 88	98	-10	93
14		80	8	84
15		90	-2	89
16		69	19	79
ממוצע כיתתי	86	82		84

אפשר לראות מתוך התוצאות כי הציון של שבע סטודנטיות (1, 5, 8, 11, 12, 14, 16) בדו"ח הקבוצתי היה גבוה יותר (מעל 5 נקודות) מהציון בדו"ח היחיד. הציון של שלוש סטודנטיות (4, 6, 13) בדו"ח הקבוצתי היה נמוך יותר (מעל 5 נקודות) מהציון בדו"ח יחיד ושש סטודנטיות (2, 3, 7, 9, 10, 15) קיבלו ציון דומה.

מתוך בדיקת עבודות אחרות שניתנו בקורס והתרשמות בכיתה של קבוצת הסטודנטיות, אשר ציון הקבוצתי היה גבוה מציון בדו"ח היחיד, רואים שהציון בדו"ח היחיד, שהוא נמוך יותר מהקבוצתי, משקף את הידע של סטודנטיות אלה. נעשתה בדיקה ספציפית של סטודנטיות מספר 11 ו-16: אחת קיבלה 87 במבחן הקבוצתי ו-66 במבחן היחיד, והשנייה קיבלה 88 במבחן הקבוצתי ו-69 במבחן היחיד. סטודנטיות אלו לא הראו שליטה בחומר במהלך השיעורים, אבל בדו"ח הקבוצתי הן היו בקבוצה עם סטודנטיות השולטות טוב בחומר ולכן כנראה היה פער כה גדול בין הציון הקבוצתי לבין הציון היחיד. באשר לסטודנטיות, אשר ציון בדו"ח היחיד היה גבוה מזה שבדו"ח הקבוצתי, אפשר להניח שנעשתה למידה מהדו"ח הקבוצתי וממשימת הקישור מה שגרם כנראה להעלאת הציון שלהן במבחן היחיד. קיבלנו חיזוק לכך מהראיונות, שערכנו עמן לאחר המבחנים – הסטודנטיות אמרו כי הן למדו מהמבחן הקבוצתי.

דוגמאות לניתוח דו"חות

א. התייחסות לשאלות מהדו"ח הקבוצתי

דוגמה:

שאלה 2

1. רשמו שגיאות אופייניות של תלמידים לגבי מושג האלכסון והסבירו.
2. חברו שאלות למבחן שמטרתו לבדוק מהו הידע של תלמידים לגבי כל אחת מהשגיאות האופייניות. ליד כל שאלה ציינו איזו שגיאה אופיינית היא בודקת, ומדוע?

לצורך ניתוח שאלה זו בנינו את הקריטריונים הבאים: רשימת שגיאות, הבנת מושג האלכסון, דוגמאות לשאלות, ציון איזו שגיאה בודקת כל דוגמה. את כל אחד מהקריטריונים חילקנו למספר רמות ביצוע ונתנו ניקוד בין 0 ל-5 בהתאם.

טבלה מס' 2: המחווין לניתוח שאלה 2 במבחן קבוצתי

רמה	פירוט	ניקוד כללי
קריטריון 1: רשימת שגיאות		
	אין רשימת שגיאות או רשימה לא נכונה	0
	רשימה חלקית (פחות מחמש שגיאות)	4-1
	רשימה מלאה (לפחות חמש שגיאות)	5
קריטריון 2: הבנת מושג האלכסון		
	אין הבנה	0
	הבנה "חלקית"	4-1
	הבנה מלאה	5
קריטריון 3: דוגמאות לשאלות		
	דוגמאות לא טובות	0
	דוגמאות טובות ללא נימוקים	2-1
	דוגמאות טובות עם נימוקים חלקיים	3
	דוגמאות טובות עם נימוקים	5
קריטריון 4: ציינו איזו שגיאה בודקת כל דוגמה		
	לא	0
	כן	5-1

נציג דוגמאות של שני פתרונות לשאלה מתוך הדו"ח הקבוצתי ולשימוש בקריטריונים לניתוחה לצורך הבנת הידע של הסטודנטיות.

דוגמה ראשונה לפתרון שהתקבל מאחת הקבוצות

ניתוח התשובה לפי הקריטריונים:

דוגמה ראשונה

קריטריון 1: רשימת שגיאות

אופייניות

אפשר לראות שרשימת השגיאות האופייניות שנתנו הסטודנטיות היא חלקית ובלי הסברים. הן אמנם רשמו חמש דוגמאות, אבל לא כולן הן דוגמאות של שגיאות אופייניות. למשל דוגמה 1, שרשמו בה "לא מעבירים את כל האלכסונים האפשריים", אינה רלוונטית לשאלה. כמו הן לא ציינו שגיאות אופייניות כמו העברת אלכסון מחוץ למצולע או העברת אלכסון שחלקו במצולע וחלקו מחוץ למצולע.

קריטריון 2: הבנת מושג האלכסון

מתוך תשובת הסטודנטיות אפשר לראות שאין להן הבנה מספקת של מושג האלכסון. א. שלוש מתוך ארבע הדוגמאות שהן הביאו עסקו ב"אלכסון" בתוך משולש, כאשר במשולש אין בכלל אלכסונים. ב. אין הסברים המראים על הבנה.

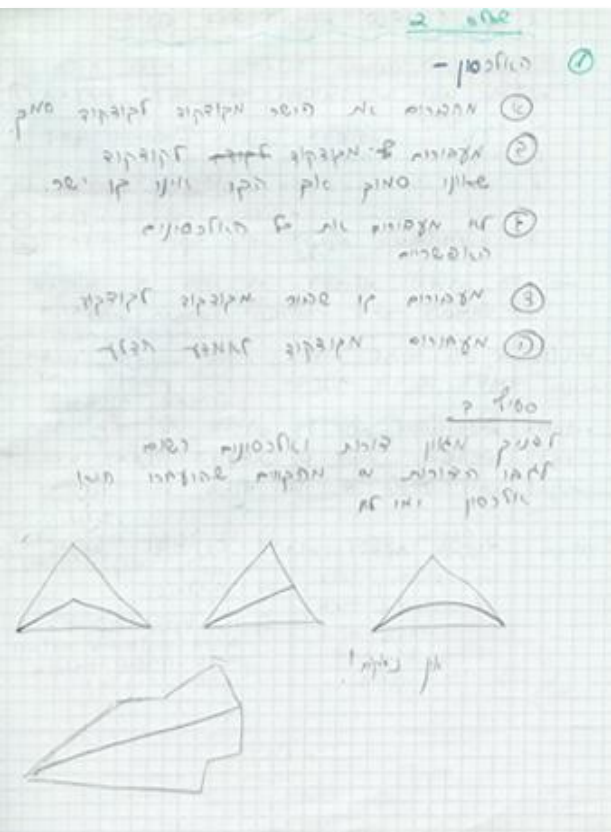
קריטריון 3: דוגמאות לשאלות

הסטודנטיות הציגו שאלה אחת בלבד, אשר מכילה דוגמאות לא טובות, שאינן בודקות את הידע של התלמידים לגבי מושג האלכסון.

קריטריון 4: ציינו איזו שגיאה בודקת כל דוגמה

אין ציון ליד כל דוגמה איזו שגיאה אופיינית היא בודקת ומדוע.

מהדוגמה אפשר ללמוד שהסטודנטיות אינן יודעות מהם הקשיים של התלמידים בנושאים הנלמדים. הן מודעות רק לחלק מהשגיאות האופייניות של התלמידים בנושא, ולא מכירות את מקורן. הן אינן שולטות בנושא הנלמד הן המתמטי והן הדידקטי.



דוגמה שנייה לפתרון שהתקבל מאחת הקבוצות

ניתוח התשובות לפי הקריטריונים:

1. רשימת שגיאות אופייניות

הסטודנטיות נתנו רשימה מלאה של שגיאות אופייניות המלווה בדוגמאות המסבירות את כוונתן, אך לא ככולן מבינים למה הכוונה. למשל הסטודנטיות רשמו בדוגמה 1ב "הוא יודע מאיפה יוצא האלכסון אבל לא יודע לאן הוא מגיע", וציינו שדוגמה ד בודקת זאת אך לא ברור למה הן התכוונו.

2. הבנת מושג האלכסון

מתוך תשובת הסטודנטיות אפשר לראות שיש להן הבנה של מושג האלכסון.

3. דוגמאות לשאלות

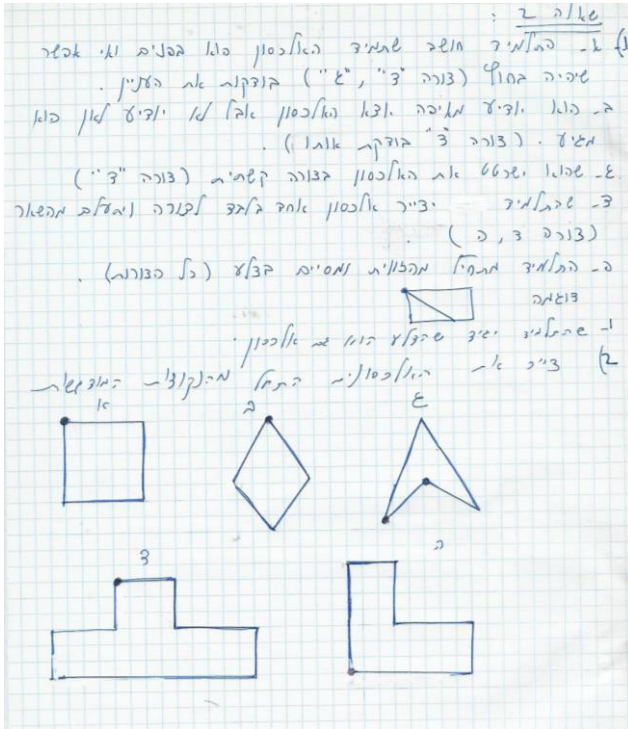
הסטודנטיות הציגו שאלה אחת בלבד שמכילה דוגמאות טובות הבודקות את הידע של התלמידים לגבי מושג האלכסון.

4. ציינו איזו שגיאה בודקת כל דוגמה

ציינו בכל דוגמה איזו שגיאה אופיינית היא בודקת ואיך.

מהדוגמה אפשר ללמוד שהסטודנטיות יודעות מהם הקשיים של התלמידים בנושאים הנלמדים. הן מודעות לשגיאות האופייניות של התלמידים בנושא, מכירות את מקורן ויודעת כיצד יש לטפל בהן. הן שולטות בנושא הנלמד (הן המתמטי והן הדידקטי).

דוגמה שנייה

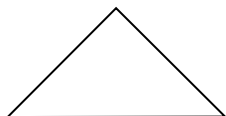


ב. התייחסות לשאלות מהדו"ח היחיד

דוגמה:

שאלה 1

- הציעו פעילות מתאימה לנושא "משולשים" אבל לא באמצעות הקשיות ומנקי המקטרות ולא דף עבודה, אלא באמצעי אחר. פרטו מהם השיקולים הדידקטיים לכל אחד משלבי הפעילות, מטרת הפעילות, מה היא בודקת וכדומה.



- תנו שני שמות למשולש שלפניכם:
- איזה מבין שני השמות היה ניתן על-פי רוב הכיתה ומדוע?

דוגמה לקריטריונים שנבנו עבור שאלה 1 במבחן היחיד (סעיף 1)

רמה	פירוט	ניקוד כללי
קריטריון 1: הבנה מושגית – שימוש במושגים מתמטיים רלוונטיים לפעילות, כלומר הסטודנט מזכיר מושג ומראה את הבנתו.		
1.	אין שימוש במושגים מתמטיים ו/או יש שימוש לא נכון במושגים	0
2.	שימוש חלקי במושגים	3-1
3.	שימוש נכון ומלא במושגים	4
קריטריון 2: אופן השימוש במודל (אמצעי ההמחשה)		
1.	אין שימוש במודל	0
2.	נעשה ניסיון לשימוש	2-1
3.	יש שימוש נכון במודל	3
4.	יש שימוש נכון מלא ומתוחכם	4
קריטריון 3: תקשורת – דרך בניית הפעילות		
1.	בנו פעילות באופן ספונטני	0
2.	הפעילות לא מפורטת	2-1
3.	הפעילות מפורטת בצורה לא מלאה	3
4.	הפעילות מפורטת בצורה מלאה	4
קריטריון 4: שיקולים דידיקטיים		
1.	אין פירוט של השיקולים הדידיקטיים	0
2.	יש פירוט חלקי של השיקולים הדידיקטיים	2-1
3.	יש פירוט של השיקולים הדידיקטיים	3

רמה	פירוט	ניקוד כללי
4.	יש פירוט של השיקולים הדידקטיים וקישור למטרה הכללית של הפעילות	4
קריטריון 5: אופן ההצגה של המשימה		
1.	הצגה לא ברורה של המשימה	0
2.	חלקים מסוימים בהצגה ברורים	2-1
3.	ההצגה ברורה אולם חסרים פרטים	3
4.	ההצגה ברורה, מפורטת וערוכה באופן מאורגן	4
קריטריון 6: התייחסות למטרות הפעילות		
0	לא פורטו מטרות הפעילות או אין התייחסות למטרות	1.
3-1	בפעילות יש התייחסות חלקית למטרות	2.
4	בפעילות יש התייחסות מלאה למטרות	3.

נציג דוגמה של שני פתרונות לשאלה 1 מתוך הדו"ח היחיד ולשימוש בקריטריונים לניתוחה לצורך הבנת הידע של הסטודנטיות.

דוגמה 1 לפתרון שהתקבל מאחת הסטודנטיות

דוגמה 1

1. המשפט
 2. המשפט
 3. המשפט
 4. המשפט
 5. המשפט
 6. המשפט
 7. המשפט
 8. המשפט
 9. המשפט
 10. המשפט
 11. המשפט
 12. המשפט
 13. המשפט
 14. המשפט
 15. המשפט
 16. המשפט
 17. המשפט
 18. המשפט
 19. המשפט
 20. המשפט
 21. המשפט
 22. המשפט
 23. המשפט
 24. המשפט
 25. המשפט
 26. המשפט
 27. המשפט
 28. המשפט
 29. המשפט
 30. המשפט
 31. המשפט
 32. המשפט
 33. המשפט
 34. המשפט
 35. המשפט
 36. המשפט
 37. המשפט
 38. המשפט
 39. המשפט
 40. המשפט
 41. המשפט
 42. המשפט
 43. המשפט
 44. המשפט
 45. המשפט
 46. המשפט
 47. המשפט
 48. המשפט
 49. המשפט
 50. המשפט
 51. המשפט
 52. המשפט
 53. המשפט
 54. המשפט
 55. המשפט
 56. המשפט
 57. המשפט
 58. המשפט
 59. המשפט
 60. המשפט
 61. המשפט
 62. המשפט
 63. המשפט
 64. המשפט
 65. המשפט
 66. המשפט
 67. המשפט
 68. המשפט
 69. המשפט
 70. המשפט
 71. המשפט
 72. המשפט
 73. המשפט
 74. המשפט
 75. המשפט
 76. המשפט
 77. המשפט
 78. המשפט
 79. המשפט
 80. המשפט
 81. המשפט
 82. המשפט
 83. המשפט
 84. המשפט
 85. המשפט
 86. המשפט
 87. המשפט
 88. המשפט
 89. המשפט
 90. המשפט
 91. המשפט
 92. המשפט
 93. המשפט
 94. המשפט
 95. המשפט
 96. המשפט
 97. המשפט
 98. המשפט
 99. המשפט
 100. המשפט

ניתוח התשובה לפי הקריטריונים שבנינו:

קריטריון 1 בדק הבנה מושגית:

שימוש במושגים מתמטיים רלוונטיים לפעילות, כלומר הסטודנטית מזכירה מושג ומראה את הבנתו.

התוצאות מראות שימוש נכון ומלא במושגים המתמטיים.

קריטריון 2 בדק את אופן השימוש במודל (אמצעי ההמחשה):

אף שהסטודנטית התבקשה במשימה לא לבנות פעילות באמצעות דף עבודה, היא הכינה גם דף עבודה וגם פעילות אחרת באמצעות לוח מסמרים.

בדף העבודה שבנתה אין שימוש במודל (היא כותבת "לתת לכל ילד ציורים שונים למשולשים" אבל היא לא ציירה אותם).

נעשה ניסיון להשתמש בלוח המסמרים אבל זה אינו מספיק.

קריטריון 3 בדק תקשורת – דרך בניית הפעילות:

אפשר לראות שבדף העבודה שחיברה הסטודנטית אין פירוט של הפעילות. לעומת זאת הפעילות על לוח מסמרים מפורטת, אך בנויה באופן ספונטני. לא ניכר שהייתה חשיבה על מטרת הפעילות ומה כל שלב בודק.

קריטריון 4 בדק אופן הצגת המשימה:

אפשר לראות שבדף העבודה אין פירוט של הפעילות. לעומת זאת בלוח המסמרים ההצגה של המשימה ברורה, אבל לא ברור מה הקשר בין כל אחד מסעיפי המשימה ואיך הוא מתקשר למטרה הסופית של המשימה.

קריטריון 5 בדק שיקולים דידקטיים:

אפשר לראות בדף העבודה שהסטודנטית מבלבלת בין שיקולים דידקטיים לידע קודם. כמו כן בלוח המסמרים אין ציון של שיקולים דידקטיים.

קריטריון 6 בדק התייחסות למטרות הפעילות:

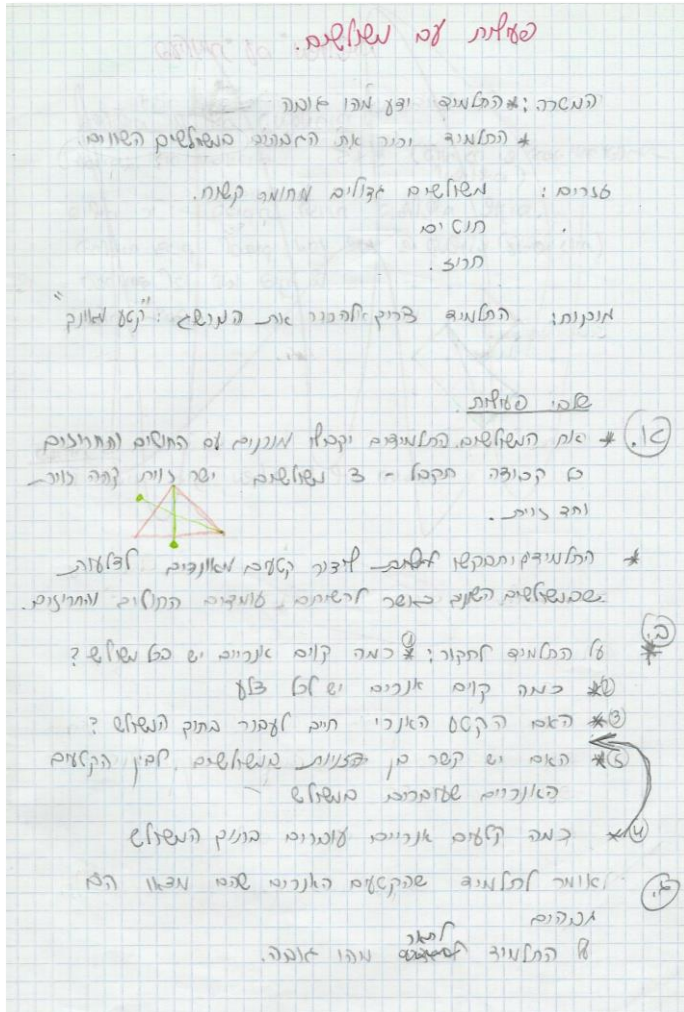
אפשר לראות שבדף העבודה מופיע פירוט של מטרת הפעילות. לעומת זאת בלוח המסמרים אין פירוט של מטרת הפעילות, מה כל אחת מהשאלות בפעילות בודקת ואיך.

מה אפשר ללמוד על הידע של הסטודנטית:

בעבודת הסטודנטית יש שימוש באמצעי המחשה, אך השימוש הוא סטנדרטי ואינו מעיד על ידע ביתרונות וחסרונות של אמצעי ההמחשה ולא על דרכי שימוש מתוחכמות בו. מטרת הפעילות אינה מפורטת מספיק והצגת המשימה אמנם ברורה אבל לא מובן לאן היא מובילה ואין שיקולים דידקטיים.

דוגמה 2 לפתרון שהתקבל מאחת הסטודנטיות

דוגמה 2



ניתוח התשובה לפי הקריטריונים שבנינו:

- קריטריון 1: **הבנה מושגית** – שימוש במושגים מתמטיים רלוונטיים לפעילות, כלומר הסטודנטית מזכירה מושגים רלוונטיים ומשתמשת בהם נכון.
- קריטריון 2: **אופן השימוש במודל (אמצעי ההמחשה)** – יש שימוש נכון באמצעי ההמחשה.
- קריטריון 3: **תקשורת: דרך בניית הפעילות** – הפעילות מפורטת וברורה.

קריטריון 4: **אופן הצגת המשימה** – ההצגה של המשימה ברורה, מפורטת וערוכה בסדר.

קריטריון 5: **שיקולים דידקטיים** – אין שיקולים דידקטיים.

קריטריון 6: **התייחסות למטרות הפעילות** – יש פירוט של שתי מטרות לפעילות. אבל הפעילות עסקה רק במטרה השנייה, כלומר יש התייחסות חלקית למטרות.

מה אפשר ללמוד על הידע של הסטודנטית:

בעבודת הסטודנטית יש שימוש מתאים באמצעי המחשה (שהוצגו במאמרה של גפני, 1990). היא מסוגלת לבנות פעילויות שונות ומגוונות לתלמיד – פעילויות הקושרות חקירה וגילוי ומצריכות שימוש באמצעי המחשה מתאים.

נראה כי הסטודנטית שולטת במושגים המתמטיים הרלוונטיים לפעילות, עוסקת בקשיים של תלמידים בנושא הנלמד, מודעת לשגיאות האופייניות של התלמידים בנושא ומכירה את מקורן ויודעת כיצד יש לטפל בהן (אם כי אינה מזכירה את כל הקשיים הקיימים בנושא הגובה, אלא את הקשיים הספציפיים הקשורים לפעילות שהיא הציעה).

מטרות הפעילות מפורטות והצגת המשימה ברורה אבל לא עונה על כל מטרות הפעילות.

חשוב של הנבדקות על השימוש ב"דו"ח משולב"

אורדן ופריס (Urdan & Paris, 1994) כותבים שלרוב המורים יש תפיסות שליליות על אודות מבחנים סטנדרטיים. רובם מאמינים שהמבחנים המסורתיים אינם משקפים את מה שלומדים התלמידים בבית-הספר. בגלל המשמעות הרבה המיוחסת לתוצאות מבחנים אלו, ההוראה מכוונת בדרך כלל לצורך הצלחה במבחן ולא לצורך למידה לשמה. לכן הייתה חשובה לנו חוות הדעת של הנבדקות על כלי הערכה המוצג במחקר ועל אופן התאמתו לדרך ההוראה של הקורס.

חוות הדעת של הנבדקות על השימוש ב"דו"ח משולב" נבדקה בעשרה ראיונות ובשאלון עמדות. הראיונות והעברת השאלון נערכו לאחר סיום הקורסים, כאשר במהלך הקורסים שולב השימוש בכלי "דו"ח משולב".

הבדיקה נעשתה בעזרת שאלון עמדות הבנוי בשיטת Likert (בסולם 1-5), והוא כלל היגדים העוסקים בחוות דעת על השימוש בכלי ושילובו בהוראת מתמטיקה. התמונה הכללית מהתבוננות בטבלת משו"ב "דו"ח משולב" ומניתוח תשובות הנבדקות לשאלון העמדות היא של שביעות רצון רבה.

אפשר לראות שהנבדקות מרגישות שהעבודה הקבוצתית – שלב א' בכלי, תרמה לידע האישי שלהן ולהצלחה במבחן האישי: "היה טוב מאוד בעבודה הקבוצתית, התלבטנו יחד, נוצרה חלוקת תפקידים בלתי מתוכננת, תרמנו אחת לשנייה. כל אחת הקשתה קושיות – מה שאילץ את האחרים לעזור ולענות."

נבדקת אחרת: "בעבודה הקבוצתית התנהלה שיחה מתמטית, כל אחת זכרה משהו אחר, הוסיפה נדבך ותיקנה. כל אחת נתנה נקודת מבט נוספת מזו של האחרות."

הנבדקות מעדיפות לעבוד בקבוצות ומעדיפות להיבדק בדו"ח משולב מאשר במבחן קונבנציונלי. כמו כן אפשר לראות שהדיון הכיתתי – שלב ב' בכלי, הוא חלק חשוב ותורם לידע האישי. הנבדקות היו רוצות

להשתמש בכלי זה להערכת תלמידיהן.

ממוצע (דרגות 1-5)	היגד כלפי השימוש בכלי הערכה "דו"ח משולב"
4.9	א. העבודה בקבוצה תרמה לידע האישי שלי
4.3	ב. העבודה בקבוצה תרמה להצלחתי במבחן האישי
4.5	ג. אני מעדיפה לעבוד בקבוצה
4	ד. אני מעדיפה שיעריכו את הידע האישי שלי במבחן קבוצתי
4	ה. הידע האישי שלי תרם לעבודה בקבוצה
2.8	ו. אני מעדיפה שיעריכו את הידע האישי שלי במבחן אישי
4.3	ז. הדיון הכיתתי (לאחר המבחן הקבוצתי) תרם לידע שלי במבחן האישי
3.5	ח. הדו"ח המשולב משקף את הידע שלי
1.8	ט. רק המבחן היחיד משקף את הידע שלי
1	י. המבחן הקבוצתי לא תרם לידע שלי
1.5	יא. אני מעדיפה מבחן קונבנציונלי על דו"ח משולב
4	יב. הייתי רוצה להשתמש בכלי זה להערכת תלמידיי

סיכום הממצאים ודיון בתוצאות

בשנים האחרונות חלה תפנית בהתייחסות להוראת המתמטיקה. לאור השינויים והמגמות החדשות, התעורר צורך בכלים להערכת תלמידים, אשר מותאמים לשינויים בהוראה. במחקרנו השתמשנו בכלי שהתאים לדרך עבודתנו בקורס "גאומטריה והוראתה" עם פרחי הוראה – "דו"ח משולב".

הקורסים ניתנו כסדנאות תוך שימוש באמצעי המחשה רלוונטיים לנושאים הנלמדים. כמו כן שולבו בקורסים דרכי הוראה ושיטות דידקטיות שונות והוצגו בהם מחקרים ותאוריות כמו התאוריה של ואן-הילה (הרשקוביץ 1989; פטקין ולבנברג, 2003; רייז ואחרים, 1996). דרך ההוראה הייתה בגישת הלמידה השיתופית וכללה עבודה בקבוצות הטרוגניות תוך שימת דגש בעבודה במשימות אותנטיות הדורשות חקר וגילוי, דיונים ושיחות מתמטיות בתוך הקבוצות ובמליאה ושימוש באמצעי המחשה ובשגיאות אופייניות של תלמידים.

הדו"ח המשולב נבנה במיוחד לצורך הערכת הקורס. הקורס נבנה מתוך שתי זוויות ראייה הקשורות זו בזו. מצד אחד הכרת הצורות הגאומטריות, הקשרים ביניהן, תכונותיהן ועוד, ומצד אחר היבטים דידקטיים כלליים.

התשובות לשאלות המחקר:

1. כיצד הכלי בודק את הידע המתמטי והמתודי של פרחי הוראה בגאומטריה לבית-ספר יסודי?

מתוך התוצאות אפשר לראות שהכלי בדרך כלל משקף את הידע של הסטודנטיות. הכלי בדק את הבנת

המושגים המתמטיים, ידע מתודי (כמו יכולת הכנת פעילות לתלמידים), הבנת המשימה, מקוריות ויצירתיות, ארגון עבודה ותקשורת. הסטודנטיות עבדו בדו"ח הקבוצתי בשיתוף פעולה מלא, נערכו דיונים, הועלו השערות ונערכה למידה מתוך תמיכה הדדית.

בניתוח התוצאות משתי הקבוצות מצאנו כי הציון של 11 סטודנטיות בכיתה השנייה במבחן הקבוצתי היה גבוה יותר מהציון בדו"ח יחיד (ביותר מחמש נקודות). הציון של 11 סטודנטיות בכיתה השנייה במבחן הקבוצתי היה נמוך יותר (יותר מחמש נקודות) מהציון במבחן יחיד ו-13 סטודנטיות קיבלו ציון דומה.

במבחן הקבוצתי עבדו יחד סטודנטיות מרמות שונות, תוך תמיכה והפריה הדדית ולכן כנראה סטודנטיות חלשות קיבלו במבחן הקבוצתי ציון גבוה יותר מאשר במבחן היחיד. מבדיקת עבודות אחרות שניתנו בקורס והתרשמות בכיתה של קבוצה זו של סטודנטיות, אשר ציון הקבוצתי היה גבוה מציון במבחן היחיד, הציון הנמוך יותר במבחן היחיד משקף כנראה את הידע של סטודנטיות אלה.

לגבי הסטודנטיות שציוןן במבחן היחיד היה גבוה מזה שבמבחן הקבוצתי, יש להניח שנעשתה למידה מהמבחן הקבוצתי ומהדיון הכיתתי. חיזוק לכך קיבלנו בראיונות.

בעת בדיקת העבודות מצאנו מקרים מיוחדים כמו סטודנטית מהכיתה השנייה שקיבלה במבחן הקבוצתי 90 ובמבחן היחיד 52. מתוך היכרות עם סטודנטית זו בכיתה ומתוך עבודותיה האחרות, מסתבר שאינה שולטת מספיק בחומר. במבחן הקבוצתי הייתה עם סטודנטיות השולטות היטב בחומר, ויש להניח שהן היו הדומיננטיות במבחן הקבוצתי ומכאן נבע הפער הזה בין הציונים. לעומת זאת סטודנטית מהכיתה השנייה קיבלה במבחן הקבוצתי 63 ובמבחן האישי 98 (הופיעה בכיתה השנייה). לאחר בדיקת הרכב קבוצתה, התברר שהוא כלל שתי סטודנטיות שאינן שולטות בחומר של הקורס. מתוך ריאיון עמה התברר שהיא חסרת ביטחון לגבי הידע שלה ולכן לא הייתה מספיק דומיננטית בקבוצה.

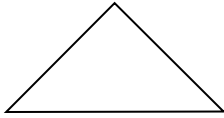
2. כיצד הכלי ניכר בעבודה השיתופית, בידע האישי ובשונות בין הנבדקות?

הכלי ניכר במיומנויות השונות שבין התלמידות ובתהליכי ההתמודדות ועבודה בקבוצות.

"כשאני עובדת לבד, מתקבעת על רעיון מסוים, ולא יודעת אם זה נכון או לא נכון, בעבודה הקבוצתית אני שומעת כיוונים נוספים למשל באחת השאלות היה לי משהו בראש לא נכון ואז הקבוצה תיקנה אותי".

"אם הייתי עובדת לבד, הייתי זקוקה לעזרה של המורה, אבל כאן חסכנו את התלות במורה."

המבחן היחיד שיקף ואיזן את התוצאות של המבחן הקבוצתי. הוא נתן מידע על הידע של התלמידות השונות על-פי רמתן ומה שלמדו בעבודה הקבוצתית ובעקבות השיחה עם המורה. כמו כן אפשר לראות כי היו סטודנטיות שהגיעו להרחבה והעמקה בנושא בעצמן תוך כדי מיצוי יכולתן בעבודת היחיד.



המבחן היחיד הראה גם על הבדלים בין הידע של פרחי ההוראה לידע של המורות. לדוגמה, אצל פרחי ההוראה היה אפשר לראות שגיאות אופייניות הקיימות אצל תלמידים כמו בשאלה: תן שני שמות למשולש.

רק פרחי ההוראה נתנו את השם הלא נכון "משולש חד זווית" ו/או "משולש שווה צלעות".

בשאלה שבה היה נחוץ להביא שגיאות אופייניות של תלמידים לגבי מושג האלכסון, רק המורות קישרו תשובתן אל רמות החשיבה של ואן-הילה.

3. כיצד רואות הנבדקות את תרומת הכלי ללמידה?

מתוך הראיונות עלו גם מספר נקודות מרכזיות על דרך עבודתנו בקורס הניכרת בדו"ח המשולב:

1. **השיח המתמטי** – הנבדקות ציינו שהשיח המתמטי בקבוצות הן בשיעורים והן בשלב העבודה הקבוצתית בדו"ח המשולב תרמו לידע המתמטי והמתודי שלהן.

2. **העבודה בקבוצות** – הביאה לפיתוח מיומנויות של שיתוף פעולה, תמיכה ועזרה לזולת (מעבר לדיון המתמטי). הסטודנטיות ציינו שהן מעדיפות לעבוד בקבוצות ולא ביחידים "כי זה הרבה יותר מעניין ופורה". בשלב המבחן הקבוצתי, עבדו הסטודנטיות בשקדנות, בשיתוף פעולה וניהלו שיחות מתמטיות. הן הרגישו בזמן ביצוע הדו"ח הקבוצתי כמו בשיעור רגיל. הן נהנו מאוד לעשות אותו ואחת הסטודנטיות אמרה: "היה ממש כיף לעשות את המבחן בקבוצה למרות שאני בטוחה שלא קיבלתי מאה אבל לא איכפת לי, כי למדתי המון ומאוד נהניתי".

כמו כן עלו מהראיונות מספר יתרונות נוספים לחלק הקבוצתי: הורדת החרדה ממבחנים ויצירת מוטיבציה לשיתוף פעולה.

3. **השימוש באמצעי המחשה מגוונים** – עזרו להבין את החומר והיו דוגמה להסבר החומר לתלמידים בבית-הספר.

4. **הצורך בשינוי שיטת ההערכה בהתאם לדרך ההוראה** – במהלך הקורס, התעוררה השאלה מצד הסטודנטיות, איך הן יוערכו לאור המגמות החדשות. השאלה שחזרה ונשנתה הייתה: האם המבחן יהיה קבוצתי, הרי אנו עובדים בקבוצות?

הנבדקות ציינו שאכן דרך הערכה זו התאימה לדרך העבודה בקורס. לדוגמה: "כשהגעתי לקורס לא הבנתי איך אפשר לעשות מבחן קבוצתי. ועכשיו ראיתי איך אפשר לעשות מבחן שמתאים לעבודה בקבוצות".

לכן דרך הערכה זו הייתה דוגמה לסטודנטיות כיצד אפשר להתאים את דרך הערכה לדרך ההוראה. זאת בהשוואה למבחנים הקונבנציונליים השגורים בבתי-הספר, אשר יש בהם רק הערכה כמותית ומספרית ולא הערכה איכותית (על כך גם נערך דיון בכיתה). מתוך תוצאות המחקר אפשר לראות שהסטודנטיות מעוניינות להשתמש בכלי זה להערכת תלמידיהן.

מתוך תגובת הסטודנטיות לכלי בפרט ולקורס בכלל נראה כי הכלי התאים ומילא את ייעודו. הסטודנטיות נהנו מהמבחן (מ"הדו"ח המשולב"): "היה ממש כיף למרות שאני בטוחה שלא קיבלתי מאה אבל לא

איכפת לי, כי למדתי המון ומאוד נהניתי". מה שקשה לשמוע במבחן קונבנציונלי.

במבחן היחיד כבר הרגשתי הרבה יותר טוב מאשר במבחן הקבוצתי, הייתה לי תחושת ביטחון בקשר לחומר, היו מושגים שנזכרתי בהם מהעבודה הקבוצתית ומהדיון.

הסטודנטיות ציינו שהן מעדיפות לעבוד בקבוצות ולא ביחידים "כי זה הרבה יותר מעניין ופורה". **השלכות להוראה – הכלי "דו"ח משולב"** הוא כלי כללי המתאים לגישות החדשות בהוראה והערכה. ייחודו בכך שהוא מתאים במיוחד לתהליכי למידה בעבודה שיתופית. כמו כן הוא משקף את הידע של הלומדים, וניכר במיומנויות ובשונות שביניהם, בתהליכי ההתמודדות בעבודה בקבוצה, במקוריות, ביצירתיות ובתקשורת מתמטית. על כן כלי זה יכול לשמש ככלי הערכה נוסף ומיוחד. הרעיון של הערכה מסוג דו"ח משולב יכול לשמש גם ככלי הערכה בתחומים אחרים במתמטיקה. כל מורה יכול לצקת את התוכן המתאים לתוך הכלי ולהשתמש בו בקורס שלו. כמו כן עצם השימוש בכלי עורר דיון על הכלי עצמו – דבר שחשוב לפי רוסנסקי ושחור (2013), אשר טוענות כי חשוב ששיח על הערכה יהפוך לשיח נפוץ בשיעורים. השימוש בכלי הוא גמיש, אפשר להתאים אותו לשיטת ההוראה, ואפשר להתאים את שיטת ההוראה לכלי.

רשימת מקורות

- אילני, ב' ושמואלי, נ' (2000). **חלופות בהערכה בקורס גאומטריה והוראתה לפרחי הוראה ומורים** (דו"ח מחקר). בית ברל: מכללת בית ברל.
- בירנבוים, מ' (1994). הערכה חלופית: מנוף לשיפור ההוראה והלמידה. **הד החינוך**, סח(10), 14-12.
- בירנבוים, מ' (1997). **חלופות בהערכת הישגים**. תל-אביב: רמות.
- בירנבוים, מ' (2013). תנאים לקידום הערכה מעצבת: הערכה לשם למידה (הל"ל) במסגרות להכשרת מורים. **ביטאון מכון מופ"ת**, 51, 12-6.
- בן דוד, ע' (2012). תהליך החקר המדעי בכיתה – מהתיאוריה למעשה. **אאוריקה**, 33, אוחר מתוך <http://www.matar.ac.il/eureka/newspaper33/docs/03.pdf>
- גפני, ר' (1990). גובה במשולשים. **מספר חזק**, 2, 11-7. אוחר מתוך http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/mispar_chazak_beitberl/vol_2/Gafni.pdf
- הרשקוביץ, ר' (1989). **דימוי מושגים הנדסיים בסיסיים אצל תלמידים ומורים** (עבודת דוקטור). האוניברסיטה העברית בירושלים.
- זוהר, ע' (2013). **ציורים זה לא הכל: לקראת שיקומו של השיח הפדגוגי**. תל-אביב: ספרית פועלים.
- לוי, א' (1996). הערכת הישגים בעידן הפוסט-מודרני. **הד החינוך**, עא(4), 13-10.
- לזרוביץ, ר' והרץ-לזרוביץ, ר' (2007). למידה שיתופית ומיומנויות חקר בהוראת הביולוגיה. בתוך ע' זוהר (עורכת), **למידה בדרך החקר: אתגר מתמשך** (עמ' 133-165). ירושלים: מאגנס.
- משרד החינוך (2014). **חלופות מרכזיות לתהליכי הוראה, למידה והערכה: אגף א' לפיתוח פדגוגי – המזכירות הפדגוגית**. ירושלים: משרד החינוך. אוחר מתוך <http://cms.education.gov.il/NR/rdonlyres/9A52B8F0-C117-4515-B9A5-BCDF8A4EE3F2/196636/HalufotHaaracha1.pdf>
- פסקין, ד' ולבנברג, א' (2003). **הנדסת המישור** (כרך א). תל-אביב: ש. זק, רכגולד.
- קרסנטי, ר' (1993). **התמודדות התלמיד עם שאלות לא שגרתיות במבחן מתמטיקה** (עבודת מוסמך). האוניברסיטה העברית בירושלים.
- רובינזון, נ', בוסקילה, צ', עדין, נ' וקורן, מ' (2004). **אלגברה ועוד: פעילויות הערכה – למורה**. רחובות: מכון ויצמן למדע, המחלקה להוראת מדעים.
- רוסנסקי, ר' ושחור, נ' (2013). הערכה לשם למידה בהכשרת מורים: התנסות במסגרת PDS. **ביטאון מכון מופ"ת**, 51, 30-23.

רייז, ר', ואן דורמלין-אברהמי, נ' ופטקין, ד' (1996). תאוריית ואן-היילה והוראת גאומטריה. חיפה: הטכניון, משרד החינוך, התרבות והספורט, "מחר 98" באצבע הגליל.

- Anderson, R. S. (1998). Why talk about different ways to grade? The shift from traditional assessment to alternative assessment. *New Direction for Teaching and Learning*, 74, 5-16.
- Birenbaum, M., Breuer, K., Cascallar, E., Dochy, F., Dori, Y., Ridgway, J., & Wiesenmes, R. (2006). A learning integrated assessment system (Position paper). *Educational Research Review*, 1(1), 61-67.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment & classroom learning. *Assessment in education*, 5(1), 7-73.
- Clarke, D. J., & Sullivan, P. (1992). Responses to open-ended tasks in mathematics: Characteristics and implications. In *Proceedings PME-XVI* (Vol. 1, pp. 137-144). Durham, N.H.: University of New Hampshire.
- Firestone, W. A., Winter, J., & Fitz, J. (2000). Different assessments, common practice? Mathematics testing and teaching in the USA and England and Wales. *Assessment in Education*, 7(1), 13-37.
- Hershkwitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Ilany, B., & Shmueli, N. (1999). *Alternative assessment for student teachers in a geometry and teaching of geometry course*. Paper presented at the 24th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Technhon, Haifa.
- MSEB – National Research Council. Mathematical sciences education board. (1993). *Measuring up: Prototypes for mathematics assessment*. Washington, DC: National Academy Press.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- NRC – National Research Council. (1993). *Measuring what counts: A conceptual guide for mathematics assessment*. Washington, DC: National Academy Press.
- Rodriguez, J. (2008). FISBEC: A system for learning physics through geometry. In K. McFerrin, R. Weber, R. Carlsen, & D. Willis (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2008* (pp. 1793-1798). Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).
- Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving :Issues in research* (pp. 27-37). Philadelphia, PA: The Franklin institute Press.
- Shepard, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational Researcher*, 29(7), 4-14.
- Stenmark, J. K. (Ed.). (1991). *Mathematics assessment: Myths, Models, good questions and practical suggestions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Urdan, T. C., & Paris, S. G. (1994). Teacher's perceptions of standardized achievement test. *Educational Policy*, 8(2), 137-156.
- Watt, H. M. G. (2005). Attitudes to the use of alternative assessment methods in mathematics: A study with secondary mathematics teachers in Sydney, Australia. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 21-44.
- Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning. *Studies in Educational Evaluation*, 37, 3-14.

נספחים

נספח 1: פירוט השאלות בדו"ח המשולב

נספח וא

גאומטריה והוראתה

ד"ר נורית שמואלי, ד"ר בת-שבע אילני

שמות:



מכללת בית-ברל

מבחן קבוצתי

שאלה 1

שני מורים נפגשים בחדר מורים. האחד בידי קשיות ומנקי מקטרות, והשני עם דף עבודה.

מורה א: אני מבין ששנינו עוסקים במשולשים.

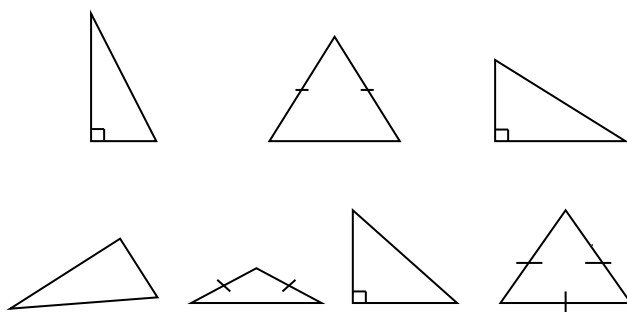
מורה ב: נכון, הנה, יש לי דף עבודה מתאים לנושא.

