

מחקר זוטא לאפיון וסיווג שיטות פתרון של בעיה גאומטרית על-ידי פרחי הוראה

קרני שיר, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה
אילנה לביא - האקדמית עמק יזרעאל ע"ש מקס שטרן

תקציר

מציאת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל היא משימה, אשר לומדים בכל הגילאים יכולים לחקור אותה. משימה זו יכולה להיחקר בדרכים אחרות – דרכים אשר מחדדות בין השאר את המשמעות של תכונות שונות של צורות גאומטריות בסיסיות כגון משולשים, מרובעים ומצולעים משוכללים אחרים.

מחקר הזוטא המתואר במאמר עומד על דרכי פתרון של 42 פרחי הוראה, אשר התבקשו למצוא את הזווית הפנימית של מצולע משוכלל נתון, ולהכליל את ממצאיהם למקרה של מצולע בעל n צלעות. במאמר מתוארים הפתרונות המגוונים שהציעו פרחי ההוראה, התרומה של הדיון הכיתתי לתהליך הלמידה ולקידום ביצוע ההכללה המתמטית, והחשיבות של פתרון בעיה בדרכים מגוונות לתהליך הלמידה. התהליך, אשר התרחש אצל פרחי הוראה, מדגים כיצד אפשר לצאת מבעיה אלמנטרית ולמנף את הדיון הכיתתי כדי להפוך אותה לבעיית חקירה מעניינת.

מילות מפתח: פתרון בעיות; פתרונות מגוונים; דיון; הכללה מתמטית; מצולע משוכלל; זווית פנימית.

מבוא

מציאת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל היא משימה שיכולים לחקור אותה תלמידים בחטיבת ביניים, סטודנטים, מורים למתמטיקה ועוד. מחקרים שונים עסקו בחקירת תכונות מגוונות של מצולעים משוכללים כגון מציאת קשרים בין מספר הצלעות של המצולע, זוויותיו ושטחו (Battista, 1985; Killgrove, & Koster, 1991; Waters, 1987); קשרים בין אורך צלעות מצולע משוכלל ובין אורך אלכסונו (Tzamir, Tirosh, & Stavy, 1997); בניית מצולע משוכלל וזוויותיו הפנימיות בסרגל ובמחוגה (Benson & Borkovitz, 1982); יצירת מצולעים משוכללים למיניהם על-ידי צירוף ריבועים זה לזה (Muscat, 1992); מציאת הקשר בין השטח של פוליגון משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל ושטח העיגול, ככל ש- n שואף לאינסוף, בנייה מדויקת של מצולע משוכלל אשר אורך צלעו נתונה באמצעות חסימת מצולע במעגל, חלוקתו למשולשים ומציאת זווית הבסיס של כל אחד מהמשולשים הללו ועוד (Kich, 1979; Troccoli, 1987).

קונר ועמיתיה (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014) עמדו על דרכי ההנמקה אשר בהן נעשה שימוש בפתרון בעיות במתמטיקה. הם הציגו מודל כולל המתאר את סוגי הטיעונים שבהם נעשה שימוש במהלך ויכוח מתמטי בכיתה. הדוגמאות שמציגים קונר ועמיתיה (שם) לקוחות

מתוך תצפיות על יחידת לימוד בגאומטריה, הנלמדת בקרב תלמידים בכיתה ט'. במסגרת היחידה התבקשו התלמידים בין השאר לחקור את הקשר בין סכום הזוויות הפנימיות והחיצוניות של מצולע למספר הצלעות שלו. התלמידים התחילו בחקירה של מצולעים ספציפים נתונים ולאחר מכן ניסו להכליל ולגלות כיצד אפשר למצוא את הזווית הפנימית והחיצונית של כל מצולע משוכלל בעל n צלעות. במהלך חיפוש קשרים בין מספר הצלעות של המצולע לבין סכום הזוויות שלו הגיעו התלמידים לפעמים לקשרים שאינם נכונים. לדוגמה, לאחר שעמדו על כך כי סכום הזוויות של המרובע הוא 360° ואילו סכום הזוויות של המחומש הוא 540° , שיער אחד התלמידים כי סכום הזוויות של מצולע אשר לו n צלעות רחוק ב- $40n - 100$. לעומת זאת במקרים אחרים הגיעו התלמידים למסקנות אשר קידמו אותן. לדוגמה, אחרי שעמדו על כך כי סכום הזוויות של משולש הוא 180° , סכום הזוויות של מרובע הוא 360° ואילו סכום הזוויות של מחומש הוא 540° , שיער תלמיד אחר כי סכום הזוויות יהיה תמיד כפולה של 180° .

במהלך העיסוק בפעילויות הקשורות להגדרות מתמטיות, השתמשה בוראסי (Borasi, 1992) במשימה של מציאת הזווית הפנימית של מחומש החסום בתוך מעגל. לסטודנטים, אשר התבקשו למצוא זווית זו, ניתנו שני רמזים שהיו קשורים לתכונות המעגל (זווית מרכזית של 360° , רדיוסים שווים). בעזרת שימוש ברמזים הללו, חילקו הסטודנטים את המחומש לחמישה משולשים שווים שוקיים החופפים זה לזה, תחילה מצאו את זווית הראש של המשולשים (שהיא זווית מרכזית של המעגל), ובעזרתה מצאו את גודל הזווית הפנימית של המחומש. בפעילות אחרת, העוסקת בקשרים בין מספר צלעות המצולע המשוכלל לגודל הזווית הפנימית שלו, ביקשה בוראסי (שם) מהתלמידים להגדיר את המושג מצולע. בהגדרות שנתנו התלמידים למושג זה, הם השתמשו במשפט "במצולע בעל n צלעות, סכום הזוויות הפנימיות הנו $180^\circ \times (n-2)$ ".