מורה א: אני מעדיף להשתמש בקשיות ובמנקי מקטרות.

1. הציעו פעילות מתאימה לנושא "משולשים" באמצעות הקשיות ומנקי המקטרות (פרטו כל אחד משלבי הפעילות, מטרת הפעילות, מה היא בודקת וכדומה).

2. עיינו בדף העבודה של מורה ב. הוסיפו הוראות, הציעו הצעות לפעילויות ודונו בשתי ההצעות: קשיות ודף העבודה. מה היתרונות ומה החסרונות של כל הצעה? נמקו.

דף עבודה לתלמיד:



שאלה 2

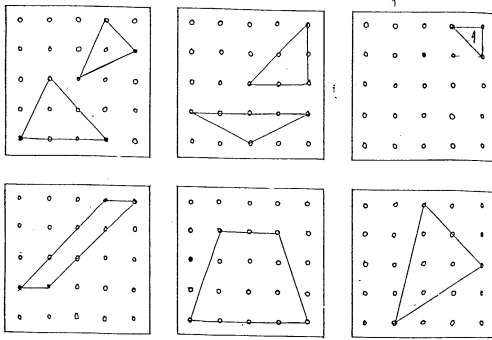
1. רשמו שגיאות אופייניות של תלמידים לגבי מושג האלכסון והסבירו.

2. חברו שאלות למבחן שמטרתו לבדוק מהו הידע של תלמידים לגבי כל אחת מהשגיאות האופייניות.

ליד כל שאלה ציינו איזו שגיאה אופיינית היא בודקת, ומדוע?

שאלה 3

במשבצת הראשונה משמאל מוגדרת יחידת שטח. חשבו את שטח כל אחת מהצורות המצוירות במשבצות האחרות.



שאלה 4

א. זהו ריבוע "בן שנה".



ריבוע בן שנתיים, הוא ריבוע בו כל צלע גדולה פי שניים. חקף את הצויר המתאר ריבוע "בן שנתיים".

צויר ריבוע "בן שלוש"

כמה ריבועים "בני שנה" דרושים לבניית ריבוע "בן ח"? _____

"בן כא" סגל רימלז הציג 49 ריבועים "בן שנה"? _____

מה הקשר בין הפעילות המוצגת ושטחים של צורות במישור?

זוהי קוביה "בן שנה".

חקף קוביות "בנות שנה". מכמה קוביות "בנות שנה" תוכלו לבנות:

כמה קוביות "בנות שנה" דרושות לבניית קוביה "בן 5"? _____

כמה קוביות "בנות שנתיים" דרושות לבניית קוביה "בן שש"? _____

שרטט קוביה "בן 8"!

נספח ב

דיון כיתתי

משימת קישור

בחרנו בשתי הנקודות הבאות לעסוק במשימת הקישור:

1. דיון ביתרונות וחסרונות השימוש בדף עבודה והשימוש בקשיות.
2. חישובי שטח בדרכים שונות על לוח מסמרים.

שתי נקודות אלו נבחרו בעבור משימת הקישור כמשימות מייצגות וממצות את עיקר הנושאים שעסקו

בהם הסטודנטיות בדו"ח הקבוצתי. הדיון ביתרונות והחסרונות של השימוש בדף עבודה והשימוש בקשיות חשוב מבחינה דידקטית ואילו שאלת חישוב השטחים הייתה חשובה בגלל הקשיים שהתעוררו במהלך הדו"ח הקבוצתי.

נספח וג

גאומטריה והוראתה

נורית שמואלי, ד"ר בת-שבע אילני

שמות:

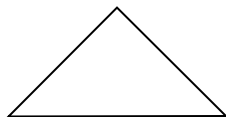


מכללת בית-ברל

דו"ח יחיד

שאלה 1

1. הציעו פעילות מתאימה לנושא "משולשים" אבל לא באמצעות הקשיות ומנקי המקטרת ולא דף עבודה, אלא באמצעי אחר. פרטו כל אחד משלבי הפעילות, מטרת הפעילות, מה היא בודקת וכדומה.



2. תנו שני שמות למשולש שלפניכם:

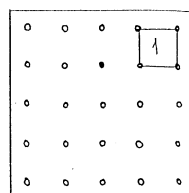
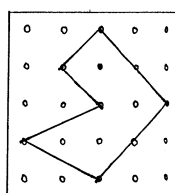
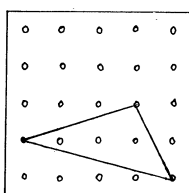
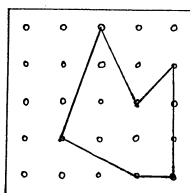
3. איזה מבין שני השמות היה ניתן על-פי רוב הכיתה ומדוע?

שאלה 2

בנו דף של דוגמאות ואי-דוגמאות לאלכסונים. הביאו לפחות 5 דוגמאות ו-5 אי-דוגמאות (ציינו מה דוגמה ומה אי-דוגמה). נמקו והסבירו.

שאלה 3

במשבצת מספר 1 מוגדרת יחידת שטח, חשבו את שטח כל אחת מהצורות המצוירות במשבצות האחרות.



נספח 2: קריטריונים לניתוח העבודות**דו"ח קבוצתי - קריטריונים****שאלה 1**

רמה	פירוט	מנקי מקטרות	דף עבודה
קריטריון 1: הבנה מושגית: שימוש במושגים מתמטיים רלוונטיים לפעילות, כלומר הסטודנט מזכיר מושג ומראה את הבנתו.			
1.	אין שימוש במושגים מתמטיים ו/ או יש שימוש לא נכון במושגים	0	0
2.	שימוש חלקי במושגים	1	1
3.	שימוש נכון ומלא במושגים	2	2
קריטריון 2: אופן השימוש במודל			
1.	אין שימוש במודל	0	0
2.	נעשה ניסיון לשימוש במודל	0.5	0.5
3.	יש שימוש נכון במודל	1.5	1.5
4.	יש שימוש נכון מלא ומתוחכם במודל	2	2
קריטריון 3: תקשורת: דרך בניית הפעילות			
1.	בנו פעילות לא מתאימה	0	0
2.	הפעילות לא מפורטת	0.5	0.5
3.	הפעילות מפורטת בצורה לא מלאה	1.5	1.5
4.	הפעילות מפורטת בצורה מלאה	2	2
קריטריון 4: אופן הצגת המשימה			
1.	הצגה לא ברורה של המשימה	0	0
2.	חלקים מסוימים בהצגה ברורים	1	1
3.	ההצגה ברורה אולם חסרים פרטים	1.5	1.5
4.	ההצגה ברורה, מפורטת וערוכה באופן מאורגן	2	2
קריטריון 5: התייחסות למטרות הפעילות			
1.	לא פורטו מטרות הפעילות או אין התייחסות למטרות	0	0
2.	בפעילות יש התייחסות חלקית למטרות	1	1
3.	בפעילות יש התייחסות מלאה למטרות	2	2
מקוריות (בנוס)			
קריטריון 6: יתרונות וחסרונות המודלים			
1.	יש התייחסות ליתרונות וחסרונות	0	0
2.	יש התייחסות ליתרונות וחסרונות לא מהותיים	4	4
3.	יש התייחסות חלקית ליתרונות וחסרונות מהותיים	6	6
4.	יש התייחסות ממצא ליתרונות וחסרונות	10	10

שאלה 2

רמה	פירוט	ניקוד
קריטריון 1: רשימת שגיאות		
1.	אין רשימת שגיאות או רשימה לא נכונה	0
2.	רשימה חלקית (פחות מחמש שגיאות)	3
3.	רשימה מלאה (לפחות חמש שגיאות)	5
קריטריון 2: הבנת מושג האלכסון		
1.	אין הבנה	0
2.	הבנה "חלקית"	3
3.	הבנה מלאה	5
קריטריון 3: דוגמאות לשאלות		
1.	דוגמאות לא טובות	0
2.	דוגמאות טובות ללא נימוקים	2
3.	דוגמאות טובות עם נימוקים חלקיים	3
4.	דוגמאות טובות עם נימוקים	5
קריטריון 4: ציינו איזו שגיאה בודקת כל דוגמה		
1.	לא	0
2.	כן	5

שאלה 3

כל מצולע נכון קיבל 3 נקודות. סה"כ 21 נקודות לשאלה.

שאלה 4

סעיף א' – 12 נקודות כאשר כל תת סעיף נכון במלואו מקבל 2 נקודות.

סעיף ב' – 15 נקודות, כאשר כל תת סעיף נכון במלואו מקבל 2 נקודות (פרט לסעיף האחרון – 3 נקודות)

סיכום

שאלה 1	34
שאלה 2	20
שאלה 3	21
שאלה 4	25
ציון כללי	100

דו"ח יחיד - קריטריונים

שאלה 1

סעיף 1

רמה	פירוט	ניקוד
קריטריון 1: הבנה מושגית: שימוש במושגים מתמטיים רלוונטיים לפעילות, כלומר הסטודנט מזכיר מושג ומראה את הבנתו.		
1.	אין שימוש במושגים מתמטיים ו/ או יש שימוש לא נכון במושגים	0
2.	שימוש חלקי במושגים	3
3.	שימוש נכון ומלא במושגים	4
קריטריון 2: אופן השימוש במודל (אמצעי ההמחשה)		
1.	אין שימוש במודל	0
2.	נעשה ניסיון לשימוש	1
3.	יש שימוש נכון במודל	3
4.	יש שימוש נכון מלא ומתוחכם	4
קריטריון 3: תקשורת: דרך בניית הפעילות		
1.	בנו פעילות לא מתאימה	1
2.	הפעילות לא מפורטת	2
3.	הפעילות מפורטת בצורה לא מלאה	3
4.	הפעילות מפורטת בצורה מלאה	4
קריטריון 4: שיקולים דידקטיים		
1.	אין פירוט של השיקולים הדידקטיים	0
2.	יש פירוט חלקי של השיקולים הדידקטיים	2-1
3.	יש פירוט של השיקולים הדידקטיים	3
4.	יש פירוט של השיקולים הדידקטיים וקישור למטרה הכללית של הפעילות	4
קריטריון 5: אופן ההצגה של המשימה		
1.	הצגה לא ברורה של המשימה	0
2.	חלקים מסוימים בהצגה ברורים	2
3.	ההצגה ברורה אולם חסרים פרטים	3
4.	ההצגה ברורה, מפורטת וערוכה באופן מאורגן	4
קריטריון 6: התייחסות למטרות הפעילות		
1.	לא פורטו מטרות הפעילות או אין התייחסות למטרות	0
2.	בפעילות יש התייחסות חלקית למטרות	3
3.	בפעילות יש התייחסות מלאה למטרות	4
4.	מקוריות (בנוס)	2

סעיף 2

תשובה	ניקוד
משולש שווה שוקיים	4
משולש ישר זווית	4
שווה צלעות	3
אחרת	0

סעיף 3

תשובה	ניקוד
משולש שווה שוקיים ללא נימוק	5
משולש שווה שוקיים עם נימוק לא מלא	7
משולש שווה שוקיים עם נימוק מלא	10
אחרת	0

שאלה 2

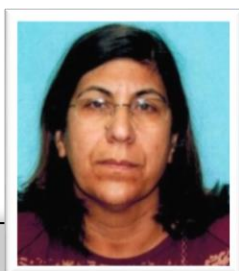
מושגים	
ניקוד	דוגמאות לאלכסונים
2	פחות מ-3 דוגמאות לאלכסונים נכונים
3	3 דוגמאות לאלכסונים נכונים
4	4 דוגמאות לאלכסונים נכונים
5	5 דוגמאות ויותר לאלכסונים נכונים
דוגמאות לאי-אלכסונים	
2	פחות מ-3 דוגמאות לאי-אלכסונים נכונים
3	3 דוגמאות לאי-אלכסונים נכונים
4	4 דוגמאות לאי-אלכסונים נכונים
5	5 דוגמאות ויותר לאי-אלכסונים נכונים
מורכבות	
1	מתן דוגמה אחת/אי-דוגמה אחת
2	מתן שתי דוגמאות/אי-דוגמאות, שונות
3	מתן שלוש דוגמאות/אי-דוגמאות, שונות
4	מתן ארבע דוגמאות/אי-דוגמאות, שונות
5	מתן דוגמאות/אי-דוגמאות כולן שונות
תקשורת	
3	נימוק לא ממצא
7	נימוק חלקי כלומר לא מספיק ברור ומשכנע
10	נימוק מלא ומשכנע
2	מקוריות (בנוס)

שאלה 3

ניקוד	סעיף 3	ניקוד	סעיף 2	ניקוד	סעיף 1
0	לא נכון	0	לא נכון	0	לא נכון
5	נכון ללא נימוק	5	נכון ללא נימוק	5	נכון ללא נימוק
10	נכון עם נימוק	10	נכון עם נימוק	10	נכון עם נימוק

סיכום

40	שאלה 1
30	שאלה 2
30	שאלה 3
100	ציון כללי



ד"ר נורית שמואלי

עוסקת בחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים. עסקה בהדרכה פדגוגית של פרחי הוראה למתמטיקה לבתי-הספר העל-יסודיים. השתתפה בכתיבה ובפיתוח של חומרים וספרים במתמטיקה המיועדים לבתי-ספר בחטיבת ביניים ובית-ספר יסודי. שימשה כראש מרכז מתמטיקה במכללה האקדמית בית ברל וראש המרכז הארצי למורי המתמטיקה בבתי-הספר היסודיים הממוקם באוניברסיטת חיפה.



ד"ר בת-שבע אילוני

עוסקת במתמטיקה ובחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים ובאוניברסיטה הפתוחה. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, בייעוץ ובעריכה של חומרים וספרים המיועדים לגיל הרך, לבית-הספר ולהכשרת מורים למתמטיקה ואשר עוסקים בנושאים מגוונים. ביניהם הספרים: יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך; תאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות.

הכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה

סאאיד בשארה, הסכללה האקדמית בית ברל

תקציר

במחקר זה נבדקו הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בין שתי גישות הוראה: הכוונה עצמית בלמידה והוראה מסורתית, וכן נבחנו ההשלכות הפדגוגיות של הבדלים אלה באוכלוסיית תלמידים עם לקויות למידה בבתי-ספר יסודיים רגילים בכיתות חינוך מיוחד. כמו כן נבדקה השפעת המגדר על יכולת פתרון שאלות אתגר.

הנחת המחקר הייתה כי גישת הכוונה עצמית בלמידה תקדם את הישגי התלמידים יותר מאשר הגישה המסורתית, כיוון שהיא מציבה לפני התלמידים משימות חקר, ייצוג מצבים בעזרת המחשבות וייצוג מתמטי והבנת תכונות וקשרים בין מושגים. גישת הכוונה עצמית בלמידה היא תהליך למידה שבו מושם דגש בהפעלת התלמידים, לעומת למידה מסורתית, שבה המורה מלמד בשיעור, והתלמידים נשארים פסיביים.

במחקר השתתפו 40 תלמידים עם לקויות למידה שלמדו בארבע כיתות (כיתות ג'-ד'). שתי כיתות למדו מתמטיקה לפי גישת ההכוונה העצמית ושתי הכיתות האחרות למדו לפי הגישה המסורתית. יכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה נבחנה באמצעות מבחן, אשר כלל ארבע שאלות אתגר מתוך אוסף המבחנים לבדיקת הישגי התלמידים במתמטיקה. כמו כן התבקשו המורים למלא שאלון לצורך אפיון גישת ההוראה שנקטו בה.

הממצאים הראו על כך שבקרב תלמידים שלמדו לפי גישת הכוונה עצמית בלמידה, יכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה הייתה גבוהה במובהק לעומת תלמידים שלמדו לפי הגישה המסורתית. לא נמצא הבדל מובהק ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים, וכן ההבדלים ביכולת זו לפי גישת ההוראה לא השתנו בהתאם לשיוך המגדרי.

המסקנה העולה ממחקר זה היא כי מומלץ לאמץ את גישת הכוונה עצמית בלמידה במקצוע המתמטיקה, שכן היא עשויה לתרום לשיפור באסטרטגיות החשיבה המתמטית ובשל כך להשפיע על תופעות מגוונות, המתקשרות לתחום הפדגוגי כגון צמצום תופעת הנשירה, קידום הישגי התלמידים ושיפור יחסים חברתיים.

מילות מפתח: גישות הוראה; הכוונה עצמית; הוראה מסורתית; הוראת מתמטיקה; שאלות אתגר במתמטיקה; לקויות למידה.

חבוא

מקצוע המתמטיקה נתפס כאחד המקצועות הקשים מבין תחומי הדעת הנלמדים בבית-הספר, כיוון שבעת הוראתו נדרשת רמה גבוהה של התמודדות עם נושאים מגוונים, בכללם פתרון שאלות מילוליות, ביצוע משימות חקר, ייצוג מצבים בעזרת המחשות, ייצוג מתמטי והבנת תכונות וקשרים בין מושגים. במתמטיקה יש לשלוט היטב בשלבים הבסיסיים של החומר כדי להבין חומר מתקדם. הסיבות לקשיים ולחוסר עניין נעוצות ברובן באפיוני המקצוע ובדרכי הוראתו. הוראת המתמטיקה לילדים עם לקויות למידה קשה במיוחד, והצורך ללמד את התכנים הנדרשים על-פי תכנית הלימודים של משרד החינוך מכביד עוד יותר. מכאן מתחייב השימוש בדרכי הוראה מותאמות, אשר יקלו על התלמידים את לימוד החומר המתמטי הנדרש על-פי תכנית הלימודים של משרד החינוך (גזית, 2004; מרולדה ודוידסון, 2001; Geary, 2004).

תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה (משרד החינוך, 2006) שמה דגש בתוצרים ובדרכי חשיבה. לפי התפיסה העומדת בבסיס התכנית, מתמטיקה אינה רק מקצוע נוקשה בעל חוקים חד-משמעיים המחייבים פתרון יחיד ודרך אחת לפתרון, אלא מקצוע בעל היבט רחב, המאפשר להתמודד עם משימות באמצעות שילוב בין חשיבה מתכנסת-אלגוריתמית ובין חשיבה מסתעפת-יצירתית. מכאן חשיבותה של תובנה מספרית, המערבת תהליכי חשיבה מתמטית מכוונים ומתוכננים תמיד לצורך התמודדות עם תכנים מתמטיים מגוונים (Pintrich & De Groot, 1990).

לצורך פיתוח החשיבה המתמטית יש ללמד את התלמידים דרכי פתרון של שאלות אתגר במתמטיקה, המתבססות על הכוונה עצמית בלמידה, מתוך הדגשת חשיבותו של תהליך הפתרון ולא התשובה הסופית. לפי גישת הכוונה עצמית בלמידה, תהליך הפתרון מערב שימוש מגוון באסטרטגיות חשיבה, ומפתח יכולת להגיע לבד אל התשובה הנכונה בדרך קצרה ויעילה. נוסף על כך, הכוונה עצמית בלמידה מפתחת בתלמידים יכולת להתמודד עם שאלות אתגר מגוונות גם אם לא הודגמו בכיתה (בן-טוב, 2000; ברג, 2001; חכים וגזית, 2011).

המאמר הנוכחי מתמקד באוכלוסיית תלמידים עם לקויות למידה, הלומדת את מקצוע המתמטיקה בהתאם ליכולותיה בחינוך היסודי הרגיל בכיתות חינוך מיוחד בלוויית עוזרים ואמצעי המחשה שונים לצורך פישוט החומר הלימודי. המאמר בוחן את מאפייניה הייחודיים של אוכלוסיית התלמידים עם לקויות למידה ואת דרכי התאמת גישת ההוראה במתמטיקה בעבור אוכלוסייה זו. הוראה נכונה העושה שימוש בהכוונה עצמית בלמידה עשויה לשפר את יכולת החשיבה המתמטית ואת הישגי התלמידים עם לקויות למידה במקצוע המתמטיקה (אבישר, 2004).

הכוונה עצמית בהוראת מתמטיקה: הגדרות ומאפיינים

הגדרת הכוונה עצמית היא יכולתו של הלומד להיות מודע למחשבותיו, להרגשותיו ולהתנהגותו במהלך הלמידה, לפקח ולנהל אותן (מיכלסקי וקרמרסקי, 2008; Gibbs, 2003). ההכוונה העצמית עוסקת בתהליך מעגלי ורקורסיבי אשר כולל ארבעה מרכיבים: קוגניציה, מטה-קוגניציה, מוטיבציה והקשר. קוגניציה עוסקת באסטרטגיות פשוטות, פתרון בעיות וחשיבה ביקורתית; מטה-קוגניציה עוסקת ביכולת

להבין ולבצע בקרה על התהליכים הקוגניטיביים; מוטיבציה עוסקת באמונות ועמדות הלומד על יכולתו הלמידה, על הערך שהוא רואה במשימה ועל רמת העניין; הקשר עוסק בפעולות הלומד אל הסביבה הלימודית (כהן וקרמרסקי, 2010; עיני, 2008; Schraw, Crippen, & Hartley, 2006).

הכוונה עצמית בלמידה ניכרת בשטף, בגמישות, ביצירת קשרים חדשים, בשימוש בדמיון ובאמצעים ובשאלת שאלות. ההכוונה העצמית מאפשרת יכולת של חיבור בין אלמנטים לא קשורים, זיהוי בעיות חשובות, שאלת שאלות סקרניות, פתיחות לרעיונות חדשים, אי רצון לקבל נורמות מקובלות לצד גמישות ומקוריות וארגון מחדש של נורמות אלה (מיכלסקי וקרמרסקי, 2008; משרד החינוך, 2006).

הכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה ניכרת בניסוח עצמאי של בעיות מתמטיות לא מסובכות, במציאת דרכים ואמצעים לפתרון בעיות אלו ובמציאת שיטות מקוריות לפתרון בעיות לא שגרתיות (חכים וגזית, 2011; נבו, 1997).

הכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה מובילה לטיפול תלמיד בעל גמישות מחשבתית, תלמיד סקרן, המסוגל להתמודד עם בעיות מגוונות בדרכים רבות, בעל יכולת להעלות השערות, יכולת הוכחה, שכלול, תלמיד המסוגל לבנות טיעון ולהצדיק רעיונות מתמטיים לצד שליטה באלגוריתם (גזית ופטקין, 2009; Yee, 2005).

לעומת זאת הגישה המסורתית בהוראת המתמטיקה שמה דגש בפעולות אלגוריתמיות ובתוצאות מדויקות של חישובים בנייר ובעיפרון, והיא רואה בכל קבוצות הלומדים קבוצות הומוגניות, והמורה מלמד את כולם ביחד בלי לראות את השונות ביניהם. מבנה הלימודים נוקשה והוא נכפה על התלמידים מגבוה, והשימוש באמצעי המחשה להוראה מזערי ביותר. תלמידים שלומדים לפי גישה זו מפתחים תפיסה סיבתית שמוקדה הוא המורה, והם רואים בו גורם מרכזי האחראי למתרחש בכיתה (זידאן, 2009; ישראלי, 2008; קליין, 2008; קשתי, אריאלי ושלסקי, 1997).

תחום מדעי החברה עוסק בהבחנה בין המינים בהוראה ובלמידה במקצוע המתמטיקה. מאפייני גישת ההכוונה העצמית, השמה דגש באנושיות וחברתיות והממקדת את הלומד במרכז, בפיתוח תכנית הוראה המותאמת לצרכיו, עשויה לתרום לקידום שווה בין שני המינים ולצמצום פערים מגדריים (קליין, 2008).

הספרות המחקרית מספקת בדבר קיומם של פערי הישגים במתמטיקה בין בנים לבנות. רפ (2014), בדק פערי הישגים בין בנים לבנות במתמטיקה בקרב תלמידים בבתי-ספר יסודיים בשני המגזרים: המגזר היהודי והמגזר הערבי. עיקר הממצאים היה כי בבתי-ספר דוברי עברית הישגי הבנים נוטים להיות טובים יותר מהישגי הבנות, ובבתי-ספר דוברי עברית הישגי הבנות נוטים להיות טובים יותר מהישגי הבנים. גודל הפערים וכיוונם בקרב תלמידים בבתי-ספר דוברי עברית דומים לאלו המתקבלים במדינות מערביות, ואילו התמונה בקרב תלמידים בבתי-ספר דוברי עברית דומה לזו המתקבלת במדינות ערביות. לפי הגישה האחרת, הסביבתית, בנים ובנות נולדים עם פוטנציאל אינטלקטואלי מתמטי זהה, והפערים הם תולדה של השפעות חברתיות-תרבותיות מתוך חינוך, תפיסות, ציפיות ומסרים שונים, המועברים על-ידי החברה בכלל ועל-ידי הורים, מורים ומחנכים בפרט (מברך, 2001; רפ, 2014; Spelke, 2005).

שימוש בהכוונה עצמית לקידום החשיבה המתמטית

הכוונה עצמית מתבטאת בראייה אינטואיטיבית של מבנים מתמטיים ובקישורם לפעולות חשבון, ביכולת גיוס ידע וניסיון קודם כדי לפתח אסטרטגיות פתרון שונות, בהבנת דרכי פתרון שונות ובגילוי פתיחות לדרכים חדשות. יצירת דרכי פתרון שונות מקנה תחושה שהמתמטיקה אינה מקצוע נוקשה בעל חוקים חד-משמעיים המחייבים דרך פתרון אחת, אלא שמקצוע המתמטיקה מאופיין כבעל היבט רחב, שמתוכו אפשר לגשת לפתרון משימות באמצעות חשיבה ויצירתיות. פיתוח דרכי פתרון מקוריות מקנה לתלמיד שליטה בתהליך הלמידה של מקצוע המתמטיקה ותורם לביטחון האישי, דבר החשוב להמשך לימודים ולהתמודדות עם בעיות מורכבות יותר במתמטיקה (ברג, 2001; גזית ופסקין, 2009; Kramarski & Michalsky, 2009).

הכוונה עצמית מקנה לתלמיד יכולת להתמודד עם מספרים בגמישות, יכולת להבין את הקשרים בין המספרים ובין הפעילויות החשבוניות, יכולת להשתמש באומדן וקביעת הערכים המספריים, ויכולת לשפוט בהיגיון את התשובה ואת הקשרה למציאות. פתרון שאלות אתגר במתמטיקה מחייב שימוש במיומנויות של תובנה מספרית. הכוונה עצמית קשורה במיומנויות שונות במתמטיקה, הנלמדות בבתי-הספר כגון פתרון בעיות מילוליות, הנדסה ומדידות (גירון, 2009; חכים וגזית, 2011; Bannert, 2008; Zimmerman, 2008; Zohar, 2004).

הכוונה עצמית בפתרון שאלות אתגר במתמטיקה

אחת הדרכים ליצור מצבים הדורשים הכוונה עצמית בלמידה היא להציג בעיות פתוחות לפני התלמידים, שאין בהן פתרון אחד חד-משמעי (בורשטיין, 2006; Yee, 2005).

פתרון בעיות הוא לב לבה של המתמטיקה וכולל גם פתרון תרגילים שאין בהם אלגוריתם מוסכם קבוע מראש. מטרת העיסוק בשאלות אתגר היא התמקדות בתהליך הפתרון והרחבת נקודות המבט של התלמידים כלפי נושאים ורעיונות מתמטיים מגוונים (אוסטר, 1990; גירון, 2009). שאלות אתגר במתמטיקה מאופיינות בקריטריונים הבאים:

- א. שאלות שמתאימים להן פתרונות רבים ומגוונים.
- ב. שאלות המזמנות מיצוי אפשרויות ומעודדות חיפוש שיטתי.
- ג. שאלות המאפשרות מציאת חוקיות.
- ד. שאלות בנושאים שלא נלמדו בכיתה במפורש.
- ה. שאלות המעודדות חיפוש ומציאת דרכי פתרון שונות.

שאלות אתגר במתמטיקה הן אלה שאפשר לפתור אותן בכל מיני דרכים. שאלות שיש להן מספר שונה של פתרונות. בפתרון שאלות אתגר במתמטיקה חשוב לא רק הפתרון הסופי של השאלה, אלא גם התהליך המוביל לפתרון השאלה. שאלות אלו מתאפיינות בכך שלפותרים אין אלגוריתם ידוע מראש לפתרונן, ולכן עליהם למצוא אסטרטגיות ודרכים לפתרון על סמך הידע הקודם שרכשו ולאחר מכן למצוא את הדרך הנדרשת לפתרון נכון של השאלה (גזית ופסקין, 2009).

בעיה מתמטית מורכבת מסיטואציה מילולית המכילה נתונים רבים. לרוב הבעיה לקוחה מחיי היומיום

והיא עוסקת באובייקטים מתמטיים, כמו מספרים, צורות ומבנים החוזרים על עצמם. כדי להגיע לפתרון בעיה נדרש התלמיד בדרך כלל לייצג את הסיטואציה והנתונים בתוך מודל מתמטי מוכר (גירון, 2009). הצגת שאלת אתגר לתלמיד מאפשרת לבדוק את יכולתו ליישם את החומר הנלמד ברמות שאינן שחזור אלגוריתם או פרוצדורה שתורגלה בכיתה. לטענת גזית (2004), השימוש בחידות ובאתגרי חשיבה בבית-הספר לא רק שיועיל לפיתוח החשיבה, אלא יגביר מוטיבציה ועניין בעבור תלמידים בכל רמות הלמידה (מרקוביץ, 2003; תירוש וסתוי, 1998; Zohar, 2004).

שאלות אתגר במתמטיקה אינן ממוקדות בנושא ספציפי מבחינת התכנים הלימודיים, כמו הגדרת מושגים ותכנים או הסברתם. שאלות אלה מערבות נושאים מגוונים כגון מספרים ופעילויות, אחוזים, משוואות, שברים, בעיות מילוליות, הנדסה וכדומה (בן-טוב, 2000; ברג, 2001).

תכנית הלימודים החדשה בחינוך היסודי שמה דגש בפיתוח חשיבה מתמטית כדי להגיע לפתרון נכון בדרך יעילה וקצרה. כדי לפתור שאלות אתגר במתמטיקה, מומלץ שהתלמידים יפתרו בקבוצות קטנות, כאשר דרך זו מאפשרת שיחה בין השותפים, התלבטות ועבודה משותפת. המורה במקרה זה יוכל להרחיב את המחשבה של התלמידים בשאלת שאלות, כגון "מה יקרה אם נחליף נתון מסוים בנתון אחר ואיך ישפיע הדבר על פתרון השאלה?". כאשר התלמידים מתמודדים עם השאלה בכוחות עצמם, הדבר גורם לפיתוח החשיבה והרחבת אופקים (וינברגר וזוהר, 2005; מרולדה ודוידסון, 2001; Geary, 2004; Schraw et al., 2006).

הכוונה עצמית בפתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה

לקות למידה היא לקות התפתחותית הפוגעת בתפקודי למידה בסיסיים (קריאה, כתיבה ומתמטיקה), ומפריעה מאוד לאדם לרכוש ולבטא ידע ומיומנויות ברמה הצפויה מאנשים בגילו, בהשכלתו ובמנת המשכל שלו. לקות למידה כפי שהגדיר משרד החינוך (2004) מבוססת על הגדרת ה-NJCLD משנת 1994 (National Joint Committee on Learning Disabilities), וכוללת שני תנאים לאבחנה:

1. קיים פער לימודי משמעותי ומתמשך בין הישגיו הלימודיים של התלמיד ובין ההישגים המצופים ממנו על-פי גילו ורמת כיתתו.
2. קיים פער משמעותי בין הישגיו הלימודיים של התלמיד ובין הישגיו האינטלקטואליים כפי שנמצאו במבחני משכל אובייקטיביים.

אם כן, ההגדרות המקובלות מבססות את האבחנה של לקות למידה על שני פערים: הפער הראשון הוא הפער בין ההישגים בפועל להישגים מצופים בגיל וברמת הכיתה, המפורטים בתכנית הלימודים. מכאן שהאבחון חייב להיות מבוסס על תכנית הלימודים במתמטיקה. הפער השני שעליו מבוססת ההגדרה הוא הפער שבין ההישגים ליכולת. עם זאת, קיימת ביקורת מתמשכת ביחס להסתמכות על פער זה (פטרסון-מילר, 2001; Fischbein, 1987; Geary, 2004).

אי התקדמות בלימודים יכולה להיות תוצאה של חוסר בגירויים התפתחותיים, מוטיבציה נמוכה ללמידה, לקויות דיבור, אטיות בתגובות ועוד (קלארק וקלארק, 2003).

שימוש בהכוונה עצמית בפתרון שאלות אתגר במתמטיקה עשוי להקל על למידת החומר המתמטי אצל התלמיד המתקשה, ולורז את הבנתו והפנמתו בתהליך ההוראה של נושאים מתמטיים כגון שברים, אחוזים או צורות הנדסיות. יש להשתמש באמצעי עזר מתאימים שבאמצעותם אפשר להמחיש את הנושא ולפענח את התוצאה. על המורה ליצור סביבה לימודית תומכת ומעודדת לתלמיד ולהעריך את הישגי התלמיד בהתאם ליכולותיו (גלובמן והריסון, 1994; קשתי ואחרים, 1997). לפיכך האתגר הוא ליצור סביבה, שבה כל תלמיד ותלמיד, שמוגדר כילד עם לקות למידה במתמטיקה, יוכל לממש את הפוטנציאל האישי שלו (פטרסון-מילר, 2001; 2000; Scarpati, Malloy, & Fleming, 2000; Grolnick & Ryan, 2000). לסיכום, אתגרים רבים טמונים בהיבטים החינוכיים של הוראת מקצוע המתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה. נוסף לשונות באפיוני התלמידים, ישנן גם סיבות סביבתיות מגוונות המשפיעות על הוראת מתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות. טיפוח חשיבה מתמטית בקרב תלמידים אלה יקנה להם גמישות בטיפול במושגים מתמטיים, בבחירת דרכי פתרון ובשימוש בדרכי פתרון לא סטנדרטיות. ההכוונה העצמית היא חלק מהתרבות המתמטית והיא כוללת תפיסה אינטואיטיבית איכותית של התחום הנלמד, אשר עשויה לסייע לילדים עם לקויות למידה להתמודד התמודדות טובה יותר עם פתרון בעיות מתמטיות (אבישר, 2004; בשארה, 2005; גלובמן והריסון, 1994; Agran & Wehmeyer, 1999; Margalit, 2003; Ross, 1995).

שאלות והשערות המחקר

1. יימצאו הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה לפי גישת ההוראה: הכוונה עצמית ומסורתית. בקרב תלמידים, אשר ילמדו לפי גישת ההכוונה העצמית, רמת ההישגים במתמטיקה תהיה גבוהה בהשוואה לתלמידים אשר ילמדו לפי הגישה המסורתית.
2. האם יימצאו הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים?
3. האם תתקיים אינטראקציה בין גישת ההוראה למגדר בזיקה ליכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה?

משתתפים

לצורך המחקר נבחרו ארבע כיתות חינוך מיוחד (כיתות ג'-ד') משני בתי-ספר יסודיים במרכז הארץ. בכיתות אלה למדו ילדים עם לקויות למידה. שתי כיתות למדו מתמטיקה לפי גישת ההכוונה העצמית ושתי הכיתות האחרות למדו לפי הגישה המסורתית. בכל כיתה למדו עשרה תלמידים, כך שבסך הכול כלל המחקר 40 תלמידים, מתוכם 23 בנים (57.5%) ו-17 בנות (42.5%). גיל המשתתפים נע בין 8 ל-10 שנים ($M=9.2$, $SD=1.45$). שיעור הבנות הלומדות לפי גישת ההכוונה העצמית (45%) נמצא דומה לשיעור הבנות הלומדות לפי הגישה המסורתית (40%), $(1) = x^2, 00. = p$.

תלמידים אלה עברו אבחון פסיכולוגי בכיתות ב'. את האבחון ביצע השירות הפסיכולוגי במקום מגוריהם באמצעות מבחן וכסלר, אשר במסגרתו הפסיכולוג המאבחן קובע את סוג הלקות ואת רמת המשכל של כל תלמיד. כמו כן התלמידים עברו אבחון דידקטי אצל מאבחנים מוסמכים באמצעות סדרת מבחנים

בתחומים אקדמיים: קריאה, הבנת הנקרא ומתמטיקה, וכן בתחומים התפתחותיים: מיומנויות ויזו-מוטוריות, חזותיות, שמיעתיות, שפתיות, זכירה, חשיבה, קשב וריכוז. בעקבות אבחונים אלה עברו התלמידים ועדות השמה, אשר קבעה את זכאותם ללמוד בכיתות נפרדות של חינוך מיוחד (תלמידים עם לקויות למידה) בתוך בתי-ספר של החינוך הרגיל. התלמידים בכיתות אלה לומדים את כל מקצועות הלימוד בנפרד, כאשר את החומר הלימודי מכין המורה בהתאם ליכולותיו וסוג הלקות של כל תלמיד בנפרד.

המצב החברתי-כלכלי של התלמידים היה ברמה בינונית, אמותיהם היו עקרות בית ואבותיהם הועסקו בעבודות שהכנסתן ממצעת. התלמידים הנבדקים אובחנו כתלמידים עם לקויות למידה. מבחינה קוגניטיבית, תלמידים אלה היו עם יכולת חשיבה בטווח הנורמה, אך הם הראו קשיים בקשב ובריכוז, הסחת דעת וקושי ואטיות רבה בביצוע ובסיום מטרות. מבחינה שפתית, אוצר המילים שלהם היה דל ומצומצם, הם הכירו את האותיות, ביצעו קריאת מילים קצרות, אך היו להם שגיאות כתיב ניכרות. מבחינה מתמטית, הם שלטו בארבע הפעולות הבסיסיות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק ושלטו גם במבנה העשרוני של מספרים. אך עם זאת, למרות שליטתם בחוקי הכפל והחילוק, הם גילו קושי בביצוע חישובים המעריכים פעולות אלה. כמו כן הם התקשו בחשיבה מופשטת ובפתרון בעיות מילוליות.

בכיתות שבהן הופעלה גישת ההכוונה העצמית או הגישה המסורתית, נעשה ניסיון לבחור באלה שמוריהן היו עם ניסיון והכשרה דומים בתחום הוראת המתמטיקה. כל המורים שהשתתפו במחקר היו עם תואר ראשון בתחום החינוך הרגיל.

כלי המחקר

נתוני המחקר נאספו באמצעות מבחן שנבחר מאוסף המבחנים השונים של משרד החינוך המועברים לבתי-הספר לצורך בדיקת הישגי התלמידים במתמטיקה (ראמ"ה, 2012). מבחן זה עבר בדיקות מוקדמות של תיקוף והמהמנות, אשר ביצעו מומחים בהוראת המקצוע בבתי-ספר שאוכלוסיית תלמידיהם דומה לאוכלוסיית המחקר, הנמצאת ביישובים עם רקע חברתי-כלכלי דומה. שאלות המבחן נבחרו מתוך שיקולי התאמתן לאפיוניה הייחודיים של אוכלוסיית המחקר, תלמידים עם לקות למידה, ומבחינת התאמתן לתכנית הלימודים הנלמדת בכיתות ג'-ד' ולרמת הידע הקודם של התלמידים שנדרש לפתרון.

המבחן כלל ארבע שאלות אתגר: (א) שאלת העוגה; (ב) אומדן; (ג) שאלת שעון; (ד) בחירת פעולת החשבון. ניתן ציון לכל שאלה וציון כולל לכל חלקי המבחן. טווח הציון נע בין 0 ל-100, וככל שהציון גבוה יותר, כך יכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה גבוהה יותר.

נוסף על כך, כל מורה שתלמידיה השתתפו במחקר התבקש למלא שאלון אפיון גישת ההוראה. המטרה הייתה לאתר את גישת ההוראה שבה השתמש המורה, גישת הכוונה עצמית או הגישה המסורתית ולסווג את כיתות התלמידים שבהן מלמדים מורים אלה בהתאם לשתי גישות ההוראה.

השאלון התבסס על שאלון של ישראלי (2008), שהותאם לצורכי המחקר הנוכחי, והוא כלל שני חלקים: חלק א' – משתני רקע אישי ומקצועי; חלק ב' – שאלות בנוגע לאפיון גישת ההוראה.

החלק השני נחלק לשבעה תחומים:

- (א) שימוש בגירויים ובחומרים רב-כיווניים ומגוונים בשיעור (שאלות 1, 2, 3, 4, 7, 16).
- (ב) עבודת צוות בכיתה (שאלות 5, 6, 8).
- (ג) שימוש בדרכי למידה, הוראה והערכה חלופיות לפי הגדרתן (שאלות 9, 10, 18, 19).
- (ד) קידום הבנה בין-תרבותית והידברות הדדית (שאלות 14, 15, 17).
- (ה) שילוב הורים (שאלה 13).
- (ו) מטרות הוראה – פיתוח נורמות של עזרה הדדית והפחתת התחרותיות בין התלמידים (שאלה 11).
- (ז) מטרות הוראה – העברת החומר הלימודי (שאלה 12).
- בבדיקת המהימנות של עקיבות פנימית (אלפא של קרונבאך), ל-19 פריטי שאלון גישת ההוראה התקבל מקדם מהימנות גבוה מאוד ($\alpha=0.95$). כמו כן נמצאו מקדמי מהימנות גבוהים לתתי-הסולמות (טווח המקדמים 0.88-0.92). בהתבסס על מקדם המהימנות, לכל מורה חושב ציון כולל בשאלון גישת ההוראה באמצעות סיכום הדירוגים של כל פריטי השאלון. טווח הציון נע בין 19 ל-73, וככל שהציון גבוה יותר, כך נהוגה בכיתה גישת הכוונה עצמית בלמידה יותר מאשר גישת ההוראה המסורתית. כמו כן חושבו ציונים לשבעת תתי-המדדים.
- הציון הכולל בשאלון גישת ההוראה שימש לסיווגם של המורים לשתי קבוצות לפי ערכו החציוני של הציון ($\text{median}=51$). בקבוצת ההוראה המסורתית נכללו משתתפים שציונם היה נמוך או שווה לערך החציוני, ובקבוצת הכוונה עצמית נכללו משתתפים שציונם היה גבוה מהערך החציוני. יש לציין, כי נמצאה הלימה מוחלטת בין סיווג המשתתפים לפי גישות ההוראה בהתבסס על הערך החציוני של המדד הכללי לבין סיווגם על-פי תשובתם הישירה על השאלה בנושא גישת ההוראה שהם נוקטים בה: $(1) = 36.1, x^2 = 0.001, p < .$ כלומר כל המשתתפים אשר סווגו לקבוצת הכוונה עצמית על-פי ערכו החציוני של מדד אפיון גישת ההוראה, אפיינו אף את גישת ההוראה שהם נוקטים בה כגישת הכוונה עצמית כשנשאלו על כך במישורין.

הליך המחקר

המחקר נערך בארבע כיתות חינוך מיוחד לתלמידים עם לקויות למידה בשני בתי-ספר יסודיים רגילים במרכז הארץ. החוקר הגיע לכל בית-ספר בנפרד ונפגש עם התלמידים, וכל אחד מהם התבקש לענות על שאלות המבחן בכתב בנוכחות החוקר, לצורך הסבר וסיוע במילוי המבחן. הסיוע שניתן לשתי הקבוצות היה זהה וכלל הבהרה של מינוחים מילוליים בהנחיות למבחן. המבחן ארך 45 דקות בערך. כמו כן המורים, אשר מלמדים בכיתות המשתתפות במחקר, התבקשו למלא שאלון הבדק את אפיון גישת ההוראה הנהוגה בכיתה.

ממצאים

מבחנים סטטיסטיים

המבחנים הסטטיסטיים כללו ניתוח מקדים, שבו נבחנו המאפיינים הפדגוגיים הייחודיים של שתי גישות ההוראה באמצעות סדרת מבחני t למדגמים בלתי תלויים. המשתנים התלויים היו שבעת תתי-המדדים

בשאלון אפיון גישת ההוראה על-פי דיווח המורים, והמשתנה הבלתי תלוי היה סיווגם של המורים לפי שתי גישות ההוראה על-פי תשובתם הישירה על השאלה בנושא גישת ההוראה שהם נוקטים בה.

לבדיקת הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה לפי גישת ההוראה (שאלת המחקר הראשונה) נערך מבחן t למדגמים בלתי תלויים. המשתנה התלוי היה ציון התלמידים במבחן ההישגים במתמטיקה, והמשתנה הבלתי תלוי היה אפיון גישת ההוראה שבה נוקטים מורי התלמידים (הכוונה עצמית לעומת הגישה המסורתית).

לבדיקת הבדלי מגדר בהישגים במתמטיקה (שאלת המחקר השנייה) נערך מבחן t למדגמים בלתי תלויים. המשתנה התלוי היה ציון התלמידים במבחן ההישגים במתמטיקה והמשתנה הבלתי תלוי היה שיוכם המגדרי של התלמידים. לבדיקת הבדלים בהישגים במתמטיקה לפי מגדר ושיטת הוראה (שאלת המחקר השלישית) נערך ניתוח שונות דו-כיווני (Two way ANOVA) במערכת 2 (מגדר) * 2 (גישת ההוראה). המשתנה התלוי היה ציון התלמידים במבחן ההישגים במתמטיקה. המשתנים הבלתי תלויים היו שיוכם המגדרי של התלמידים ואפיון גישת ההוראה שבה נוקטים מורי התלמידים (הכוונה עצמית לעומת הגישה המסורתית).

המאפיינים הפדגוגיים הייחודיים של שתי גישות ההוראה

בעת הניתוח המקדים נבחנו המאפיינים הפדגוגיים הייחודיים של שתי גישת ההוראה, הכוונה עצמית ומסורתית בכל אחד משבעת תתי-המדדים. לשם כך נערכה סדרת מבחני t למדגמים בלתי תלויים. נמצא כי בשישה מתוך שבעת המדדים, ציוניהם של מורים מקבוצת הכוונה עצמית בלמידה היו גבוהים במובהק בהשוואה לציוניהם של מורים מקבוצת הגישה המסורתית. עם זאת, בניגוד למצופה, במדד מטרות הוראה – פיתוח נורמות של עזרה הדדית והפחתת התחרותיות, התקבל דפוס הפוך, אשר לפיו ציוניהם של מורים מקבוצת הגישה המסורתית היו גבוהים במובהק בהשוואה לציוניהם של מורים מקבוצת הכוונה עצמית בלמידה.

דפוס הממצאים מצביע על כך שמורים אשר סווגו לקבוצת הכוונה עצמית בלמידה נמצאו אף עם ציונים גבוהים בשימוש בגירויים ובחומרים רב-כיווניים מגוונים בשיעור, בהפעלת עבודת צוות, בשילוב הורים ובקידום הבנה בין-תרבותית והידברות הדדית.

הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה לפי גישת ההוראה

שאלת המחקר נועדה לבדוק האם יימצאו הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה, לפי גישות ההוראה: הכוונה עצמית ומסורתית. לצורך בדיקת שאלה זו, נערך מבחן t למדגמים בלתי תלויים. בלוח 1 מוצגים הממוצעים, סטיות התקן וערכי מבחן t של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי גישת ההוראה.

לוח 1 – ממוצעים, סטיות תקן וערכי מבחן t של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי גישת ההוראה (N=40)

	גישת ההוראה				
	מסורתית (n=20)		הכוונה עצמית (n=20)		
t (38)	SD	M	SD	M	
6.22***	3.78	84.25	5.03	93.00	מבחן הישגים במתמטיקה

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

מתוך התבוננות בערכי מבחן t המוצגים בלוח 1 עולה כי נמצא הבדל מובהק בציוני מבחן ההישגים במתמטיקה לפי גישת ההוראה. לפי הממוצעים בקרב תלמידים אשר למדו לפי גישת ההכוונה העצמית, רמת ההישגים במתמטיקה גבוהה במובהק לעומת תלמידים אשר למדו לפי הגישה המסורתית.

הבדלי מגדר בהישגים במתמטיקה

שאלת המחקר השנייה נועדה לבדוק האם יימצאו הבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים. לצורך זה נערך מבחן t למדגמים בלתי תלויים. בלוח 2 מוצגים הממוצעים, סטיות התקן וערכי מבחן t של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים.

לוח 2 – ממוצעים, סטיות תקן וערכי מבחן t של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי מגדר (N=40)

	מגדר				
	בנות (n=17)		בנים (n=23)		
t (38)	SD	M	SD	M	
-.02	6.72	88.65	6.01	88.61	מבחן הישגים במתמטיקה

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

מתוך התבוננות בערכי מבחן t המוצגים בלוח 2 עולה כי לא נמצא הבדל מובהק בציוני מבחן ההישגים במתמטיקה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים.

הבדלים בהישגים במתמטיקה לפי מגדר ושיטת ההוראה

שאלת המחקר השלישית נועדה לבדוק האם תפקיים אינטראקציה בין גישת ההוראה ובין מגדר בזיקה ליכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה. לצורך בדיקת שאלה זו נערך ניתוח שונות דו-כיווני במערך 2 (מגדר) * 2 (גישת ההוראה). בלוח 3 מוצגים הממוצעים, סטיות התקן, ערכי ניתוח השונות וגודל האפקט של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים ולפי גישת ההוראה.

לוח 3 – ממוצעים, סטיות תקן, ערכי F וערכי $\eta^2 p$ של מבחן ההישגים במתמטיקה לפי מגדר ולפי גישת ההוראה ($N=40$)

מגדר * גישת הוראה		גישת הוראה		מגדר		מגדר								
η^2	$F(1,36)$	η^2	$F(1,36)$	η^2	$F(1,36)$	בנות				בנים				
						גישת מסורתית (n=8)		הכוונה עצמית (n=9)		גישת מסורתית (n=12)		הכוונה עצמית (n=11)		
						SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	
.009	.31	.495	35.29***	.002	.08	4.28	84.50	6.46	92.33	3.61	84.08	3.73	93.55	מבחן הישגים במתמטיקה

* $p<0.05$, ** $p<0.01$, *** $p<0.001$

מהתבוננות בערכי ניתוח השונות המוצגים בלוח 3 עולה כי לא נמצאה אינטראקציה מובהקת של מגדר * קבוצת מחקר. כלומר הבדלים ברמת ההישגים במתמטיקה לפי גישת ההוראה לא השתנו בזיקה לשיוכם המגדרי של המשתתפים.

דיון וסיכום

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לבדוק את ההבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בין שתי גישות הוראה: הכוונה עצמית בלמידה והוראה מסורתית, וכן נבחנו ההשלכות הפדגוגיות של הבדלים אלה על אוכלוסיית תלמידים עם לקויות למידה בבתי-ספר יסודיים. כמו כן נבדקה השפעת המגדר על יכולת פתרון בעיות לא שגרתיות במתמטיקה.

נוסחו שלוש שאלות מחקר שנבדקו אמפירית. השאלה הראשונה בדקה את ההבדלים ביכולת פתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה לפי גישות ההוראה: הכוונה עצמית והוראה מסורתית. דפוס הממצאים הראה על כך שההבדלים בהישגי התלמידים היו בהתאם לגישת ההוראה; נמצא שבקרב תלמידים אשר למדו לפי הכוונה עצמית, רמת ההישגים במתמטיקה גבוהה במובהק בהשוואה לתלמידים אשר למדו לפי הגישה המסורתית.

ממצא זה מתיישב עם הספרות המחקרית, אשר לפיה שימוש בהכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה מפתח בקרב התלמידים אסטרטגיות חשיבה מתמטיות המאפשרות להגיע אל התשובה הנכונה לבד בדרך קצרה ויעילה (בן-טוב, 2000; ברג, 2001; חכים וגזית, 2011; Geary, 2004). אסטרטגיות אלה מאופיינות בגמישות מחשבתית ומאפשרות התמודדות עם בעיות מגוונות בדרכים אחרות (גזית ופסקין, 2009; עיני, 2008; Yee, 2015). לפיכך נראה כי בקרב התלמידים אשר למדו לפי גישת ההכוונה העצמית, התפתחו יותר אסטרטגיות החשיבה והיכולות הנדרשות לפתרון שאלות אתגר במתמטיקה, דבר שהביא

לידי רמת הישגים גבוהה יותר במתמטיקה.

שאלת המחקר השנייה בדקה את ההבדלים בהישגים במתמטיקה של תלמידים עם לקויות למידה בהתאם לשיוכם המגדרי, שכן בספרות המחקרית מדווחים ממצאים סותרים בסוגיה זו. דפוס הממצאים הראה על כך שלא נמצאו הבדלים מובהקים בציוני מבחן ההישגים במתמטיקה לפי שיוכם המגדרי של המשתתפים.

מאפייני גישת הכוונה עצמית – לימוד התלמידים באמצעות משימות חקר, שימוש בהמחשות וייצוגים מתמטיים והבנת תכונות וקשרים בין מושגים – מאפיינים את הטבע האנושי, דהיינו גברים ונשים כאחד, ועל כן שימוש בגישת הכוונה עצמית בלמידה אמור לסייע להבנת החומר הלימודי וקידום הישגים לימודיים בקרב בני שני המינים כאחד (זידאן, 2009; קליין, 2008).

שאלת המחקר השלישית עוסקת בקיום אינטראקציה בין גישה למגדר בזיקה להישגי התלמידים. זאת לאור מחסור בפרסום מחקרים בנושא זה. דפוס הממצאים מראה על כך, שההבדלים ברמת ההישגים במתמטיקה לפי גישת ההוראה לא השתנו בזיקה לשיוכם המגדרי של המשתתפים.

מאפייני גישת ההכוונה העצמית והתמודדות עם משימות חקר, סייעו בהבנת החומר הלימודי ובהעלאת הישגיהם הלימודיים של התלמידים ללא תלות בשיוכם המגדרי של התלמידים (קליין, 2008).

המלצות והשלכות פדגוגיות

כדי להגיע לפתרון בעיה שגרתית נדרש התלמיד, בדרך כלל, לייצג את הסיטואציה והנתונים בתוך מודל מתמטי ידוע. לעומת זאת שאלת אתגר מאפשרת לבדוק את יישום החומר הנלמד, ברמות שאינן שחזור אלגוריתם או פרוצדורה שתורגלה בכיתה.

במהלך פתרון שאלות אתגר במתמטיקה, תלמידים עם לקויות למידה מתקשים בהבנת השאלה ובהבחנה בין הנתונים לפעולות הנדרשות. התלמידים נדרשים להפוך את המלל לביטוי מתמטי שכולל פעילויות ומספרים. קיים קושי להתחיל בפתרון וחוסר יכולת למצוא דרך לפתרון הבעיה. עוד קושי ניכר בהשגת ידע מתמטי מלא, הנדרש כדי לדעת את דרכי הפתרון הנכונות לפי הכללים המתמטיים המקובלים. כמו כן שאלות אתגר דורשות יכולות גבוהות של חשיבה, כאשר התלמיד נתקל בקושי משמעותי שיתאים לפתרון. לעתים התלמיד בוחר בדרך מסוימת לפתרון ולאחר מכן מגלה שפתרונו שגוי, דבר הגורם לתסכול וחוסר המשכיות לנסות ולמצוא את התשובה הנכונה.

כדי להתגבר על קשיים אלה, מומלץ לנקוט בגישת ההכוונה העצמית בהוראת המתמטיקה בבית-הספר היסודי בהצגת שאלות חשבוניות המעוררות לחשיבה, בשימוש באסטרטגיות חשיבה מגוונות לפתרון השאלות באמצעות פיתוח מיומנויות של התמודדות עם מספרים, בשימוש באסטרטגיות הערכה ובסגנון דיון לפיתוח מודעות לחשיבה יצירתית. כמו כן מומלץ לבדוק את התשובה לאחר הפתרון באופן שיטתי ולפעול לפיתוח חשיבה מתמטית, אשר תסתמך על טיפול בבעיות המתמטיות מתוך ראייה הגיונית, יצירתית והגיונית.

אחת הדרכים לעודד ולפתח שימוש בהכוונה עצמית בפתרון שאלות אתגר במתמטיקה בקרב תלמידים עם לקויות למידה, היא עבודה בקבוצות קטנות. במהלך העבודה הקבוצתית יתנסו התלמידים יחד בפתרון

וירכשו אסטרטגיות יעילות של חשיבה מתמטית יצירתית.

אחת ההשלכות המתודולוגיות העולות ממחקר זה היא שבמחקרים הבודקים היבטים פדגוגיים בהוראת המתמטיקה, יש לבחון את יעילותן של דרכים ושיטות שונות להוראת המקצוע, המערבות פיתוח של הכוונה עצמית וחשיבה יצירתית בקרב תלמידים עם לקויות למידה בבתי-ספר יסודיים. אוכלוסייה ייחודית זו נזקקת לגישות הוראה המותאמות להתקדמותו האישית של כל תלמיד ותלמיד ועל כן יש לפתח תכניות לימודים ועזרי למידה גמישים ומגוונים.

במחקרי המשך מומלץ להוסיף כלי תצפיתי לחידוד ההבחנה בין הכוונה עצמית להוראה מסורתית בשיעורי המתמטיקה בקרב מורים אחדים שמלמדים לפי גישות הוראה מגוונות.

רשימת מקורות

- אבישר, ג' (2004). מתכנית הלימודים אל ההוראה בכיתה משלבת: סוגיות בתכנון לימודים. בתוך ש' רייטר, י' לייזר וג' אבישר (עורכים), **שילובים: לומדים עם מוגבלויות במערכות חינוך** (עמ' 197-223). חיפה: אחוה.
- אוסטר, ע' (1990). **מודלים חשיבתיים במתמטיקה ובמדעים אמפיריים** (עבודת מוסמך). אוניברסיטת תל-אביב.
- בורשטיין, ד' (2006). **חשבון פשוט באמת**. הוד-השרון: חשיב.
- בן-טוב, ש' (2000). **בדיקת השפעתה של הוראת המתמטיקה בשיטת ההשכלה על יחסים חברתיים, דימוי עצמי ומוטיבציה של תלמידים** (עבודת מוסמך). אוניברסיטת בר אילן, רמת-גן.
- ברג, ד' (2001). להפוך את המתמטיקה למציאותית: גישה רב-חושית המתכללת התפתחות חושית-קוגניטיבית עם הוראת ההליכים (ש' רמון, מתרגמת). **פרספקטיבה**, 18, 83-85.
- בשורה, ס' (2005). **מאפיינים של בית-הספר ושיפור בהישגים בתחומי למידה בסיסיים בהכנת הנקרא ובמתמטיקה של תלמידים בחינוך המיוחד במגזר היהודי והערבי** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
- גזית, א' (2004). הוראת מתמטיקה, עניין יופי – הילכו יחדיו ואולי לא נועדו? בתוך ש' גורי-רוזנבלט (עורכת), **מורים בעולם של שינוי: מגמות ואתגרים** (עמ' 356-389). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.
- גזית, א' ופטקין, ד' (2009). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ומתכשרים להוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק**, 2000, 17, 16-24.
- גירון, ת' (2009). תרומתן של בעיות בלתי שגרתיות. **מספר חזק**, 2000, 17, 42-48.
- גלובמן, ר' והריסון, ג' (1994). למידה פעילה – גישה הטרוגנית להוראה. בתוך י' רייז ור' בן-ארי (עורכים), **שיטות הוראה לכיתה ההטרוגנית** (עמ' 55-97). אבן-יהודה: רכס.
- וינברגר, י' וזוהר, ע' (2005). **פיתוח החשיבה – אתגר בהכשרת מורים**. תל-אביב: מכון מופ"ת.
- זידאן, ר' (2009). **הוראת המתמטיקה במגזר הערבי – האם ניתן לשנות**. חיפה: המכללה האקדמית הערבית לחינוך.
- חכים, ג' וגזית, א' (2011). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל תלמידי ה-ז, בהשוואה למורי מתמטיקה בבית הספר היסודי, ולפרחי הוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק**, 2000, 20, 40-48.
- ישראלי, ת' (2008). **הקשר בין הערכה חלופית באמצעות משימות חקר, לבין ההניעה וההישגים במדעים בבתי ספר יסודיים בחינוך הממלכתי-דתי** (עבודת מוסמך). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
- כהן, ז' וקרמרסקי, ב' (2010). פיתוח הכוונה עצמית אצל פרחי הוראה באמצעות תמיכה רפלקטיבית בסביבה טכנולוגית. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' כספי, ס' עדן, ג' גרי וי' יאיר (עורכים), **האדם הולמד בעידן הטכנולוגי: כנס צ'יז' למחקרי טכנולוגיות למידה: ספר הכנס** (עמ' 101-109). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.
- מברך, ז' (2001). **פערים מגדריים במתמטיקה ובמדעים**. ירושלים: משרד החינוך.
- מיכלסקי, ט' וקרמרסקי, ב' (2008). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בקרב פרחי הוראה בסביבה מתוקשבת בזיקה לתפיסות של למידה והוראה. **מגמות**, 4(4), 765-798.
- מרולדה, מ"ר וודיסון, פ"ס (2001). פרופילים ללימוד מתמטיקה ואסטרטגיות הוראה שונות (ש' רמון, מתרגמת). **פרספקטיבה**, 18, 24-35.
- מרקוביץ, צ' (2003). **ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה**. תל-אביב: מכון מופ"ת.

- משרד החינוך (2004). חוזר המנהל הכללי: חוזר מיוחד סד/4. ירושלים: המחבר.
- משרד החינוך (2006). תכנית לימודים במתמטיקה: לכיתות א-ו בכל המגזרים. ירושלים: המחבר.
- ראמ"ה (הרשות הארצית למדידה והערכה). (2012). מבחנים במתמטיקה לכיתה ג'. רמת-גן: המחבר.
- נבו, ב' (1997). אינטליגנציה אנושית. תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.
- עיני, ד' (2008). שיפור מיומנויות של הכוונה עצמית בקרב תלמידים עם לקווי למידה בבית הספר העל יסודי (עבודת מוסמך). המכללה האקדמית בית ברל, כפר סבא.
- פטרסון-מילר, ס' (2001). היבטים חינוכיים של לקויות למידה במתמטיקה (ש' רמון, מתרגמת). פרספקטיבה, 18, 6-23.
- קלארק, ד' וקלארק, ב' (2003). עידוד להתמדה בפתרון בעיות במתמטיקה בכיתה יסודי (ב' סגלס, מתרגמת). אוזרור מתוך <http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/articles/translations/article54.pdf>
- קליין, א' (2008). היא והוא – גן עדן או גיהנום: מגדר והשתקפותו בחברה ובחינוך. תל-אביב: גוונים.
- קשתי, י', אריאלי, מ' ושלסקי, ש' (1997). לקסיקון החינוך וההוראה. תל-אביב: רמות.
- רפ, י' (2014). פערי הישגים בין בנים לבנות במתמטיקה ובשפה – מה אפשר ללמוד מניתוח פערים אלו בקרב תלמידי ישראל? רמת-גן: הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך.
- תירוש, ד' וסתוי, ר' (1998). כללים אינטואיטיביים במדע ובמתמטיקה: המקרה של "כל דבר ניתן לחצייה". בתוך ר' סתוי וד' תירוש (עורכות), תיאוריה ומעשה בהוראת מתמטיקה, מדע וטכנולוגיה (עמ' 139-147). תל-אביב: רמות.
- Agran, M., & Wehmeyer, M. (1999). *Teaching problem solving to students with mental retardation*. Washington, DC: American Association on Mental Retardation.
- Bannert, M. (2008). *Metacognitive prompting: Design and effects when learning with hypermedia*. Paper presented in the AERA annual meeting conference, New York City, USA.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.
- Gibbs, C. J. (2003). Explaining effective teaching: Self-efficacy and thought control of Action. *Journal of Education Enquiry*, 4(2), 1-14.
- Grolnick, W. S., & Ryan, R. M. (2000). Self-perceptions, motivation, and adjustment in children with learning disabilities: A multiple group comparison study. *Journal of Learning Disabilities*, 23(3), 177-184.
- Kramarski, B., & Michalsky, T. (2009). Investigating preservice teachers' professional growth in self-regulated learning environments. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 161-175.
- Margalit, M. (2003). Resilience model among individuals with learning disabilities: Proximal and distal influences. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 82-86.
- Pintrich, P. R., & De Groot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology*, 82(1), 33-40.
- Ross, J. A. (1995). Strategies for enhancing teachers' beliefs in their effectiveness: Research on a school improvement hypothesis. *Teachers College Record*, 97(2), 227-251.
- Scarpati, S., Malloy, T. E., & Fleming, R. (2000). Interpersonal perception of skill efficacy and behavioral control of adolescents with learning disabilities: A social relation approach. *Learning Disability Quarterly*, 19(1), 15-22.
- Schraw, G., Crippen, K. J., & Hartley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: Metacognition as part of a broader perspective on learning. *Research in Science Education*, 36, 111-139.
- Spelke, E. S. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science: A critical review. *American Psychologist*, 60(9), 950-958.
- Yee, F. P. (2005). Developing creativity in the Singapore primary mathematics classroom: Factors that support and inhibit. *Thinking Classroom*, 6(4), 14-46.
- Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45(1), 166-183.
- Zohar, A. (2004). *Higher order thinking in science classrooms: Students' learning and teachers' professional development*. Dordrecht: Kluwer Academic.

ד"ר סאאיד בשארה

ראש המסלול והחוג לחינוך מיוחד במכללה האקדמית בית ברל, סרצה לחינוך מיוחד ולקויות למידה במכללת בית ברל, במכללת אלקאסי והאוניברסיטה הפתוחה. עיקר מחקריו הוא בתחום האוריינות השפתית והחינוך המתמטי בקרב תלמידים עם לקויות למידה ותלמידים הלומדים בחינוך מיוחד.



בעיית חקר כמנוף לפיתוח יצירתיות¹

חנה לב-זמיר, מכללת אורנים

We believe that all students should be given the opportunity to be creative by solving interesting mathematical problems and experiencing creative instructional engagements.

(Zazkis & Holton, 2009, p. 91)

תקציר

מערכת החינוך רואה חשיבות רבה בהוראה המכוונת לעידוד ולטיפוח יצירתיות בקרב התלמידים ורואה בכך מטרה חשובה. כדי לטפח יצירתיות, יש לתת את הדעת לבחירה מושכלת של משימות מתמטיות שאכן תתרומנה להשגת המטרה.

במאמר זה מוצגת **בעיית מסגרת הריבועים** כדוגמה לבעיית חקר שעניינה סדרה חשבונית.

את בעיה זו אפשר לפתור באמצעות נוסחה פשוטה, אך כיוון שהיא הוצגה לפני תלמידי בית-הספר היסודי (כיתה ו'), שעדיין לא למדו באופן פורמלי את הנושא, היא פתחה אותה לדרכי פתרון מגוונים ויישום ידע מתמטי בנושאים שונים. כמו כן היא טוותה את הדרך לפיתוח חשיבה אלגברית בבית-הספר היסודי. במהלך ההתמודדות עם פתרונה, "גילו" התלמידים חוקים ועקרונות מתמטיים, הם גילו קשרים והגיעו להכללות מתוך ההתנסות. בד בבד להצגת הבעיה לפני התלמידים, הוצגה הבעיה לפני סטודנטיות המתכשרות להוראת המתמטיקה, אשר התבקשו להציג דרכי פתרון מגוונים וכן לקחת בחשבון דרכים שגם תלמידי בית-ספר יסודי מסוגלים להתמודד אתן. תהליך ההתמודדות האישית של הסטודנטיות ותהליך ההשוואה עם הפתרונות של התלמידים אפשר לסטודנטיות במהלך הכשרתן לשלב בין התנסות אישית ובין התייחסות לדרכים מגוונות שלהן ושל התלמידים, לעשיית קישורים בין ייצוגים שונים, לבחינת הידע המתמטי הנדרש לכל פתרון ולהוסיף על כך נדבך משמעותי וחשוב להתפתחות הידע הפדגוגי, שהוא אבן יסוד בתהליך העשוי לעודד יצירתיות והבניית ידע מתמטי חדש ופיתוח חשיבה אלגברית בקרב תלמידי בית-הספר היסודי.

מילות מפתח: יצירתיות; פיתוח יצירתיות; בעיות חקר; אסטרטגיות לפתרון; סדרה חשבונית; ידע פדגוגי.

1. ברצוני להודות למורות **שרה קרול וגילית לביא**, אשר תיארו את דרך ההתמודדות של תלמידיהן עם הבעיה, ולסטודנטיות במכללת אורנים, אשר דרכי הפתרון שלהן מוצגות במאמר זה.

רקע תאורטי

חוקרים רבים מתייחסים לחשיבות הוראת מתמטיקה בדרך יצירתית ובדרך המעודדת יצירתיות בקרב התלמידים (Presmeg, 2003; Sawyer, 2004; Silver, 1997; Sriraman, 2008). במציאות המשתנה בקצב מואץ, מתן הזדמנויות לפיתוח היצירתיות בקרב התלמידים חיוניות ביותר. כדי לעודד את היצירתיות, חשוב שהעשייה של התלמידים תהיה בלבה של הפעילות המתמטית (Bolden, Harries & Newton, 2010; Silver, 1997).

היצירתיות מהי?

בספרות העוסקת ביצירתיות קיימות הבחנות שונות באשר ליצירתיות. הדיון המרובה בנושא יצירתיות מעיד על עמימות ועל גישות שונות באשר למשמעותו המדויקת. טורנס (Torrance, 1967), ובעקבותיו חוקרים רבים, רואים ביצירתיות ארבעה מרכיבים עיקריים: **שטף** (Fluency), **גמישות** (Flexibility), **חדשנות/מקוריות** (Originality/Novelty) ו**פירוט/הרחבה** (Elaboration) (לב-זמיר, 2014, 2015; Lev-Zamir, 2011).

שטף (Fluency) – רכיב הנשען על שטף רעיונות, על שטף אסוציאציות ועל שטף התוצרים. הוא נשען על נגישות לידע, שימוש בידע בסיסי או בידע על עולם.

גמישות (Flexibility) – מאופיינת ביכולת לגשת לבעיה בדרכים מגוונות תוך הפקת פתרונות מגוונים, יכולת לתכנן ולחקור בעיה בכיוונים מסוימים, באסטרטגיות מגוונות, יכולת לשנות כיוון מתוך הפעלת שיקול דעת. יש בה יכולת להעמיק, לבחון את הפתרונות וליצור בעיות חדשות. הגמישות מתאפיינת בפתיחות לרעיונות.

מקוריות (Originality/Novelty) – מאופיינת בחשיבה ייחודית. יכולת לראות את הדברים בראייה שונה או לארגן נתונים כך שמבהירה את הבעיה בדרך לא שגרתית.

פירוט/הרחבה (Elaboration) – רכיב הנשען על יכולות וורבליות ורמות פירוט גבוהות כדי לתאר ולהאיר את שטף הרעיונות ושטף האסוציאציות. רכיב זה כולל מיומנויות חשיבה גבוהות, שיש בהן כדי להעלות שאלות, להכליל ולהסיק מסקנות (לב-זמיר, 2014).

בעשור האחרון מחקרים דנים בהרחבה במרכיבי היצירתיות, כך שאפשר לפתחם אצל אנשים רבים והם עשויים להיות קרקע פורייה בעבור מורים למתמטיקה, אשר רואים חשיבות רבה בטיפוח תלמיד יצירתי, בעל גמישות מחשבתית ובעל יכולת להתמודד עם כל מיני בעיות בדרכים מגוונות. תלמיד בעל יכולת לבנות טיעון, להצדיק רעיונות מתמטיים ולא רק בעל שליטה באלגוריתם (Ball, 1993; Ervynck, 1991; Silver, 1997).

ג'וורסקי (Jaworski, 1994), רואה באתגר המתמטי כאחד המרכיבים במה שהיא מכנה "משולש ההוראה" (teaching triad), כלומר כל משימה מתמטית נבחרת בקפידה כדי לשמש אתגר לתלמיד, להעלות את רמת סקרנותו, לעודד את מעורבותו האינטלקטואלית ולתרום לטיפוח החשיבה היצירתית של הלומד.

בעיות אתגר - לסה הכוונה

בנושא "בעיות אתגר" קיימת הסכמה בין חוקרים רבים, כי מדובר בפעילויות ובעיות, אשר מאפשרות פתרונות מגוונים, דרכים מגוונות לפתרון, שימוש בייצוגים מגוונים, טיפוח מיומנויות חשיבה גבוהות כמו העלאת השערות, גילוי חוקיות ויצירת הכללות, העלאת טענות, יכולות הנמקה והוכחה. בעיות מסוג זה מעודדות שיה מתמטי עשיר ומפרה ומשמשות תשתית פורייה להעמקה ולהרחבה. האתגרים המתמטיים מעודדים תהליכי חקר ומזמנים שימוש בידע קודם, העמקה בעקרונות מתמטיים והבניית ידע מתמטי שאינו מושתת על ידע פרוצדורלי בלבד (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009; Jaworski, 1994; NCTM, 2000; Zazkis & Holton, 2009).

המונח "בעיות" הנו בעל משמעות רחבה ביותר. סוגי הבעיות הנסקרות בספרות המחקר, אינן בהכרח שונות זו מזו במהות שהן מייצגות. מדובר במונחים שנוהגים להשתמש בהם כשעוסקים בנושא זה. בין סוגי הבעיות שמתייחסים אליהן כלולות בעיות רוטיניות ובעיות לא רוטיניות (*Routine problem and non-routine problem*) (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009; Silver, 1997); בעיות סגורות ובעיות פתוחות (*Closed problems and open-ended*) (Hershkovitz et al., 2009; Silver, 1997); בעיות בעלות דרכים מגוונות לפתרון (*Multiple-Solution Tasks*) (Silver, 1997); ובעיות חקר (*Investigative problems/ tasks*) (Leikin & Levav-Waynberg, 2009).

במאמר זה אציג בעיית חקר ואעסוק באמצעותה בפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיות מסוג זה. בעיות חקר מאופיינות ברב-שלביות ופתוחות לאסטרטגיות מגוונות, לרמות מגוונות ולגיוס ידע קודם. אפשר להתמודד עם פתרון ברמות מגוונות. לצורך ההתמודדות עם בעיות אלה, נדרשים הפותרים לקשר בין קשת של תכנים מתמטיים. בעיות חקר מאופיינות כבעיות המזמנות יישום ידע מעבר לתרגול הסטנדרטי של חומר הלימוד וכן שימוש באסטרטגיות לא שגרתיות. על הפותרים לתכנן את דרכי הפעולה, להפעיל שיקולי דעת באשר לארגון הנתונים, לתור אחר חוקים ועקרונות מתמטיים, לגלות קשרים ולנסח הכללות. תרומתן של בעיות אלה לכל מאפייני היצירתיות, כולל מרכיב ההרחבה והפירוט, שכן דרכי הפתרון קושרות פעמים רבות נושאים מתמטיים מגוונים ומאפשרות העמקה והרחבה בתכנים אלה (לב-זמיר, 2014). אתייחס למושגים אלה וארחיב בהתייחסותי לבעיות חקר.

מטרות המחקר

- א. בחינת דרכי פתרון מגוונים לבעיית חקר בקרב שלוש אוכלוסיות המחקר, תוך עיסוק בתכנים המתמטיים השלובים בפתרונות.
- ב. השוואה בין דרכי הפתרון שמציעות האוכלוסיות השונות.
- ג. בחינת מקומה של התנסות הסטודנטיות בפתרון בעיית חקר וניתוח דרכי פתרון, כחלק מהתפתחות הידע הפדגוגי ומודעות למאפייני יצירתיות.

אוכלוסיית המחקר

במאמר זה מוצג מחקר הבוחן דרכי פתרון מגוונים לבעיית חקר ומשווה בין שלוש אוכלוסיות: תלמידי כיתה ו' בשני בתי-ספר יסודיים בארץ, סטודנטיות שנה ראשונה להוראת המתמטיקה במכללה לחינוך

בארץ וסטודנטיות שנה שלישית להוראת המתמטיקה באותה מכללה. בסך הכול מנתה אוכלוסיית המחקר 52 תלמידים וסטודנטיות לפי הפירוט להלן:

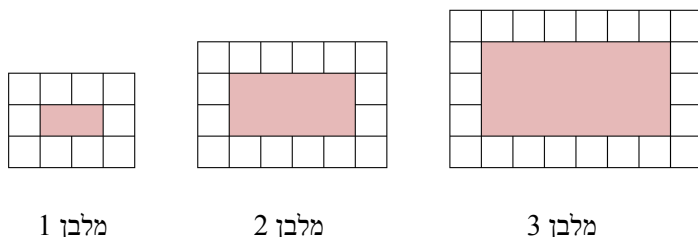
קבוצה א': 20 תלמידי כיתה ו' בבית-ספר יסודי.

קבוצה ב': 15 סטודנטיות במסלול התמחות בהוראת המתמטיקה, שנה ראשונה במכללה.

קבוצה ג': 17 סטודנטיות במסלול התמחות בהוראת המתמטיקה, שנה שלישית במכללה. קבוצה זו למדה במהלך ההכשרה בקורס "יצירתיות בהוראת המתמטיקה", ואילו בקבוצה ב אין בסיס פורמלי של מאפייני יצירתיות.

מהלך המחקר

הבעיה (ראה איורים 1 ו-2 בהמשך) הוצגה לפני אוכלוסיית המחקר שתוארה לעיל. לפי ההנחיה הם התבקשו להציג דרכים מגוונות לפתרון כל אחת מהשאלות, וגם הם התבקשו להסביר מילה במילה את דרך הפתרון. חשוב לציין, כי קהל היעד העיקרי לבעיה זו הוא תלמידי בית-הספר היסודי, כשהיעד היה מתן פתרון לבעיה. כשהבעיה הוצגה לפני הסטודנטיות, הן התבקשו בקשה מפורשת לפתור את הבעיה בדרכים שונות. תפקיד הסטודנטיות במחקר זה, במיוחד של הסטודנטיות מקבוצה ג, היה ללמוד על הידע של התלמידים ועל הידע שלהן (הסטודנטיות), כדי להיווכח בחשיבות ההתנסות האישית המוקדמת, הכוללת חשיפה לאסטרטגיות מגוונות כבסיס לעידוד וטיפוח יצירתיות והבניית ידע בקרב תלמידיהן. תפקידן של הסטודנטיות מקבוצה ב (שנה ראשונה להכשרתן), היה בעיקר כדי לחדד את ההבחנה הנוגעת לתפקידה של הכשרת המורים בתהליך הבניית ידע פדגוגי וידע על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה. לצורך המחקר, נבחרה בעיה שהוצגה בכתב-העת **מספר חזק 2000**, 'בעיית מסגרת הריבועים' (Kown, Park, & Park, 2006) (ראה איור 1), כדוגמה לבעיית חקר, שעניינה סדרה חשבונית. בעיות מסוג זה פתוחות לדרכי פתרון מגוונים ויישום ידע מתמטי בנושאים רבים, וכן בעיות מסוג זה סוללות את הדרך לפיתוח חשיבה אלגברית בבית-הספר היסודי. כדי להתמודד עם פתרון, יש לתור אחר חוקים ועקרונות מתמטיים, לגלות קשרים ולנסח הכללות (Jaworski, 1994; da Ponte, 2007). חשיבותו של המאמר בחשיפת הסטודנטים להוראה ולחשיפת כלל המורים לדרכים ולאפשרויות המגוונות לעשיית קישורים בין ייצוגים אחדים ולהעמקת הידע הפדגוגי שלהם, כדי לעודד הבניית ידע מתמטי חדש בקרב התלמידים בבית-הספר היסודי.



איור 1: שלושה מלבנים עם מסגרת ריבועים

בעקבות שלושה מלבנים אלה, נשאלו שלוש שאלות (ראה איור 2):

שאלה 1: אם הייתם יוצרים את המלבן הרביעי בסדרה, כיצד הייתם מחשבים את מספר הריבועים הלבנים הדרושים לכך?

כיצד תחשבו את מספר הריבועים במלבן השביעי בסדרה?

שאלה 2: מה תוכלו לומר על מספר הריבועים במלבן הנמצא במקום ה- n ?

שאלה 3: ברשותכם 66 ריבועים לבנים. עליכם להשתמש בכמות הגדולה ביותר של ריבועים מכמות זו, כדי ליצור מלבן לפי החוקיות של הסדרה הנתונה. איזה מספר מלבן הוא יהיה בסדרה?

האם נותרו ריבועים שלא השתמשתם בהם? הסבירו קביעתכם.

איור 2: שלוש שאלות

לכל אחת משלוש השאלות המוצגות בבעיה יש תשובה נכונה אחת. לכאורה זוהי **בעיה סגורה**, אך עם זאת, הדרכים המובילות אל אותה תשובה רבות ומגוונות – **בעיה בעלת דרכים מגוונות לפתרון**.

הבעיה הוצגה בו בזמן לשלוש הקבוצות (תלמידי כיתה ו' ושתי קבוצות הסטודנטיות).

המורות בבית-הספר תיעדו את השיח שהתנהל בין התלמידים ואת ההסברים שלהם לדרכי הפתרון. בד בבד נאספו כל הפתרונות מקבוצות ב ו-ג (קבוצות הסטודנטיות).

בסך הכול התקבלו 96 פתרונות: 29 פתרונות מקבוצה א (20 תלמידי כיתה ו'), 20 פתרונות מקבוצה ב (15 סטודנטיות שנה ראשונה) ו-47 פתרונות מקבוצה ג (17 סטודנטיות שנה שלישית). לאחר שלב ההתמודדות הראשונית, הוצגו כל הפתרונות לפני הסטודנטיות מקבוצה ג, שהיו שותפות לניתוח ואפיון כלל הדרכים.

התוצרים נותחו בשיטה איכותנית. ניתוח הממצאים כלל מאפייני הדרכים שננקטו וכן מספר הפותרים בכל דרך על-פי קבוצות ההשתייכות.

ממצאים

כפי שאפשר לראות, מדובר בבעיה שפתרונה הוא סדרה חשבונית. סדרה חשבונית היא סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא קבוע. נהוג לסמן את האיבר הראשון כ- a_1 , מספר האיברים בסדרה: n , האיבר האחרון: a_n ואת ההפרש הקבוע נהוג לסמן באות d . הנוסחה לחישוב האיבר הכללי (נוגעת לשאלה 2) היא: $a_n = a_1 + (n-1)d$. כדי לחשב את האיבר השביעי בשאלה 1, כל שעלינו לעשות הוא להציב את הנתונים המתאימים בנוסחה, כלומר:

$$a_7 = 10 + (7 - 1) \times 6 = 10 + 36 = 46$$

אז אם כן, איפה הבעיה? התשובה על השאלה טמונה ביחס לקהל היעד שהופנתה אליהם.

להלן מטרת המחקר הראשונה:

בחנית דרכי פתרון מגוונות לבעיית חקר בקרב שלוש אוכלוסיות, תוך התייחסות לתכנים המתמטיים השלובים בפתרונות.

לפי תכנית הלימודים, תלמידי בית-ספר יסודי אינם מכירים את הנוסחה, וכפי שיוצג בהמשך, אפשר לראות כיצד הם הגיעו להכללות ותובנות באמצעות ייצוגים חזותיים וכמותיים. גם הסטודנטיות, על אף שהן מכירות את הנוסחה מתוך ההתמודדות עם הבעיה, הן ניסו לבחון דרכי פתרון, אשר נשענות על ידע של תלמידים בבית-ספר יסודי. הסטודנטיות השתמשו בנוסחה, אך היא לא סיפקה נקודת מוצא לפתרון. הן הציגו את הסדרה החשבונית בדרכים מגוונות ולעיתים ייצוג הפתרון הוביל לבניית הנוסחה.

הצגת מגוון דרכי הפתרון לשאלות 1 ו-2 (ראה איור 2 לעיל):

שאלה 1: אם הייתם יוצרים את המלבן הרביעי בסדרה, כיצד הייתם מחשבים את מספר הריבועים הלבנים הדרושים לכך?

כיצד תחשבו את מספר הריבועים במלבן השביעי בסדרה?

שאלה 2: מה תוכלו לומר על מספר הריבועים במלבן הנמצא במקום ה- n ?

בחלק זה אציג דוגמאות לדרכי פתרון לשתי השאלות הראשונות. מדוגמאות אלה אפשר ללמוד על דרכי פתרון ועל הדרכים המובילות לגילוי החוקיות ולהכללות. הדרכים המגוונות (מרכיב הגמישות) ניכרות בדרכי הייצוג ובתכנים המתמטיים.

דרכים לזיהוי הסדרה החשבונית:

דוגמה א – זיהוי הסדרה בהתבסס על ההפרש הקבוע בין מספר הריבועים במסגרות

פתרון זה מאופיין במניין מספר הריבועים במסגרות הנתונות וזיהוי הסדרה החשבונית ומלווה בהסבר להלן:

מספר הריבועים במסגרות המלבנים, החל מהמלבן הראשון, מהווים סדרה חשבונית: $22, \dots, 16$ (במלבן השני), 10 (במלבן הראשון). ההפרש בין מספר הריבועים ממלבן למלבן שווה ל-6. אפשר להסיק שהמסגרת הרביעית תכיל 28 ריבועים ($22+6$), ואם נמשיך את הסדרה עד המסגרת השביעית, נראה שהיא תכיל 46 ריבועים.

פתרון דומה הוצג באמצעות רישום נתונים בטבלה והדגשת ששת הריבועים הנוספים בכל מלבן (ראה דוגמה ב).

דוגמה ב – זיהוי הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש באמצעות ארגון הנתונים בטבלה

כפי שחלק מהפתורים הסבירו: "ארגנו את הנתונים בטבלה, המתייחסת למספר המלבן ומספר הריבועים במסגרת והראינו שההפרש בין ריבועי המסגרות תמיד 6" (ראה איור 3).