המאמר מציג בעיה מתמטית פשוטה שהתבקשו הסטודנטים לפתור. העיסוק של הסטודנטים במציאת פתרון לבעיה העלה דרכי פתרון מגוונות שהוצגו בכיתה. בקרב חוקרים רבים קיימת הסכמה כי פתרון בעיות מתמטיות בדרכים שונות חשוב לתהליך הלמידה ולפיתוח חשיבה מתמטית מתקדמת (צמיר, תירוש, טבח ולינסון, 2010; Polya, 2009; Levav-Waynberg & Leiken, 2007; Schoenfeld, 1973).

הצגת הדרכים המגוונות בכיתה מקדמת את ההבנה המתמטית של התלמידים בכך שהיא חושפת לפניהם נקודות מבט אחרות להתבוננות בבעיה (סטופל ובן-חיים, 2014).

מחקר הזוטא שאנו מתארות כאן עוסק בדרכי פתרון מגוונות של פרחי הוראה, המנסים למצוא את הזווית הפנימית של מחומש משוכלל, ולהכליל את התוצאה שקיבלו למציאת נוסחה כללית לגודל הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

תיאור המחקר

מטרת המחקר המתואר היא לאפיין את דרכי הפתרון של פרחי הוראה, שהתבקשו למצוא את גודל הזווית הפנימית של מצולע משוכלל נתון, ולעמוד על תרומת הדיון הכיתתי להעמקת תהליך הלמידה.

במחקר השתתפו 42 פרחי הוראה למתמטיקה לעל-יסודי. הם השתתפו בסדנה בת שתיים אשר עסקה במצולעים משוכללים.

כל סטודנט קיבל שתי משימות:

1. מצא למה שווה הזווית הפנימית של מחומש משוכלל.
2. מצא למה שווה הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

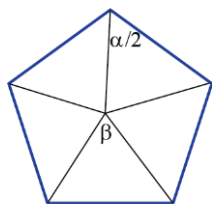
במהלך החלק הראשון של הסדנה התבקשו המשתתפים לענות לבד על שתי השאלות הללו. בחלק השני של הסדנה נערך דיון כיתתי על המשימה. דיון זה התבסס על התשובות שכתבו הסטודנטים בחלק הראשון של הסדנה.

ממצאים

משימה ראשונה - עבודה עצמית

מתוך ניתוח הפתרונות של 42 פרחי ההוראה עלו תשע דרכי פתרון מגוונות למציאת הזווית הפנימית של מחומש משוכלל. להלן פירוט דרכי הפתרון שעשו בהן שימוש פרחי ההוראה.

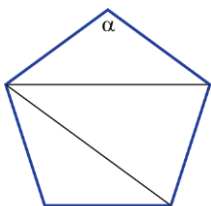
דרך פתרון א': מתוך שימוש בידע כי מחומש משוכלל יכול להיחסם במעגל שמרכזו הוא מרכז הכובד של המחומש, פרחי ההוראה רבים חילקו את המחומש לחמישה משולשים שווים שוקיים (ראה איור 1).



איור 1

הם גילו את גודלה של זווית $\beta = \frac{360^\circ}{5}$, וחישבו את α – הזווית הפנימית של המחומש,

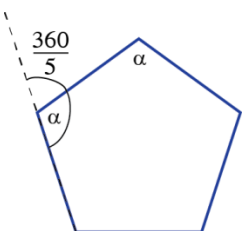
מתוך התבססות על סכום הזוויות במשולש שווה השוקיים $\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ\right)$



איור 2

דרך פתרון ב': מתוך שימוש בידע כי אפשר לחלק מחומש משולשים באמצעות ציור שני אלכסונים מקדקוד כלשהו (ראה איור 2).

α , הזווית הפנימית של המחומש, חושבה על סמך סכום הזוויות של שלושת המשולשים $(5 \times \alpha = 3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ)$.



איור 3

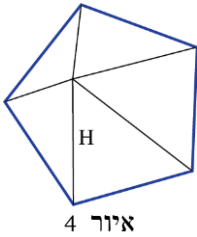
דרך פתרון ג': הזווית הפנימית α חושבה לפי גודל הזווית החיצונית של המחומש שהיא

$\frac{360^\circ}{5}$, ולכן הזווית הפנימית הצמודה לה שווה

ל- $180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$ (ראה איור 3).

דרך פתרון ד': הזווית הפנימית α חושבה לפי שימוש בנוסחה

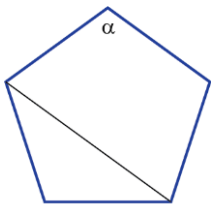
$$\alpha = \frac{[180^\circ(n-2)]}{n} \quad \text{במקרה בו } n=5.$$



איור 4

דרך פתרון ה': חלוקת המחומש המשוכלל לחמישה משולשים בעזרת

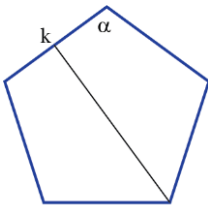
נקודה H כלשהי בתוך המחומש (ראה איור 4). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה לפי ההפרש בין סכום הזוויות בחמשת המשולשים והזווית הפנימית H ($5 \times 180^\circ - 360^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 5

דרך פתרון ו': חלוקת המחומש למרובע ומשולש באמצעות העברת אלכסון אחד כלשהו (ראה

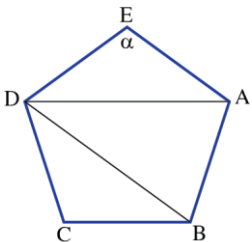
איור 5). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה לפי סכום הזוויות של המרובע והמשולש שנוצרו בעקבות חלוקה זו ($5 \times \alpha = 360^\circ - 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 6

דרך פתרון ז': חלוקת המחומש לשני מרובעים (ראה איור 6). הזווית

פנימית α של המחומש חושבה לפי ההפרש בין סכום הזוויות בשני המרובעים והזווית השטוחה k ($2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).