מספר המלבן	מלבן 1	מלבן 2	מלבן 3	מלבן 4	מלבן 5	מלבן 6	מלבן 7

46 ריבועים	40 ריבועים	34 ריבועים	28 ריבועים	22 ריבועים	16 ריבועים	10 ריבועים	מספר הריבועים במסגרת
	+6	+6	+6	+6	+6	+6	

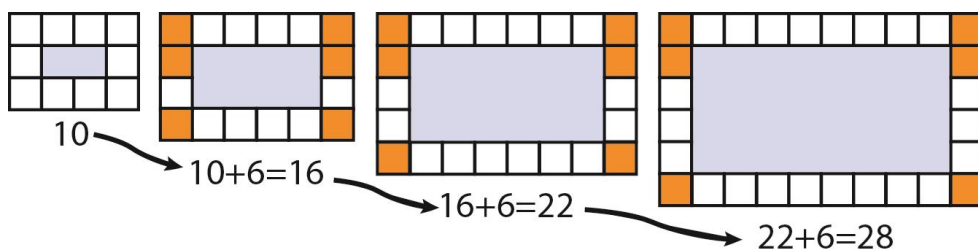
איור 3: ארגון נתוני סך הריבועים בטבלה

שלוש הדוגמאות הבאות מציגות את הסדרה החשבונית בדרך חזותית.

דוגמה ג – הדגשת הריבועים הנוספים (1)

בדוגמה זו, באמצעות צביעת 6 ריבועים הנוספים בכל מלבן (ראה איור 4), הדגישה הפותרת בכל מלבן את הריבועים הנוספים (ביחס למספר הריבועים במלבן הקודם), והדגישה את האופן שהיא "רואה" את ההפרש הקבוע בין מספרי הריבועים:

עם מניית הריבועים במסגרת אפשר לראות כי ממלבן למלבן המסגרת גדלה ב-6 ריבועים. בכל מלבן הריבועים הלבנים הם הריבועים במסגרת המלבנית הקודמת, והריבועים המודגשים בצבע הם השישה הנוספים.

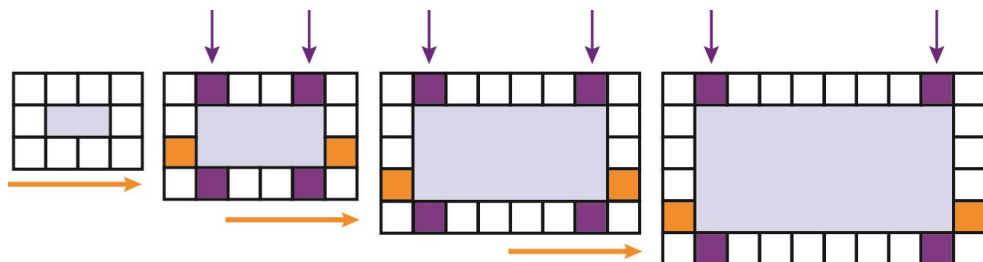


איור 4: תוספת ריבועים ממלבן למלבן

דוגמה ד – הדגשת הריבועים הנוספים (2)

עוד דרך חזותית, אשר מציגה את ההפרש הקבוע בסדרה, נשענת על שינויים במספר הריבועים בשורות ובטורים בכל מסגרת:

באמצעות האיור (ראה איור 5), אפשר להבחין שמלבן למלבן יש תוספת של **שורה אחת** (לכן נוספו שני ריבועים כתומים למסגרת) ושני **טורים** (לכן נוספו ארבעה ריבועים סגולים למסגרת), מה שמראה שמסגרת המלבן גדלה בכול פעם **בשני ריבועים כתומים** ועוד **ארבעה ריבועים סגולים**, בסך הכול שישה ריבועים נוספים ממסגרת למסגרת.



איור 5: תוספת הריבועים בשורות ובטורים

דוגמה ה – הדגשת הריבועים הנוספים (3): בדרך להכללה

דרך זו מציגה את הקשר בין מיקום המלבן למידות האורך והרוחב שלו באמצעות צביעת ריבועים. פותרים אלה "הגיעו" לנוסחה, אך הנוסחה לא הביאה אותם לידי פתרון.

הם ליוו את הפתרון בהסבר הבא:

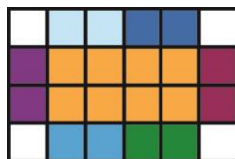
אם נתעלם מארבעה הריבועים בפינות, נוכל לראות שבמלבן 1 נותרו 2 ריבועים במידת האורך המיוצגת ב-4 ריבועים (מודגשים בגווני כחול) וריבוע אחד במידת האורך המיוצגת ב-3 ריבועים (מודגשים בסגול) בסך הכול נוספו 6 ריבועים. אפשר לתאר את מספר הריבועים במסגרת הראשונה כ-6 פעמים 1 (כאשר 1 מייצג את מיקום המלבן) + 4 הריבועים הלבנים שבפינות. בסך הכול 10 ריבועים במסגרת (ראה איור 6).



מלבן 1

איור 6: מספר הריבועים במסגרת הראשונה

באותה דרך אפשר לראות, כי במלבן 2 מספר הריבועים הוא 6 פעמים 2 (מתוארים בשרטוט שישה צמדים של ריבועים בצבעים שונים) + 4 הריבועים הלבנים שבפינות. בסך הכול 16 ריבועים במסגרת (ראה איור 7).



מלבן 2

איור 7: מספר הריבועים במסגרת השנייה

אפשר ללמוד משתי הדוגמאות את הקשר בין גורם הכפל 6 לבין מיקומו של המלבן: מלבן 2: 6×2 ובאופן זה, אפשר לחשב את מספר הריבועים בכל מלבן: 6 פעמים מספר המלבן + 4 ריבועי הפינות.

אם נציין את מיקום המלבן באות n , הרי שמספר הריבועים יהיה: $6n + 4$, או כפי שאפשר לרשום זאת בייצוג אלגברי: $6n + 4$.

דוגמה ו – ארגון נתונים בטבלה: בדרך להכללה

מבודדים את ארבעת ריבועי "הפינות" ופותרים באמצעותם את הנוסחה. הדרך החזותית שהוצגה בדוגמה ה, הוצגה בעת ארגון נתונים בטבלה כדי להגיע לנוסחה. השלמת הטבלה (ראה איור 8) הושתתה על ההסבר המלווה בשלבים הבאים:

בשלב א, בשורה הראשונה (מודגשת בירוק), רשמו את מספר הריבועים בכל מלבן על-פי מיקומו.

בשלב ב, בשורה השנייה (מודגשת בסגול), בודדו באמצעות תרגיל חיבור את ארבעת ריבועי הפינות.

בשלב ג, זיהו שבכל תבנית חיבור מדובר בכפולה של 6, בתוספת 4 הריבועים בפינות, והכפולה תואמת את מיקומו של המלבן. לדוגמה, במלבן 1 (a₁) מספר הריבועים $4 + 6 \times 1$ ואף אפשר להראות זאת חזותית על המסגרת. במלבן 1 מודגשים שישה ריבועים בודדים. במלבן 2 מודגשים שישה צמדי ריבועים וכך הלאה. בהתאם לכך, השלימו את השורה השלישית בטבלה (מודגשת בתכלת).

a _n	a ₇	...	a ₄	a ₃	a ₂	a ₁	
	46		28	22	16	10	מספר ריבועי המסגרת
	↓		↓	↓	↓	↓	
	42+4		24+4	18+4	12+4	6+4	מבודדים את ארבעת ריבועי הפינות
6n + 4	6 × 7 + 4		6 × 4 + 4	6 × 3 + 4	6 × 2 + 4	6 × 1 + 4	תיאור התבנית

איור 8: שלבים בדרך להכללה

בדומה לנוסחה זו $(6n+4)$, הייתה קבוצה שרשמה, כי הנוסחה למספר הריבועים בכל מלבן היא $2(3n+2)$. שני ייצוגים אלה עשויים לשמש נקודת מוצא לדיון מתמטי הנוגע להשוואה בין ייצוגים סימבוליים ולהבניית ידע הנוגע לעקרונות מתמטיים, הנוגעים להוצאת גורם משותף אל מחוץ לסוגריים. ארבע הדוגמאות הבאות נשענות על הכללות הנובעות מחישובי היקף המלבן ושטחו.

דוגמה ז – מארגנים נתונים בטבלה וחוקרים את הסדרה הנוצרת בשורות ובטורים

בדרך פתרון זו בחרו הפותרים לארגן את נתוני מספר הריבועים בטבלה, בציון מספר הריבועים בכל שורה ובכל טור. במהלך רישום הנתונים בטבלה הם גילו את חוקיות הסדרה הנוגעת לשינוי מספר הריבועים בשורות ובטורים (ראה איור 9).

מלבן 7	מלבן 6	מלבן 5	מלבן 4	מלבן 3	מלבן 2	מלבן 1	
16	14	12	10	8	6	4	מספר הריבועים בכל שורה
9	8	7	6	5	4	3	מספר הריבועים בכל טור

איור 9: מספר הריבועים בשורות ובטורים

את דוגמה זו הציגו חמישה תלמידים (וגם 11 סטודנטיות). המורה בכיתה הוסיפה תיעוד של שיח שהתפתח – כשארבעה מהתלמידים שבחרו בדרך זו הגיעו לרישום נתוני המלבן הרביעי, הם אמרו: "בכל שורה מספר הריבועים גדל ב-2 ובכל טור מספר הריבועים גדל ב-1".

בדרך זו הם השלימו את הנתונים עד המלבן השביעי. כשהתלמידים דיווחו על דרך החישוב של מספר הריבועים הכללי בכל מסגרת, הם נתקלו בקושי.

בניסיון ראשון הם חישובו מתוך שימוש בנוסחת היקף המלבן: (אורך + רוחב) $\times 2$, אך כשבדקו זאת עם הנתונים במלבן הראשון: $2 \times (3+4) = 14$ ובמלבן השני: $2 \times (4+6) = 20$ – זה לא הסתדר להם עם הנתונים בשרטוט.

בניסיון להבין מה הסיבה לאי ההתאמה, ראו שההפרש בין התוצאה שהגיעו אליה לבין התשובה הנכונה הוא תמיד 4... את המקור לטעות "גילה" אחד הפותרים:

רגע... צריך להפחית 4 ריבועים, כי כשאנחנו מחשבים בדרך הזאת, כל ריבועי הפינה מופיעים פעמיים. כדי לחשב את סך הריבועים הלבנים עלינו לחשב את סכום שני אורכי המלבן ושני רוחבי המלבן ולהחסיר 4 ריבועים, מכיוון שבעת חיבור הריבועים אנו מחשבים פעמיים את הריבועים שבפינות המלבן המשמשים נקודת חיבור בין אורך המלבן לרוחב המלבן. מכאן שמסגרת הרביעית יהיו 28 ריבועים לבנים: $6 - 4 = 28$ + $10 + 10 + 6 + 10$, ובמסגרת השביעית יהיו 46 ריבועים לבנים: $16 + 9 + 9 - 4 = 46$.

דוגמה ח – היקף המלבנים

בהתבסס על חישובי היקף הוצגה טבלה (ראה איור 10), מספר הריבועים בכל מסגרת מחושב באמצעות שני ייצוגים סימבוליים (בשורה האחרונה):

מיקום המלבן	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
מספר ריבועי האורך	3	4	5	6	7	8	9
מספר ריבועי הרוחב	4	6	8	10	12	14	16
מספר הריבועים במסגרת	$4-10=2 \times 3+2 \times 4$ $2(3+4)-4=10$	$6-16=2 \times 4+2 \times 4$ $2(4+6)-4=16$	$8-22=2 \times 5+2 \times 4$ $2(5+8)-4=22$	$2 \times 6+2 \times 10-4=28$ $2(6+10)-4=28$	34	40	46

איור 10: מספר הריבועים באמצעות חישוב היקף המלבן

דוגמה ט – הפרשים בין שטחים

הפתרון הבא נשען על חישוב ההפרש בין שטח המלבן החיצוני (הכולל את מסגרת הריבועים) ושטח המלבן הפנימי המודגש בצבע (ראה איור 1). בפתרון זה מיוצג כל מלבן על-פי מיקומו: a₁ (מלבן ראשון), a₂ (מלבן שני) וכך הלאה. בכל משבצת מחושב השטח על-פי מכפלת מספר הריבועים באורך המלבן ומספר הריבועים ברוחב המלבן בהתאמה, לדוגמה: מידת האורך של המלבן הראשון 4 ריבועים ומידת רוחבו 3 ריבועים (ראה איור 11).

מיקום המלבן	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
שטח המלבן החיצוני	$4 \times 3 = 12$	$6 \times 4 = 24$	$8 \times 5 = 40$	$10 \times 6 = 60$	$12 \times 7 = 84$	$14 \times 8 = 112$	$16 \times 9 = 134$
שטח המלבן הפנימי	$2 \times 1 = 2$	$4 \times 2 = 8$	$6 \times 3 = 18$	$8 \times 4 = 32$	$10 \times 5 = 50$	$12 \times 6 = 72$	$14 \times 7 = 98$
ההפרש השטחים	10	16	22	28	34	40	46

איור 11: הפרשי שטחים

ארגון נתונים זה עוזר בעת ניסיון חישוב מספר הריבועים בכל מסגרת מלבנית נתונה, כפי שנראה בהמשך כשנדון בשאלה 2 (ראה איור 2). שאלה זו כיוונה למציאת נוסחה כללית לחישוב מספר האיבר על-פי מספר ריבועים נתון.

דוגמה י – הפרשים בין השטחים : בדרך להכללה

את הדרך הבאה הציגה אותה קבוצת הסטודנטיות, אשר תשובתן על השאלה הראשונה התבססה על הפרשי השטחים של שני המלבנים (החיצוני והפנימי) (ראה איור 12) והובילה להכללה הבאה:

מידת האורך במלבן החיצוני שווה לפעמיים מיקום המלבן + 2, לדוגמה:

$$2 \times 4 + 2 = 10a_4$$

מספר הריבועים באורך מלבן

מספר הריבועים באורך מלבן $2 \times 7 + 2 = 16$

מספר הריבועים באורך מלבן $2 \times n + 2$

מידת הרוחב במלבן החיצוני שווה למיקום המלבן $+2$, לדוגמה:

מספר הריבועים ברוחב מלבן $2 + 4 = 6$

מספר הריבועים באורך מלבן $7 + 2 = 9$

מספר הריבועים באורך מלבן $n + 2$

אפשר לתאר בדרך זו את שטח המלבן החיצוני באמצעות הנוסחה: $(2 \times + 2) \times (n + 2) = 2n^2 + 6n + 4$.

את שטח המלבן הפנימי אפשר לתאר באמצעות הנוסחה: $2n \times n = 2n^2$

אם כן, חישוב ההפרש בין השטחים ייתן את מספר ריבועי המסגרת: $2n^2 + 6n + 4 - 2n^2 = 6n + 4$

בסיכום התהליך אמרה קבוצת הסטודנטיות: "זה מדהים איך אפשר להתבסס על ידע בסיסי ולבנות בהדרגה את הנוסחה. זה הופך למשמעותי יותר".

הצגת דרכי פתרון לשאלה 3 (ראה איור 2 לעיל)

שאלה 3: ברשותכם 66 ריבועים לבנים. עליכם להשתמש בכמות הגדולה ביותר של ריבועים מכמות זו, כדי ליצור מלבן לפי החוקיות של הסדרה הנתונה. איזה מספר מלבן הוא יהיה בסדרה?

האם נשארו ריבועים שלא השתמשתם בהם? הסבירו קביעתכם.

בשאלה 3 היו נתונים הנוגעים למספר הריבועים, ועל הפותרים היה לתת את דעתם על ההכללות כדי לקבוע את מיקומו של המלבן, שנוכל להתאים לו את המסגרת.

הפתרון, שהציגו כל הנשאלים, התבסס על הפרש בין מספר הריבועים במסגרות המלבניות, מקצתם באמצעות רישום המספרים עד שהגיעו ל-64 ומניית מספר האיברים, ומקצתם באמצעות רישום בטבלה, כפי שציין אחד הפותרים: "המשכנו לרשום בטבלה (ראה איור 12), את המספרים בסדרה, עד שהגענו למספר הריבועים הקרוב ל-66. הגענו למלבן עשירי ונשאר לנו עודף של שני ריבועים".

מלבן 1	מלבן 2	מלבן 3	מלבן 4	מלבן 5	מלבן 6	מלבן 7	מלבן 8	מלבן 9	מלבן 10
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64

איור 12: משיכים את הסדרה

הנשאלות מקבוצות ב ו-ג (הסטודנטיות), הציגו עוד פתרון, הנשען על הנוסחה הכללית למציאת מספר הריבועים בכל מסגרת נתונה.

על-פי הנוסחה, מספר הריבועים בכל מסגרת מלבנית: $6n + 4$, כלומר $6n + 4 = 66$ לפיכך $6n = 62$. מכיוון שמדובר ב- n שהוא מספר טבעי, הרי שמדובר במלבן שנמצא במקום העשירי ויישארו שני ריבועים עודפים.

להלן מטרת המחקר השנייה:

השוואה בין דרכי הפתרון שמציעות האוכלוסיות השונות

עשר הדוגמאות שהוצגו מציגות את כלל הפתרונות שהתקבלו. התקבלו פתרונות המתבססים על זיהוי חוקיות סדרתית על סמך מניית הריבועים וזיהוי ההפרש קבוע בין האיברים (ראה דוגמה א). יש שהנתונים מאורגנים בטבלה ובאמצעותה מגיעים לפתרון (ראה דוגמאות ב, ג, ד, ה), יש שהפתרונות נשענים על ייצוגים חזותיים (ראה דוגמאות ג, ד, ה). דרכים אחרות מבוססות על חישובי היקף ושטח מלבנים (ראה דוגמאות ח, ט, י), ויש דרכים שהאסטרטגיה שננקטה מובילה להכללה מילולית, המפרטת את תהליך החישוב לכל מצב נתון ואף לנוסחה כללית (ראה דוגמאות ה, ו, ז, י).

להלן טבלה 1, המתארת את מספר הדרכים לשאלות 1 ו-2, ואת מספר הפותרים על-פי קבוצת השיוך: קבוצה א – תלמידי כיתה ו', קבוצה ב – סטודנטיות שנה ראשונה וקבוצה ג – סטודנטיות שנה שלישית.

טבלה 1: ייצוג דרכים מגוונות בקרב שלוש האוכלוסיות

דוגמה	קבוצה א N = 20 תלמידי כיתה ו'	קבוצה ב N = 15 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה ראשונה	קבוצה ג N = 17 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה שלישית	סך כל הפותרים
דוגמה א – זיהוי הסדרה בהתבסס על ההפרש הקבוע בין מספר הריבועים במסגרות	16	15	17	48
דוגמה ב – זיהוי הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש באמצעות ארגון הנתונים בטבלה	8	0	2	10
דוגמה ג – הדגשת הריבועים הנוספים (1)	0	0	1	1
דוגמה ד – הדגשת הריבועים הנוספים (2)	0	0	1	1
דוגמה ה – הדגשת הריבועים הנוספים (3): בדרך להכללה	0	0	2	2
דוגמה ו – ארגון נתונים בטבלה: בדרך להכללה		1	4	5
דוגמה ז – מארגנים נתונים בטבלה וחוקרים את הסדרה הנוצרת בשורות ובטורים	5	3	8	16
דוגמה ח – היקף המלבנים	0	1	5	6
דוגמה ט – הפרשים בין שטחים	0	0	3	3
דוגמה י – הפרשים בין השטחים: בדרך להכללה	0	0	4	4
סך הפותרים בכל קבוצה	29	20	47	96

מתוך עיון בטבלת הפתרונות, אפשר ללמוד על שכיחותה של כל דרך בכלל הקבוצות ועל הדרכים המגוונות לכל קבוצה.

לפני 20 תלמידי קבוצה א הוצגו שלוש דרכי פתרון (דוגמאות א, ב, ג, ד). ממוצע הפתרונות לכל תלמיד היה בין דרך אחת לשתי דרכים (1.45 דרכים לתלמיד).

לפני 15 הסטודנטיות מקבוצה ב הוצגו ארבע דרכי פתרון (דוגמאות א, ו, ז, ח). ממוצע הפתרונות לכל

סטודנט היה בין דרך אחת לשתי דרכים, אך יחסית פחות מאשר הפותרים בקבוצה א (1.333 דרכים לסטודנט).

בקרב 17 הסטודנטיות מקבוצה ג, היה ייצוג לכל אחת מעשר הדרכים. ממוצע הפתרונות לכל סטודנט היה בין שתיים לשלוש דרכים (2.764 דרכים לסטודנט).

כל הפותרים (למעט ארבעה תלמידים), הציגו את הדרך לייצוג הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש בין שלושה האיברים הנתונים. ארבעה מהתלמידים שלא הציגו פתרון זה, הציגו אותה בטבלה המוצגת בדוגמה ב.

לפי הנתונים נראה, כי תלמידי בית-ספר יסודי התמודדו יפה מאוד עם הבעיה והגיעו בדרכים לא פורמליות למציאת הקשר בין מיקומו של האיבר לגודל שהוא מייצג. בלטה במיוחד עובדת הדמיון בין פתרונות הנשאלים מקבוצה א (תלמידי בית-הספר) לפתרונות של קבוצה ב (סטודנטיות שנה א).

הסטודנטיות מקבוצה ג הציגו דרכים רבות ומגוונות. במהלך שנת הלימודים השלישית שלהן הן השתתפו בקורס, אשר שם דגש במאפייני יצירתיות, בריבוי דרכי פתרון (רכיב השטף ביצירתיות) ובדרכים מגוונות (רכיב הגמישות ביצירתיות). אף לא אחת מהן, הצליחה לפתור פתרון מלא על-ידי שימוש בנוסחה למציאת איבר נתון בסדרה חשבונית. עם זאת, אפשר לראות שמרבית הדרכים היו מושתתות על איסוף נתונים מספרי ועל ייצוגם בטבלאות מגוונות. הייצוגים הוויזואליים היו נדירים והציגו אותם שתי סטודנטיות מקבוצה ג (אפשר לראות בפתרונות המתבססים על ייצוג חזותי, כפתרונות בדרכים מקוריות מבין כלל הדרכים שהוצגו). לשאלה השלישית הוצגו שתי דרכי פתרון.

להלן טבלה 2 המסכמת את מספר הפותרים (שאלות 1 ו-2) בדרכים שהוצגו על-פי קבוצת השיוך.

טבלה 2: דרכי פתרון לשאלה 3

סך כל הפותרים	קבוצה ג N = 17 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה שלישית	קבוצה ב N = 15 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה ראשונה	קבוצה א N = 20 תלמידי כיתה ו'	דרך הפתרון
52	17	15	20	רישום בטבלה או המשך הסדרה
32	17	15	0	שימוש בנוסחה

להלן מטרת המחקר השלישית:

בחינת מקומה של התנסות הסטודנטיות בפתרון בעיית חקר וניתוח דרכי פתרון, כחלק מהתפתחות הידע הפדגוגי והמודעות למאפייני יצירתיות.

כפי שצוין בתיאור מהלך המחקר, לאחר שלב ההתמודדות הראשונית עם פתרון הבעיה, נאספו כל הפתרונות והוצגו לפני הסטודנטיות מקבוצה ג, שהיו שותפות לניתוח ואפיון כלל הדרכים. ניתוח דרכי הפתרון כלל עיסוק באסטרטגיות שנקטו, ובד בבד נערכה השוואה בין דרכי הפתרון שהוצגו בכל קבוצה. תהליך זה תרם לסטודנטיות בשני מישורים:

האחד – ללמוד על ידע התלמידים בדרכי ההתמודדות שלהם עם בעיה לא שגרתית ועל האסטרטגיות שנקטו בהם.

השני – ללמוד על התפתחות הידע של סטודנטיות שנה ג במהלך הכשרתן לעומת הידע של הסטודנטיות בקבוצה ב.

להלן ציטוטים מדבריהן של שירה¹ ורונה, המתייחסות לפתרונות התלמידים, בעיסוק בידע שניכר בכל פתרון, וביחסן לידע המתמטי על-פי תכנית הלימודים:

שירה: בעיה כל כך פשוטה... אני יכולה לפתור אותה בשנייה, יש נוסחה... אבל, זו הייתה הזדמנות נהדרת, לראות כמה הרבה אפשר ללמוד ממנה... לראות שאפשר להציג אותה לתלמיד בבית-ספר יסודי, והוא יתמודד איתה... אבל, הכי חשוב בעיני, ההבדל הגדול בין לראות שאפשר לפתור את אותה בעיה בדרכים שונות, לבין ממש לנתח כל דרך ולחשוב על הידע שמאחוריה... היינו צריכות לחשוב איזה ידע הפותר, אם זה ילד או מבוגר מביא לידי ביטוי... באיזו כיתה למדו את הנושא, כמו למשל פתרון באמצעות חישובי שטחים. זה יאפשר לי בעתיד לתכנן דיון מתמטי בכיתה או איך אני יכולה לעודד חשיבה של תלמידים.

רונה: בעיה יכולה להיות פשוטה, לא צריכה להיות מסובכת, ובכל זאת לזמן פעילות מתמטית מאתגרת ומאפשרת שימוש בידע מתמטי ויצירתיות בדרכי פתרון... בעיה יכולה להיראות מתאימה לתלמידים בחטיבת הביניים, וזה מדהים לראות שגם תלמידים צעירים יכולים להתמודד איתה...

הבחנה בין דרכי הפתרון של הסטודנטיות מקבוצה ב לבין דרכי ההתמודדות של הסטודנטיות מקבוצה ג, העלתה את רמת המודעות של הסטודנטיות מקבוצה ג, באשר למשמעות ההתנסות בתהליכי למידה והוראה המכוונים לפיתוח יצירתיות.

להלן ציטוטים מדבריהן של שתי סטודנטיות (דורית ולימור), שדנו במשמעות תהליך ההתנסות במהלך הלימודים במאפייני היצירתיות ובמשמעות פתרון בעיה בדרכים מגוונות, כל אחת מהן ציינה את מידת ההפתעה לאור הפער בין דרכים המגוונות של הסטודנטיות מקבוצה (קבוצה ג) לסטודנטיות מקבוצה ב, אשר טרם נחשפו פורמלית למאפייני היצירתיות בהוראת המתמטיקה במהלך הכשרתן להוראה.

דורית: אלמלא התבקשנו לפתור במגוון דרכים ולחשוב על ידע של התלמידים כשאנחנו ניגשות לפתרון, הייתי ישר מציבה את הנתונים בנוסחה, בדיוק כמו הסטודנטיות בקבוצה השנייה (קבוצה ב)... הבקשה גרמה לי לחשוב על מגוון דרכים לייצג את הסדרה. ההתנסות האישית הייתה חשובה. נהניתי לראות את הדרכים של התלמידים אבל יותר מזה, היה משמעותי הפער בין מגוון הדרכים שלנו (הסטודנטיות מקבוצה ג), לבין מגוון הדרכים של הסטודנטיות מקבוצה ב. הדרכים של הסטודנטיות מקבוצה ב, היו דומות מאד לאלה של התלמידים.

לימור: המודעות למאפייני היצירתיות גרמה לי לחשוב על דרכים שונות, על ייצוג בטבלה, בציר, על חישובים מכיוונים שונים.

סטודנטית אחרת, דליה, ציינה את הערך של ההתנסות האישית, כבסיס להתפתחות הידע הפדגוגי שלה:

דליה: יצאתי נשכרת בכמה רמות, ההתנסות שלי והחשיבה על עוד דרך ועוד דרך ולא

1. כל השמות במאמר (פרט לשמות המוזכרים בסיכום), בדויים.

לרוץ ישר לנוסחה, הדרך הבטוחה והמהירה... ההשוואה בין הדרכים: לאחר שראיתי את הדרכים שלנו (הסטודנטיות), הדרכים של התלמידים, כיצד אנחנו התמודדנו עם הבעיה, כיצד הם התמודדו איתה, הניתוח של הדרכים, זה תרם לי המון. זה עזר לי לראות איך אפשר לחבר בין הדרכים, להשוות ביניהן ואולי מכאן להתחבר לנוסחה... להתנסות כזו תהיה השפעה על דרך ההוראה.

סיכום

אפשר ללמוד כי בבעיית מסגרת הריבועים טמון פוטנציאל יצירתי רב. פוטנציאל זה מאופיין ביכולת לגשת לפתרון דרכים רבות ואסטרטגיות מגוונות: שטף וגמישות (לב-זמיר, 2014; Lev-Zamir, 2011; Torrance, 1967). הבעיה אפשרה לכל פותר להביא ידע מתמטי אחר, וגם ליישם אסטרטגיות פתרון מוכרות וחדשות. כפי שראינו, ההתמודדות עם הבעיה אינה מחייבת ידע מתמטי פורמלי בנושא סדרות והיא זימנה עשיית קשרים בין תכנים מתמטיים מגוונים (לב-זמיר, 2014; Leikin & Levav-Waynberg, 2009). מבין דרכי הפתרון, שהוצגו לשלוש השאלות, היו פתרונות חזותיים המבוססים על איורים, פתרונות חישוביים המבוססים על פעולות קונקרטיות בשימוש בפעולות ומספרים והיו פתרונות המבוססים על נוסחאות אלגבריות. ההתמודדות עם הפתרונות זימנה עשיית קשרים הכוללים: זיהוי חוקיות בסדרות חשבוניות, חישובי היקף ושטח מלבנים, הגעה להכללות מתוך הצגת נקודות מבט שונות (לעתים לאותן דרכים ולאותן תוצאות) והבנת עקרונות מתמטיים כמו הוצאת גורם משותף אל מחוץ לסוגריים. תכנים מתמטיים אלה הם חלק מדרישות תכנית הלימודים בבית-ספר היסודי. הבעיה עודדה תהליכי חשיבה מסדר גבוה, המעודדים תהליכי חקר, ארגון נתונים, השוואה, הסקת מסקנות, יכולות הנמקה והצדקת רעיונות (לב-זמיר, 2014).

כפי שצוין בתיאור מהלך המחקר, תפקידן של הסטודנטיות במחקר זה, במיוחד של הסטודנטיות מקבוצה ג, הוא ללמוד על הידע של התלמידים ועל הידע שלהן (הסטודנטיות), כדי להיווכח בחשיבות של תהליך למידה פורמלי על מאפייני יצירתיות בהוראת המתמטיקה. תהליך זה משלב התנסות אישית מוקדמת, הכוללת חשיפה לאסטרטגיות מגוונות כבסיס לעידוד וטיפוח יצירתיות והבניית ידע בקרב תלמידיהן. תפקידן של הסטודנטיות מקבוצה ב (שנה ראשונה להכשרתם), היה בעיקר כדי לאפשר לבחון את מקומה של הכשרתן להוראה לאורך השנים בהבניית ידע פדגוגי וידע על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה וזאת מתוך השוואה בין דרכי הפתרון המגוונות. ההתנסות של הסטודנטיות מקבוצה ג וניתוח הדרכים שהציגו כלל שלוש הקבוצות, אפשרו להן להבחין בדקויות בין הדרכים, באפיון על-פי התכנים המתמטיים ובתרומתה להתפתחות הידע הפדגוגי, הכולל יכולות "האזנה" לדרכים המגוונות ולידע המתמטי המיוצג בכל דרך (Ball, 1993). התנסות זו אפשרה להן לראות כיצד דרך פתרון ותיווך מושכל של מורה עשויה להוביל להכללות, ובכך לזרוע את הזרעים שיקדמו פיתוח יצירתיות ופיתוח חשיבה אלגברית כבר בכיתות בית-הספר היסודי.

מתוך ניתוח הדרכים המגוונות שהציגו הסטודנטיות משתי הקבוצות (ראה טבלה 1), נראה שהידע שרכשו הסטודנטיות מקבוצה ג במהלך ההכשרה, הגביר בהן את המודעות למאפייני היצירתיות ולפתרון דרכים מגוונות וייצוגים רבים.

דבריהן של דורית, לימור ודליה מספקים חיזוק למשמעות שאנו, אנשי החינוך המתמטי, רואים בתהליך ההכשרה, הן בהבניית הידע הן בהעלאת רמת המודעות של המתכשרים להוראה, תשתית חיונית ליצירתיות ברמה האישית וליצירתיות המכוונת לעידוד תלמידים. תשתית זו משלבת ניתוח אסטרטגיות של התלמידים בניסיון לקשור בין דרכי הפתרון, ראיית הדמיון והשוני ביניהם וחתירה לעשיית קשרים המובילים לפיתוח חשיבה אלגברית. מתוך דבריהן אפשר ללמוד על מקומה של ההתנסות בתהליך במבט על הוראה "אחרת". בשלב זה אי אפשר ללמוד על ההשלכות העתידיות להתנסות זו ולידע הפדגוגי של הסטודנטיות מקבוצה ג, ויהיה מעניין להמשיך במחקר ולעקוב אחריהן במהלך ההוראה שלהן בשנים הבאות.

מקורות

- לב-זמיר, ח' (2014). יצירתיות בהוראת המתמטיקה כפי שהיא נתפסת על ידי מורים למתמטיקה. בתוך ד' פטקין וא' גזית (עורכים), *המורה למתמטיקה: מאפייני הכשרה, ידע, הוראה ואישיות של מורים למתמטיקה בבית-הספר היסודי* (עמ' 145-164). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- לב-זמיר, ח' (2015). הפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיה לא שגרתית. בתוך א' גזית וד' פטקין (עורכים), *יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות* (עמ' 99-120). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- Bolden, D. S., Harries, A. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143-157.
- Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, 41, 605-618.
- Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
- Hershkovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 2-15). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.
- Kown, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51-61.
- Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(4), 203-223.
- Lev-Zamir, H. (2011). *Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions* (Doctoral dissertation). University of Haifa, Israel.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Author.
- da Ponte, J. P. (2007). Investigation and exploration in the mathematics classroom. *ZDM*, 39(5-6), 419-430.
- Presmeg, N. (2003). Creativity, mathematizing, and didactizing: Leen Streefland's work continues. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 127-137.
- Sawyer, R. K. (2004). Creative teaching: Collaborative discussion as disciplined improvisation. *Educational Researcher*, 33(2), 12-20.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80.
- Sriraman, B. (Ed.). (2008). *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Torrance, E. P. (1967). *Scientific views of creativity and factors affecting its growth, creativity and learning*. In J. Kagan (Ed.), *Creativity and learning* (pp. 73-91). Boston: Houghton Mifflin.

Zazkis, R., & Holton, D. (2009). Snapshots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 92-111). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.



ד"ר חנה לב-זמיר

עורכת כתב-העת "מספר חזק 2000", בשנים 2010-2015.
ראש החוג לחינוך מתמטי במכללת אורנים ומרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללה.
כתבה כמה פרסומים בנושא מתמטי, ביניהם שני ספרים בשם "חשבון מהעיתון".
תחום העניין המרכזי שלה הוא הכשרת מורים להוראת מתמטיקה עם דגש בפיתוח יצירתיות.

מחקר זוטא לאפיון וסיווג שיטות פתרון של בעיה גאומטרית על-ידי פרחי הוראה

קרני שיר, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה
אילנה לביא - האקדמית עמק יזרעאל ע"ש מקס שטרן

תקציר

מציאת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל היא משימה, אשר לומדים בכל הגילאים יכולים לחקור אותה. משימה זו יכולה להיחקר בדרכים אחרות – דרכים אשר מחדדות בין השאר את המשמעות של תכונות שונות של צורות גאומטריות בסיסיות כגון משולשים, מרובעים ומצולעים משוכללים אחרים.

מחקר הזוטא המתואר במאמר עומד על דרכי פתרון של 42 פרחי הוראה, אשר התבקשו למצוא את הזווית הפנימית של מצולע משוכלל נתון, ולהכליל את ממצאיהם למקרה של מצולע בעל n צלעות. במאמר מתוארים הפתרונות המגוונים שהציעו פרחי ההוראה, התרומה של הדיון הכיתתי לתהליך הלמידה ולקידום ביצוע ההכללה המתמטית, והחשיבות של פתרון בעיה בדרכים מגוונות לתהליך הלמידה. התהליך, אשר התרחש אצל פרחי הוראה, מדגים כיצד אפשר לצאת מבעיה אלמנטרית ולמנף את הדיון הכיתתי כדי להפוך אותה לבעיית חקירה מעניינת.

מילות מפתח: פתרון בעיות; פתרונות מגוונים; דיון; הכללה מתמטית; מצולע משוכלל; זווית פנימית.

מבוא

מציאת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל היא משימה שיכולים לחקור אותה תלמידים בחטיבת ביניים, סטודנטים, מורים למתמטיקה ועוד. מחקרים שונים עסקו בחקירת תכונות מגוונות של מצולעים משוכללים כגון מציאת קשרים בין מספר הצלעות של המצולע, זוויותיו ושטחו (Battista, 1985; Killgrove, & Koster, 1991; Waters, 1987); קשרים בין אורך צלעות מצולע משוכלל ובין אורך אלכסונו (Tzamid, Tirosh, & Stavy, 1997); בניית מצולע משוכלל וזוויותיו הפנימיות בסרגל ובמחוגה (Benson & Borkovitz, 1982); יצירת מצולעים משוכללים למיניהם על-ידי צירוף ריבועים זה לזה (Muscat, 1992); מציאת הקשר בין השטח של פוליגון משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל ושטח העיגול, ככל ש- n שואף לאינסוף, בנייה מדויקת של מצולע משוכלל אשר אורך צלעו נתונה באמצעות חסימת מצולע במעגל, חלוקתו למשולשים ומציאת זווית הבסיס של כל אחד מהמשולשים הללו ועוד (Kich, 1979; Troccoli, 1987).

קונר ועמיתיה (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014) עמדו על דרכי ההנמקה אשר בהן נעשה שימוש בפתרון בעיות במתמטיקה. הם הציגו מודל כולל המתאר את סוגי הטיעונים שבהם נעשה שימוש במהלך ויכוח מתמטי בכיתה. הדוגמאות שמציגים קונר ועמיתיה (שם) לקוחות

מתוך תצפיות על יחידת לימוד בגאומטריה, הנלמדת בקרב תלמידים בכיתה ט'. במסגרת היחידה התבקשו התלמידים בין השאר לחקור את הקשר בין סכום הזוויות הפנימיות והחיצוניות של מצולע למספר הצלעות שלו. התלמידים התחילו בחקירה של מצולעים ספציפים נתונים ולאחר מכן ניסו להכליל ולגלות כיצד אפשר למצוא את הזווית הפנימית והחיצונית של כל מצולע משוכלל בעל n צלעות. במהלך חיפוש קשרים בין מספר הצלעות של המצולע לבין סכום הזוויות שלו הגיעו התלמידים לפעמים לקשרים שאינם נכונים. לדוגמה, לאחר שעמדו על כך כי סכום הזוויות של המרובע הוא 360° ואילו סכום הזוויות של המחומש הוא 540° , שיער אחד התלמידים כי סכום הזוויות של מצולע אשר לו n צלעות רחוק ב- $40n - 100$. לעומת זאת במקרים אחרים הגיעו התלמידים למסקנות אשר קידמו אותן. לדוגמה, אחרי שעמדו על כך כי סכום הזוויות של משולש הוא 180° , סכום הזוויות של מרובע הוא 360° ואילו סכום הזוויות של מחומש הוא 540° , שיער תלמיד אחר כי סכום הזוויות יהיה תמיד כפולה של 180° .

במהלך העיסוק בפעילויות הקשורות להגדרות מתמטיות, השתמשה בוראסי (Borasi, 1992) במשימה של מציאת הזווית הפנימית של מחומש החסום בתוך מעגל. לסטודנטים, אשר התבקשו למצוא זווית זו, ניתנו שני רמזים שהיו קשורים לתכונות המעגל (זווית מרכזית של 360° , רדיוסים שווים). בעזרת שימוש ברמזים הללו, חילקו הסטודנטים את המחומש לחמישה משולשים שווים שוקיים החופפים זה לזה, תחילה מצאו את זווית הראש של המשולשים (שהיא זווית מרכזית של המעגל), ובעזרתה מצאו את גודל הזווית הפנימית של המחומש. בפעילות אחרת, העוסקת בקשרים בין מספר צלעות המצולע המשוכלל לגודל הזווית הפנימית שלו, ביקשה בוראסי (שם) מהתלמידים להגדיר את המושג מצולע. בהגדרות שנתנו התלמידים למושג זה, הם השתמשו במשפט "במצולע בעל n צלעות, סכום הזוויות הפנימיות הנו $180^\circ \times (n-2)$ ".

המאמר מציג בעיה מתמטית פשוטה שהתבקשו הסטודנטים לפתור. העיסוק של הסטודנטים במציאת פתרון לבעיה העלה דרכי פתרון מגוונות שהוצגו בכיתה. בקרב חוקרים רבים קיימת הסכמה כי פתרון בעיות מתמטיות בדרכים שונות חשוב לתהליך הלמידה ולפיתוח חשיבה מתמטית מתקדמת (צמיר, תירוש, טבח ולינסון, 2010; Polya, 2009; Levav-Waynberg & Leiken, 2007; Schoenfeld, 1973).

הצגת הדרכים המגוונות בכיתה מקדמת את ההבנה המתמטית של התלמידים בכך שהיא חושפת לפניהם נקודות מבט אחרות להתבוננות בבעיה (סטופל ובן-חיים, 2014).

מחקר הזוטא שאנו מתארות כאן עוסק בדרכי פתרון מגוונות של פרחי הוראה, המנסים למצוא את הזווית הפנימית של מחומש משוכלל, ולהכליל את התוצאה שקיבלו למציאת נוסחה כללית לגודל הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

תיאור המחקר

מטרת המחקר המתואר היא לאפיין את דרכי הפתרון של פרחי הוראה, שהתבקשו למצוא את גודל הזווית הפנימית של מצולע משוכלל נתון, ולעמוד על תרומת הדיון הכיתתי להעמקת תהליך הלמידה.

במחקר השתתפו 42 פרחי הוראה למתמטיקה לעל-יסודי. הם השתתפו בסדנה בת שתיים אשר עסקה במצולעים משוכללים.

כל סטודנט קיבל שתי משימות:

1. מצא למה שווה הזווית הפנימית של מחומש משוכלל.
2. מצא למה שווה הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

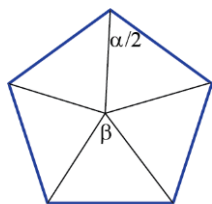
במהלך החלק הראשון של הסדנה התבקשו המשתתפים לענות לבד על שתי השאלות הללו. בחלק השני של הסדנה נערך דיון כיתתי על המשימה. דיון זה התבסס על התשובות שכתבו הסטודנטים בחלק הראשון של הסדנה.

ממצאים

משימה ראשונה - עבודה עצמית

מתוך ניתוח הפתרונות של 42 פרחי ההוראה עלו תשע דרכי פתרון מגוונות למציאת הזווית הפנימית של מחומש משוכלל. להלן פירוט דרכי הפתרון שעשו בהן שימוש פרחי ההוראה.

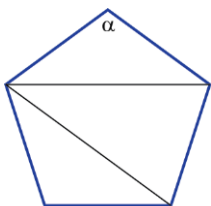
דרך פתרון א': מתוך שימוש בידע כי מחומש משוכלל יכול להיחסם במעגל שמרכזו הוא מרכז הכובד של המחומש, פרחי הוראה רבים חילקו את המחומש לחמישה משולשים שווים שוקיים (ראה איור 1).



איור 1

הם גילו את גודלה של זווית $\beta = \frac{360^\circ}{5}$, וחישבו את α – הזווית הפנימית של המחומש,

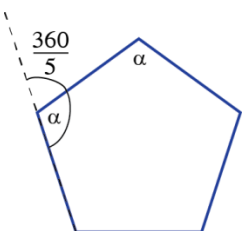
מתוך התבססות על סכום הזוויות במשולש שווה השוקיים $\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ\right)$.



איור 2

דרך פתרון ב': מתוך שימוש בידע כי אפשר לחלק מחומש משולשים באמצעות ציור שני אלכסונים מקדקוד כלשהו (ראה איור 2).

α , הזווית הפנימית של המחומש, חושבה על סמך סכום הזוויות של שלושת המשולשים $(5 \times \alpha = 3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ)$.



איור 3

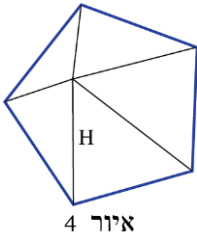
דרך פתרון ג': הזווית הפנימית α חושבה לפי גודל הזווית החיצונית של המחומש שהיא

$\frac{360^\circ}{5}$, ולכן הזווית הפנימית הצמודה לה שווה

ל- $180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$ (ראה איור 3).

דרך פתרון ד': הזווית הפנימית α חושבה לפי שימוש בנוסחה

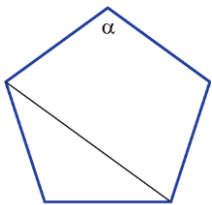
$$\alpha = \frac{[180^\circ(n-2)]}{n} \quad \text{במקרה בו } n=5.$$



איור 4

דרך פתרון ה': חלוקת המחומש המשוכלל לחמישה משולשים בעזרת

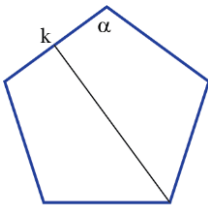
נקודה H כלשהי בתוך המחומש (ראה איור 4). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה לפי ההפרש בין סכום הזוויות בחמשת המשולשים והזווית הפנימית H ($5 \times 180^\circ - 360^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 5

דרך פתרון ו': חלוקת המחומש למרובע ומשולש באמצעות העברת אלכסון אחד כלשהו (ראה

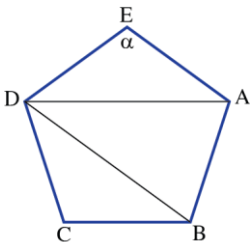
איור 5). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה לפי סכום הזוויות של המרובע והמשולש שנוצרו בעקבות חלוקה זו ($5 \times \alpha = 360^\circ - 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 6

דרך פתרון ז': חלוקת המחומש לשני מרובעים (ראה איור 6). הזווית

פנימית α של המחומש חושבה לפי ההפרש בין סכום הזוויות בשני המרובעים והזווית השטוחה k ($2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 7

דרך פתרון ח': חלוקת המחומש לשני טרפזים המכסים זה את זה

(טרפזים ABCD ו-DEAB באיור 7). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה

לפי ההפרש בין סכום הזוויות של שני הטרפזים וסכום הזוויות של המשולש ADB המשותף ($2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).

דרך פתרון ט': סכום הזוויות של מחומש משוכלל חושב, בעזרת הידוע על סכום הזוויות

של משולש שווה צלעות וריבוע. על-ידי חלוקה בחמש נמצא הגודל של α , הזווית הפנימית של המחומש (כפי שמתואר בטבלה 1).

טבלה 1: שיטת החישוב באסטרטגיה ט'

הצורה	סכום הזוויות	גודל זווית פנימית
משולש שווה צלעות	180°	60°
ריבוע	360°	90°
מחומש משוכלל	540°	108°

טבלה 2 להלן מתארת את התפלגות תשובות פרחי ההוראה למשימה שקיבלו – לפי תשע דרכי הפתרון אשר תוארו לעיל. חשוב לציין כי היו שלושה סטודנטים שפתרו את המשימה בשתי דרכים אחרות ולכן התקבלו בסך הכול 45 פתרונות מ-42 סטודנטים.

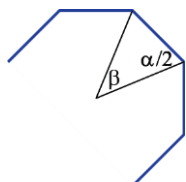
טבלה 2: התפלגות הפתרונות למשימה הראשונה לפי דרכי הפתרון האחרות

דרכ פתרון	א'	ב'	ג'	ד'	ה'	ו'	ז'	ח'	ט'	סה"כ
מספר הפתרונות	17	12	1	5	1	6	1	1	1	45

אפשר לראות מטבלה 2 שפתרונות א' ו-ב', שאפשר לסווגם כפתרונות סטנדרטיים, הם השכיחים ביותר בעוד שאר הפתרונות, אשר מחייבים חשיבה קצת אחרת, הם בעלי שכיחות נמוכה מאוד.

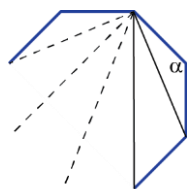
משימה שנייה - עבודה עצמית

לצורך מציאת זווית פנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות השתמשו פרחי ההוראה בארבע דרכי פתרון:



איור 8

דרך פתרון 1: מתוך שימוש בכך שאפשר לחסום מצולע משוכלל בתוך מעגל אשר מרכזו הוא מרכז הכובד של המצולע, הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות חושבה לפי מציאת הזווית המרכזית β בשלב ראשון $\left(\beta = \frac{360^\circ}{n}\right)$, וחשוב הזווית הפנימית של המצולע המשוכלל α התבצע לפי סכום זוויות פנימיות במשולש שווה שוקיים (ראה איור 8).



איור 9

דרך פתרון 2: את המצולע המשוכלל חילקו ל- $n-2$ משולשים לפי ציור של $n-3$ אלכסונים מאחד מקדקודי המצולע (ראה איור 9). הזווית הפנימית α של המצולע בוטאה באמצעות המשוואה $n \times \alpha = (n-2) \times 180^\circ$ (שמשמעותו היא $\alpha = 180^\circ \frac{(n-2)}{n}$).

דרך פתרון 3: על-ידי שימוש בכך שגודלה של זווית חיצונית במצולע משוכלל הנה $360^\circ/n$, אפשר לבטא את הזווית הפנימית α באמצעות הנוסחה $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

דרך פתרון 4: שימוש בנוסחה $\alpha = \frac{[180^\circ(n-2)]}{n}$, המוכרת לחלק מפרחי ההוראה, כדי לבטא את α – הזווית הפנימית של המצולע המשוכלל.

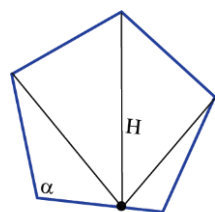
טבלה 3 להלן מתארת את התפלגות תשובות פרחי ההוראה על המשימה שקיבלו – לפי ארבע דרכי הפתרון שתוארו לעיל.

טבלה 3: התפלגות הפתרונות למשימה השנייה על פי האסטרטגיות השונות

דרכ פתרון	(1)	(2)	(3)	(4)	סה"כ
מספר הפתרונות	25	7	1	9	42

שוב אפשר לראות בטבלה 3 תופעה שחוזרת על עצמה: הפתרון הסטנדרטי הוא השכיח ביותר (פתרון 1), ואילו פתרון 3 שיש בו חשיבה "מחוץ לקופסה" הוא הפתרון בעל השכיחות הנמוכה ביותר.

הדיון הכיתתי



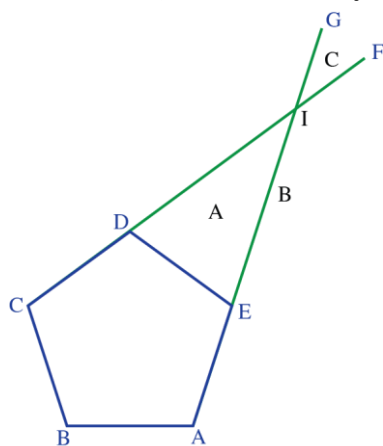
איור 10

בתחילת הדיון הכיתתי הציג כל משתתף את דרכי הפתרון שהשתמש בהן כדי למצוא את הזווית הפנימית. כאשר הוצגה דרך פתרון ה', שלפיה נבחרת נקודה H כלשהי בתוך המחומש, ונקודה זו משמשת כקדקוד של חמישה משולשים אשר צלע של המחומש משמש צלע בכל אחד מהם (ראה איור 3 לעיל), משתתף אחר הציע לבדוק מה קורה כאשר הנקודה H נופלת על אחת הצלעות (ראה איור 10).

פרחי ההוראה חקרו מקרה זה והגיעו לכך כי אף שבמקרה זה משולש אחד הנו מנוון, עדיין אפשר למצוא את הזווית הפנימית α בחישוב ההפרש בין שטחי ארבעת המשולשים ובין הזווית השטוחה H ($4 \times 180^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).

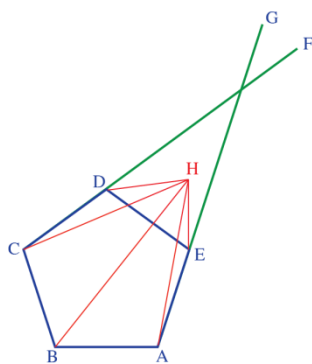
בשעת הדיון עלו עוד שתי שאלות: האם יהיה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α גם אם הנקודה H תהיה מחוץ למחומש? האם יתקבל אותו פתרון, בלי קשר למיקומה של הנקודה H, או האם יהיו פתרונות אחרים בעבור כל מיקום של הנקודה H?

בשלב זה נעזרו פרחי ההוראה בלומדה הממוחשבת 'Geometry Inventor' כדי לחקור את המקרים השונים הללו. ביצוע פעילות החקר בעזרת הלומדה הביא את פרחי ההוראה לידי מסקנה כי בהיות הנקודה H מחוץ למחומש המשוכלל, היא כוללת בתוכה מספר מקרים מגוונים (ראה איור 11):

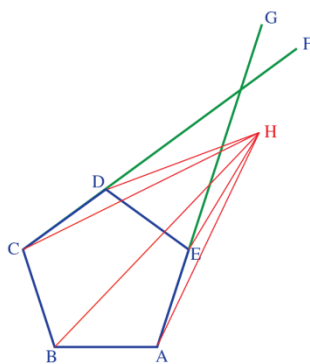


איור 11

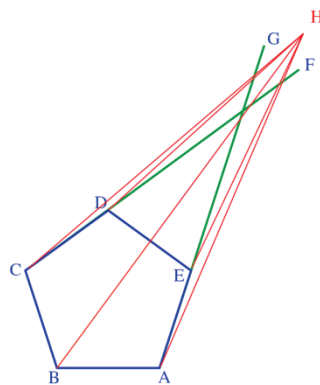
- (1) H נמצאת בתוך אזור A.
- (2) H נמצאת בתוך אזור B.
- (3) H נמצאת בתוך אזור C.
- (4) H נופלת על אחד הקטעים DI או EI.
- (5) H נופלת על אחת הקרניים IF או IG.
- (6) H נופלת בדיוק על נקודה I.



איור 11.1



איור 11.2



איור 11.3

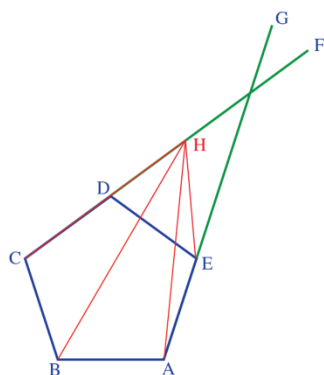
איור 11.1 לעיל מתאר את תת-המקרה הראשון שבו H נמצאת בתוך אזור A. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב ההפרש בין סכום הזוויות של ארבעת המשולשים (HDC, HCB, HBA, HAE) וזוויות המשולש אשר מכסה אותם חלקית (HDE):

$$4 \times 180^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

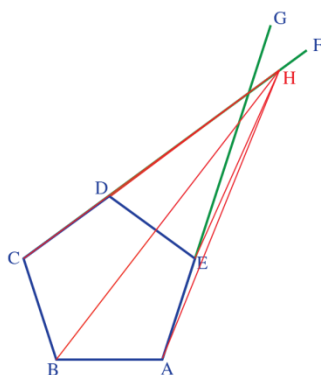
איור 11.2 לעיל מתאר את תת-המקרה השני שבו H נמצאת באזור B. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב סכום זוויות שני המשולשים HDC ו- HCB והמרובע הקעור $HBAE$ ולהפחית מכך את זוויות משולש HDE שמכסה אותם חלקית:

$$2 \times 180^\circ + 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

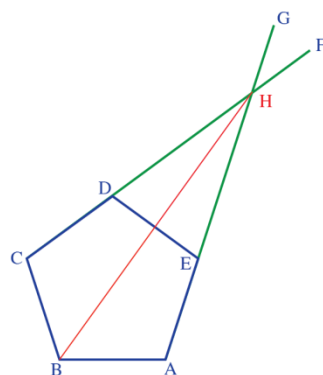
איור 11.3 לעיל מתאר את תת-המקרה השלישי שלפיו אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב סכום הזוויות של שני המרובעים הקמורים $HDCB$ ו- $HEAB$ ולהפחית מכך את זוויות משולש HDE :

$$2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$


איור 11.4



איור 11.5



איור 11.6

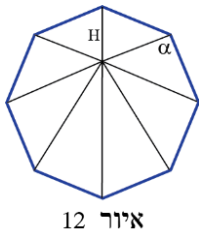
איור 11.4 לעיל מתאר את תת-המקרה הרביעי. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב הסכום של כל הזוויות של שלושת המשולשים (HAE , HBA , HCB). אפשר לראות כי $3 \times 180^\circ = 4\alpha + \angle DHE + \angle HED$, אך כיוון ש- $\alpha = \angle CDE = \angle DHE + \angle HED$ (משמש זווית חיצונית למשולש DHE) נקבל כי $3 \times 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$.

תת-המקרה החמישי מתואר באיור 11.5 לעיל, שלפיו אפשר למצוא את הזווית הפנימית של המחומש המשוכלל בחישוב סכום הזוויות של משולש HCB והמרובע הקעור $HBAE$.

לכן $180^\circ + 360^\circ = 4\alpha + \angle DHE + \angle HED$ אבל $\alpha = \angle CDE = \angle DHE + \angle HED$ ונקבל שוב $180^\circ + 360^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$.

כאשר H נופלת על I (נקודת חיתוך הישרים DF ו- EG , כפי שמתואר באיור 11.6 לעיל), נוצרים שני משולשים: HAB ו- HCB ומתקבל $\angle A + \angle B + \angle C + \angle DHE = 360^\circ$. אם נציב $\angle DHE = 2\alpha - 180^\circ$ במשוואה הקודמת נקבל כי $5\alpha - 180^\circ = 360^\circ$ ומכאן שוב נובע כי $\alpha = 108^\circ$.

כפי שאפשר לראות בטבלה 3 לעיל, בעת פתרון המשימה השנייה (מציאת גודל זווית פנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות), נעזרו רוב פרחי ההוראה בדרך פתרון א' כדי להגיע לביטוי כללי, אך היו גם כאלו שהשתמשו באסטרטגיות ב', ג' או ד'.

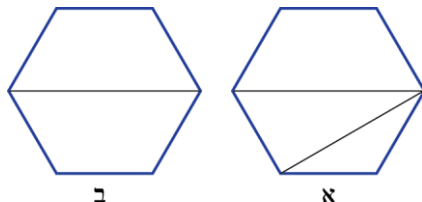


איור 12

אף פרח ההוראה אחד לא השתמש בדרך פתרון ה' וניסה להכליל אותה למציאת הזווית הפנימית של מצולע בעל n צלעות. במהלך הדיון הכיתתי עלתה המסקנה כי גם פתרון זה יכול להיות מוכלל למציאת הזווית הפנימית במקרה הכללי. הם גילו כי המצולע המשוכלל הכללי יכול להיות מחולק ל- n משולשים בהוספת נקודה H כלשהי בתוך המצולע (ראה איור 12). במקרה זה אפשר לחשב את הזווית הפנימית של המצולע בחישוב ההפרש בין סכום הזוויות ב- n משולשים

$$\text{ובין הזווית הפנימית } H: n \times 180^\circ = n \times \alpha + 360^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

הניסיון להכליל את דרך פתרון ו' יצרה מעט בלבול. חלק מפרחי ההוראה חשבו שההכללה של דרך זו



איור 13

היא חלוקת המצולע למרובע אחד ומשולשים רבים (אפשרות א), בעוד אחרים חשבו שעבור $n > 5$ אפשר לחלק את המצולע למספר רב ככל האפשר של מרובעים, ואת מה שאי אפשר לחלק למרובעים – לחלק למשולשים (אפשרות ב). באיור מספר 13 אפשר לראות דוגמה של משושה מחולק למרובע אחד ושני משולשים (אפשרות א), או לשני מרובעים (אפשרות ב).

הכללת אפשרות א בעבור מצולע משוכלל בעל n צלעות תביא לחלוקה למרובע אחד ו- $n-4$ משולשים. במקרה זה סכום הזוויות הפנימיות של המצולע ($n\alpha$) יהיה $360^\circ + (n-4) \times 180^\circ$, ולכן גודל הזווית

הפנימית במצולע יהיה $a=180^{\circ}\frac{(n-2)}{n}$.

הכללת אפשרות ב בעבור מצולע משוכלל בעל n צלעות מובילה לשני מקרים אחרים: (1) המקרה שבו מספר הקדקודים (כלומר n) הנו זוגי; (2) המקרה בו מספר הקדקודים הנו אי-זוגי.

במקרה הראשון המצולע יכול להיות מחולק ל- $\frac{(n-2)}{2}$ מרובעים, מה שיביא לכך

$$ש- \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^{\circ} = n\alpha \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} \frac{(n-2)}{n} . 360^{\circ} \times \frac{(n-2)}{2} = n\alpha$$

לסטודנטים המקרה השני היה קל פחות להכללה. לאחר שבדקו מספר מקרים פרטיים, המסקנה הייתה שבמקרה זה חלוקת המצולע תוביל למשולש אחד ו- $(n-3)/2$ מרובעים. המשוואה שתתאים למקרה זה

היא $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180^{\circ} = n\alpha \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} \frac{(n-2)}{n} . 360^{\circ} \times \frac{(n-3)}{2} + 180^{\circ} = n\alpha$. כיוון שכל מרובע יכול להתחלק לשני משולשים, יכולות

להיות עוד חלוקות רבות אחרות של המצולע למרובעים ומשולשים.

כפי שהיה אפשר לראות בטבלה מס' 2, בעת חישוב הזווית הפנימית של מחומש משוכלל, רוב פרחי

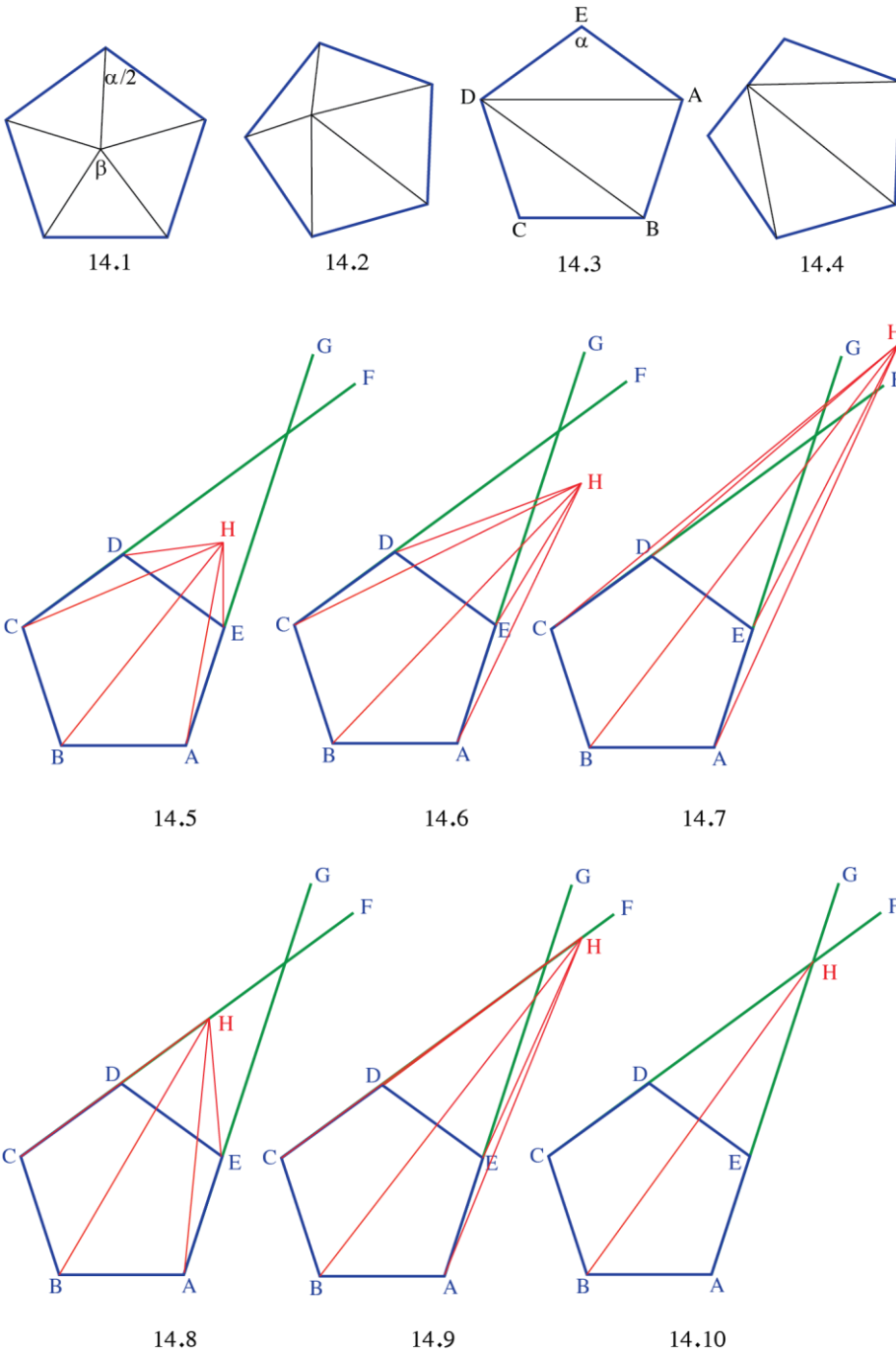
ההוראה לא נעזרו בנוסחה $180^{\circ}\frac{(n-2)}{n}$, אלא חילקו את המחומש לצורות בסיסיות (כגון משולש

ומרובע) ונעזרו בהן כדי לפתור את המשימה. אף שהנוסחה של סכום זוויות במצולע מוכרת יחסית ולא מסובכת, עדיין פרחי ההוראה העדיפו להשתמש באסטרטגיות אחרות – כגון חלוקת המחומש למרובעים ומשולשים – לפתור את השאלה, ולא להתבסס על הנוסחה בפתרון. הנטייה לחלק מחומש לצורות בסיסיות אלו היא אחת מהיוריסטיקות הפתרון הנפוצות ביותר אצל תלמידים הפותרים בעיות בגאומטריה המערבות צורות מורכבות יותר (Borasi, 1992). משולשים ומרובעים הם הצורות הראשונות המוצגות לתלמידים בבית-הספר היסודי. גם בחטיבת הביניים ובתיכון חלק נרחב מאוד מלימודי הגאומטריה מוקדש ללמידה על סוגים רבים של משולשים ומרובעים ותכונותיהם, ופתרון תרגילים רבים דורש חיפוש משולשים בכלל ומשולשים חופפים בפרט. דבר זה יכול להיות הסיבה לכך שלומדים מנסים להשתמש במשולשים ובתכונות של משולשים שהם מכירים – בפתרון בעיות גאומטריות מגוונות. סיבה אפשרית אחרת לכך שהיה שימוש מועט בנוסחה המוכרת לחישוב ערכה של הזווית הפנימית של המחומש המשוכלל, היא הקשר הרופף שקיים בראשו של הלומד בין אלגברה לגאומטריה (Knuth, 2000). ייתכן שפרחי ההוראה העדיפו להשתמש במושגים מתוך הגאומטריה כדי לפתור בעיה גאומטרית, מאשר להשתמש בנוסחה אלגברית לצורך פתרון בעיה זו.

דיון

הבעיה העומדת במרכז המחקר המתואר היא דוגמה של משימה פשוטה שאפשר לפתור אותה בדרכים מגוונות. ניתוח של דרכי הפתרון המגוונות יכול לקדם הכללה מתמטית, נוסף לסיטואציות למידה רצויות אחרות ברוח הסטנדרטים של ה-NCTM (2000). ניתוח של אסטרטגיות הפתרון המגוונות, אשר העלו פרחי ההוראה, מראה על כך כי במשימה זו קיימים שני סוגי הכללה, אשר שילוב שלהם הוא כלי

משמעותי לקידום תהליך הלמידה. סוג ההכללה הראשון הוא המעבר ממצולע משוכלל ספציפי (מחומש) למצולע משוכלל בעל n צלעות. סוג ההכללה השני מצוי באסטרטגיות שהעלו פרחי ההוראה.



מתוך התבוננות באסטרטגיות הפתרון המגוונות של פרחי ההוראה אפשר לראות כי רוב האסטרטגיות שהשתמשו בהן פרחי ההוראה כללו שני מרכיבים (ראה איור 14):

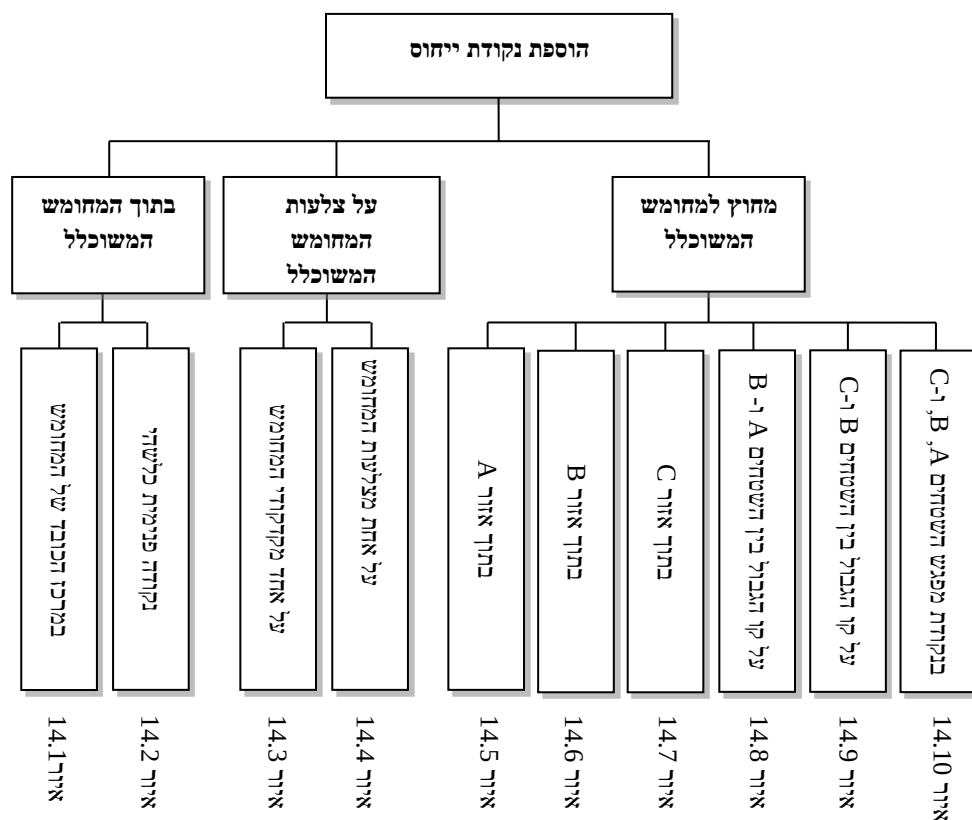
1. חלוקת המצולע לצורות בסיסיות (משולשים ומרובעים).

2. הוספה של נקודת ייחוס.

המרכיב השני, הוספה של נקודת ייחוס, יכול להיות מחולק לשלוש נקודות משנה לפי מיקום נקודת הייחוס: (1.1) הוספת נקודת ייחוס בתוך המחומש; (1.2) הוספת נקודת ייחוס על צלע המחומש; (1.3) הוספת נקודת ייחוס מחוץ למחומש.

כל אחת מתת-חלוקות אלו יכולה גם היא להיות מחולקת לפי המקרים המסוימים שהיא כוללת.

תרשים 1 מציג את כל האפשרויות המגוונות למיקום נקודת הייחוס – כפי שעלו בפתרונות האחרים שהציגו פרחי ההוראה, ואת ההפניה לאיור המתאים.



תרשים 1: מיקום נקודת הייחוס

הדיון הכיתתי הניב עוד אסטרטגיות רבות. החלפת הרעיונות שנעשתה בין המשתתפים בדיון אפשרה לפרחי ההוראה לחשוב על כיוונים אחרים, חדשים, לדרכי פתרון של הבעיה, שלא חשבו עליהם בלי הגירויים שקיבלו זה מזה. לפי גישת הקונסטרוקטיביזם הסוציו-תרבותית, לקבוצה יש תפקיד משמעותי בתהליך הלמידה של הפרט (Cobb, Wood, & Yackel, 1993). הקבוצה מעודדת את היחיד לעשות רפלקציה על דרך החשיבה שלו ובשל כך הוא יכול לחדד את ההבנה שלו (Cobb et al., 1997). בעבודה בתוך קבוצה, היחיד יכול להגיע ליותר ממה שהוא היה יכול אילו הוא היה עובד לבדו (Voigt, 1994).

ההצעה לבדוק האם אפשר למצוא את הזווית הפנימית של המחומש כאשר הנקודה H (שחוברו אליה קדקודי המחומש) לא נמצאת בתוך המחומש, אלא על השפה שלו, או אפילו מחוצה לו, מזכירה במעט את האופן שבו אפשר לצאת מבעיה חקירה אחת לבעיות אחרות רבות בעזרת המודל של 'מה אם לא?' (Brown & Walter, 1990). רק שבניגוד למודל של 'מה אם לא?', אשר לפיו משנים את אחד מנתוני הבעיה ובדקים מה קורה במקרה זה, כאן בדקו הסטודנטים מה קורה לדרך הפתרון של הבעיה כאשר משנים במעט את נקודת המוצא של הפתרון והאם מתקבלת דרך פתרון אחרת לבעיה לאחר שינוי זה.

במהלך החיפוש אחר דרכי פתרון חדשות, הרגישו פרחי ההוראה שעליהם לעשות שימוש בידע קודם שהם מכירים, כגון סכום הזוויות במשולש, הקשר שבין זווית חיצונית לזווית פנימית במשולש וכדומה. בתהליך הפתרון נעשה שימוש בידע קודם זה כדי לפתור את הבעיה החדשה. כמו כן נוצרו קשרים בין מושגים מתמטיים אחרים, קשרים אשר על חשיבותם החינוכית דיברו חוקרים מסוימים (למשל Cornu & Dubinsky, 1989; Coxford, 1995; Even, 1990; Hiebert & Carpenter, 1992; Reimer & Reimer, 1995). לפי נוס, היילי והוילס (Noss, Healy, & Hoyles, 1997), המשמעות המתמטית נגזרת מתוך הקשרים בתוך המתמטיקה. קשרים הקושרים בין ידע מתמטי חדש לידע מתמטי ישן, ומעצבים את הידע החדש כחלק מתוך המערכת המתמטית הקיימת.

ישנה הסכמה רחבה בקרב חוקרים כי קישור רעיונות מתמטיים הנעשה בין השאר על-ידי שימוש באסטרטגיות שונות לפתרון של אותה בעיה הוא אלמנט חשוב של חשיבה מתמטית מתקדמת (צמיר ואחרים, 2010; Leiken & Lev, 2007; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1985; Tall, 2007). העיסוק של פרחי ההוראה בפעילות, המשלבת בעיה שאפשר לפתור אותה בדרכים אחרות, יכול לפתח את המודעות שלהם לחשיבות העיסוק בבעיות מסוג זה גם בכיתה שלהם, והתרומה של פעילויות מסוג זה לתהליך הלמידה של הלומדים בכיתה (Bingolbali, 2011; Leikin & Lev, 2007; Levav-Waynberg & Leikin, 2009). לפי סטופל ובן-חיים (2014), הצגת הדרכים האחרות בכיתה מקדמת את ההבנה המתמטית של התלמידים בכך שהיא חושפת לפניהם נקודות מבט אחרות להתבוננות בבעיה. כמו כן ריבוי דרכי פתרון לבעיה אחת מאפשר את ההתפתחות של ידע מתמטי מקושר לא רק בעבור הסטודנטים, אלא גם בעבור מוריהם.

מאמר זה מציג דוגמה למשימה פשוטה שאפשר לפתור אותה בדרכים אחרות ומגוונות. אפשר לראות כי גם משימה, אשר במבט ראשון נראית בסיסית ופשוטה, עבודה אינדיבידואלית, רפלקציה על התוצאות שהתקבלו ודיון כיתתי – יכולים להביא לידי דרכי פתרון מעניינות ומיוחדות. דיון באסטרטגיות פתרון אלו יכול להביא לידי בחינת מצבים שלא נלקחו בחשבון בתחילת הפעילות, וביצוע הכללות מתמטיות

לדרכי הפתרון המגוונות שהתקבלו. אנו מקוות כי פרחי ההוראה ילמדו מהתהליך האישי והכיתתי, שחוו במהלך פתרון המשימה והדיון באסטרטגיות הפתרון המגוונות, וישלבו גם הם בהוראה שלהם בכיתה עבודה עצמית, הצגת אסטרטגיות פתרון מגוונות, דיון באסטרטגיות אלו וניסיון להגיע להכללות אחרות מתוך הפתרונות שייציגו תלמידיהם בכיתה.

מקורות

- סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 1, 80-107.
- צמיר, פ', תירוש, ד', טבח, מ' ולוינסון, א' (2010). האם תוכל לעשות זאת בדרך שונה? על מטלות שלהן כמה פתרונות. *עלון דע-גן*, 3, 30-37.
- Benson, J., & Borkovitz, D. (1982). A new angle for constructing pentagons. *Mathematics Teacher*, 75(4) 288-290.
- Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education*, 36(1), 18-31.
- Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, N.H.: Heinemann Educational Books.
- Brown, S. I., & Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.
- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking a classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Socio-cultural dynamic in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200.
- Cornu, B., & Dubinsky, E. (1989). Using a cognitive theory to design educational software. *Education and Computing*, 5(1-2), 73-80.
- Coxford, A. F. (1995). The case for connections. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-13). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-544.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
- Kich, K. (1979). Inscribed polygons lead to an interesting limit. *Mathematics Teacher*, 72(4), 294-295.
- Killgrove, R. B., & Koster, D. W. (1991). Regular polygons with rational area or perimeter. *Mathematics Magazine*, 64(2), 109-114.
- Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 500-507.
- Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 776-785). Lyon: Service des publications, INRP.
- Muscat, J. P. (1992). Polygons and stars. *Mathematics in School*, 21(2), 25-28.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Noss, R., Healy, L., & Hoyle, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 202-231.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995). Connecting mathematics with its history: A powerful, practical linkage. In P. A.

- House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 104-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla.: Academic Press.
- Tall, D. (2007, March). *Teachers as mentors to encourage both power and simplicity in active material learning*. Paper presented at the Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing, Abu-Dhabi.
- Troccoli, J. A. (1987). Polygons made to order. *The Mathematics Teacher*, 80(1), 44-50.
- Tzmir, P., Tirosh, D., & Stavy, R. (1997). Is the length of the sum of three sides of a pentagon longer than the sum of the other two sides? In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 214-221). Lahti, Finland: University of Helsinki & Lahti Research and Training Centre.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 275-298.
- Waters, W. M., Jr. (1987). Finding the area of regular polygons. *The Mathematics Teacher*, 80(4), 278-280.



פרופ' אילנה לביא

מכהנת כראש החוג למערכות מידע ניהוליות במכללת עמק יזרעאל. בוגרת הוראת המדעים במתמטיקה בטכניון. תחומי המחקר שלה הם: התפתחות מקצועית של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה וחקר קשיי לומדים בהבנת מושגים מדעיים (במתמטיקה ובמדעי המחשב). פרסמה מאמרים רבים בנושאים אלו.



ד"ר קרני שיר

סיימה לימודי דוקטורט בנושא 'תפיסות של מטה מושג במתמטיקה - המקרה של הגדרה מתמטית'; בהנחיית פרופ' אורית זסלבסקי בטכניון בשנת 2004. מרצה בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך ובמכללת לוינסקי לחינוך. עוסקת בסוגיות הקשורות במושג ההגדרה המתמטית, ובנושאים שונים מתחום תורת המשחקים.

דיון כיתתי/עצמי בשגיאות כמנוף לשיפור הישגיהם וצמצום שגיאותיהם של תלמידים - המקרה של פונקציות טריגונומטריות

אמאל שריף-רסלאן, המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה
רג'א אבו שאהין, בית-ספר ניסויי תיכון מסעדה, המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה

תקציר

במחקר זה נחקרה השפעתה של שיטת לימוד, אשר מתבססת על דיון בבעיות מלוות בשגיאות בנושא פונקציות טריגונומטריות, על הישגיהם וצמצום שגיאותיהם האופייניות של התלמידים. במחקר השתתפו 50 תלמידים מכיתה י"א, בעלי רקע סוציו-אקונומי דומה, הלומדים 4 יח"ל במתמטיקה. הם חולקו לשתי קבוצות: 25 תלמידים בקבוצת הביקורת למדו בשיטה מסורתית, ו-25 תלמידים בקבוצת הניסוי למדו בשיטת דיון כיתתי וגם דיון עצמי בפתרונות שגויים. לפני תחילת הניסוי נעשתה חזרה על חומר הטריגונומטריה שנלמד בכיתה י' – התלמידים למדו שני שיעורים בשיטה המסורתית וביצעו מבחן מקדים. בשלב הבא, קבוצת הביקורת המשיכה ללמוד את נושא הפונקציות הטריגונומטריות בשיטה המסורתית, ולעומתה קבוצת הניסוי למדה נושא זה בשיטה שהתבססה על פעילות של דיון כיתתי ודיון עצמי בבעיות המלוות בשגיאות. בסוף התהליך ניגשו שתי הקבוצות לבחינת הפוסט בנושא פונקציות טריגונומטריות.

הממצאים העיקריים במחקר זה התבטאו בעובדה שהישגי התלמידים בקבוצת הניסוי היו גבוהים מהישגי התלמידים בקבוצת הביקורת. יתרה מזו, חל צמצום בשגיאותיהם של התלמידים מקבוצת הניסוי. יש לציין, כי ההשפעה של שיטת הוראה זו על הבנים ועל הבנות הייתה דומה.

המסקנה העיקרית של מחקר זה היא ששיטת הדיון הכיתתי/עצמי בבעיות המלוות בשגיאות בנושא טריגונומטריה משפרת את הישגי התלמידים בנושא, וגם מצמצמת את השגיאות באותו נושא. כיוון שכך, אנו ממליצים לשלב שיטה זו בהוראת הטריגונומטריה בפרט ובהוראת המתמטיקה בכלל.

מילות מפתח: דיון כיתתי; דיון עצמי; שגיאות; טריגונומטריה; בית-ספר תיכון.

1. מאמר זה מתבסס על עבודת גמר לתואר שני של רג'א אבו שאהין (2014). השפעת שילוב פעילות של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות תלמידים על הישגיהם וצמצום שגיאותיהם בנושא פונקציות טריגונומטריות (עבודת מוסמך). המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה – בהנחיית ד"ר אמאל שריף-רסלאן.

רקע תאורטי

בתחום הוראת המתמטיקה רווחת הדעה, שהוראה מתוך התייחסות לשגיאות, טעויות ותפיסות מוטעות, הופכת את הלמידה למשמעותית ועשויה לשפוך אור על הבנת הלומדים ועל קשייהם (תמיר, זיו ופסקין, 1995).

דוד (2007) ציינה כי חשיפת התלמידים לשגיאות אופייניות עשויה לשמש כלי חשוב, אשר יתרום להבנת הנושא הנלמד וגם עשוי להעמיק את התובנות המתמטיות של הלומדים.

לאחרונה נשמעות קריאות רבות להיעזר בשגיאות התלמידים ככלי לימודי במהלך ההוראה, כאשר הטענה העומדת מאחורי קריאות אלו היא, שניצול הידע לגבי שגיאות אפשריות של תלמידים כבר במהלך הוראת הנושא המתמטי הנלמד, עשוי לסייע במניעתן של שגיאות אלו (רייז, 2007).

נדון תחילה בהגדרת שני מונחים עיקריים במחקר זה: שגיאה וטעות.

הפנר (2004) הגדיר שגיאה כבחירה בפתרון שאינו נכון או בדרך שאינה נכונה, בזמן שקיים פתרון נכון. לעומת זאת הפנר (שם) הגדיר **טעות** כבחירה בדרך שאינה נכונה, כאשר בזמן הבחירה לא ידועה הדרך הנכונה. כלומר שגיאה היא בעצם ההבדל בין תבנית מקובלת כנכונה להשגת המטרה לבין תבנית נבדקת, שנכתבה להשגת מטרה דומה. במילים אחרות, שגיאה מתוארת במונחים של 'מה עשה התלמיד לא נכון?', ואילו טעות מתוארת במונחים של 'מדוע עשה התלמיד שגיאה מסוימת?'

ראוי לציין כי טעויות של התלמידים אינן תוצאה של חוסר תשומת לב רגעית, אלא בעיקר מונעות ממודלים אינטואיטיביים ראשוניים, אשר יוצרים את החוקים השגויים (Fischbein, 1990).

יש הטוענים, כי שיפור הלמידה והעמקת הידע המתמטי נובעים מתוך שימוש בשגיאות ו/או בטעויות של תלמידים, וביצועם נכון ותכליתי. לכן חשוב שהמורה ישלב שיטה זו בשלבים הראשונים של הוראת הנושא כדי למנוע שגיאות בעתיד (אביטל, 1981; פרקש וצמיר, 2008).

ישנם חוקרים בחינוך המתמטי (דוד, 2007; Weber, 1987; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 2005), אשר עסקו בניתוח הבנת צורכי התלמידים ותהליכי למידה, בחקר סוגי שגיאות של תלמידים ובסיבות לשגיאות אלה. בשנים האחרונות מורים עשו שימוש ישיר בשגיאות תלמידים במהלך ההוראה בכיתה.

מחקרים אחרים בחינוך עסקו בשימוש בשגיאות בהוראה (Tugend, 2014; McMillan & Turner, 2011). מחקרים אלה ציינו עמדות מורים מסוימות כלפי שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה, אשר ניכרו בשלוש גישות: הגישה המסורתית – עמדה זו גורסת כי יש להימנע מדיון בשגיאות במהלך ההוראה; השגיאות ככלי לימודי – עמדה זו מציינת כי שיפור הידע בנושא הנלמד ניכר בזיהוי הקשיים ודרכי החשיבה האחרים של הלומדים; השגיאות כמטרה – עמדה זו מבקשת לדון בשגיאות כדי להרחיב את הידע המדעי ולהעמיק בו.