איור 7

דרך פתרון ח': חלוקת המחומש לשני טרפזים המכסים זה את זה

(טרפזים ABCD ו-DEAB המתוארים באיור 7). הזווית הפנימית α של המחומש חושבה

לפי ההפרש בין סכום הזוויות של שני הטרפזים וסכום הזוויות של המשולש ADB המשותף ($2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).

דרך פתרון ט': סכום הזוויות של מחומש משוכלל חושב, בעזרת הידוע על סכום הזוויות

של משולש שווה צלעות וריבוע. על-ידי חלוקה בחמש נמצא הגודל של α , הזווית הפנימית של המחומש (כפי שמתואר בטבלה 1).

טבלה 1: שיטת החישוב באסטרטגיה ט'

הצורה	סכום הזוויות	גודל זווית פנימית
משולש שווה צלעות	180°	60°
ריבוע	360°	90°
מחומש משוכלל	540°	108°

טבלה 2 להלן מתארת את התפלגות תשובות פרחי ההוראה למשימה שקיבלו – לפי תשע דרכי הפתרון אשר תוארו לעיל. חשוב לציין כי היו שלושה סטודנטים שפתרו את המשימה בשתי דרכים אחרות ולכן התקבלו בסך הכול 45 פתרונות מ-42 סטודנטים.

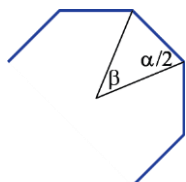
טבלה 2: התפלגות הפתרונות למשימה הראשונה לפי דרכי הפתרון האחרות

דרכ פתרון	א'	ב'	ג'	ד'	ה'	ו'	ז'	ח'	ט'	סה"כ
מספר הפתרונות	17	12	1	5	1	6	1	1	1	45

אפשר לראות מטבלה 2 שפתרונות א' ו-ב', שאפשר לסווגם כפתרונות סטנדרטיים, הם השכיחים ביותר בעוד שאר הפתרונות, אשר מחייבים חשיבה קצת אחרת, הם בעלי שכיחות נמוכה מאוד.

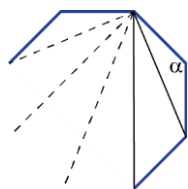
משימה שנייה - עבודה עצמית

לצורך מציאת זווית פנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות השתמשו פרחי ההוראה בארבע דרכי פתרון:



איור 8

דרך פתרון 1: מתוך שימוש בכך שאפשר לחסום מצולע משוכלל בתוך מעגל אשר מרכזו הוא מרכז הכובד של המצולע, הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות חושבה לפי מציאת הזווית המרכזית β בשלב ראשון $\left(\beta = \frac{360^\circ}{n}\right)$, וחשוב הזווית הפנימית של המצולע המשוכלל α התבצע לפי סכום זוויות פנימיות במשולש שווה שוקיים (ראה איור 8).



איור 9

דרך פתרון 2: את המצולע המשוכלל חילקו ל- $n-2$ משולשים לפי ציור של $n-3$ אלכסונים מאחד מקדקודי המצולע (ראה איור 9). הזווית הפנימית α של המצולע בוטאה באמצעות המשוואה $n \times \alpha = (n-2) \times 180^\circ$ (שמשמעותו היא $\alpha = 180^\circ \frac{(n-2)}{n}$).

דרך פתרון 3: על-ידי שימוש בכך שגודלה של זווית חיצונית במצולע משוכלל הנה $360^\circ/n$, אפשר לבטא את הזווית הפנימית α באמצעות הנוסחה $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

דרך פתרון 4: שימוש בנוסחה $\alpha = \frac{[180^\circ(n-2)]}{n}$, המוכרת לחלק מפרחי ההוראה, כדי לבטא את α

– הזווית הפנימית של המצולע המשוכלל.

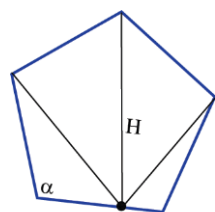
טבלה 3 להלן מתארת את התפלגות תשובות פרחי ההוראה על המשימה שקיבלו – לפי ארבע דרכי הפתרון שתוארו לעיל.

טבלה 3: התפלגות הפתרונות למשימה השנייה על פי האסטרטגיות השונות

דרכ פתרון	(1)	(2)	(3)	(4)	סה"כ
מספר הפתרונות	25	7	1	9	42

שוב אפשר לראות בטבלה 3 תופעה שחוזרת על עצמה: הפתרון הסטנדרטי הוא השכיח ביותר (פתרון 1), ואילו פתרון 3 שיש בו חשיבה "מחוץ לקופסה" הוא הפתרון בעל השכיחות הנמוכה ביותר.

הדיון הכיתתי



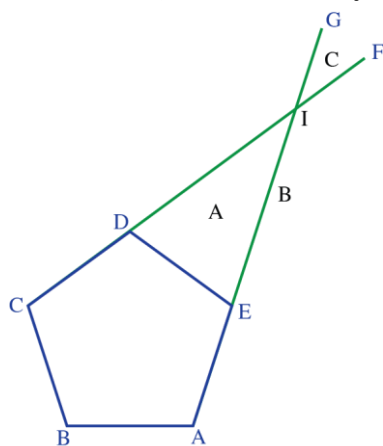
איור 10

בתחילת הדיון הכיתתי הציג כל משתתף את דרכי הפתרון שהשתמש בהן כדי למצוא את הזווית הפנימית. כאשר הוצגה דרך פתרון ה', שלפיה נבחרת נקודה H כלשהי בתוך המחומש, ונקודה זו משמשת כקדקוד של חמישה משולשים אשר צלע של המחומש משמש צלע בכל אחד מהם (ראה איור 3 לעיל), משתתף אחר הציע לבדוק מה קורה כאשר הנקודה H נופלת על אחת הצלעות (ראה איור 10).