חוקרים בחינוך המתמטי (Polya, 1973; Schoenfeld, 1985; Watson, 1990) תיארו את השלבים בפתרון בעיות במתמטיקה, שאפשר לסכם לפי פוליה ושונופילד (שם) בארבעה שלבים: הבנת הבעיה, עריכת תכנית, ביצוע התכנית וביקורת (סקירה לאחור). לעומתם, ווטסון (Watson, 1990) נשען על

חמישה שלבים בפתרון בעיות מתמטיות: קריאה, הבנה, העברה, מיומנויות עבודה וקידוד. יתרה מזו, ווטסון (שם) הציע מיון שגיאות, אשר התבסס על זיהוי השלב שבו התרחשה השגיאה: שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת הקריאה; שגיאות הנובעות ממגבלות בהבנת הנקרא; שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת העברה; שגיאות הנובעות מחסכים במיומנויות עבודה; שגיאות הנובעות מחסכים בתרגום או בקידוד; שגיאות שמקורן בחוסר מוטיבציה; שגיאות שמקורן ברשלנות; שגיאות שמקורן בייצוג גרוע של הבעיה. במחקר הנוכחי נישען על השלבים שהציע ווטסון (שם) ובפרט נעסוק בשגיאות לפי שלבים אלה.

דיון כיתתי / עצמי בשגיאות

דיון בשגיאות נחשב למיומנות הדורשת רמה גבוהה של חשיבה, כיוון שהוא מורכב מתחומי חשיבה רבים: חשיבה סימבולית, חשיבה ביקורתית, חשיבה יצירתית, חיפוש סיבות לתופעה, נימוק טענות, בחירה נכונה לשיטה המתאימה לבעיה ושימוש בידע קודם (Greenfield, 1987). גרינפילד (שם) טוען ששיטת לימוד, המתבססת על דיון כיתתי בשגיאות, מורכבת משלושה שלבים: שלב ראשון – היכולת של הלומד לאבחן את הטעות בשאלה; שלב שני – היכולת של הלומד להסביר את הטעות; שלב שלישי – היכולת של התלמיד לבחור אסטרטגיה מתאימה לפתרון נכון.

אלרו וסקובסמוס (Alro & Skovsmose, 1996) התמקדו בשלוש שאלות שיש לענות עליהן, כדי להביא את התלמידים לידי תיקון שגיאותיהם: מי מעורב בתיקון? איך יתבצע התיקון? מהי מהות התיקון? כמובן שהמורה מקבל עליו את האחריות להביא את התלמידים לידי פתרון הנכון.

מי מעורב בתיקון השגיאה?

תיקון במליאה לעומת תיקון אישי – תיקון במליאה הוא תיקון פומבי שנעשה מול מליאת הכיתה. המטרה היא להעלות את מודעות כלל התלמידים לשגיאה, לסוגיה ולסיבות אפשריות. לעומת זאת תיקון אישי מערב רק את התלמיד עצמו, כדי לגבש נקודת מוצא, אשר תשמש בהמשך להפנמה נכונה של הידע, וזה מומלץ כאשר הסוגיה היא אישית ואינה חלה על תלמידים אחרים, כלומר השגיאה לא רלוונטית כלפיהם. תיקון מסוג זה מומלץ כאשר תלמיד שגה לא בטוח בעצמו כדי לדון בשגיאתו בפומבי, כיוון שזה עלול לפגוע בדימוי העצמי שלו.

איך יתבצע תיקון השגיאה?

תיקון ישיר ומפורש לעומת תיקון עקיף – התיקון מפורש כאשר המורה מביא שגיאה ודן בה דיון מפורש וברור, למשל כאשר תלמיד טועה: המורה רושם את הפתרון שלו על הלוח, אומר לתלמידים שיש בפתרון שגיאה ושואל אותם היכן לדעתם מופיעה השגיאה. או כאשר מספר תלמידים מציגים פתרונות על הלוח: דנים בכל הפתרונות הנכונים והשגויים, מציינים את הפתרונות הנכונים ומאפיינים את הפתרונות השגויים. המורה יכול לעשות גם תיקון עקיף – זהו תיקון לא ישיר, שאפשר להבינו כאשר מפרשים את ההקשר הסוציו-תקשורתי בכיתה.

מהי מהות תיקון השגיאה?

אלרו וסקובסמוס (Alro & Skovsmose, 1996) טוענים כי בסמכותם של המורה ו/או ספר הלימוד לקבוע כי מצב מתמטי הוא שגיאה. למורה יש את היכולת וגם את הסמכות לסווג את השגיאה וגם לדון דיונים מתאימים בשגיאות מגוונות, לדוגמה הדיון בשגיאה מסוג הצבה שגויה של ערכים אמור להיות שונה מהוכחת טיעון שלא מתאים לבעיה.

באהר והראל (Behr & Harel, 1990) טוענים כי קונפליקט קוגניטיבי הוא לא תמיד היבט שלילי של הלמידה. בהקשר זה, פרקש וצמיר (2008) טוענים כי התלמיד, שנחשף לקטגוריות שונות של שגיאות בדרכו לרמת חשיבה גבוהה כמתוכנן, חייב לעבור שלב בשלות קוגניטיבית, כי הטעות גורמת לקונפליקט קוגניטיבי שיש לו תפקיד חשוב בתהליך הלמידה ובעיקר למידה עצמית. כמו כן ליגטון ועמיתיו (Leighton, Chu, & Seitz, 2012) טוענים כי פעילות הנשענת על שגיאות עשויה לספק יתרונות חשובים: השתתפות בפתרון מאתגר של בעיות; עיסוק בחקר; פיתוח תחושת ההכרח להצדיק ולנמק כל צעד בפתרון; פיתוח כושר הביטוי.

אפשר לראות בשגיאות שני צדדים: מצד אחד דיון כיתתי ומצד אחר למידה עצמית. גירון (2007) עוסקת בדיון כיתתי, היא הדגישה שהדיון בכיתה תורם רבות להבנת מושגים במתמטיקה אצל התלמיד ונותן לו לפרש את השגיאות ואת הטעויות בעזרת ידע קודם. לעומתה, צימרמן (Zimmerman, 2001) עוסקת בלמידה עצמית וטוען כי למידה נכונה נעשית אצל תלמידים מתוך למידה עצמית הנשענת על מאפיינים קוגניטיביים מוטיבציוניים והתנהגותיים של הלומד הפעיל בלמידה. לדעתו, המורה הוא המדריך שמכוון את התלמיד לפתח בעצמו הבנה בעזרת חשיבה עצמית.

טריגונומטריה והוראתה

חלק מהמחקרים בחינוך המתמטי, הקשורים לטריגונומטריה, עסקו בהבנה רלציונית של הטריגונומטריה ובשיטות הוראה המובילות להבנה מושגית (Sokolowski & Rackley, 2011; Wongapiwatkul & Laosinchai, 2011), וחלק אחר עסק בשגיאות התלמידים בנושא (קלונובר, 1997; Gür, 2009).

המושג פונקציה בכלל, והפונקציה הטריגונומטרית בפרט, הם שני מושגים קשים לתפיסה בעבור תלמידים בלימודי המתמטיקה בחטיבה העליונה (קלונובר, 1997). בלאקט וטאל (Blackett & Tall, 1991) סבורים שהשלבים הראשונים של למידת פונקציות טריגונומטריות הם רצופי קשיים. פונקציות אלו הן פעולות שאי אפשר להגדיר אותן בנוסחאות אלגבריות על-ידי פעולות אריתמטיות. למרות הקשיים שתועדו עם למידת הפונקציות הטריגונומטריות, נמצא כי ספרות המחקר החינוכי העוסקת בתחום דלילה מאוד. בדרך כלל המחקרים האמפיריים שעוסקים בנושא זה השוו בין שתי קבוצות של תלמידים שלמדו בדרכים אחרות, כמו בלאקט וטאל (שם), אשר בחנו שתי קבוצות של סטודנטים באותו בית-ספר: הקבוצה הראשונה השתתפה בקורס ניסיוני עם מחשבים שאפשרו לתלמידים לחקור קשרים מספריים וטריגונומטריים בחקירה אינטראקטיבית, ואילו הקבוצה השנייה למדה טריגונומטריה בלימוד פרונטלי מסורתי. המסקנות של החוקרים מראות על הבנה טריגונומטרית רבה יותר של הקבוצה הראשונה. קנדל וסטייסי (Kendal & Stacey, 1997), הסיקו כי לתלמידים אשר למדו פונקציות

טריגונומטריות בהקשר של משולש ישר זווית יש ביצועים טובים יותר מאשר תלמידים שלמדו את הנושא על-ידי מעגל היחידה. אף על פי כן הם ציינו שגישות רבות בהוראת הטריגונומטריה כמו גישת 'המשולש הישר זווית' מדגישות ומטפחות כישורים של הפרוצדורה ולא תורמות להבנת פונקציות טריגונומטריות. שאר הספרות של טריגונומטריה עוסקת בעיקר בטכניקות הוראה שיכולות להשלים או להחליף את שיטת ההוראה הסטנדרטית (Miller, 2001).

שגיאות אופייניות בטריגונומטריה

כפי שהזכרנו לעיל גור ווטסון (Gür, 2009; Watson, 1990) עסקו במיון שגיאות בכלל. גור (שם) עסק במיון השגיאות האופייניות בטריגונומטריה בפרט, המיון שלו כלל את השגיאות להלן: שימוש לא נכון במשוואות; סדר פעולות לא נכון; הערך והמקום של $\cos$ ו- $\sin$; שימוש לא נכון בנתונים; שפה לא תקינה; הסקה לוגית לא תקפה; הגדרה מעוותת; שגיאות טכניות.

ראוי לציין, כי העקרונות המנחים לבדיקת בעיות בטריגונומטריה בבחינות הבגרות במתמטיקה נשענים על מיון השגיאות, כפי שמופיע בחוזר המפמ"ר, כי יש להפסיק לבדוק תשובה של הנבחן שבה הפתרון מבוסס על הנחת יסוד שגויה, למשל הכללת יתר וגישה אינטואיטיבית לפונקציות טריגונומטריות ולא לפעול לפי ההגדרה (פעולות אינטואיטיביות על הארגומנט); פתרון מוטעה של משוואות טריגונומטריות; בלבול בין רדיאנים למעלות; חוסר יכולת לקשר בין ערכים מספריים ובין התיאור הגרפי של הפונקציה (עלייה וירידה, ציור סקיצה של הגרף) (משרד החינוך התרבות והספורט, 2011).

בהתבסס על כל האמור לעיל, במחקר הנוכחי נדון בקטגוריות להלן: *הבנה לקויה בטריגונומטריה* (הכוללת שפה לא תקינה, הסקה לוגית לא תקפה והגדרה מעוותת); *שימוש שגוי בנוסחאות*; *שגיאות טכניות*; *אי ריכוז ורשלנות*; *אי הבנת הנקרא* (שימוש שגוי בנתונים).

שאלות המחקר

1. האם השילוב של שיטת לימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות ישפיע על הישגי התלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות?
 - 1.1. האם קיים הבדל בין הישגי הבנים להישגי הבנות בנושא טריגונומטריה לפני שיטת הלימוד המוצעת?
 - 1.2. האם הישגי בנים והישגי בנות מושפעים באותה מידה משילוב של שיטת הלימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות בנושא פונקציות טריגונומטריות?
2. כיצד תשפיע שיטת ההוראה המוצעת על צמצום השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב התלמידים?

השערות המחקר

1. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, ישפר את ההישגים של התלמידים בטריגונומטריה.
 - 1.1. אין הבדל בין הישגי בנים לבנות בנושא פונקציות טריגונומטריות לפני שיטת הלימוד המוצעת.

- 1.2. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, ישפר את ההישגי התלמידים ללא תלות במגדר.
2. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות יצמצם את השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב תלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות.

חתודולוגיה

המשתתפים

אוכלוסיית המחקר היא תלמידים מכיתה י"א, אשר לומדים בבית-ספר תיכון בצפון הארץ. בבית-ספר זה לומדים 523 תלמידים ותלמידות: 45% בנים, 55% בנות. בכיתה י"א יש שתי קבוצות של 50 תלמידים: 30 בנות (60%), 20 בנים (40%). בשל נהלים בית-ספריים, חולקו התלמידים לשתי קבוצות הומוגניות מבחינה סוציו-אקונומית ולימודית – הם לומדים ברמה של 4 יח"ל במתמטיקה ובעלי רקע סוציו-אקונומי בינוני.

כלי המחקר

כדי לבדוק את ההשפעה של שיטת הלימוד על הישגיהם ועל שגיאותיהם של התלמידים פותחו שני מבחנים ששימשו אותנו ככלי המחקר. כמו כן נבנו בעיות בטריגונומטריה עם פתרונות שגויים, שגם הם שימשו אותנו ככלי מחקר.

מבחן מקדים (pre): מטרת המבחן הייתה לבדוק את ההבדל בהישגי התלמידים בנושא הטריגונומטריה בין שתי הקבוצות (ניסוי וביקורת). המבחן נמשך 60 דקות וכלל שבע שאלות שעסקו בנושאים של הפונקציות הטריגונומטריות שלמדו בכיתה י' (ראה נספח א: לפני המחקר). נושאים אלה הם הקדמה לנושא של פונקציות טריגונומטריות, וכללו הגדרות, זהויות, נוסחאות, שימוש במחשבון ומשוואות פשוטות. המבחן נמסר לשתי הקבוצות (הניסוי והביקורת) באותה שעה ובאותו יום.

פתרונות שגויים בטריגונומטריה: אלה הם פתרונות מלאים של תרגילים בטריגונומטריה כאשר התלמידים יודעים מראש שהם כוללים שגיאות, ועליהם לאתר אותן ולתקן. התלמידים בקבוצת הניסוי קיבלו שמונה פתרונות שגויים (ראה נספח ב: דוגמה לפתרון שגוי ודיון כיתתי מצומצם בפתרון זה).

מבחן סופי (post): מטרת המבחן הייתה לבדוק את הישגי התלמידים אחרי התערבות מצד אחד (הוראת קבוצת הניסוי לפי שיטת הדיון הכיתתי/עצמי בשגיאות), ומצד אחר למיין את השגיאות של התלמידים לפי קטגוריות שעלו בספרות המקצועית (ראה רקע תאורטי). המבחן הכיל שבע שאלות שעוסקות בפונקציות טריגונומטריות, נמסר לשתי הקבוצות (קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי) באותו יום ובאותו זמן ונמשך 135 דקות. המבחן בנוי משבע שאלות, הניקוד לכל סעיף נגזר מהנחיות שמופיעות בחוזר מפמ"ר המתמטיקה לשנת 2012 בהתאם לרמת המורכבות והקושי של הסעיף יחסית לסעיפים אחרים. המבחן נותח לפי חלקים (ראה נספח ג).

תוקף ומהימנות: כדי לשמור על סטנדרטים של תוקף ומהימנות, עברו השאלונים תוקף אצל מומחים בהוראת המקצוע: המפקח המקצועי במתמטיקה ורכז המקצוע בבית הספר – היו להם הערות ממוקדות

שתרמו במידה ניכרת לתיקוף שני השאלונים. לבדיקת המהימנות, הועברו שני המבחנים ל-20 תלמידים הלומדים ברמת 4-5 יח"ל בכיתה י"א בבית-ספר תיכון אחר, מתוך תיאום והתייעצות עם רכז המקצוע בבית-ספר השני (הרכז בעל ניסיון רב בהוראה של 25 שנים, אף הוא מלמד קבוצה של 4 יח"ל); המהימנות והעקיבות הפנימית של המבחן המקדים והמבחן הסופי לפי מקדם אלפא של קרונברך היו $\alpha=0.81$, $\alpha=0.85$ בהתאמה.

הליך המחקר

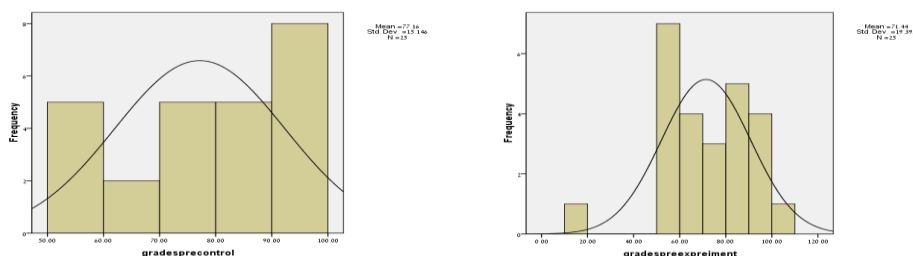
שתי הקבוצות (ביקורת וניסוי) עשו חזרה בשני שיעורים על התכנים בטריגונומטריה שנלמדו בכיתה י' (שנה לפני המחקר). לאחר מכן הועבר המבחן המקדים. אחר כך לימד המורה את שתי הקבוצות בשמונה שיעורים את הנושא של פונקציות טריגונומטריות בגישה המסורתית (לימוד תכנים ופתרון תרגילים ובעיות בנושא בגישה הפרונטלית. לא היה דיון בשגיאות שהתלמידים עלולים לעשות, אך היו דיונים כיתתיים בדרכי פתרון בעיות). בתום ההליך הועבר המבחן הסופי. המורה, שהיה גם המשגיח בזמן הבחינה, דיווח שהזמן המוקצה לכל בחינה התאים מאוד והניסוח של השאלות היה די ברור.

ממצאים

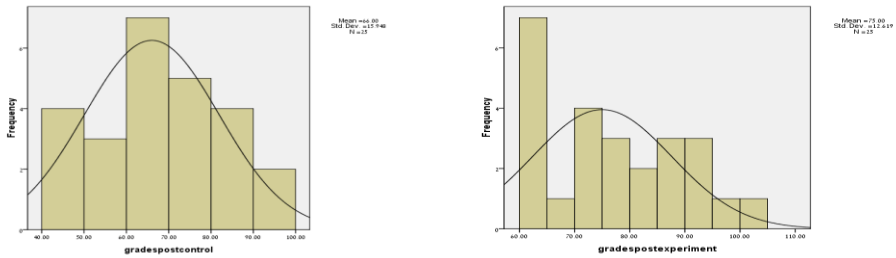
1. בדיקת השערת המחקר הראשונה

בדיקת ההשפעה של שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, על שיפור הישגיהם של התלמידים.

איורים 1 ו-2 מראים את התפלגויות ציוני שתי הקבוצות, קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי, במבחן המקדים (pre) ומבחן הבתר (post) בהתאמה.



איור 1: התפלגות ציוני התלמידים במבחן הקדם: קבוצת הביקורת (ימין) וקבוצת הניסוי (שמאל)



איור 2: התפלגות ציוני התלמידים במבחן הבר: קבוצת הביקורת (ימין) וקבוצת הניסוי (שמאל)

כדי להבטיח את חסינות השימוש במבחן t , נבדקה הנחת שיווין שוניות, ונמצא כי $(F = 1.667, p = 0.203 > 0.05)$, כלומר נמצא כי במדגם שלנו $(N = 25)$, מבחן t עדיין חסין בפני הפרת הנורמליות.

ומכאן, ממצאים המתייחסים לכל התלמידים של קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי שלמדו בהוראה מסורתית ולפי שיטת דיון כיתתי/עצמי בהתאמה התבססו על מבחן t ; הממצאים מופיעים בטבלאות 1 ו-2.

מתוך הממצאים בטבלה 1, במבחן הבר (post) חלה ירידה ניכרת בממוצע של קבוצת הביקורת, מ- 72.16 ± 15.15 ל- 66 ± 15.95 , ובלי שינוי רב בסטיית התקן, ואכן, נמצא הבדל סטטיסטי מובהק אצל תלמידי קבוצת הביקורת בשני המבחנים $(p < 0.001)$.

בקבוצת הניסוי לא רואים ירידה כזאת בממוצע בין תוצאות המבחן המקדים לבין תוצאות המבחן הסופי $p = 0.336 > 0.05$. במילים אחרות, לא חל שינוי רב בהישגי התלמידים. במבחן הסופי נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין הישגי התלמידים בשתי הקבוצות $(p = 0.032, p < 0.05)$. במבחן הסופי, ממוצע קבוצת הביקורת הוא 66 ± 15.95 , וממוצע קבוצת הניסוי הוא 75 ± 12.62 . הממוצע גדל ב-9 נקודות, וזהו הפרש ניכר, גם סטיית התקן של קבוצת הניסוי היא פחות מזו של קבוצת הביקורת.

טבלה 1: ממוצעי ציונים גולמיים, סטיות התקן ומבחן t של מדגמים תלויים בשני המבחנים לקבוצות המחקר $(N=25)$

הקבוצה המחקרית	המבחן	ממוצע	סטיות תקן	ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים $p(\text{pre:post})$
הביקורת	pre	77.16	15.146	$< 0.001 (3.8 \times 10^{-9})$
הוראה מסורתית	post	66	15.945	
הניסוי	pre	71.92	15.443	0.336
דיון כיתתי/עצמי	post	75	12.619	

$P < 0.05$

מתוך טבלה 2 אפשר לראות שאין הבדל בין שתי הקבוצות במבחן המקדים. כלומר שתי הקבוצות באותה רמת ידע, ממוצעי הציונים הגולמיים במבחן המקדים של שתי הקבוצות היו די קרובים יחסית וסטיות התקן כמעט זהות. מכל מקום, לא נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין הישגי התלמידים במבחן המקדים (pre) בין שתי הקבוצות ($p=0.34$, $p>0.05$).

טבלה 2: ממוצעי ציונים גולמיים, סטיות התקן ומבחן t של מדגמים תלויים בשני המבחנים לקבוצות המחקר (N=25)

הקבוצה המחקרית	המבחן	ממוצע M	סטיות תקן SD	ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים (ביקורת:ניסוי) p
הביקורת	pre	77.16	15.146	0.23
הניסוי	pre	71.92	15.443	
הביקורת	post	66	15.948	0.032
הניסוי	post	75	12.619	

$P<0.05$

1.1. הממצאים הראו כי אין הבדל מגדרי לפני הניסוי בשתי הקבוצות, קבוצת הביקורת: 80.2 ± 14.7 לעומת 72.6 ± 15.6 (בנים בנות בהתאמה), $p=ns$; קבוצת הניסוי: 68.6 ± 11.2 לעומת 74.13 ± 17.76 (בנים בנות בהתאמה), $p=ns$.

יתרה מזו, הממצאים הראו שגם אחרי הניסוי אין הבדל מגדרי; קבוצת הביקורת: 68.67 ± 15.6 לעומת 62 ± 16.4 (בנים בנות בהתאמה), $p=ns$; קבוצת הניסוי: 72.4 ± 7.88 לעומת 76.7 ± 15 (בנים בנות בהתאמה), $p=ns$.

1.2. כיוון שמספר הבנים ומספר הבנות בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת קטן (>30), בוצע מבחן Kolmogorov Smirnov Normal test עם רמת מובהקות 0.05 כדי לבדוק נורמליות של מדגם הבנים והבנות. התוצאות הראו כי ערכי מבחן Kolmogorov Smirnov, אשר התקבלו עבור מדגם הבנים הם 0.174 ($C_{K-S}^{0.05,10}=0.41>0.174$) ו-0.180 ($C_{K-S}^{0.05,10}=0.41>0.180$), עבור ה- pre-test וה- post-test בהתאמה, כאשר $C_{K-S}^{0.05,-}$ מסמן את הערך הקריטי של Kolmogorov Smirnov Normal test ברמת מובהקות 0.05, לכן ברמת מובהקות 0.05 מתקיים שמדגם הבנים התקבל מהתפלגות נורמלית הן עבור מבחן ה-pre והן עבור מבחן ה-post. ובאותו אופן עבור מדגם הבנות ערכי מבחן Kolmogorov Smirnov שהתקבלו היו 0.249 ($C_{K-S}^{0.05,15}=0.338>0.249$) ו-0.201 ($C_{K-S}^{0.05,15}=0.338>0.201$) עבור ה-pre-test וה- post-test בהתאמה; לכן ברמת מובהקות 0.05 מתקיים שמדגם הבנות התקבל מהתפלגות נורמלית הן עבור מבחן ה-pre והן עבור מבחן ה-post.

טבלה 3 מסכמת את ההבדלים לפני הניסוי ואחריו בין הקבוצות ובתוך הקבוצות. מתוך הטבלה אפשר ללמוד שבקבוצת הביקורת קיים הבדל לפני הניסוי ואחריו בקרב הבנים וגם בקרב הבנות, $p < 0.001$; ואילו בקבוצת הניסוי לא נמצא הבדל לפני ואחרי ההתערבות בקרב בנים וגם בקרב בנות, $p = ns$. ממצא זה עולה בקנה אחד עם הממצאים לקבוצות ביקורת וניסוי בשלמותן (טבלה 2).

טבלה 3: השוואה בין בנים לבנות (קבוצת ביקורת – $N_{\text{בנים}}=15$; קבוצת הניסוי – $N_{\text{בנות}}=10$)

p בנות (pre:post)	בנות		p בנים (pre:post)	בנים		
	post	pre		post	pre	
3.74×10^{-5}	62 (16.4)	72.6 (15.4)	2.54×10^{-5}	67.68 (15.6)	80.2 (14.7)	ביקורת
ns	76.7 (15)	74.13 (17.76)	ns	72.4 (7.88)	68.6 (11.2)	ניסוי
	0.0353	ns		ns	0.0358	p(ביקורת:ניסוי)

(סטיית תקן בסוגריים)

ועוד זאת, מתוך הנתונים בטבלה 3 אפשר ללמוד שבקבוצת ה**בנים** היה הבדל לפני הניסוי ואחריו רק לפני ההתערבות, $p = 0.0358$, ואילו בקבוצת ה**בנות** ההבדל היה **אחרי** הניסוי, $p = 0.0353$. בשל הממצאים בטבלה 3, ובשל המספר הקטן של בנים ובנות בשתי הקבוצות, נסתפק בהמשך הניתוח לכל אחת מקבוצות ביקורת וניסוי בשלמותן, כלומר לא ייבדקו הבדלים מגדריים.

2. בדיקת השערת המחקר השנייה

בדיקת ההשפעה של שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות על צמצום השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב תלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות.

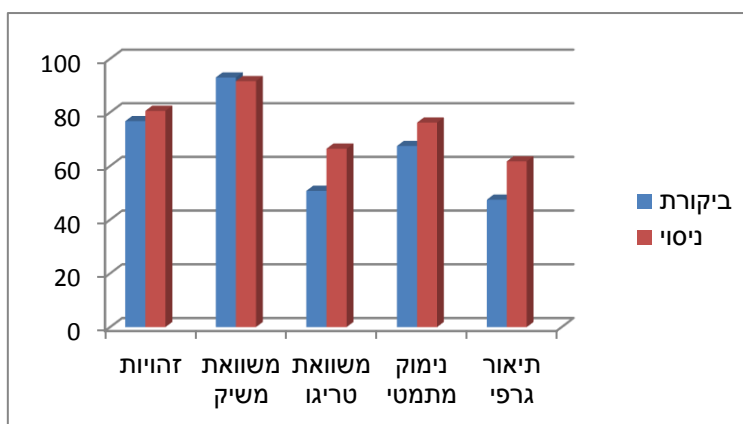
ממצאים המתייחסים להישגי כל 50 התלמידים לפי קטגוריות המתייחסות לתוכן של נושא הטריגונומטריה, כאשר 25 מהם (קבוצת הביקורת) למדו בשיטה פרונטלית ו-25 אחרים (קבוצת הניסוי) למדו לפי שיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות.

בעזרת הניתוח של תכני הטריגונומטריה, כפי שפורטו ברקע התאורטי, נעשתה חלוקת מבחן הפוסט (post) לחמש קטגוריות שונות, בהתאם למיומנות הנדרשת: מעגל טריגונומטרי, זהויות (שאלה 1); משוואת משיק (שאלה 2); מחזוריות, משוואות טריגונומטריות, נקודות קיצון, עלייה וירידה (שאלות 3 עד 5); יכולת הנימוק המתמטי (שאלה 6); תיאור גרפי של פונקציה (שאלה 7).

טבלה 4: סיכום ממצאים (ממוצעי הציונים, סטיות התקן ומובהקות) לפי קטגוריות

הקטגוריה לפי תוכן	הביקורת		הניסוי		ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים
	ממוצע	סטיות תקן SD	ממוצע M	סטיות תקן SD	
מעגל טריגונומטרי, זהויות	76.52	17.4	80.56	15.8	0.19
משוואת משיק	93	7.88	91.64	8.99	0.31
מחזוריות, משוואות טריגונומטריות	50.72	16.38	66.44	14.40	<0.01
יכולת הנימוק המתמטי	67.44	15.34	76.2	11.23	0.01
תיאור גרפי של פונקציה	47.44	16.36	61.72	21.97	0.01

P<0.05



איור 3: ממוצע הציונים במבחן הפוסט (post) לשתי הקבוצות לפי הקטגוריות

לבדיקת ההשערה השנייה נערך מבחן t למדגמים תלויים, בטבלה 4 ובאיור 3 אפשר לראות שהממוצעים של הקטגוריה – משוואת המשיק – של שתי הקבוצות, הם גבוהים וגם קרובים אחד לשני, ונמצא שאין הבדל סטטיסטי מובהק בין קבוצת הביקורת לבין קבוצת הניסוי ($p=0.31>0.05$). התמונה דומה בקטגוריה של מעגל טריגונומטרי וזהויות, הממוצעים גם טובים וגם קרובים אחד לשני ואין הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.19$).

בקטגוריה הרביעית – יכולת הנימוק המתמטי – הממוצע של קבוצת הניסוי הוא 11.23 ± 76.2 לעומת 15.34 ± 67.44 של קבוצת הביקורת, נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p<0.01$). בשתי הקטגוריות של מחזוריות ומשוואות ושל תיאור גרפי, הממוצעים של קבוצת הביקורת הם נמוכים מאוד מהממוצעים של קבוצת הניסוי. מעניין לראות שסטיות התקן אינן באותה מגמה, בקטגוריה השלישית

הן די קרובות, אבל בקטגוריה החמישית סטיית התקן של קבוצת הניסוי היא גדולה יותר. בשתי הקטגוריות האלו נמצא הבדל סטטיסטי מובהק ($p < 0.01$).

להשלמת התמונה להסקת מסקנות נבדקו תשובות התלמידים בשתי הקבוצות ביקורת וניסוי, כאשר מתייחסים לנכונות התשובות לכל שאלה במבחן הפוסט ובטבלאות 5 ו-7.

טבלה 5: התפלגות תשובות קבוצת הביקורת במספרים ובאחוזים במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	מס' תשובות נכונות	מס' תשובות חלקיות	מס' התשובות הלא נכונות	תשובות נכונות באחוזים	תשובות חלקיות באחוזים	תשובות לא נכונות באחוזים
1	8	13	4	32%	52%	16%
2	15	10	0	60%	40%	0%
3	5	11	9	20%	44%	36%
4	6	12	7	24%	48%	28%
5	6	11	8	24%	44%	32%
6	7	11	7	28%	44%	28%
7	4	10	11	16%	40%	44%

השגיאות של התלמידים במבחן (post) חולקו לחמש קטגוריות כפי שמופיע בטבלאות 6, 8 ו-9. החלוקה התבססה על העקרונות המנחים בבדיקת בחינות הבגרות במתמטיקה (משרד החינוך התרבות והספורט, 2012), וגם בהסתמך על התאוריה של ווסטון (Watson, 1990).

טבלה 6: התפלגות לפי שגיאות התלמידים בקבוצת הביקורת במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	הבנה לקויה	שימוש שגוי בנוסחאות	שגיאות טכניות	אי ריכוז ורשלנות	שימוש מוטעה בנתונים
1	60.2%	30.5%	6.1%	0%	3.2%
2	20%	58.7%	21.3%	0%	0%
3	49.7%	14.1%	15.8%	20.4%	0%
4	39.7%	29.4%	16.2%	0%	14.7%
5	50.1%	25%	15%	5.21%	4.7%
6	48.2%	42.78%	9.02%	0%	0%
7	65.26%	0%	16.5%	11.1%	7.14%
ממוצע	47.6%	28.64%	14.28%	5.24%	4.24%

בטבלאות 5 ו-6 מוצגות ההתפלגויות של שגיאות התלמידים בקבוצת הביקורת, במבחן הסופי, הן לפי שאלות והן לפי קטגוריות (שיפורטו בהמשך).

לעומת זאת בטבלאות 7 ו-8 מוצגות ההתפלגויות של שגיאות התלמידים בקבוצת הניסוי, במבחן הסופי, הן לפי שאלות והן לפי קטגוריות.

טבלה 7: התפלגות תשובות קבוצת הניסוי במספרים ובאחוזים במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	מס' תשובות נכונות	מס' תשובות חלקיות	מס' התשובות הלא נכונות	תשובות נכונות באחוזים	תשובות חלקיות באחוזים	תשובות לא נכונות באחוזים
1	9	13	3	36%	52%	12%
2	11	14	0	44%	56%	0%
3	9	10	6	36%	40%	24%
4	10	9	6	40%	36%	24%
5	10	10	5	40%	40%	20%
6	9	12	4	36%	48%	16%
7	9	8	8	36%	32%	32%

טבלה 8: התפלגות לפי שגיאות התלמידים בקבוצת הניסוי במבחן המסכם (post)

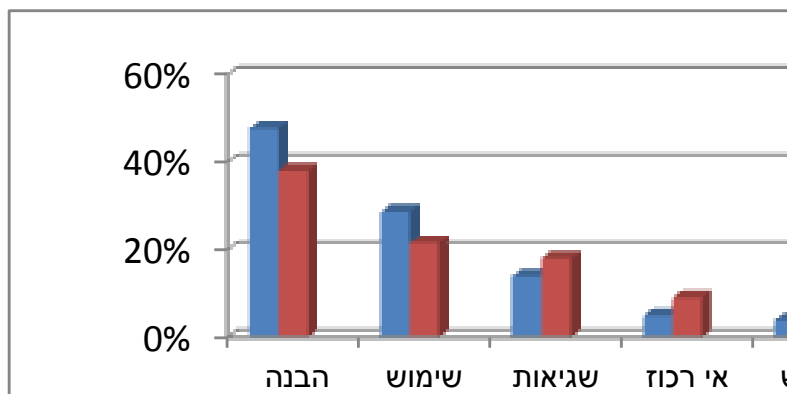
מס' שאלה	הבנה לקויה	שימוש שגוי בנוסחאות	שגיאות טכניות	אי ריכוז ורשלנות	שימוש מוטעה בנתונים
1	52.3%	22.5%	9.4%	12.4%	3.4%
2	21%	41.5%	32.5%	0%	5%
3	40.8%	17%	21.3%	16.9%	4%
4	32.5%	15%	22%	12%	18.5%
5	43%	16.2%	19%	11.8%	10%
6	44%	35.6%	14.38%	0%	6.02%
7	42.4%	12.84%	19.5%	13.26%	12%
ממוצע	38%	21.52%	18.44%	9.48%	8.36%

לבדיקת ההבדלים בין קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת, כאשר מתייחסים לסוגי השגיאות במבחן הפוסט, נעשה מבחן הסטודנט (t-test) למדגמים תלויים, התוצאות מתוארות בטבלה 9.

טבלה 9: ממוצעי אחוזי השגיאות, סטיות התקן ומבחן t למבחן (post) לפי קטגוריות

מס'	הקטגוריה לפי סוג השגיאה	הביקורת		הניסוי		ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים
		ממוצע	סטיות תקן	ממוצע	סטיות תקן	
		M	SD	M	SD	
1	הבנה לקויה בטריגונומטריה	47.6%	16.92	38%	20.13	0.02
2	שימוש שגוי בנוסחאות	28.64%	10.48	21.52%	12.54	<0.01
3	שגיאות טכניות	14.28%	20.33	18.44%	20.68	0.23
4	אי ריכוז ורשלנות	5.24%	4.14	9.48%	6.5	0.01
5	שימוש מוטעה בנתונים	4.24%	4.54	8.36%	7.04	0.01

בטבלה 9 ובאיור 4 מתוארים ממוצעי אחוזי השגיאות של כל קטגוריה ביחס למכלול השגיאות של כל אחת משתי הקבוצות. הקטגוריה הראשונה (הבנה לקויה בטריגונומטריה) היא הדומיננטית ביותר מבין שאר הקטגוריות: $47.6 \pm 16.92\%$ מהשגיאות של קבוצת הביקורת מיוחסות להבנה לקויה במתמטיקה ואילו $38 \pm 20.13\%$ מהשגיאות בקבוצת הניסוי הן שגיאות של הבנה. כמו כן נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.02$, $p<0.05$). בקטגוריה השנייה (שימוש שגוי בנוסחאות) ממוצעי אחוזי השגיאות של קבוצת הביקורת היא $28.64 \pm 10.48\%$ ושל קבוצת הניסוי $21.52 \pm 12.54\%$. כמו כן נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p<0.01$). בקטגוריה השלישית (שגיאות טכניות) לא נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות. בשתי הקטגוריות האחרונות של אי ריכוז ורשלנות ושל שימוש מוטעה בנתונים, האחוזים הם קטנים יחסית אבל יש הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.01$); מעניין שבשתי קטגוריות אלו המגמה היא הפוכה, כלומר אחוזי השגיאות בקבוצת הניסוי גדולים יותר.



איור 4: התפלגות השגיאות במבחן הפוסט לשתי הקבוצות

בבדיקה תשובות התלמידים במבחן הפוסט, התגלו השגיאות האופייניות של התלמידים אשר השתתפו במחקר כפי שהוזכר לעיל.

כדי להשלים את הממצאים הסטטיסטיים לעיל, מן הראוי להמחיש את השגיאות האופייניות. בטבלה 10 להלן מופיעות דוגמאות של שגיאות אופייניות בהתאם לקטגוריות השונות מקבוצת הניסוי והביקורת וההבדל ביניהן.

טבלה 10: דוגמאות לשגיאות אופייניות של קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת

קטגוריה	דוגמאות	P (להבדלים בין קבוצת הניסוי והביקורת)
הבנה לקויה בטריגונומטריה	בלבול בין הפונקציות.	ns
	מציאת פתרון אחד והתעלמות משאר הפתרונות.	$p < 0.05$, לטובת הניסוי.
	התעלמות מהמחזוריות.	$p < 0.05$, לטובת הניסוי.
	בלבול בין מעלות ורדיאנים.	ns
	שימוש בלתי ראוי בנתונים.	ns
שימוש שגוי בנוסחאות	בלבול בפתרונות הכלליים של המקרים הפרטיים.	$p < 0.05$, לטובת הניסוי.
	זהויות טריגונומטריות נכונות בצורה חלקית.	ns
	שגיאות חישוב.	ns
שגיאות טכניות	בלבול בין הנתונים.	ns
שימוש שגוי בנתונים	אי התייחסות לאחד הנתונים של השאלה.	ns
אי ריכוז ורשלנות	מציאת משתנים מיותרים.	$p < 0.05$, לטובת הניסוי.

דיון

מחקרים רבים בחינוך המתמטי עסקו בשימוש בשגיאות, אך לא הייתה התמקדות בנושא מתמטי ספציפי. מקצת אותם מחקרים הציגו שגיאות אופייניות באחד מנושאי הטריגונומטריה (קלנובר, 1997; Gür, 2009), אך לא נערכו מחקרים אשר התייחסו להשפעת הדיון הכיתתי והעצמי בשגיאות התלמידים על הישגיהם בנושא פונקציות טריגונומטריות. לכן מצד אחד מחקר זה עשוי להוסיף עוד ידע לתחום, ומצד אחר לימוד יחידת טריגונומטריה במהלך שימוש בפתרונות שגויים, עשוי לתת לתלמיד להעמיק את החשיבה ואולי גם לשפר את ההישגים שיפור רב בנושא.

במחקר זה למדה קבוצת תלמידים את נושא פונקציות טריגונומטריות בשיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, לעומת קבוצה אחרת שלמדה אותו נושא בשיטת הוראה פרונטלית. הממצאים הראו על כך כי קיים הבדל מובהק בין הישגי התלמידים בשתי הקבוצות לאחר הניסוי, כלומר הישגי קבוצת הניסוי, שלמדה בשיטת

הדיון הכיתתי, נמצאו גבוהים יותר מאשר הישגי קבוצת הביקורת, שלמדה אותו נושא אך בשיטה הפרונטלית. מעניין לראות, כי בכל זאת לא נמצא הבדל מובהק בהישגי התלמידים בקבוצת הניסוי בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, וזה אולי נובע מכך שמדובר בחומרים די שונים מבחינת המורכבות והקושי. החומר במבחן המקדים הוא מעין הקדמה פשוטה לנושא פונקציות טריגונומטריות ואילו החומר במבחן הסופי מורכב יותר, אך זה לא מנע מהתלמידים בקבוצת הניסוי לשמור על אותה רמה, על אף השוני הניכר ברמת הקושי בין שני המבחנים.

לעומת זאת בקבוצת הביקורת נמצא הבדל מובהק בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, והייתה מגמת ירידה בממצע במבחן הפוסט. אפשר להסביר את הירידה הניכרת במבחן הפוסט בקבוצת הביקורת לסוג הבעיות והתכנים, אשר היו בכל אחד מהמבחנים; במבחן המקדים הבעיות מאופיינו בנטייה לטכניקה שצבר התלמיד לאחר תרגול בתכנים אלה. כמו כן תכנים אלה היו רק תכנים התחלתיים מבחינת החשבון הדיפרנציאלי של הפונקציות הטריגונומטריות, ואכן, כפי שדיווח גרהרדט (Gerhardt, 2015), הטעויות של הסטודנטים בתכנים אלה קשורות בעיקר לשגיאות אלגבריות ולשגיאות אריתמטיות, ואילו בבעיות במבחן הפוסט הייתה התעסקות רבה יותר בתכני החדו"א (החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי). הקשיים של התלמידים בחדו"א ידועים בספרות, כיוון שמחקרים מסוימים בחינוך המתמטי עוסקים בקשיים אלה (Blackett & Tall, 1991; Tall, 1993; Tarmizi, 2010). התוצאה הזאת מחזקת את ההסבר הקודם, הקשור לקבוצת הניסוי, כלומר ההבדל בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, הוא תוצאה של מורכבות התכנים במבחן הפוסט. כל זה מחזק את השערת המחקר הראשונה, אשר גרסה, כי שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, משפר את ההישגים של התלמידים.

ממצאים אלה תומכים בתוצאות מחקרה של דוד (2007), אשר טוענת, כי שימוש בשגיאות תורם להעמקת התובנות המתמטיות. כמו כן הם מחזקים את טענותיה של רייז (2007), אשר ציינה כי ניצול הידע על שגיאות אפשריות של תלמידים, כבר במהלך הוראת הנושא המתמטי הנלמד, עשוי לסייע במניעתן של שגיאות אלו. כמובן, כל זה מחדד את טענתן של תירוש (Tirosh, 1990) ווילסון (Wilson, 1990), שלפיה אפשר ללמד מתמטיקה מתוך התמקדות בחוסר עקביות, בגילוי חוסר עקביות ובניתוח רעיונות לא עקביים; פעילויות אלה יכולות לאפשר ללומד לזהות את ההיבטים השגויים בידע שלו ולגרום למוטיבציה לשנות את הידע הזה ולתרום לפיתוח של חשיבה לוגית.

יתרה מזו, ממצאי מחקר זה עולים בקנה אחד עם טענתה של גירון (2007), אשר מדגישה שדיון בכיתה תורם רבות להבנת מושגים במתמטיקה בקרב תלמידים, ונותן להם לפרש טעויות בעזרת ידע קודם. מי שלא עובר חוויה זו, יסבול מתחושה לא נעימה, שתפגע פגיעה רבה בביטחון העצמי שלו. לדעת פרקש וצמיר (2008), תלמיד, אשר נחשף לקטגוריות אחרות של שגיאות בדרך לרמת חשיבה גבוהה כמתוכנן, חייב לעבור שלב של בשלות קוגניטיבית, כי הטעות גורמת לצמיחת קונפליקט קוגניטיבי, אשר יש לו תפקיד חשוב בהליך הלמידה ובעיקר בלמידה עצמית. יתרה מזו, הלמידה השיתופית, הניכרת בדיון הכיתתי, הביאה לחילופי הרעיונות בין התלמידים, וזה אפשר הזדמנות חשובה לשיח מתמטי עשיר. התלמיד שמע והשמיע טענות והצעות, השתתף בפירוש הסוגיות למיניהן, ניתח את הבעיות מנקודת מבטו, וכל זה הביא את התלמידים להבנה טובה יותר בנושא. כמו כן הלמידה בשיטה זו עוררה את הסקרנות של התלמידים, הקנתה להם הרגשה נוחה וסיפקה למתקשים מביניהם הזדמנות להשתתף

בפתרון המוצג לפניהם. הם היו צריכים רק לאתר את השגיאה ולתקן אותה. כאשר תלמידים מסבירים את דרכי חשיבתם ומצדיקים אותן, הם מאתגרים את חבריהם וחשיבתם נעשית ברורה ובהירה (Lampert, 1990).

מחקרים בחינוך מתמטי הראו, כי במעבר מפונקציות אלגבריות לפונקציות טריגונומטריות, מתגלה הבדל בין הבנה אינסטרומנטלית ובין הבנה רלציונית בקרב התלמידים (Gür, 2009). יתרה מזו, קלונובר (1997) טוענת כי התלמידים מתקשים בעת עיסוקם בפונקציות טריגונומטריות, כאשר הם נתקלים במונחים חדשים כגון פונקציות מחזוריות. קלונובר (שם) משייכת את סיבת הקושי הזה למעבר מעיסוק בפונקציות אלגבריות לפונקציות טריגונומטריות. חוקרים רבים אחרים (פרקש וצמיר, 2008; תמיר ואחרים, 1995; Gür, 2009; Greenfield, 1987) מציעים להתגבר על הקושי במעבר זה בעזרת שימוש בשגיאותיהם של התלמידים במהלך הלמידה. ראוי לציין, כי טעויות של תלמידים אינן מקריות, אלא מודלים אינטואיטיביים סמויים מניעים אותן, וחשוב להעלות מודלים אלה למודעותם של התלמידים (Fischbein, 1990).

עוד ממצא חשוב שעלה ממחקר זה מראה, כי התרומה של שיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות לא הייתה רבה בנושאים שפתרון מתבסס על שיטה אלגוריתמית, כמו מציאת משוואת המשיק, בעוד שנמצא הבדל מובהק של אחוזי השגיאות הנובעות מהבנה לקויה בטריונומטריה בין שתי הקבוצות; תוצאה זו עולה בקנה אחד עם ממצא שעלה ממחקרה של קלונובר (1997), אשר מייחסת להבנת התלמידים את הפונקציות האלגבריות יותר מאשר את הפונקציות הטריונומטריות, כיוון שהתלמידים עשויים לראות במציאת משוואת המשיק תהליך דומה לפונקציות אלגבריות. יש לציין שלא היה הבדל מגדרי בכל אחת מהקבוצות, וזה תואם למסקנה של בן ששון-פורסטנברג (2001) שטענה כי במגזרים מסוימים לא נמצאו הבדלים מובהקים בין הישגי הבנים להישגי הבנות.

באשר להשערת המחקר השנייה, אשר גורסת כי שיטת הלימוד של דיון בפתרונות שגויים גרמה לצמצום רב של השגיאות האופייניות של תלמידים – הממצאים מראים כי השערה זו אוששה. ממצא זה מראה כי דיון כיתתי/עצמי בשגיאות הוא תהליך שבו התלמידים בונים ידע מתמטי מתוך פעילות חקר בעולם המושגים המתמטיים בתיווכו של המורה (גביש, 1998). מכאן תהליך זה עשוי לצמצם את השגיאות האופייניות של התלמידים בנושא הנלמד.

לסיכום, כפי שאפשר ללמוד ממחקר זה, הדיון בשגיאות, שבנוי על עבודה שיתופית ודיאלוג רפלקטיבי בין המורה לתלמידים ובין התלמידים עצמם, מפתח שיח מתמטי, אשר מביא לידי העלאת רעיונות ולידי שיתוף פעולה במהלך תהליך הבנייה, שמתבסס על החוויות וההתנסויות שהתלמיד בונה בעצמו אחרי שכבר השתתף בדיון הכיתתי. ממצאי המחקר מאמתים את הטענה שלמידה המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בשגיאות – שהיא בעיקר סביבה פעילה וחוויתית התורמת לשיפור הישגי התלמידים – עוזרת לתלמידים לצמצם את שגיאותיהם. ובעיקר דיון בשגיאות נחשב למיומנות גבוהה, כיוון שהוא מורכב מתחומי חשיבה רבים: חשיבה סימבולית, חשיבה ביקורתית, חשיבה יצירתית, חיפוש סיבות לתופעה, נימוק טענות, בחירה נכונה לשיטה המתאימה לבעיה ושימוש בידע קודם (Greenfield, 1987).

בשל מסקנות מחקר זה, אשר עסק בקשר בין שיטת לימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בשגיאות ובין הישגי התלמידים וצמצום השגיאות האופייניות אצלם, אפשר לטעון שמומלץ להציג לתלמידים תרגילים עם פתרונות מלאים, בלתי נכונים, ולבקש מהם לאתר את השגיאות ולתקן אותן במהלך הפעלת שיח מתמטי. שיטה יעילה זו מביאה לידי שיפור בהישגי התלמידים ולידי הפחתת השגיאות הנובעות מהבנה לקויה, ולכן היא מחזקת את הביטחון העצמי אצלם ומעלה את רמת המוטיבציה בקרב התלמידים. ממצאים אלה הם בהתאם למחקרו של בוראסקי (Borasi, 1994), אשר טען כי שימוש בשגיאות בתהליך למידה יכול לתרום ללמידת מתמטיקה, אשר מפחיתה את הקשיים בלמידת מושגים, מגדילה את מומחיות התלמידים "בעשייה מתמטית" וכמו כן מגדילה את הביטחון העצמי של התלמידים ביכולת הלמידה שלהם וביכולת השימוש בכלים מתמטיים.

מקורות

- אביטל, ש' (1981). מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד? **שבבים: עלון למורי המתמטיקה**, 15, 1-5.
- בן ששון-פורסטנברג, ש' (2001). **הבדלים בין המינים במערכת החינוך**. ירושלים: הכנסת – מרכז מחקר ומידע. אוחזר מתוך <https://www.knesset.gov.il/mmm/data/pdf/m00927.pdf>
- גירון, ת' (2007). מי מדבר על שגיאות? דיון בכיתה בהכללות יתר של התלמידים. **מספר חזק 2000**, 13, 38-41.
- דוד, ח' (2007). שימוש בשגיאות של תלמידים כמנוף לשיפור הלמידה ולהעמקת הידע המתמטי. **על"ה**, 37, 81-93.
- הפנר, ר' (2004). טעות או שגיאה. בתוך **מילון השפה העברית**. אוחזר מתוך <http://www.safa-ivrit.org/synonyms/taut.php>
- משרד החינוך התרבות והספורט. (2011). **חוזר מפמ"ר לשנת הלימודים התשע"ב לעל יסודי (ע"ב/1)**. ירושלים: המחבר.
- פרקש, א' וצמיר, פ' (2008). פתרונות נכונים ושגויים לבעיה טריגונומטרית במישור (חלק ראשון: מחשבות על משפט הסינוסים). **על"ה**, 39, 81-86.
- קלונובר, נ' (1997). המושג 'פונקציה' בטריגונומטריה אצל תלמידי כיתות י"א וי"ב – השוואה בין פונקציות אלגבריות ופונקציות טריגונומטריות. **על"ה**, 21, 75-81.
- רייז, ר' (2007). **טעויות של תלמידים כמנוף להוראה**. חיפה: הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים. אוחזר מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/beit%20sefer%20kaits%207.pdf>
- תמיר, פ', זיו, ש' ופסקין, ד' (1995). הוראת המדעים והמתמטיקה בכיתות ח' בישראל באמצע שנות ה-90. **הלכה למעשה בתכנון לימודים**, 13, 219-256.
- Alro, H., & Skovsmose, O. (1996). On the right track. *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 2-8, 22.
- Behr, M., & Harel, G. (1990). Students' errors, misconceptions, and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3-4), 75-84.
- Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 144-151). Assisi, Italy: PME.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboard for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, 14(1), 31-50.
- Gerhardt, I. (2015). The alarm experiment. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 25(1), 80-97.
- Greenfield, L. B. (1987). Teaching thinking through problem solving. In J. E. Stice (Ed.), *Developing critical thinking and problem-solving abilities* (pp. 5-22). San Francisco: Jossey-Bass.
- Gür, H. (2009). Trigonometry learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67-80.
- Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34(1), 4-8.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.

- Leighton, J. P., Chu, M-W., & Seitz, P. (2012). Cognitive diagnostic assessment and the learning errors and formative feedback (LEAFF) model. In R. Lissitz (Ed.), *Informing the practice of teaching using formative and interim assessment: A systems approach* (pp. 183-207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- McMillan, J. H., & Turner, A. (2014, April). *Understanding student voices about assessment: Links to learning and motivation*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Philadelphia.
- Miller, S. (2001). Understanding transformations of periodic functions through art. *Mathematics Teacher*, 94(8), 632-635.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla.: Academic Press.
- Sokolowski, A., & Rackley, R. (2011). Teaching harmonic motion in trigonometry. *Australian Senior Mathematics Journal*, 25(1), 45-53.
- Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. *Plenary Address, Proceedings of the Working Group 3 on Students' obstacles in Calculus, ICME 7* (pp. 13-28). Que'bec, Canada.
- Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing students' difficulties in learning calculus. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 377-383.
- Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3&4), 111-129.
- Tugend, A. (2011). *Better by mistake: The unexpected benefits of being wrong*. New York: Riverhead Books.
- Watson, J. (1990). Research for teaching. Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 46(3), 12-14.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3-4), 31-47.
- Wongapiwatkul, P., Laosinchai, P., & Panijpan, B. (2011). Enhancing conceptual understanding of trigonometry using earth geometry and the great circle. *Australian Senior Mathematics Journal*, 25(1), 54-63.
- Zimmerman, B. (2001). Theories of self-regulated learning and academic achievement: An overview and analysis. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Self-regular learning and academic achievement: Theoretical perspectives* (2nd ed., pp. 1-37). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

נספח א

מבחן מקדים

זמן: 60 דקות

ענה על השאלות הבאות:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, הסבירו למה זה מתקיים לכל ערך של x . (15 נקודות)
2. נתון: $\tan x = \frac{3}{4}$, חשבו ללא שימוש במחשבון את $\tan 2x$. (10 נקודות)
3. נתון: $\sin x = \frac{1}{4}$, חשב את $\sin 2x$. (10 נקודות)
4. מצא (באמצעות x) ערך אפשרי אחד של x . (20 נקודות)
- א. $\sin(180 - \alpha) = \sin 2x$ (10 נקודות)
- ב. $\cos(90 - \alpha) = \sin x$ (10 נקודות)
5. גזרו את הפונקציות: (20 נקודות)
- א. $y = 3 \sin x$ (5 נקודות)
- ב. $y = x \cos x$ (5 נקודות)
6. $y = x^2 + \sin^2 x$ (5 נקודות)
7. $y = \tan x - \frac{\pi}{2}$ (5 נקודות)
8. נתון $\sin x = \frac{1}{2}$; מצא שני ערכים של x שמקיימים את המשוואה. (15 נקודות)
9. הסבירו למה $\tan 90$ בלתי מוגדר. (10 נקודות)

נספח ב

דוגמה לפתרון שגוי ולשיח מתמטי

דוגמה 1:

פתור את המשוואה: $\sin 2x = \sin x$

הפתרון:

$$\sin 2x = \sin x :$$

$$\sin x = 0$$

$$x - \pi k$$

השיח המתמטי:

תלמיד 1:	"האם $\sin 2x$ שווה $2 \sin x$?"
תלמיד 2:	"המעבר הזה מ- $\sin 2x$ ל- $2 \sin x$ הוא נכון כי פתרנו לא מזמן תרגיל בכיתה והשתמשנו בנוסחה זו".
תלמיד 3:	"את מתבלבלת בין זהות למשוואה, בכיתה פתרנו משוואה וזה לא אותו דבר".
המורה:	"מה ההבדל בין זהות למשוואה?"
תלמיד 4:	"למשל $\sin x = \cos x$ זו משוואה כי היא נכונה רק לערכים מסוימים של x כמו $\frac{\pi}{4}$ ולכן זו אינה זהות כי זהות צריכה להתקיים לכל ערך של x בתוך תחום ההגדרה".
תלמיד 5:	"חסר עוד פתרון כללי כי משוואה של סינוס יש לה שני פתרונות כלליים".
תלמיד 6:	"אבל זה מקרה מיוחד שיש לו פתרון כללי אחד".

נספח ג

מבחן פוסט: שאלות, מטרות ומחוויון

שאלה 1:

- א. האם הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos x + 1}{\sin x}$ חותכת את ציר ה- y ? נמק את תשובתך.
- ב. $(\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$, נסחו את הביטוי בצורה אחרת תוך כדי שימוש בזהויות טריגונומטריות.

חלק א': בדק את הבנת התלמיד למושג של פונקציה טריגונומטרית תוך כדי התייחסות למעגל טריגונומטרי. לסעיף זה ניתנת הערכה של 8% מהציון הכולל. מדוע זה קשור למעגל? ניסיון להציב 0 בפונקציה – מספיק.

חלק ב': בדק את הידע של התלמידים בזהויות טריגונומטריות ולבקאותם בטכניקה אלגברית. לסעיף זה ניתנת הערכה של 7% מהציון הכולל.

שאלה 2:

- מצאו את המשוואה של המשיק לפונקציה: $y = \cos 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.
- שאלה זו בדקה את השליטה של התלמידים בפתירת תרגילים בדרך אלגוריתמית – מציאת המשוואה של משיק. לשאלה זו ניתנת הערכה של 10% מהציון הכולל.

שאלה 3:

נתונה הפונקציה: $f(x) = -2x + 2\cos x$, שיפוע המשיק לפונקציה שווה -1 , מצאו את שיעורי ה- x של נקודות ההשקה בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

שאלה 4:

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $y = 4x + \sin 3x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

שאלה 5:

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

שאלות אלו בדקו את הבנת תכונת המחזוריות המתבטאת בפתרון משוואות טריגונומטריות על מנת למצוא נקודות קיצון או תחומי עלייה וירידה. לכל שאלה ניתנת הערכה של 15% מהציון הכולל. לשלוש השאלות היה משקל של 45% מהציון הכולל.

שאלה 6:

הראו שלפונקציה $y = \tan x$ אין נקודות קיצון והיא עולה בכל תחום הגדרתה. שאלה 6 בדקה את יכולת הנימוק המלא והפעלת שיקול דעת. לשאלה זו ניתנת הערכה של 10% מהציון הכולל.

שאלה 7:

נתונה הפונקציה: $y = ax + \sin 4x$, בתחום: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

הפונקציה מקבלת מקסימום בנקודה $x = \frac{\pi}{6}$. בקצה של התחום?

א. מצאו את ערכו של a .

ב. מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המוחלטות בתחום הנתון.

ג. ציירו סקיצה של הפונקציה.

שאלה זו בדקה את יישום ההבנה והידע תוך כדי קישור בין ניסוח מתמטי לשרטוט גרפי. על שאלה זו ניתנת הערכה של 20% מהציון הכולל.



רג'א אבו שאהין

מורה למתמטיקה בבית-ספר ניסויי תיכון מסעדה.
בעל ניסיון של 25 שנים בהוראה.
בוגר תואר ראשון ושני בחינוך מדעי במתמטיקה
במכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה.

ד"ר אמאל שריף-רסלאן

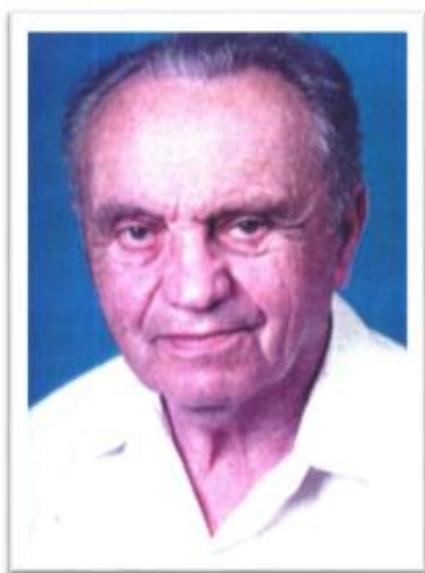
מכהנת כראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית
הערבית לחינוך, חיפה.
בוגרת תואר ראשון ושני בפקולטה למתמטיקה
בטכניון, ותואר שלישי מהמחלקה להוראת המדעים
בטכניון.
תחומי המחקר שלה הם מתמטיקה שימושית ברפואה
(בפרט קרדילולוגיה) וחשיבה מתמטית מתקדמת.
כתבה פרסומים רבים בתחומים אלה.

מדור ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל

דברים לזכרו של פרופ' שמואל אביטל

(1915-2001)

דוד בן-חיים



פרופ' שמואל אביטל נולד בפולין ב-24 בספטמבר, 1915. הוא רכש את ההשכלה המתמטית ואת תעודת ההוראה שלו באוניברסיטה העברית בשנות הארבעים של המאה העשרים.

לאחר היותו מורה למתמטיקה למעלה מ-20 שנה בבית-ספר על-יסודי מקצועי (בסמ"ת חיפה), ובשל היעדר לימודים לתואר גבוה בתחום החינוך המתמטי בישראל של אותם ימים – נאלץ אביטל להרחיק עד אוניברסיטת טורונטו כדי להשלים את לימודי הדוקטורט בחינוך מתמטי.

בשנת 1968 פרסם המכון הקנדי אונטריו ללימודי חינוך ספר, אשר מתבסס על עבודת הדוקטור של פרופ' אביטל. ספר זה נודע ברבות הימים כ"יעדים ללמידת המתמטיקה" (Avital & Shettleworth, 1968). את

הספר תרגמה לעברית תלמידתו לשעבר, פרופסור נצה מובשוביץ-הדר מהטכניון (אביטל ושטלוורס, 2009).

פרופ' אביטל היה אחד ממניחי-היסוד של החינוך המתמטי במדינת ישראל. הוא היה בראש ובראשונה מחנך ומורה למתמטיקה. הוא הקפיד על יצירת קשרים בין תחומים שונים של המתמטיקה, על דיוק מתמטי ועל חינוך לקריאת טקסטים מתמטיים. הוא הקדיש את חייו להנחלת אהבת המתמטיקה למורים ולתלמידים רבים. במיוחד הייתה יקרה ללבו החשיפה של תלמידים לתרבות המקצוע, תוך חיבור למקורות, הן ליהדות והן להיסטוריה של המתמטיקה.

אחד המפעלים הגדולים של חייו היה העיתון המתמטי לנוער שנקרא "גיליונות לחשבון ולחשיבה", אשר יזם, ערך והוציא לאור ארבע פעמים בשנה בעקביות למעלה משלושים שנה – בסיועה של רעייתו, ברכה ז"ל.

אביטל האמין ואף הוכיח, כי אפשר ללמוד מתמטיקה בהנאה. ספרו, הנושא שם זה, יצא לאור בהוצאת עם עובד (אביטל, 1991).

פרופ' אביטל היה ממקימי המחלקה להכשרת מורים בטכניון, אשר גדלה מאז והפכה להיות הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה. הוא עמד בראשה ועסק בה הכשרת פרחי הוראה ובהשתלמויות למורים פעילים. עד היום רבים מתלמידיו מלמדים בכל רחבי-הארץ, תוך דבקות בעקרונותיו וברעיונותיו.

פרופ' אביטל היה גם מראשוני קבוצת המחקר והפיתוח בחינוך המתמטי בישראל, וזכה להערכה רבה בקהילייה הבינלאומית. הוא הנחה וטיפח חוקרים רבים בחינוך מתמטי (גם לי הייתה הזכות להיות אחד מתלמידיו) ופרסם מאמרים רבים בתחום הוראת המתמטיקה בדרך החקר. בהמשך מופיע אחד המאמרים שלו שתורגם לעברית, המצביע על דרך החשיבה והסגנון שלו להוראת המתמטיקה – מאמר זה מובא לזכרו.

חקורות

אביטל, ש' (1991). **מתמטיקה בהנאה**. תל-אביב: עם עובד. 293 עמודים.

אביטל, ש' ושטלוורס, ש' (2009). **יעדים ללימוד מתמטיקה: רעיונות אחדים למורים** (נ' מובשוביץ-הדר, מתרגמת). ירושלים: משרד החינוך. 70 עמודים.

Avital, S. M., & Shettleworth, S. J. (1968). *Objectives for mathematics learning, some ideas for the teacher*. Toronto: The Ontario Institute for Studies in Education.



פרופ' דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת ויסקונסין ותואר שלישי Michigan State Univ בחינוך מתמטי.
ראש מינהלת מ"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שריט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.

רעיונות אחדים על איך ליצור

בעיות מתמטיות¹

שמואל אביטל ושלמה ליבסקינד

תרגום: דוד בן-חיים

תקציר

חלק חשוב בעבודתו של כל מורה למתמטיקה ליצור בעבור תלמידיו בעיות אתגריות להשלמות אלו הנמצאות בספרי הלימוד. מקור ראשי לבעיות כאלה הם רעיונות מהמתמטיקה הגבוהה, אשר מהם אפשר להפיק בעיות אלמנטריות. אפשר לראות שחשובים אינטגרליים מסוימים יכולים לשמש ביצירת בעיות העוסקות באי-שוויוניים, רעיונות מתאוריות השקילות יכולים לספק בעיות לחקירה והוכחה באמצעות אינדוקציה מתמטית, ורעיונות מאלגברה לינארית יכולים לעזור ביצירת בעיות היכולות לקשר בין משוואות ליניאריות למשוואות ריבועיות. מקור אחר לבעיות הוא תשובותיהם של התלמידים על שאלה, שיש עבורה פתרונות בדרכים מגוונות. הדגש הוא ששימושים כאלו יכולים להפוך את הלמידה של מתמטיקה גבוהה ללמידה בעלת משמעות רבה יותר למורה.

מבוא

פתרון בעיות הוא חלק בסיסי בהוראת המתמטיקה ובלמידתה. מטרתו העיקרית והכי מוזכרת בספרות המקצועית, היא היישום של המתמטיקה במדעים האחרים או בחיי היום-יום. אולם כיוון שהמתמטיקה עצמה היא חלק חשוב של התרבות האנושית, גם שימושים בתוך המתמטיקה עצמה יכולים להיחשב כמטרה חשובה. כיוון שההבחנה בין תרגילים לבעיות אינה מוחלטת, אפשר לראות בהם כשתי נקודות ברצף. בשל הנחה זו, אנו יכולים למנות דרכים אחדות, אשר אפשר להשתמש בהן בפתרון בעיות בתהליך הלמידה של מתמטיקה:

1. הן יכולות לשמש כלי ראשי לתרגול כדי לחזק את המיומנויות הנרכשות.
2. הפתרונות שלהן יכולים לעזור בשיפור ההבנה של מושגים חדשים שהלומד רוכש.
3. הן עוזרות לשלב את הנושאים החדשים הנלמדים עם הידע הקודם שנרכש.
4. הן מעשירות את היכולת האסוציאטיבית של הלומד על סמך יצירת קישורים עם תחומים אחרים במתמטיקה.
5. כפי שהוזכר לעיל, הן אמצעי ליישום החומר הנלמד בתחומים אחרים במתמטיקה, במדעים האחרים ובחיי היום-יום.

למורה או למחבר ספר הלימוד די קל ליצור בעיות (תרגילים), המספקות יישום ישיר של החומר הנלמד

1. תרגום לעברית מתוך מאמרם של שמואל אביטל ושלמה ליבסקינד: Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Some ideas on how to create mathematical problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 9(4), 417-422. doi: 10.1080/0020739780090404.

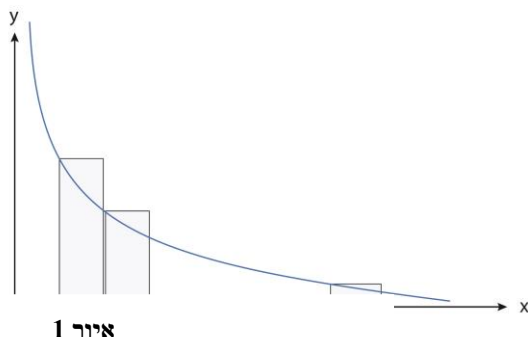
באותה עת. הן נועדו להשגת מטרות 1 ו-2.

אנשי חינוך מתמטי ומתמטיקאים רבים מחפשים בעיות מתאימות במדע ובחיי היום-יום, שאפשר לשבץ אותן בתכניות הלימודים במתמטיקה ושהן יוכלו למלא חלקית את מטרה 5. אולם, אפשר למצוא מעט מאוד בספרות המקצועית על דרכים ליצירת בעיות היכולות למלא את מטרות 3 ו-4. איך אפשר ליצור בעיות פחות אלגוריתמיות שיקשרו את החומר הנלמד עם תחומים אחרים? איך אפשר ליצור בעיות היכולות להעשיר את מסגרת הייחוס האסוציאטיבית של הלומד? מה יכולים להיות המקורות של בעיות אלו? אנו נציג כאן רשימה של מקורות אלה, אך יש לציין כי מקורות אלה לא נבדקו כל אחד לגופו וייתכן שיש עוד מקורות אחרים שלא נבדקו.

מקורות מהמתמטיקה הגבוהה

אחת הדרכים למציאת בעיות מתאימות היא לקיחת רעיונות מתחום המתמטיקה, שהוא הכללה ועידון של תהליך מתוחכם פחות ושהוא חלק מתכנית הלימודים. נדגים נקודה זו בדוגמה הבאה:

אינטגרציה בעיקרון היא עידון של סכומים, ואפשר להשתמש בה בחיבור בעיות העוסקות בסכומים של סדרות. לדוגמה, נתייחס לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



איור 1

להלן התיאור הגרפי של הפונקציה הזו (ראה איור 1):

הפונקציה מוגדרת עבור $x > 0$ והשטח מתחת לגרף בין $x=1$ ובין $x=n+1$ הוא תמיד קטן מסכום השטחים של המלבנים עם בסיס יחידה וגבהים השווים לשיעור ה- y של: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$.

כיוון שהשטח מתחת לגרף בין $x=1$ ובין $x=n+1$ הוא

$$\int_1^{n+1} x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

השטח של המלבנים המתוארים באיור 1 הוא

$$1f(1) + 1f(2) + 1f(3) + \dots + 1f(n) > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

אנו מקבלים את אי-השוויון

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

בניית אי-השוויון יכולה עתה להיחקר כבעיה בשימוש באינדוקציה מתמטית.

הגישה המוזכרת לעיל פותחת למעשה את הדרך ליצירת משפחה שלמה של בעיות.

$$\int_1^{n+1} x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} \left[(\sqrt[n+1]{3})^{2/3} - 1 \right] \quad f(x) = x^{-1/3} \text{ והידיעה ש-}$$

אנו יכולים לנסח את הבעיה ולהוכיח שעבור כל מספר טבעי n :

$$1 + 2^{-1/3} + 3^{-1/3} + \dots + n^{-1/3} > \frac{3}{2} \left[(\sqrt[n+1]{3})^{2/3} - 1 \right]$$

באופן זה נוכל גם להגיע אפילו לבעיה כללית יותר הפותחת שדה חקירה שלם בעבור התלמיד.

הפונקציה $f(x) = x^\alpha$ היא מונוטונית בהחלט והיא יורדת בעבור $-1 < \alpha < 0$. לכן נקבל את אי-השוויוניים:

$$\int_1^{n+1} x^\alpha dx < \sum_{k=1}^n k^\alpha < \int_1^n x^\alpha dx$$

אי-שוויוניים אלו יכולים ליצור בעיות לחקירה בעבור התלמיד למשל:

$$\text{בעבור } -1 < \alpha < 0 \text{ יש לחקור את יחס הסדר בין } 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha \text{ ו- } \frac{1}{(\alpha+1)} [(\sqrt[n+1]{\alpha+1})^{\alpha+1} - 1]$$

מה קורה כאשר: (i) $\alpha = 0$, (ii) $\alpha > 0$, ו- (iii) $\alpha < -1$?

ברור שעל המורה להיות בטוח שלתלמיד יש את האמצעים המתמטיים והבגרות הנחוצה לפתור את הבעיה ולהתמודד עמה. במקרה של השורה האחרונה של הבעיה, מחשבון יכול לעזור בשלבי החקירה הראשונים.

3. שימוש במקרים פרטיים הנוצרים בתוך התאוריה הכללית

מקור אחר של בעיות יכול להיות היישום של התאוריה המתמטית הכללית או המבנה שלה.

להלן שתי דוגמאות:

(1) אלגברה לינארית מספקת לנו בעיות מעניינות עם שימושים מגוונים של הפולינום האופייני של מטריצה נתונה $n \times n$. השימוש של תאוריה זו בעבור מטריצות 2×2 יכול לשרת דרך מעניינת לסלול את המעבר מהפתרון של מערכות של שתי משוואות ליניאריות עם שני משתנים – למשוואות ריבועיות. נניח שהתלמיד מכיר את המערכות של משוואות ליניאריות המובעות באמצעות הצורה של מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, והפעולות על הווקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ובכך משנות את הווקטור הזה ל- $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. כמו כן אנו מניחים שהתלמיד יודע שלמערכת של שתי משוואות ליניאריות הומוגניות יכול להיות פתרון שונה מ- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

אם ורק אם הדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ שווה אפס.

עתה התלמיד נשאל מהם הערכים של k שמטריצה נתונה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ יכולה למתוח (או לכווץ) וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ לוקטור $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

כדי לענות על השאלה הזו, נחוץ לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = kx \\ cx + dy = ky \end{cases} \quad \text{או את המערכת השקולה:}$$

$$\begin{cases} (a-k)x + by = 0 \\ cx + (d-k)y = 0 \end{cases} \quad \text{אשר שקולה ל-}$$

למערכת האחרונה יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם $\left| \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} \right| = 0$, כלומר אם ורק אם $(a-k)(d-k) - bc = 0$, שברור כי זו משוואה ריבועית ב- k .

(2) דוגמאות אחרות של בעיות מעניינות שאפשר להשיגן במקרים פרטיים ממשפט הכללה, ואפשר לפתחן מהפסוק הכללי שהמוצע הגאומטרי של n מספרים חיוביים אינו גדול מהמוצע האריתמטי שלהם. מקרים פרטיים של משפט זה מספקים בעיות מעניינות בעבור התלמידים כמעט בכל כיתה של הבית-ספר העל-יסודי.

מתוך יישום המשפט הזה בעבור ממוצעים ל- $n=2$, אנו יוצרים את הבעיה 'הוכח כי $\sqrt{(x+y)/2} \geq \sqrt{xy}$ '.

אפשר להוכיח את זה ישירות בשימוש במשפט הקובע שעבור כל מספרים ממשיים a ו- b , $(a+b)^2 \geq 0$.

עתה אפשר ליצור בעיה חדשה בשינוי לאי-שוויון שקול על-ידי חילוק שני האגפים של אי-השוויון:

$$\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$$

ועל-ידי פישוט נקבל:

$$\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} \geq 2$$

כיוון ש- $\sqrt{x/y}$ הוא מספר חיובי כלשהו, את אי-השוויון האחרון אפשר לנסח במשפט הבא:

הוכח כי הסכום של מספר חיובי והמספר ההפוך לו הוא תמיד גדול או שווה ל-2.

או הוכח אם המכפלה של שני מספרים חיוביים היא 1, אז הסכום שלהם הוא לא פחות מ-2.

אי-שוויוניים מעניינים אחרים מתקבלים על סמך השימוש במשפט על שני הממוצעים ל- $n=3$.

על-ידי חילוק שני האגפים של אי-השוויון:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

ועל-ידי פישוט נקבל:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} \geq 3$$

אפשר להבחין עתה כי המכפלה $\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} \cdot \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$ שווה להופכי של $\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$.

מכאן מתקבלת הבעיה:

'הוכח כי עבור כל שני מספרים חיוביים כלשהם p ו- q , $p + q + \frac{1}{pq} \geq 3$.'

את הבעיה שהתקבלה אפשר לחשב כהרחבה של אי-השוויון שהוזכר לפני-כן: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

נעיר כאן שתמיד אפשר למצוא מספרים חיוביים: a , b ו- c , כך ש- $p = \frac{a}{b}$ ו- $q = \frac{b}{c}$.

זה גורר ש- $pq = \frac{a}{c}$ ו- $\frac{1}{pq} = \frac{c}{a}$.

לכן מתקבלת הבעיה: 'הוכח שעבור מספרים חיוביים כלשהם a , b ו- c כי $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ '.

זהו מקרה פרטי של בעיה כללית יותר של 'הוכח כי אם המכפלה של n מספרים חיוביים היא 1, אז סכומם גדול או שווה ל- n '.

ההוכחה של הבעיה האחרונה מתוך אינדוקציה מתמטית דורשת ידע קודם, אבל היא פשוטה יותר או קלה יותר מההוכחה מתוך אינדוקציה מתמטית של המפשט הכללי על שני ממוצעים.

ברור שהבעיה על $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ עוסקת במקרה הפרטי של המשפט האחרון.

הערה: אפילו תלמידים המכירים ויודעים את המשפט על הממוצעים, לא יגיעו בדרך כלל לרעיון של שימוש בו כדי להוכיח את אחת הבעיות הנ"ל, בלי שהבעיות יוצגו באותו פרק שיופיע בו המשפט.

בעיות הנוצרות מיחסי שקילות

בעיות חילוק כגון 'הוכח כי עבור כל המספרים השלמים החיוביים n , הביטוי $5^{n-1} + 3^{n-1} - 2$ הוא כפולה

של 24, או הראה ש- $9^x + 3^x + 1$ הוא כפולה של 13 עבור כל x שהוא איבר של הסדרה $1, 4, 7, \dots, 3n-2$,'

הן בעיות רגילות בפרק על אינדוקציה מתמטית.

מהיכן בעיות אלו נובעות? נתייחס תחילה לבעיה הראשונה:

ניסיון בנושא השקילות מוביל לבחינה של חזקות של 7 מודולו 24 וחזקות של 5 מודולו 24.

נשים לב כי $7^2 \equiv 1 \pmod{24}$ ו- $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$. לכן, $7^{2k} \equiv 1 \pmod{24}$ ו- $5^{2k} \equiv 1 \pmod{24}$. בשל כך,

$$2 \cdot 7^{2k} + 3 \cdot 5^{2k} - 5 \equiv 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 5 \equiv 0 \pmod{24}$$

באופן דומה בעבור חזקות אי-זוגיות של 5 ו-7:

$$2 \cdot 7^{2k+1} + 3 \cdot 5^{2k+1} - 5 \equiv 2 \cdot 7 \cdot 7^{2k} + 3 \cdot 5 \cdot 5^{2k} - 5 \equiv 14 \cdot 1 + 15 \cdot 1 - 5 \equiv 0 \pmod{24}$$

זה מוכיח את הקביעה הראשונה עבור כל המספרים השלמים החיוביים n . הוכחה זו מצביעה על שיטה

ליצירת בעיות דומות רבות. לדוגמה, כיוון ש- $3^2 - 1 = 8$, יש לנו $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$. עתה נבחר a כלשהו כך ש- $a^2 - 1 \pmod{8}$ הוא מכפלה של 8. כאשר $a=7$, נקבל $7^2 \equiv 1 \pmod{8}$. בשל כך, $3^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$ ו- $7^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$. כל בחירה של x, y ו- z כך ש- $x \cdot 3^{2k} + y \cdot 7^{2k} + z \equiv 0 \pmod{8}$ יוצרת בעיה מתאימה בעבור חזקות זוגיות. כדי לקבל את הבעיה הכללית יותר 'הוכח כי $x \cdot 3^n + y \cdot 7^n + z \equiv 0 \pmod{8}$ לכל המספרים הטבעיים n ', עלינו לבחור x, y ו- z המקיימים את שני התנאים

$$x \cdot 3^{2k} + y \cdot 7^{2k} + z \equiv 0 \pmod{8}$$

ו- $x \cdot 3^{2k+1} + y \cdot 7^{2k+1} + z \equiv 0 \pmod{8}$. השקילויות האלו הן אקוויולנטיות למערכת:

$$3x + 7y + z \equiv 0 \pmod{8} \quad x + y + z \equiv 0 \pmod{8}$$

מערכת זו עוברת למערכת האקוויולנטיות:

$$3y \equiv -x \pmod{4} \quad x + y + z \equiv 0 \pmod{8}$$

(נשים לב לשינוי במודולוס). המערכת האחרונה היא פתירה לכל בחירה של x ולכן יוצרת משפחה שלמה של בעיות להוכחה בעזרת אינדוקציה. לדוגמה, נבחר $x = 1$ ואז בחירות אפשריות ל- y ו- z הן $y=5$ ו- $z=2$, ואז יש לנו את הבעיה 'הוכח כי $3^n + 5 \cdot 7^n + 2$ מתחלק ב-8 לכל n טבעי'.

מתוך שימוש במשפט הקטן של Fermat (או במשפט הכללי יותר של Euler), יש לנו אלגוריתם ליצירת בעיות התחלקות. נבחר מספר ראשוני כלשהו, לדוגמה 5, ומספר נוסף שהוא יחסית זר למספר הראשוני שנבחר (אין להם גורם משותף חוץ מ-1), נניח שהמספר הנוסף הוא 3. ממשפט Fermat נובע כי $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$, ולכן $3^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$. לכן $a \cdot 3^{4n} + b$ יהיה כפולה שלמה של 5 לכל המספרים השלמים n שאינם שליליים, אם ורק אם $a+b \equiv 0 \pmod{5}$.

אפשרות אחת לבחירה ל- a ו- b מובילה לבעיה 'הוכח כי $7 \cdot 3^{4n} + 3$ מתחלק ב-5 לכל המספרים השלמים n שאינם שליליים'.

יצירת בעיות בעקבות תשובות של תלמידים

מקור אחר של בעיות נעוץ בעובדה שלעתים קרובות פתרון לבעיה נתונה יכול להיות מובע בדרכים מגוונות. בדרך זו אפשר לקבל זהויות היכולות להיות מנוסחות כבעיות חדשות. הבעיה הבאה ניתנה לקבוצה של פרחי הוראה למתמטיקה לבית-הספר היסודי:

'יש לזהות את הקבוצה המייצגת את השטח המושחר' (ראה איור 2).

ניתנו מספר תשובות נכונות:

$$(A-B) \cap (A-C), (A-B)-C$$

$$A \cup B \cup C - (B \cup C), A - (B \cup C)$$

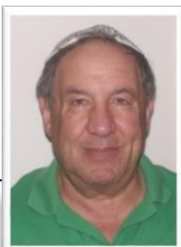
$$1-A - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

כך הסטודנטים עצמם יצרו קבוצות של זהויות, שאפשר להשתמש בהן כבעיות חדשות להוכחה. באותה דרך אפשר ליצור בעיות דומות רבות בקשר לזהויות טריגונומטריות.

סיכום

תיארנו מקורות מגוונים ליצירת בעיות חדשות. הרעיון הבסיסי העומד מאחוריהם הוא שממתטיקה גבוהה יותר אפשר ליצור בעיות לשימוש במתמטיקה האלמנטרית. פרחי הוראה לבית-הספר התיכון לומדים מתמטיקה גבוהה יותר באוניברסיטה, אולם, רוב רובה אינו שימושי ישירות למתמטיקה הנלמדת בבית-הספר.

במאמר הנוכחי הצבענו על איך הידע הזה של מתמטיקה גבוהה יותר, יכול לעתים להיות שימושי בניסוח בעיות חדשות שאפשר להציגן בבית-הספר התיכון.



פרופ' דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי Michigan State Univ בחינוך מתמטי. ראש מינהלת מ"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.

מדור המלצה על ספר

הוראת יצירתיות בפתרון בעיות - סתירה מיניה וביה?

שלמה וינר, סכללת אחווה לחינוך



בפתח דבר לספרם, מזכירים העורכים פסקין וגזית אמירה של ליטלווד, הטוענת שבדיחה מתמטית טובה עדיפה על פני תריסר מאמרים בינוניים. ידוע לנו כיצד נראים מאמרים מתמטיים (הגדרה, משפט הוכחה וכולי), אך ליטלווד לא נתן לנו דוגמאות לבדיחות מתמטיות. בעמוד 335 של הספר, גזית נותן דוגמה של בדיחה מתמטית: "סיני פוגש את שכנו ושואל אותו לגיל שלושת ילדיו. עונה לו השכן: מכפלת הגילים של שלושת ילדיי שווה ל-36 וסכום הגילים שלהם שווה למספר הבית שבו אנחנו גרים. חושב הסיני ואומר: אבל חסר לי נתון. עונה לו השכן: נכון, בני הבכור מגן בכינור."

הצד ההומוריסטי בבעיה הזאת בולט למדי. כך

בפתח רשימותיי על ספרים אני נוהג לציין מיהו לדעתי קהל היעד שלהם. כשמדובר בספרם של פסקין וגזית "יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות" (הוצאת מכון מופ"ת, תל-אביב, 2015, 422 עמודים) – אז קהל היעד הוא כל מורי המתמטיקה וכלל מכשירי המורים למתמטיקה במכללות ובאוניברסיטאות. כפי שמעידה כותרת רשימתי ישנה בעייתיות בהוראת יצירתיות. כדי ללמד יצירתיות יש להביא לה דוגמאות. אבל ברגע שהדוגמה ניתנת, היא הופכת לכלי בידיו של הלומד. כאשר הוא ייתקל בבעיה דומה בעתיד, הוא ינסה לפתור אותה בעזרת הכלים שרכש. למעשה כל הליך לימוד המתמטיקה הוא רכישת כלים לפתרון בעיות. אנחנו לומדים אלגברה כדי שנוכל לכתוב משוואות בעבור בעיות מילוליות ולפתור אותן. אנחנו לומדים חשבון דיפרנציאלי כדי להשתמש בו לשרטוט גרפים של פונקציות וכדי שנוכל לפתור בעזרתו בעיות שונות של מינימום ומקסימום וכן הלאה.

חנה לב-זמיר (עמ' 99-120) ושל אביקם גזית (עמ' 121-137); יצירות בפעילות עם שורשים, חזקות ואומדן – מאמרה של דורית פטקין (עמ' 138-147); יצירות בפתרון בעיות בהנדסת המישור ובהנדסת המרחב ועוד פעילויות רבות שלא אמנה אותן כאן מפאת קוצר היריעה.

על פעילויות אלה אפשר לומר בז'רגון של החינוך המתמטי שהן בבחינת גילוי מודרך. בדרך כלל אין לצפות מהתלמיד הממוצע שידע לפתור בעיות לא שגרתיות בכוחות עצמו בלי הדרכה. יש לזכור כי עידוד היצירתיות מיועד גם לתלמיד הממוצע ולא רק לתלמיד המצוי. כבונס לקורא מציע הספר אנקדוטות משעשעות וציטטות של גדולי המתמטיקאים ושל סתם אנשים חכמים.