פרחי ההוראה חקרו מקרה זה והגיעו לכך כי אף שבמקרה זה משולש אחד הנו מנוון, עדיין אפשר למצוא את הזווית הפנימית α בחישוב ההפרש בין שטחי ארבעת המשולשים ובין הזווית השטוחה H ($4 \times 180^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$).

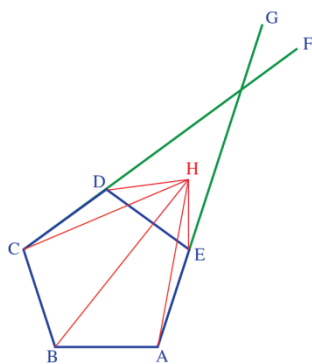
בשעת הדיון עלו עוד שתי שאלות: האם יהיה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α גם אם הנקודה H תהיה מחוץ למחומש? האם יתקבל אותו פתרון, בלי קשר למיקומה של הנקודה H, או האם יהיו פתרונות אחרים בעבור כל מיקום של הנקודה H?

בשלב זה נעזרו פרחי ההוראה בלומדה הממוחשבת 'Geometry Inventor' כדי לחקור את המקרים השונים הללו. ביצוע פעילות החקר בעזרת הלומדה הביא את פרחי ההוראה לידי מסקנה כי בהיות הנקודה H מחוץ למחומש המשוכלל, היא כוללת בתוכה מספר מקרים מגוונים (ראה איור 11):

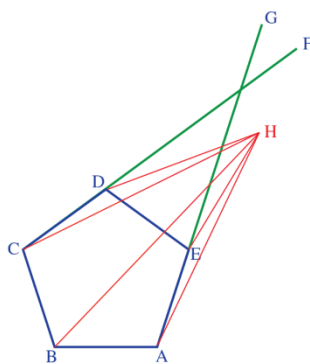


איור 11

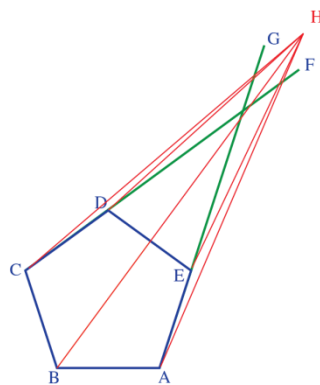
- (1) H נמצאת בתוך אזור A.
- (2) H נמצאת בתוך אזור B.
- (3) H נמצאת בתוך אזור C.
- (4) H נופלת על אחד הקטעים DI או EI.
- (5) H נופלת על אחת הקרניים IF או IG.
- (6) H נופלת בדיוק על נקודה I.



איור 11.1



איור 11.2



איור 11.3

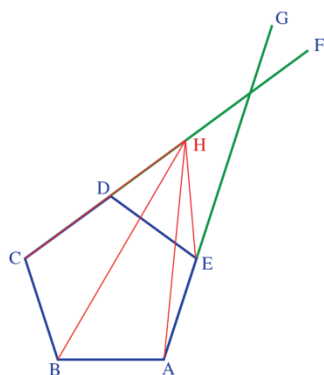
איור 11.1 לעיל מתאר את תת-המקרה הראשון שבו H נמצאת בתוך אזור A. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב ההפרש בין סכום הזוויות של ארבעת המשולשים (HDC, HCB, HBA, HAE) וזוויות המשולש אשר מכסה אותם חלקית (HDE):

$$4 \times 180^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

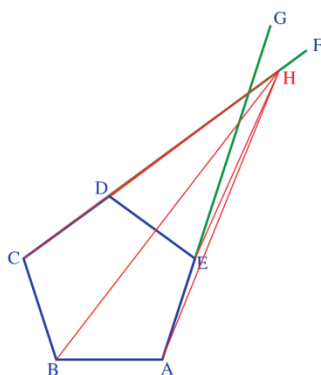
איור 11.2 לעיל מתאר את תת-המקרה השני שבו H נמצאת באזור B. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב סכום זוויות שני המשולשים HDC ו- HCB והמרובע הקעור $HBAE$ ולהפחית מכך את זוויות משולש HDE שמכסה אותם חלקית:

$$2 \times 180^\circ + 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

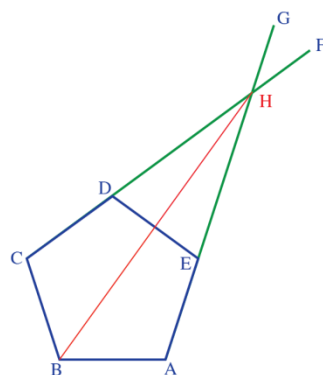
איור 11.3 לעיל מתאר את תת-המקרה השלישי שלפיו אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב סכום הזוויות של שני המרובעים הקמורים $HDCB$ ו- $HEAB$ ולהפחית מכך את זוויות משולש HDE :

$$2 \times 360^\circ - 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$


איור 11.4



איור 11.5



איור 11.6

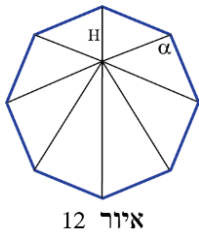
איור 11.4 לעיל מתאר את תת-המקרה הרביעי. במקרה זה אפשר למצוא את הזווית הפנימית α של המחומש המשוכלל בחישוב הסכום של כל הזוויות של שלושת המשולשים (HAE , HBA , HCB). אפשר לראות כי $3 \times 180^\circ = 4\alpha + \angle DHE + \angle HED$, אך כיוון ש- $\alpha = \angle CDE = \angle DHE + \angle HED$ (משמש זווית חיצונית למשולש DHE) נקבל כי $3 \times 180^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$.

תת-המקרה החמישי מתואר באיור 11.5 לעיל, שלפיו אפשר למצוא את הזווית הפנימית של המחומש המשוכלל בחישוב סכום הזוויות של משולש HCB והמרובע הקעור $HBAE$.