הנה לדוגמה אחת האנקדוטות (עמ' 399): "בכיתה של דנה התבקשו התלמידים ביום האם לכתוב חיבור על הנושא: "אימא יש רק אחת." מרבית התלמידים כתבו על מקרים של מחלה, פציעה, כישלון במבחן או תחושה רעה, שבהם אימא הרגיעה, ליטפה ופינקה אותם. דנה כתבה: "ביום שבת הלכנו אני ושני אחי לגן החיות והיה מעניין ומרתק. ראינו את מלך החיות את הפיל ואת הג'ירף, את השימפנזה ואת הגורילה, את כלבי הים ושאר בעלי החיים. חזרנו הביתה שמחים ורעבים. אני והאחים שלי רצינו חביתה. אימא ביקשה ממני להוציא מהמקרר שלוש ביצים. ניגשתי למקרר, פתחתי את הדלת, הסתובבתי ואמרתי: אימא, יש רק אחת..."

ומוסיפים עורכי הספר: "מעבר לבדיחה, ההתייחסות של דנה לנושא "אימא יש רק אחת" היא יצירתית בזכות היותה לא שגרתית,

קביעת מקום התרחשותו של האירוע בסין. למה דווקא סין מכל הארצות בעולם? זה מזכיר את השיר "שניים סינים עם כינור קטן", ואמנם הכינור שב ומופיע בסוף הסיפור. לקורא שאינו מכיר את הבעיה אני מציע להפסיק לרגע את קריאת המלצתי ולנסות לפתור אותה.

לאחר שישב לקרוא את המלצתי יבדוק כיצד פתר אותה. האם סימן ב- x, y, z את גילי הילדים וכתב משוואה דיפאנטית: $xyz = 36$? ואחר כך – כיצד המשיך? הפתרון שמציע גזית (בעמ' 337) הוא באמצעות טבלה שבה מופיעות כל האפשרויות של גילי הילדים ומספר הבית המתאים להם. הטבלה גם מבהירה מדוע הנתון שבנו הבכור של הסיני מנגן בכינור קובע חד-ערכית את הפתרון, זאת משום שהוא שולל את האפשרויות ששניים מבניו של הסיני הם תאומים.

לאחר "פתח הדבר" של הספר מופיע מאמר ארוך, מעמיק ומקיף של עטרה שריקי על מושג היצירתיות (עמ' 19-96). יש בו עיסוק ביצירתיות בעולם העתיק ובעולם המודרני, יצירתיות כללית לעומת יצירתיות תלויה תחום תוכן, טיפוח יצירתיות בבית-הספר, יצירתיות והוראה, סביבות למידה המיועדות לפיתוח יצירתיות של תלמידים ועוד. אם מישוהו מבין מורי המורים במכללות או באוניברסיטאות ירצה לתת קורס על יצירתיות, אז מאמרה של שריקי יכול לספק בסיס מצוין לקורס כזה. נוסף על כך, בסוף מאמרה מופיעה רשימה של מאות מקורות על יצירתיות (עמ' 78-96). רשימה זו יכולה לעזור לכל מי שמתכוון לחקור את נושא היצירתיות.

מעבר לכך, הספר משופע בעשרות מטלות לא שגרתיות בנושאים מתמטיים מגוונים שמעודדות יצירתיות: סדרות – מאמרם של

שהם משמשים שמרטפים לילדינו במשך השעות שאנחנו ההורים נמצאים בעבודה? בתי-הספר אמורים ללמד את ילדינו כל מיני דברים. הם אמורים לתת בידי התלמידים כלים רבים לפתרון בעיות, בעיות מתמטיות ובעיות אחרות. כמובן שהם אמורים להציג לתלמידים היבטים רבים של התרבות, אבל גם החשיבה המתמטית וגם החשיבה המדעית הן חלק מהתרבות האנושית. ואינני נכנס כאן לנושא הערכים המוסריים שאינם מענייניו של הספר שלפנינו. הבעיה של מערכת החינוך היא לא לדכא את היצירתיות. הספר שלפנינו הוא אוצר בלום של דוגמאות המעודדות חשיבה יצירתית. במובן מסוים יש בו השלמה לתכנית הלימודים שמורי המתמטיקה מחויבים לה. המורה הנבון ידע למצוא את הזמן המתאים כדי לתת לתלמידיו לטעום ממנה.

נוסף לכל האמור לעיל, ברצוני לשבח את הצד האסתטי של הספר על שרטוטיו, איוריו ותמונותיו. בקיצור, ספר שלא רק מרתק לקרוא בו אלא גם נעים להחזיק אותו.

בשורה התחתונה – רוצו לרכוש.

מקורית ויוצאת מהמסגרת. וזו הייתה גם מטרתו של הספר הנוכחי" (עמ' 399).

והנה ציטטות אחדות שסיפרתי עליהן לפני כמה שורות:

"לא נוכל לפתור בעיות באמצעות אותה צורת חשיבה שהשתמשנו בה כשיצרנו אותן" (אלברט איינשטיין, עמ' 97).

"יצירתיות היא להרשות לעצמך לטעות. אמנות היא לדעת אילו טעויות לשמור" (סקוט אדמס, עמ' 149).

"הרוח האמיתית של עונג והתעלות, התחושה של להיות יותר מבן אנוש, תוכל להימצא במתמטיקה ממש כמו בשירה" (ברטראנד ראסל, עמ' 179).

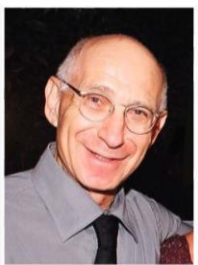
"היצירתיות מייצגת מפגש מופלא בין האנרגיה חסרת המעצורים של הילד לבין אויבה וניגודה המושלם: הסדר הנכפה על האינטליגנציה הממושטת של המבוגר" (נורמן פודהורץ, סופר ועיתונאי יהודי אמריקני, עמ' 289).

הציטטה האחרונה מחזירה אותי בעצם לתחילת רשימתי. ברצוני ללמד קצת סגוריה על "הסדר הנכפה על האינטליגנציה הממושטת של המבוגר". לשם מה קיימים בתי-ספר חוץ מזה

פרופ' שלמה וינר

סיים את עבודת הדוקטור שלו ב'לוגיקה מתמטית ותורת המודלים' באוניברסיטה העברית בהדרכתו של עזריאל לוי בשנת 1972. ב-1976 הצטרף לחוג להוראת המדעים באוניברסיטה העברית.

ב-1997 פרש מהאוניברסיטה העברית ועבר לאוניברסיטת בן גוריון בנגב, כדי להקים בהוראת מדעים. כיום הוא ראש התכנית לתואר שני בחינוך מתמטי בבית ספר היסודי ב



“ללמוד וללמד אנליזה: ספר מתמטי-דידקטי למורה”

עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm

על הספר

הספר “ללמוד וללמד אנליזה” יצא לאור בתחילת שנת הלימודים תשע”ד, בשיתוף פעולה של מנהלת מל”מ (בראשות פרופ’ דוד בן-חיים), משרד החינוך והפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. הספר, המכיל למעלה מ-600 עמודים, מיועד הן למורים המלמדים אנליזה בכל שכבות הגיל ורמות הלימוד בחטיבה העליונה (כהשלמה לספרי הלימוד הקיימים), והן למורי מורים המלמדים במסגרות למיניהן המיועדות לתמוך בהתפתחות המקצועית של מורים למתמטיקה.

בראש הפרויקט עמדה פרופ’ אורית זסלבסקי, וניהלה את הפרויקט ד”ר איריס זודיק. מנהלת הפיתוח והכתיבה של הספר הייתה ד”ר גילה רון, אשר יחד עם ד”ר אלה שמוקלר וד”ר חמוטל דוד, הן פיתחו וכתבו את הספר. בכתיבה השתתפו גם קלרה זיסקין, הילי שירן, ד”ר אורלי בוכבינדר ונעמי בוחניק. עוד מורים רבים סייעו בשכתוב הספר ובמתן משוב ותרמו לו רעיונות ופעילויות (את שמותיהם אפשר למצוא בשער הספר). היועצים המתמטיים אשר ליוו את כתיבת הספר היו פרופ’ אבי ברמן, פרופ’ מ’ בוריס קויצ’ו וד”ר אלה שמוקלר.

“ללמוד וללמד אנליזה” יצא לאור בהוצאת “מעלות” והוא מופיע גם במתכונת מקוונת:

התכנים המתמטיים והגישות הדידקטיות

בתכנית הלימודים מופיעה רשימה ארוכה של נושאים ותת-נושאים בכותרת “אנליזה”. מקצת אותם נושאים משמשים פעמים רבות מקור לקשיים ולתפיסות שגויות, ומכאן עולה החשיבות של חומרי הוראה ולמידה ייעודיים זמינים שהם מעבר לספרי הלימוד.

כיוון שהספר מיועד למי שכבר למדו אנליזה בעבר, בהצגת הנושאים אין בהכרח הקפדה על סדר היררכי. הדגש בספר הוא בהעמקת התובנות המתמטיות בנושאים רלוונטיים (במקרים רבים מעבר לנדרש בתכנית הלימודים), מתוך התנסות בלמידה פעילה המאפשרת ללומד להעמיק לבד את הידע המתמטי שלו ולחוות את הפוטנציאל הלימודי הטמון בגישה זו להוראה. עוד מידע באשר למבנה הספר ולגישה הדידקטית שלאורה נכתב אפשר למצוא בקישור

http://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/2.pdf

הספר פותח בדיון במושג הפונקציה ובמאפייניה העיקריים. בהמשך מתקיים דיון במשמעות של גבולות, אסימפטוטות ורציפות, ולאחר מכן מוצגים מושג הנגזרת ושימושי הנגזרת הראשונה והשנייה. יישום נושאים אלה ניכר בחקירת פונקציות מגוונות:

אני יכולה להעיד על תרומתן להתפתחותם של דיונים מתמטיים ודידקטיים פוריים.

דוגמה א

הפרק החמישי בספר נקרא "רגע לפני הנגזרת", והוא עוסק בחקירה איכותנית של פונקציות (בעיקר פולינומאליות). הפעילויות הכלולות בפרק נועדו לפתח את היכולת של תלמידים להסיק מסקנות באשר לתכונות של פונקציות ללא שימוש בכלים של חשבון דיפרנציאלי, וכך להעמיק את התובנות המתמטיות שלהם. פעילות 1 עוסקת בנקודות אפס של פונקציות פולינום. בפעילות מוצגים 4 גרפים ו-4 תבניות אלגבריות שאפשר ללמוד מהן על אף שלכל הפונקציות המוצגות יש אותם שורשים, בכל זאת הגרפים שלהן אחרים. הדיון המתמטי שהתפתח בעקבות הצגת הפעילות עסק בין השאר בהשפעת הריבוי של שורש ושל זוגיות הריבוי על התנהגות הגרף, ואילו הדיון הדידקטי התמקד בחשיבות שילוב פעילויות שבהן תלמידים יעסקו בהשוואה בין מידע מתמטי שמתקבל באמצעות כלים חישוביים (כדוגמת הנגזרת) ובין מידע שמתקבל בכלים איכותניים (כדוגמת ניתוח מושכל של מידע גרפי ואלגברי).

דוגמה ב

הפרק השמונה-עשר עוסק בפתרון בעיות ערך קיצון. לעתים קרובות תלמידים מתקשים להבין שבעיות קיצון מתארות סיטואציות דינמיות, ולכן העיסוק בנושא מזמן בטבעיות את שילוב המחשב. פעילות 3 מדגימה כיצד אפשר להמחיש פתרונות של בעיות מסוג זה באמצעות תכנת גאוגברה, מתוך הצגה מפורטת של כל שלבי הבנייה. דוגמה 2 בפעילות עוסקת במציאת השטח המקסימלי של משולש ישר

פולינומאליות, רציונליות, שורש, מורכבות, טריגונומטריות, מערכיות ולוגריתמיות. את החלק של חשבון דיפרנציאלי חותם פרק העוסק בפתרון בעיות ערך קיצון. החלק המתמקד בחשבון אינטגרלי דן במשמעות של פונקציה קדומה והגדרת אינטגרל מסוים כגבול של סכומי שטחים, ומציג דוגמאות רבות ומגוונות לחישובי שטחים ונפח גוף סיבוב. בהמשך מופיעים פרקי הרחבה אחרים. בכל אחד מהנושאים מוצגות דוגמאות רבות ומגוונות, מופיעים איורים רבים המדגימים רעיונות מתמטיים רבים ומוצעות פעילויות מגוונות וכן פתרונות למשימות המופיעות בהן. הצגת התכנים המתמטיים מלווה בהצעות לשאלות העמקה, פעילויות חקר בסיוע תכנת גאוגברה, עיסוק בקשיים אופייניים של תלמידים, אזכור היבטים היסטוריים של כמה מהנושאים המתמטיים, אפשרויות לשילוב משחקים ועוד. מקצת הפעילויות מוצגות במתכונת המתאימה לשילובן בכיתה כמו שהן ופעילויות אחרות דורשות מהמורה לעבד אותן ולהתאימן להוראה בכיתה. כל הנושאים כתובים מתוך הקפדה על שימוש בשפה מתמטית מדויקת, אך עם זאת ההסברים מוצגים בלשון קולחת וברורה. לעתים ההצגה היא בשאלות ותשובות המשמשות מעין דיאלוג עם הקורא, עמדה התורמת למעורבותו של הלומד ו"לריכוך" תהליך הלמידה.

דוגמאות

מובן שבשל הפעילויות העשירות והמגוונות, בחירת דוגמאות מייצגות היא משימה בלתי אפשרית. שלוש הדוגמאות שבחרתי להציג הן מקצת הפעילויות שבהן עשיתי שימוש במהלך עבודתי עם פרחי הוראה ומורים, ומתוך ניסיוני

המתמטי" העומד מאחורי התוצאות. חשוב להקנות לתלמידים את הרגישות למצבים, שבהם מתקבלות תוצאות שאינן עולות בקנה אחד עם ידע קודם ולהרגיל אותם לחפש אחר תשובה על השאלה: "מהו ההסבר המתמטי לכך?" בתשובה על שאלת התוצאה השלילית מופיעים ארבעה הסברים, שכל אחד מהם מתבסס על שיקולים מתמטיים אחרים. הסוגיות הדידקטיות הרלוונטיות שאפשר להעלות נוגעות לשאלת הצורך בהצגת פתרונות או הסברים אחרים לפני תלמידים, ולנחיצות קיום דיונים מתמטיים המתמקדים בהבדלים בין הפתרונות או ההסברים ולמידת ה"אלגנטיות" והבהירות של כל פתרון.

לסיים...

ברשימה שלעיל הוצגה רק "טעימה" קטנה מתוך הספר "ללמוד וללמד אנליזה: ספר מתמטי-דידקטי למורה". אכן, שמו של הספר מעיד על תכנון, והוא גדוש ברעיונות מתמטיים ודידקטיים מגוונים, אשר יכולים להיות בסיס רחב לדיונים עם תלמידים, פרחי הוראה ומורים. בלי ספק מדובר בספר שהוא פריט חובה בארון הספרים של כל פרח הוראה, מורה ומורה-מורים למתמטיקה.



פרופ' עטרה שריקי

מרצה במכללת אורנים במסגרת התואר הראשון ושני, ועומדת בראש פרויקט המצוינות של המכללה בשיתוף עם קרן טראמפ. מחקרה כיום מתמקדים בתחום היצירתיות המתמטית, סוגיות הנוגעות ללמידה מרחוק ותהליכים הקשורים ליצירת קהיליה מקצועית של מורים למתמטיקה.

זווית בהינתן מידת האורך של היתר שלו. אופן הצגת הפעילות הניע דיון הנוגע למשמעות של "התנהגות מתמטית דינמית", כמו גם לדרכים האחרות של בחירת הקבועים והמשתנים והשפעת הבחירה על התוצאות. הדרך, שבה מבוצע בפעילות תהליך הבנייה, המייצג את הבעיה, העלתה שאלות דידיקטיות חשובות. שאלות אלו עוסקות ביתרונות ובחסרונות של קישוריות בתוך המתמטיקה, ויש להן חשיבות רבה בעיקר מכיוון שנושא הבניות אינו חלק מן תכנית הלימודים.

דוגמה 1

הפרק התשעה-עשר מוקדש **לחשבון אינטגרלי**. הפרק פותח בסיפור המריבה בין סר אייזיק ניוטון למתמטיקאי הגרמני גוטפריד לייבניץ באשר לזכות הראשונים על גילוי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, משפט אשר חולל מהפכה בתחום המתמטיקה. בפעילות 9 בחלק העוסק באינטגרל המסוים ושימושיו עולה לדיון השאלה מדוע מתקבלת תוצאה שלילית כאשר מחשבים את השטח שבין גרף של פונקציה שלילית רציפה לבין ציר ה-x. לעיסוק בשאלה יש ערך רב, שהוא מעבר לשאלה המסוימת הזו, כיוון שלעיתים תלמידים מבצעים חישובים מתמטיים טכניים בלי לתת את הדעת ל"היגיון

מדור הוכחות מעניינות

הצגת המדור

דוד בן-חיים, מל"מ הטכניון, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה

החל מהגיליון הנוכחי של "כתב-עת למחקר ולעיון בחינוך מתמטי", אנו פותחים מדור חדש בשם "מדור הוכחות מעניינות".

מדור זה יכלול אזכור של משפטים ותוצאות יפות ומעניינות במתמטיקה בצירוף ההוכחה שלהם.

התרומה הראשונה למדור זה היא של ד"ר אבי סיגלר ופרופ' משה סטופל.

לאחר הקדמה קצרה על סוגי הוכחות: סטנדרטיות ואלגנטיות, הם מציגים מספר משימות שהן למעשה טענות מתמטיות המובילות לתוצאות מעניינות ומפתיעות. ד"ר סיגלר ופרופ' סטופל מדגימים את ההוכחות של הטענות בעזרת האסטרטגיה של הוכחות אלגנטיות ולעתים משתמשים בהוכחות ללא הסברים מילוליים. רק בהוכחה של המשימה האחרונה הם משתמשים גם בשיטת ההוכחה הסטנדרטית. המדור הזה יהיה פתוח להצעות של קוראי כתב-העת שיציעו משימות מתמטיות אתגריות, משפטים מתמטיים מעניינים ותוצאות יפות ומפתיעות המבליטים את היופי של המתמטיקה והמעשירות את הדעת.

הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה

אבי סיגלר, המכללה הטכנולוגית למקצועות התעופה, חיפה; מכללת "אפרתה", ירושלים
משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה

הקדמה

מחקרים ומאמרים למיניהם מראים את החשיבות הרבה של ידע מתמטי מקיף ואת היכולת להשתמש בכלים מתמטיים רבים, המאפשרים למצוא דרכי פתרון מסוימים לאותה משימה גאומטרית ובכך מוצאים את הפתרון הפשוט והברור ביותר וחושפים את היופי הגלום במתמטיקה (יאנובסקי, 2011; לייקין, 2006; לייקין, לבב-ויינברג ולטמן, 2012; Leikin & Lev, 2007; Lowrie, Logan, & Scriven, 2012; Stylianides, 2009; Stupel & Ben-Chaim, 2013). לעתים הכרת משפט או נוסחה, שאינם נמצאים "במלאי הרגיל", מאפשרת להגיע לפתרון בשורה אחת או שתיים.

מבחינת האופי של ההוכחות אפשר לחלק אותן לשתי קבוצות עיקריות: ההוכחה הסטנדרטית וההוכחה האלגנטית. את ההוכחה ללא מילים אפשר לכלול כתת-קבוצה של ההוכחה האלגנטית. כמובן, שהשאיפה היא להגיע להוכחה האלגנטית או להוכחה ללא מילים, אם כי להוכחה האחרונה אפשר להגיע רק במקצת המשימות.

ההוכחה הסטנדרטית

בדרך כלל ההוכחה הסטנדרטית בנויה לפי תבנית מוכרת מראש ומתקבלת לפי הדרך שבחר בה הפותר. היא מתקבלת על סמך הניסיון שלו לפתור בעיות מגוונות, ונראית לו כדרך שתביא אותו אל היעד – פתרון המשימה. מבחינת החשיבה, הפותר סובר שזו הדרך הנכונה והבטוחה וכי יצליח להתגבר על שלבי הביניים ולהתקדם אל המטרה הסופית.

ההוכחה האלגנטית

כשמה כן היא, קצרה ומתבססת על אלמנטים מפתיעים כגון שימוש בטריק מתמטי, במשפט או בנוסחה לא מוכרים. ההוכחה האלגנטית משמשת מקור גאוה לפותרים ובכך היא גם ממריצה אותם להתמודדות עם בעיות אתגריות ברמה גבוהה יותר, אשר מעוררת חשיבה רב-כיוונית ומציאת פתרונות בלתי-קונבנציונליים.

בהוכחה ללא מילים מופיעים בקצרה נתון, סימונים וצריך להוכיח (זסלבסקי ווינצקי, 1992; Brown, 1999; Dreyfus, 1991). כמו כן מופיע איור אחד, או יותר, לפעמים בלי כל תוספת, ובמקרים אחרים, בתוספת ביטויים מתמטיים מעטים, בלי נימוקים מילוליים כל שהם. קיימת הנחה כי מתוך התבוננות חזותית באיור ובביטויים המתמטיים, יבין בעל ידע מתמטי מתאים את ההוכחה של המשימה ויוכל לנמק

בעצמו כל שלב בהוכחה ובכך יפתח את יכולת ההוכחה החזותית. בשנות השבעים החלו להופיע משימות הוכחה מסוג כזה בכתבי-עת מסוימים. המתמטיקאי נלסן (Nelsen, 1993, 2001) הוציא שני ספרים שבכל אחד מהם אוסף גדול של הוכחות ללא מילים בשם P.W.W., עם חלוקה לתחומי המתמטיקה הרבים. ראו (Rao, cited in Shirali, 2012, p. 14), מתמטיקאי שעסק בהוכחות ללא מילים, הביע את חשיבותו במשפט:

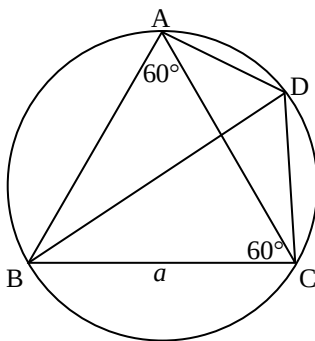
אלגנטיות – אי אפשר לתרגם, רק להדגים. לא ייאמן איזה סגנון יכול להיות למתמטיקאים ולמתמטיקה.

Elegance, they say, cannot be defined, merely demonstrated.

Mathematics – and mathematicians — can have incredible style.

במדור זה אנו מציגים כמה משימות מתמטיות עם הוכחות אלגנטיות ומפתיעות ובכך להציג את היופי הגלום במתמטיקה.

חשימה א'



איור 1

במשולש שווה-צלעות החסום במעגל – כאשר מחברים נקודה על המעגל עם שלושת הקדקודים של המשולש, סכום האורכים של שניים מהמיתרים שווה לאורך המיתר השלישי.

משולש שווה צלעות $\triangle ABC$ בעל צלע באורך a חסום במעגל. דרך הנקודה D העבירו מיתרים DA , DB ו- DC .

יש להוכיח ש- $BD = AD + DC$, כפי שנראה באיור 1.

את משימה זו, שמופיעה בספרי לימוד ואף הופיעה באחת מבחינות הבגרות, אפשר לפתור בכל מיני דרכים: גאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה (Stupel & Ben-Chaim, 2013). כאן תוצג הוכחה המבוססת על שימוש במשפט תלמי (פתולמאוס):

בכל מרובע שחסום במעגל – סכום המכפלות של הצלעות הנגדיות שווה למכפלת האלכסונים.

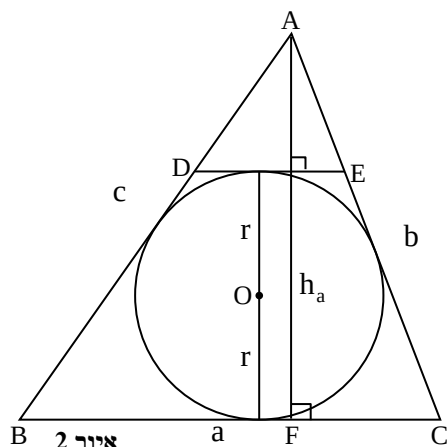
על-ידי שימוש במשפט תלמי: $BD \cdot AC = AB \cdot DC + BC \cdot AD \Rightarrow BD = AD + DC$.

ההוכחה מופיעה בשורה אחת – בתנאי שמכירים ומשתמשים במשפט הנ"ל.

חשימה ב'

כל צלע של משולש, גדולה באורכה ביותר מפעמיים הרדיוס של המעגל החסום במשולש ($a, b, c > 2r$). ההוכחה הסטנדרטית המקובלת למשימה זו היא שימוש בכלים טריגונומטריים. תובא כאן הוכחה שלדעתנו נמצאת בקטגוריה של הוכחה אלגנטית ("הוכחה ללא מילים"), כפי שנראה באיור 2.

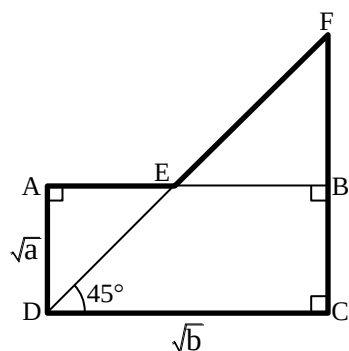
$$\left. \begin{array}{l} 2r < h_a < b, c \\ 2r < h_b < a, c \end{array} \right\} \Rightarrow a, b, c > 2r$$



חשימה ג'

הוכחה גאומטרית אלגנטית לאי-שוויון בין הממוצע החשבוני לממוצע הגאומטרי (ראה איור 3).

נתון: מלבן ABCD



$$; AD = \sqrt{a}, DC = \sqrt{b}; \angle ADE = \angle CDE = \angle 45^\circ, a, b > 0$$

איור 3

$$\begin{array}{ccc} S_{AEFCD} & > & S_{\triangle ABCD} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{2} & > & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \end{array}$$

הערות:

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow a=b \quad (1)$$

(2) כמובן שאפשר להוכיח את אי-השוויון בדרך אלגברית ובדרכים אחרות.

(3) הרחבה על נושא הממוצעים האחרים ראו בתוך בן-חיים (2015), זסלבסקי ווינצקי (1992), מוגילבסקי וסטופל (2006), רימר ובן-חיים (1986).

חשימה ד'

משפט והיפוכו בהקשר לתכונה מיוחדת של טרפז

סימון:

$$S_1 = S_{\triangle DEC} \quad S_2 = S_{\triangle ADE}$$

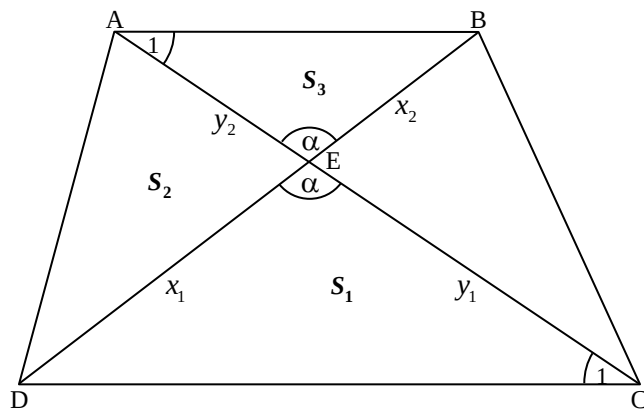
$$S_3 = S_{\triangle BEA} \quad (\text{ראה איור 4})$$

(א) נתון: $ABCD$ טרפז.

$$\text{אזי: } S_2^2 = S_1 \cdot S_3$$

הוכחה:

איור 4



$$\begin{aligned} &= \frac{y_1}{y_2} \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \\ & \quad S_2 = \frac{1}{2} x_1 \cdot y_2 \sin \alpha \quad S_1 = \frac{1}{2} x_1 \cdot y_1 \sin \alpha, \quad S_3 = \frac{1}{2} x_2 \cdot y_2 \sin \alpha \\ & \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ & \quad S_2^2 = \frac{1}{4} x_1^2 \cdot y_2^2 \sin^2 \alpha \quad S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{4} x_1 \cdot y_1 \cdot \underbrace{x_2 \cdot y_2}_{x_1 \cdot y_2} \sin^2 \alpha \\ & \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ & \quad S_2^2 = S_1 \cdot S_3 \quad \Longleftarrow \quad S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{4} x_1^2 \cdot y_2^2 \sin^2 \alpha \\ & \quad \rightarrow S_2^2 = S_1 \cdot S_3 \quad S_2^2 = S_1 \cdot S_3 \quad (\text{ב}) \text{ נתון:} \\ & \quad \rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle BEA \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 \\ & \quad \Downarrow \\ & \quad \text{אזי } ABCD \text{ הוא טרפז} \\ & \quad \text{טרפז } ABCD \Leftarrow AB \parallel DC \end{aligned}$$

חשימה ה'

המכפלה של ארבעה מספרים עוקבים ובתוספת 1 היא ריבוע של מספר טבעי.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{n^2 + 3n + 2} \\ n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = \\ \xleftarrow{n^2 + 3n} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n^2 + 3n + 2 \\ \boxed{} \\ n^2 + 3n \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \boxed{} 1 \\ 1 \end{array} =$$

$$\begin{array}{c} n^2 + 3n + 1 \\ \boxed{} \begin{array}{c} 1 \\ \text{|||||} \\ 1 \end{array} \\ n^2 + 3n \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \boxed{\text{|||||}} 1 \\ 1 \end{array} =$$

$$\begin{array}{c} n^2 + 3n + 1 \\ \boxed{} \begin{array}{c} 1 \\ \text{|||||} \\ 1 \end{array} \\ n^2 + 3n \\ \begin{array}{c} 1 \\ \text{|||||} \\ 1 \end{array} \end{array}$$

איור 5

הביטוי המתמטי לקבלת ריבוע של מספר טבעי הוא,

$$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

הערה 1: הוכחת התכונה לעיל מבוססת על התכונה: כשמכפילים שני מספרים טבעיים שהפרשם 2

ומוסיפים 1, התוצאה היא ריבוע של מספר טבעי. כאשר מכפילים ארבעה מספרים טבעיים, ההפרש בין המכפלה של שני המספרים הקיצוניים ובין המכפלה של שני המספרים האמצעיים הוא 2, ולכן הכפלת המכפלות בתוספת 1 נותנת ריבוע של מספר טבעי.

הערה 2: כשבודקים את המכפלה של 4 מספרים טבעיים עוקבים כשמוסיפים להם את איברי סדרה חשבונית: $n, (n+1+k), (n+2+2k), (n+3+3k)$, כאשר k – מספר טבעי, מתברר שיש להוסיף לתוצאה את החזקה הרביעית של $(k+1)$ כדי לקבל ריבוע של מספר טבעי. זוהי למעשה הכללה ומשימה 3 היא מקרה פרטי שלה עבור $k=0$.

הביטוי האלגברי למקרה הכללי הוא:

$$n(n+1+k)(n+2+2k)(n+3+3k) + (k+1)^4 = [n^2 + 3n(k+1) + (k+1)^2]^2$$

משימה ו'

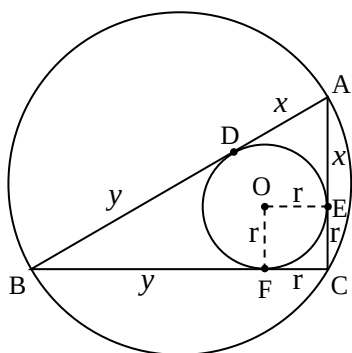
(שתי הוכחות באיור אחד).

במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) (ראה איור 6).

יש להוכיח:

(א) סכום הניצבים של משולש ישר זווית שווה לסכום הקטרים של המעגל החסום והמעגל החוסם אותו: $a+b=2r+2R$.

(ב) הוכחה נוספת של משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$.



הוכחה:

איור 6

$$AB=2R, OF=FC=CE=EO=r \quad (\text{א})$$

$$AD=AE=x, BD=BF=y$$

$$BC+CA=y+r+r+x=2r+x+y=2r+2R$$

$$a=y+r, b=x+r, c=x+y \Rightarrow a+b=c+2r \quad (\text{ב})$$

$$a+b=c+2r \Rightarrow \quad (\text{I}) \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{P} = \frac{\frac{a \cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} \Rightarrow \quad (\text{II}) \quad r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$$

$$(I) = (II) \Rightarrow \frac{(a+b)-c}{2} = \frac{a \cdot b}{(a+b)+c} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

חשימה ז'

להוכיח שעבור כל משולש $\triangle ABC$ מתקיים הקשר הבא: $r \leq \frac{1}{2}R$

להלן נדגים את שני סוגי ההוכחות: ההוכחה הסטנדרטית (אם כי מפתיעה) וההוכחה האלגנטית (הוכחה ללא מילים).

א. ההוכחה הסטנדרטית

טענה 1

יהיה r רדיוס המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$.

בונים מעגל שמרכזו O_1 בעל רדיוס r_1 שחותך את צלעות המשולש $\triangle ABC$ (ראה איור 7).

בונים את משולש $\triangle A_1B_1C_1$ שצלעותיו מקבילות לצלעות המשולש $\triangle ABC$ ומשיקות למעגל O_1 . ברור ש- $r_1 > r$.

הוכחה:

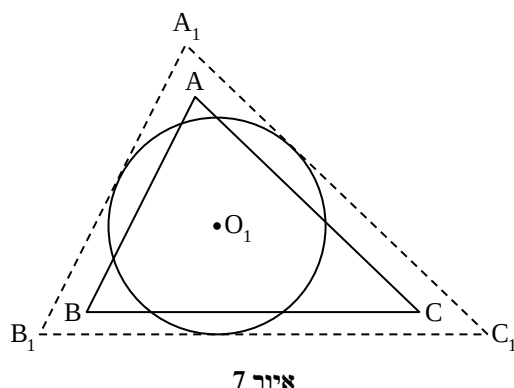
נוצר משולש $\triangle A_1B_1C_1$ הדומה למשולש $\triangle ABC$ אך גדול ממנו בשטחו, ולכן,

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{r_1^2}{r^2} > 1 \Rightarrow r_1 > r$$

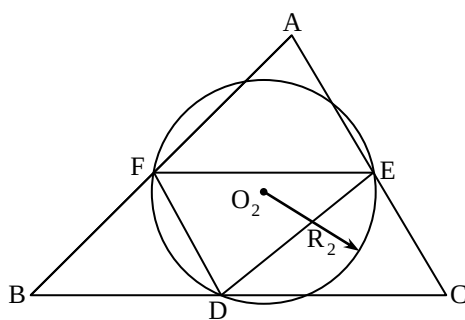
וזאת על-פי המשפט: היחס בין שטחי משולשים דומים שווה ליחס בין ריבועי הרדיוסים של המעגלים החסומים בהם.

טענה 2

במשולש $\triangle ABC$ שרדיוס המעגל החוסם אותו הוא R ורדיוס המעגל החסום בו הוא r , וכן הנקודות: D, E, F הן אמצעי הצלעות BC, AC, AB בהתאמה, והנקודה O_2 היא מרכז המעגל החוסם את משולש



איור 7



איור 8

$\triangle DEF$ שרדיוסו R_2 , אזי קיים ש- $R_2 = \frac{1}{2}R$ (ראה איור 8).

הערה: טענה 2 היא מקרה פרטי של טענה 1.

הוכחה:

משולש $\triangle DEF$ דומה למשולש $\triangle ABC$ עם יחס דמיון של 1:2 (כי הקטעים: DE , EF ו- FD הם קטעי אמצעים).

לכן $R_2 = \frac{1}{2}R$ (לפי יחס הדמיון).

לפי טענה 1 מקבלים ש- $R_2 > r$ ולפי טענה 2 התקבל ש- $R_2 = \frac{1}{2}R$, ולכן $r < \frac{1}{2}R$.

ברור שכאשר המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה-צלעות, המעגל העובר דרך הנקודות D , E , ו- F משיק

לצלעות המשולש $\triangle ABC$, ולכן: $r = \frac{1}{2}R$. מכאן: $r \leq \frac{1}{2}R$.

הערה:

את הקשר הנזכר לעיל מוכיחים בדרכים רבות, בין השאר:

- באמצעות נוסחת אוילר: $d^2 = R(R - 2r)$, כאשר d הוא המרחק בין מרכז המעגל החוסם למרכז המעגל החסום.

- באמצעות אי-שוויונים טריגונומטריים (Stupel & Ben-Chaim, 2013).

- באמצעות יחסים בין שטחים.

להלן קישור לחקר דינמי של הקשר בין הרדיוסים של המעגל החוסם והחסום במשולש:

<http://tube.geogebra.org/m/2321293>

בקישור זה אפשר לעקוב דרך קבע אחר הקשר בין ערכו של רדיוס המעגל החסום לערכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש בעזרת תוכנת גאוגברה. כשגוררים את אחד מקדוקדי המשולש אפשר לראות בכל מצב את המעגל החוסם, את המעגל החסום, את המעגל העובר דרך נקודות האמצע של הצלעות, את מרכזי המעגלים וכן את הרדיוסים שלהם.

(ב) ההוכחה האלגנטית (הוכחה ללא נימוקים חילוליים)

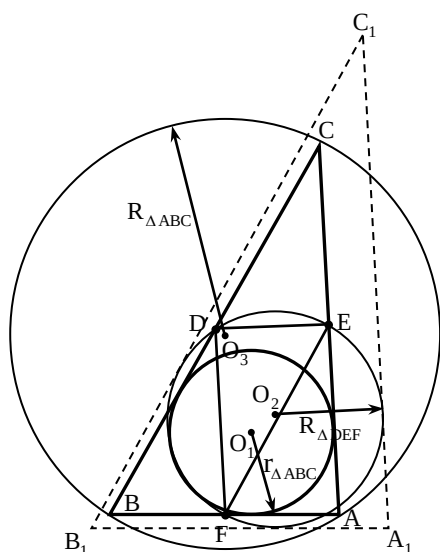
ראה איור 9:

$$\left. \begin{array}{l} AF=FB \\ BD=DC \\ AE=EC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow R_{\Delta ABC} = 2 \cdot R_{\Delta DEF}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1B_1 \parallel AB \\ A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ r_{\Delta A_1B_1C_1} = R_{\Delta DEF} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1, \Delta ABC \subset \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow r_{\Delta A_1B_1C_1} > r_{\Delta ABC}$$

↓

$$R_{\Delta DEF} > r_{\Delta ABC}$$



איור 9

סיכום

הוכחה או פתרון של משימה מתמטית מחייבים הנמקה מילולית או בעזרת סימונים מתמטיים מקובלים לכל שלב של המשימה. ההנמקה היא למעשה הוכחה לכך שאכן הדרך נכונה ומתבססת על הנתונים, על משפטים ידועים, על פעולות מתמטיות וכדומה.

כיוון שלעיתים קרובות ישנן כמה דרכי פתרון למשימה מסוימת באותו תחום מתמטי או על-ידי שילוב של כמה תחומים במתמטיקה, רצוי למצוא את הפתרון האלגנטי ביותר (הפשוט והקצר), אשר במקרים רבים אפשר להציג אותו בלי מילים כמו בדוגמאות לעיל, המפתחות את יכולת ההוכחה הוויזואלית.

רשימת מקורות

בן-חיים, ד' (2015). דרכי בנייה שונות למוצעים המתמטיים והסדר ביניהם. בתוך מ' סטופל וק' זיסקין (עורכים), **בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות ומוחשבות** (עמ' 72-86). חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

זסלבסקי, א' ווינצקי, ג' (1992). **הוכחות וויזואליות ללא מילים (כמעט)**. חיפה: הטכניון, "קשר חם". אוחר מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/sadnaot/sadna31.pdf>

יאנובסקי, ל' (2011). פתרון בעיות לא שגרתיות בעזרת שיטות מקוריות מתחומים מתמטיים שונים. **על"ה**, 45, 36-42.

לייקין, ר' (2006). על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות. **על"ה**, 36, 8-14.

לייקין, ר', לבב-ויינברג, ע' ולטמן, א' (2012). ריבוי פתרונות לבעיה בגאומטריה והכללת הבעיה. **על"ה**, 47, 30-36.

מוגילבסקי, ר' וסטופל, מ' (2006). **מפלאי אי-השוויונים של הממוצעים**. חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

רימר, ד' ובן-חיים, ד' (1986). **מרב ממוצעים** – רואים את היער. **שבבים**, 9(25).

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*. New York:

Routledge.

- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-48). Assisi, Italy.
- Leikin, R., & Lev, H. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, Korea.
- Lowrie, T., Logan, T., & Scriven, B. (2012). Perspectives in geometry and measurement in the Australian curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen, & D. Siemon (Eds.), *Engaging the Australian curriculum mathematics: Perspectives from the field* (pp. 71-88). Retrieved from <http://www.merga.net.au/node/223>
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words I: Exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. B. (2001). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Shirali, S. (2012). Proof without words. *At Right Angles*, 1(1), 14-16.
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). Plane geometry and trigonometry – Related fields: Do they work hand in hand? *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(1), 43-74.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning and proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288.



ד"ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד"ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.
מרצה במכללת אפרתה.
פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.



פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.
מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים.
פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל.
עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה.
בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.

הנחיות למחברים

הגשה

מאמרים, הנשלחים לשיפוט לכתב-העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי", ייכתבו בשפה העברית. על המאמרים להיות בהיקף של 25 עמודים לכל היותר. ב-25 עמודים הללו ייכללו כל התקצירים, טבלאות, תרשימים, איורים ורשימת המקורות. את הטבלאות או האיורים יש לשבץ בגוף הטקסט עצמו, ולא כקובץ נפרד.

יש להגיש את המאמר בגופן David, גודל 12, רווח כפול ויישור דו-צדדי (אינץ' מכל צד). שם המאמר יופיע בגודל 16 מודגש, כותרות של סעיפים ראשיים של המאמר בגודל 14 מודגש ותת-כותרות בגודל 12 מודגש. את המאמר יש לשלוח כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת ktav.et.rme@gmail.com.

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100-200 מילים ורשימה של 3-5 מילות מפתח.

רשימת המקורות תיכתב לפי הכללים המפורטים במדריך APA. יש להקפיד על התאמה מלאה בין האזכורים של המקורות בטקסט ובין הופעתם ברשימת המקורות. רשימת המקורות בסוף המאמר תסודר לפי א'-ב' של שמות המחברים (עברית לפני לועזית).

המאמרים יישלחו לשיפוט מקצועי אנונימי. לשם כך יש להוסיף עמוד שער, שמופיעים בו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושיוכו האקדמי, המקצועי או האחר של המחבר. עמוד שער זה יוסר בעת השליחה לשיפוט כדי לשמור על אנונימיות הכותב/ת בתהליך ההערכה והשיפוט.

אין לציין את שם הכותב/ת בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותב/ת. במקרה של אזכור ביבליוגרפי של המחבר בגוף המאמר עצמו יש לציין רק "(מחבר, שנה)", וכן לסמן X במקום המתאים ברשימת המקורות.