לכן $180^\circ + 360^\circ = 4\alpha + \angle DHE + \angle HED$ אבל $\alpha = \angle CDE = \angle DHE + \angle HED$ ונקבל שוב $180^\circ + 360^\circ = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 108^\circ$.

כאשר H נופלת על I (נקודת חיתוך הישרים DF ו- EG , כפי שמתואר באיור 11.6 לעיל), נוצרים שני משולשים: HAB ו- HCB ומתקבל $\angle A + \angle B + \angle C + \angle DHE = 360^\circ$. אם נציב $\angle DHE = 2\alpha - 180^\circ$ במשוואה הקודמת נקבל כי $5\alpha - 180^\circ = 360^\circ$ ומכאן שוב נובע כי $\alpha = 108^\circ$.

כפי שאפשר לראות בטבלה 3 לעיל, בעת פתרון המשימה השנייה (מציאת גודל זווית פנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות), נעזרו רוב פרחי ההוראה בדרך פתרון א' כדי להגיע לביטוי כללי, אך היו גם כאלו שהשתמשו באסטרטגיות ב', ג' או ד'.

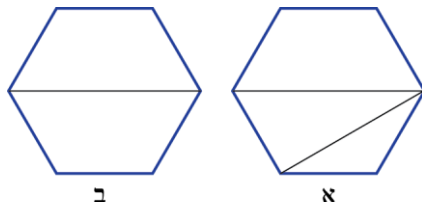


איור 12

אף פרח ההוראה אחד לא השתמש בדרך פתרון ה' וניסה להכליל אותה למציאת הזווית הפנימית של מצולע בעל n צלעות. במהלך הדיון הכיתתי עלתה המסקנה כי גם פתרון זה יכול להיות מוכלל למציאת הזווית הפנימית במקרה הכללי. הם גילו כי המצולע המשוכלל הכללי יכול להיות מחולק ל- n משולשים בהוספת נקודה H כלשהי בתוך המצולע (ראה איור 12). במקרה זה אפשר לחשב את הזווית הפנימית של המצולע בחישוב ההפרש בין סכום הזוויות ב- n משולשים

$$\text{ובין הזווית הפנימית } H: n \times 180^\circ = n \times \alpha + 360^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

הניסיון להכליל את דרך פתרון ו' יצרה מעט בלבול. חלק מפרחי ההוראה חשבו שההכללה של דרך זו



איור 13

היא חלוקת המצולע למרובע אחד ומשולשים רבים (אפשרות א), בעוד אחרים חשבו שעבור $n > 5$ אפשר לחלק את המצולע למספר רב ככל האפשר של מרובעים, ואת מה שאי אפשר לחלק למרובעים – לחלק למשולשים (אפשרות ב). באיור מספר 13 אפשר לראות דוגמה של משושה מחולק למרובע אחד ושני משולשים (אפשרות א), או לשני מרובעים (אפשרות ב).

הכללת אפשרות א בעבור מצולע משוכלל בעל n צלעות תביא לחלוקה למרובע אחד ו- $n-4$ משולשים. במקרה זה סכום הזוויות הפנימיות של המצולע ($n\alpha$) יהיה $360^\circ + (n-4) \times 180^\circ$, ולכן גודל הזווית

הפנימית במצולע יהיה $a=180^{\circ} \frac{(n-2)}{n}$.

הכללת אפשרות ב בעבור מצולע משוכלל בעל n צלעות מובילה לשני מקרים אחרים: (1) המקרה שבו מספר הקדקודים (כלומר n) הנו זוגי; (2) המקרה בו מספר הקדקודים הנו אי-זוגי.

במקרה הראשון המצולע יכול להיות מחולק ל- $\frac{(n-2)}{2}$ מרובעים, מה שיביא לכך

$$ש- \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^{\circ} = \alpha \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} \frac{(n-2)}{n} . 360^{\circ} \times \frac{(n-2)}{2} = n\alpha$$

לסטודנטים המקרה השני היה קל פחות להכללה. לאחר שבדקו מספר מקרים פרטיים, המסקנה הייתה שבמקרה זה חלוקת המצולע תוביל למשולש אחד ו- $(n-3)/2$ מרובעים. המשוואה שתתאים למקרה זה

היא $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180^{\circ} = \alpha \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} \frac{(n-2)}{n} . 360^{\circ} \times \frac{(n-3)}{2} + 180^{\circ} = n\alpha$. כיוון שכל מרובע יכול להתחלק לשני משולשים, יכולות

להיות עוד חלוקות רבות אחרות של המצולע למרובעים ומשולשים.

כפי שהיה אפשר לראות בטבלה מס' 2, בעת חישוב הזווית הפנימית של מחומש משוכלל, רוב פרחי

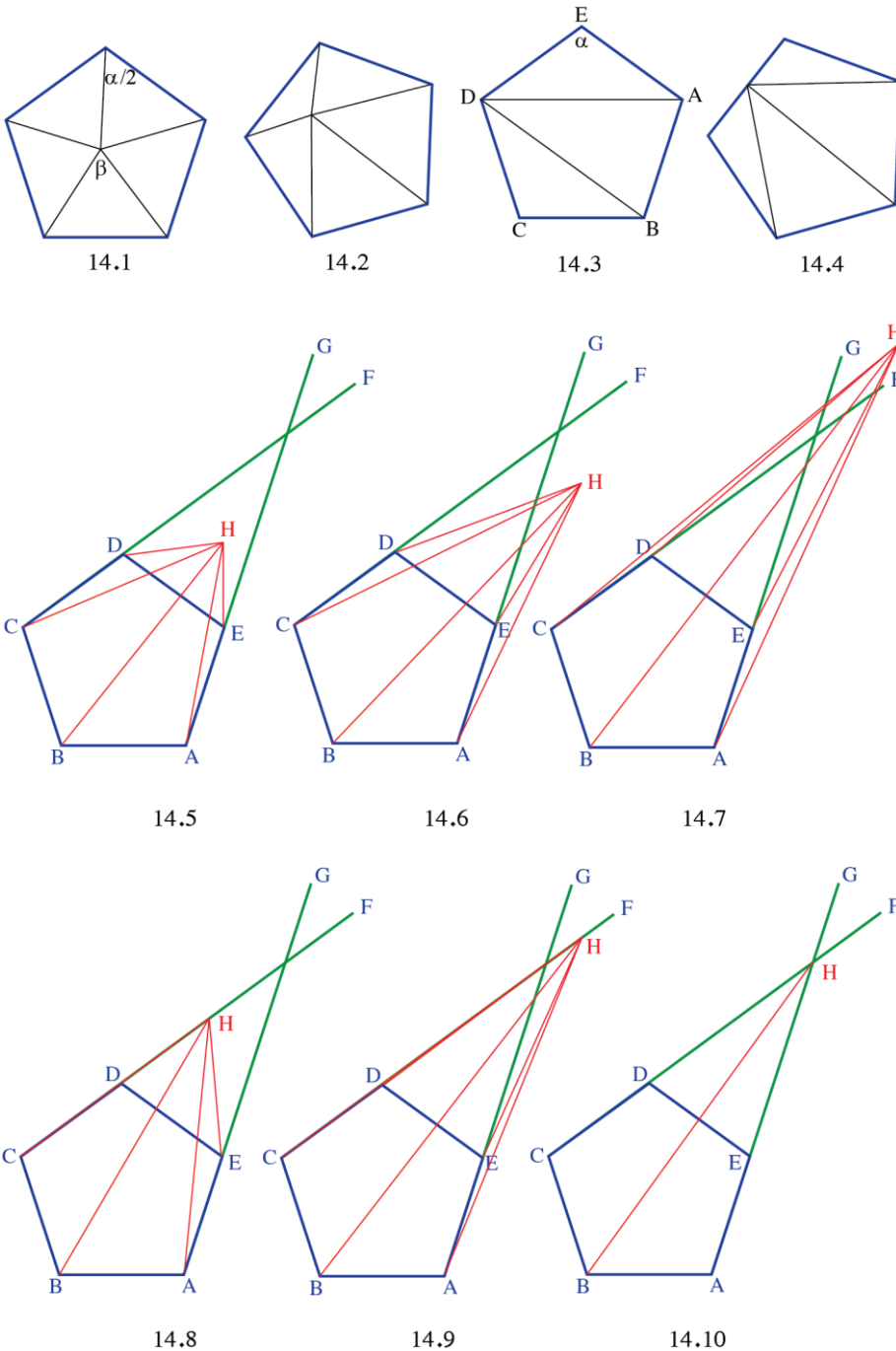
ההוראה לא נעזרו בנוסחה $180^{\circ} \frac{(n-2)}{n}$, אלא חילקו את המחומש לצורות בסיסיות (כגון משולש

ומרובע) ונעזרו בהן כדי לפתור את המשימה. אף שהנוסחה של סכום זוויות במצולע מוכרת יחסית ולא מסובכת, עדיין פרחי ההוראה העדיפו להשתמש באסטרטגיות אחרות – כגון חלוקת המחומש למרובעים ומשולשים – לפתור את השאלה, ולא להתבסס על הנוסחה בפתרון. הנטייה לחלק מחומש לצורות בסיסיות אלו היא אחת מהיוריסטיקות הפתרון הנפוצות ביותר אצל תלמידים הפותרים בעיות בגאומטריה המערבות צורות מורכבות יותר (Borasi, 1992). משולשים ומרובעים הם הצורות הראשונות המוצגות לתלמידים בבית-הספר היסודי. גם בחטיבת הביניים ובתיכון חלק נרחב מאוד מלימודי הגאומטריה מוקדש ללמידה על סוגים רבים של משולשים ומרובעים ותכונותיהם, ופתרון תרגילים רבים דורש חיפוש משולשים בכלל ומשולשים חופפים בפרט. דבר זה יכול להיות הסיבה לכך שלומדים מנסים להשתמש במשולשים ובתכונות של משולשים שהם מכירים – בפתרון בעיות גאומטריות מגוונות. סיבה אפשרית אחרת לכך שהיה שימוש מועט בנוסחה המוכרת לחישוב ערכה של הזווית הפנימית של המחומש המשוכלל, היא הקשר הרופף שקיים בראשו של הלומד בין אלגברה לגאומטריה (Knuth, 2000). ייתכן שפרחי ההוראה העדיפו להשתמש במושגים מתוך הגאומטריה כדי לפתור בעיה גאומטרית, מאשר להשתמש בנוסחה אלגברית לצורך פתרון בעיה זו.

דיון

הבעיה העומדת במרכז המחקר המתואר היא דוגמה של משימה פשוטה שאפשר לפתור אותה בדרכים מגוונות. ניתוח של דרכי הפתרון המגוונות יכול לקדם הכללה מתמטית, נוסף לסיטואציות למידה רצויות אחרות ברוח הסטנדרטים של ה-NCTM (2000). ניתוח של אסטרטגיות הפתרון המגוונות, אשר העלו פרחי ההוראה, מראה על כך כי במשימה זו קיימים שני סוגי הכללה, אשר שילוב שלהם הוא כלי

משמעותי לקידום תהליך הלמידה. סוג ההכללה הראשון הוא המעבר ממצולע משוכלל ספציפי (מחומש) למצולע משוכלל בעל n צלעות. סוג ההכללה השני מצוי באסטרטגיות שהעלו פרחי ההוראה.



מתוך התבוננות באסטרטגיות הפתרון המגוונות של פרחי ההוראה אפשר לראות כי רוב האסטרטגיות שהשתמשו בהן פרחי ההוראה כללו שני מרכיבים (ראה איור 14):

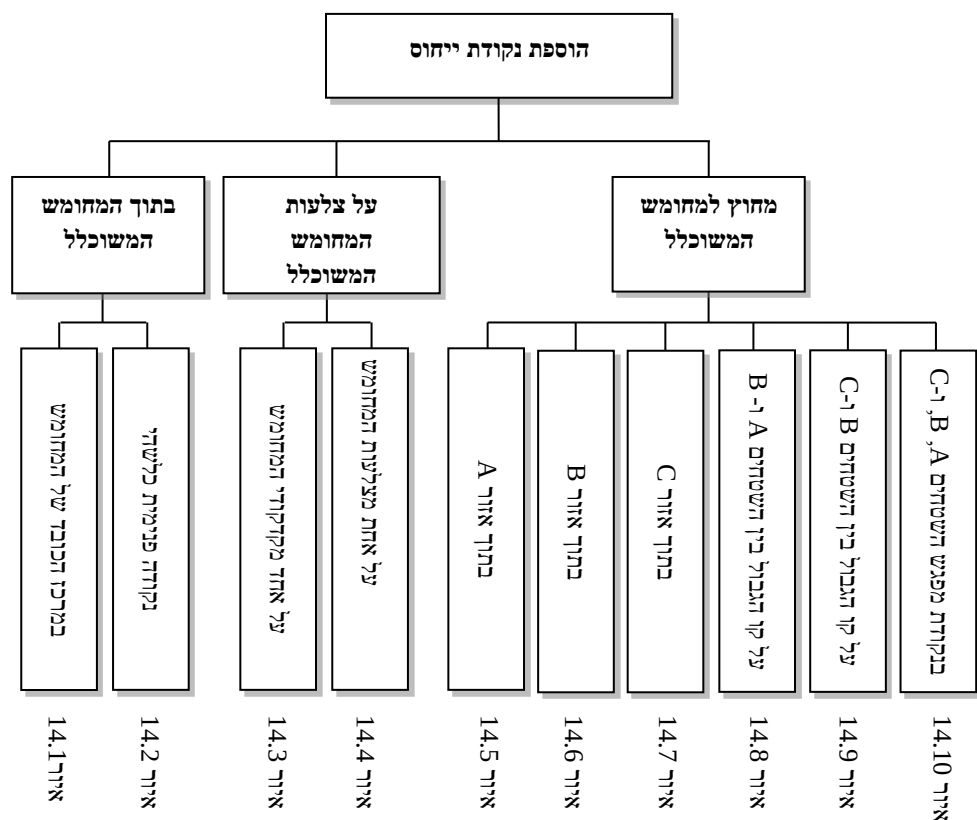
1. חלוקת המצולע לצורות בסיסיות (משולשים ומרובעים).

2. הוספה של נקודת ייחוס.

המרכיב השני, הוספה של נקודת ייחוס, יכול להיות מחולק לשלוש נקודות משנה לפי מיקום נקודת הייחוס: (1.1) הוספת נקודת ייחוס בתוך המחומש; (1.2) הוספת נקודת ייחוס על צלע המחומש; (1.3) הוספת נקודת ייחוס מחוץ למחומש.

כל אחת מתת-חלוקות אלו יכולה גם היא להיות מחולקת לפי המקרים המסוימים שהיא כוללת.

תרשים 1 מציג את כל האפשרויות המגוונות למיקום נקודת הייחוס – כפי שעלו בפתרונות האחרים שהציגו פרחי ההוראה, ואת ההפניה לאיור המתאים.



תרשים 1: מיקום נקודת הייחוס

הדיון הכיתתי הניב עוד אסטרטגיות רבות. החלפת הרעיונות שנעשתה בין המשתתפים בדיון אפשרה לפרחי ההוראה לחשוב על כיוונים אחרים, חדשים, לדרכי פתרון של הבעיה, שלא חשבו עליהם בלי הגירויים שקיבלו זה מזה. לפי גישת הקונסטרוקטיביזם הסוציו-תרבותית, לקבוצה יש תפקיד משמעותי בתהליך הלמידה של הפרט (Cobb, Wood, & Yackel, 1993). הקבוצה מעודדת את היחיד לעשות רפלקציה על דרך החשיבה שלו ובשל כך הוא יכול לחדד את ההבנה שלו (Cobb et al., 1997). בעבודה בתוך קבוצה, היחיד יכול להגיע ליותר ממה שהוא היה יכול אילו הוא היה עובד לבדו (Voigt, 1994).

ההצעה לבדוק האם אפשר למצוא את הזווית הפנימית של המחומש כאשר הנקודה H (שחוברו אליה קדקודי המחומש) לא נמצאת בתוך המחומש, אלא על השפה שלו, או אפילו מחוצה לו, מזכירה במעט את האופן שבו אפשר לצאת מבעיה חקירה אחת לבעיות אחרות רבות בעזרת המודל של 'מה אם לא?' (Brown & Walter, 1990). רק שבניגוד למודל של 'מה אם לא?', אשר לפיו משנים את אחד מנתוני הבעיה ובדקים מה קורה במקרה זה, כאן בדקו הסטודנטים מה קורה לדרך הפתרון של הבעיה כאשר משנים במעט את נקודת המוצא של הפתרון והאם מתקבלת דרך פתרון אחרת לבעיה לאחר שינוי זה.

במהלך החיפוש אחר דרכי פתרון חדשות, הרגישו פרחי ההוראה שעליהם לעשות שימוש בידע קודם שהם מכירים, כגון סכום הזוויות במשולש, הקשר שבין זווית חיצונית לזווית פנימית במשולש וכדומה. בתהליך הפתרון נעשה שימוש בידע קודם זה כדי לפתור את הבעיה החדשה. כמו כן נוצרו קשרים בין מושגים מתמטיים אחרים, קשרים אשר על חשיבותם החינוכית דיברו חוקרים מסוימים (למשל Cornu & Dubinsky, 1989; Coxford, 1995; Even, 1990; Hiebert & Carpenter, 1992; Reimer & Reimer, 1995). לפי נוס, היילי והוילס (Noss, Healy, & Hoyles, 1997), המשמעות המתמטית נגזרת מתוך הקשרים בתוך המתמטיקה. קשרים הקושרים בין ידע מתמטי חדש לידע מתמטי ישן, ומעצבים את הידע החדש כחלק מתוך המערכת המתמטית הקיימת.

ישנה הסכמה רחבה בקרב חוקרים כי קישור רעיונות מתמטיים הנעשה בין השאר על-ידי שימוש באסטרטגיות שונות לפתרון של אותה בעיה הוא אלמנט חשוב של חשיבה מתמטית מתקדמת (צמיר ואחרים, 2010; Leiken & Lev, 2007; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1985; Tall, 2007). העיסוק של פרחי ההוראה בפעילות, המשלבת בעיה שאפשר לפתור אותה בדרכים אחרות, יכול לפתח את המודעות שלהם לחשיבות העיסוק בבעיות מסוג זה גם בכיתה שלהם, והתרומה של פעילויות מסוג זה לתהליך הלמידה של הלומדים בכיתה (Bingolbali, 2011; Leikin & Lev, 2007; Levav-Waynberg & Leikin, 2009). לפי סטופל ובן-חיים (2014), הצגת הדרכים האחרות בכיתה מקדמת את ההבנה המתמטית של התלמידים בכך שהיא חושפת לפניהם נקודות מבט אחרות להתבוננות בבעיה. כמו כן ריבוי דרכי פתרון לבעיה אחת מאפשר את ההתפתחות של ידע מתמטי מקושר לא רק בעבור הסטודנטים, אלא גם בעבור מוריהם.

מאמר זה מציג דוגמה למשימה פשוטה שאפשר לפתור אותה בדרכים אחרות ומגוונות. אפשר לראות כי גם משימה, אשר במבט ראשון נראית בסיסית ופשוטה, עבודה אינדיבידואלית, רפלקציה על התוצאות שהתקבלו ודיון כיתתי – יכולים להביא לידי דרכי פתרון מעניינות ומיוחדות. דיון באסטרטגיות פתרון אלו יכול להביא לידי בחינת מצבים שלא נלקחו בחשבון בתחילת הפעילות, וביצוע הכללות מתמטיות

לדרכי הפתרון המגוונות שהתקבלו. אנו מקוות כי פרחי ההוראה ילמדו מהתהליך האישי והכיתתי, שחוו במהלך פתרון המשימה והדיון באסטרטגיות הפתרון המגוונות, וישלבו גם הם בהוראה שלהם בכיתה עבודה עצמית, הצגת אסטרטגיות פתרון מגוונות, דיון באסטרטגיות אלו וניסיון להגיע להכללות אחרות מתוך הפתרונות שייציגו תלמידיהם בכיתה.

מקורות

- סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 1, 80-107.
- צמיר, פ', תירוש, ד', טבח, מ' ולוינסון, א' (2010). האם תוכל לעשות זאת בדרך שונה? על מטלות שלהן כמה פתרונות. *עלון דע-גן*, 3, 30-37.
- Benson, J., & Borkovitz, D. (1982). A new angle for constructing pentagons. *Mathematics Teacher*, 75(4) 288-290.
- Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education*, 36(1), 18-31.
- Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, N.H.: Heinemann Educational Books.
- Brown, S. I., & Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.
- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking a classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Socio-cultural dynamic in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200.
- Cornu, B., & Dubinsky, E. (1989). Using a cognitive theory to design educational software. *Education and Computing*, 5(1-2), 73-80.
- Coxford, A. F. (1995). The case for connections. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-13). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-544.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
- Kich, K. (1979). Inscribed polygons lead to an interesting limit. *Mathematics Teacher*, 72(4), 294-295.
- Killgrove, R. B., & Koster, D. W. (1991). Regular polygons with rational area or perimeter. *Mathematics Magazine*, 64(2), 109-114.
- Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 500-507.
- Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 776-785). Lyon: Service des publications, INRP.
- Muscat, J. P. (1992). Polygons and stars. *Mathematics in School*, 21(2), 25-28.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Noss, R., Healy, L., & Hoyle, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 202-231.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995). Connecting mathematics with its history: A powerful, practical linkage. In P. A.

- House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 104-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla.: Academic Press.
- Tall, D. (2007, March). *Teachers as mentors to encourage both power and simplicity in active material learning*. Paper presented at the Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing, Abu-Dhabi.
- Troccoli, J. A. (1987). Polygons made to order. *The Mathematics Teacher*, 80(1), 44-50.
- Tzmir, P., Tirosh, D., & Stavy, R. (1997). Is the length of the sum of three sides of a pentagon longer than the sum of the other two sides? In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 214-221). Lahti, Finland: University of Helsinki & Lahti Research and Training Centre.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 275-298.
- Waters, W. M., Jr. (1987). Finding the area of regular polygons. *The Mathematics Teacher*, 80(4), 278-280.



פרופ' אילנה לביא

מכהנת כראש החוג למערכות מידע ניהוליות במכללת עמק יזרעאל. בוגרת הוראת המדעים במתמטיקה בטכניון. תחומי המחקר שלה הם: התפתחות מקצועית של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה וחקר קשיי לומדים בהבנת מושגים מדעיים (במתמטיקה ובמדעי המחשב). פרסמה מאמרים רבים בנושאים אלו.



ד"ר קרני שיר

סיימה לימודי דוקטורט בנושא 'תפיסות של מטה מושג במתמטיקה - המקרה של הגדרה מתמטית'; בהנחיית פרופ' אורית זסלבסקי בטכניון בשנת 2004. מרצה בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך ובמכללת לוינסקי לחינוך. עוסקת בסוגיות הקשורות במושג ההגדרה המתמטית, ובנושאים שונים מתחום תורת המשחקים.