

משפטים שנשכחו בהנדסת המישור והדגמת השימוש בהם לפתרון בעיות

מבוא:

לאורך עשרות שנים הלך ופחת באופן מדורג היקף הנושאים בתכנית הלימודים בהנדסת המישור בכל רמות הלימוד בתחום.

מגמה זו מאפיינת גם את תכנית הלימודים החדשה, המתגבשת בחודשים האחרונים בוועדת המקצוע של משרד החינוך.

בתחילת תהליך הצמצום של היקף התכנית – לא הגיעו בשלבי ההוראה והלימוד לעמודים האחרונים בספרי הלימודים הקלסיים של לדיז'ינסקי [1] ושל קלעי-תוכמן [2], שבהם מצויים משפטים מיוחדים וחומרי העשרה. לאחר מכן מחקו את נושא הבניות ההנדסיות בעזרת סרגל ומחוגה. אמנם בניות הנדסיות הופיעו בספרי לימוד מאוחרים יותר (אספס [3], גורן [4]), אך לא הופיעו בתכנית הלימודים המחייבת.

לענף של הנדסת המישור ישנה חשיבות עצומה בחינוך המתמטי של התלמיד. הנדסת המישור מכילה את מרבית המרכיבים, התורמים לפיתוח החשיבה, שהיא הכלי המרכזי והחינוכי, המלווה את המתבגר בכל תחום אקדמי, שיבחר בדרכו אל עולם המחר המקצועי.

בהנדסת המישור ישנן אקסיומות, משפטי יסוד, הנמקות לכל שלב, צורות גאומטריות שונות, מקומות הנדסיים, קווי-עזר ובניות חלופיות, יישום, ניתוח, הסקת מסקנות, חשיבה אינטואיטיבית וחשיבה רב-ערוצית, פתרונות ייחודיים, ולעתים – מספר דרכי פתרון לאותה בעיה.

בשל מכלול המרכיבים הנ"ל וחשיבותם גם לשאר ענפי המתמטיקה, המשולבים זה בזה – חבל מאוד, שהנדסת המישור מאבדת ממעמדה ואינה תופסת את מקומה הראוי. העקרונות ומשפטי ההנדסה הבסיסיים, נוסחו כבר בימי המתמטיקאים הקדמונים: אוקלידס, פיתגורס,

תאריכים: משפטים מיוחדים בגאומטריית המישור, משפט תלמי, משפט ברייט-שניידר שנתון "π" – תשס"ה כרך י'

תלמי ואחרים, ומאותה עת, לאורך מאות אלפי שנים, היוו משימות הנדסיות מקור להתעניינות, אתגר לחשיבה ובסיס להתפתחות תחומים אחרים.

במאמר הנוכחי יובאו שלושה משפטים (לחלקם תינתן הוכחה), שאינם מופיעים בספרי הלימוד הנוכחיים, ומשום כך הם מוכרים רק לחלק קטן מהמורים, ואולי גם לתלמידים מעטים.

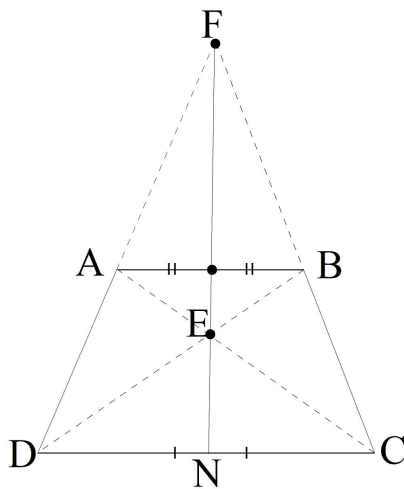
לכל משפט תובא בעיה, שפתרונה מבוסס על הדגמת השימוש במשפט. כמו-כן ייעשה שילוב של שימוש בטריגונומטריה ובענפים נוספים של המתמטיקה.

משפט מס' 1

משפט: הישר, המחבר את המשכי שוקי הטרפז עם נקודת מפגש אלכסוניו, חוצה את בסיסו.

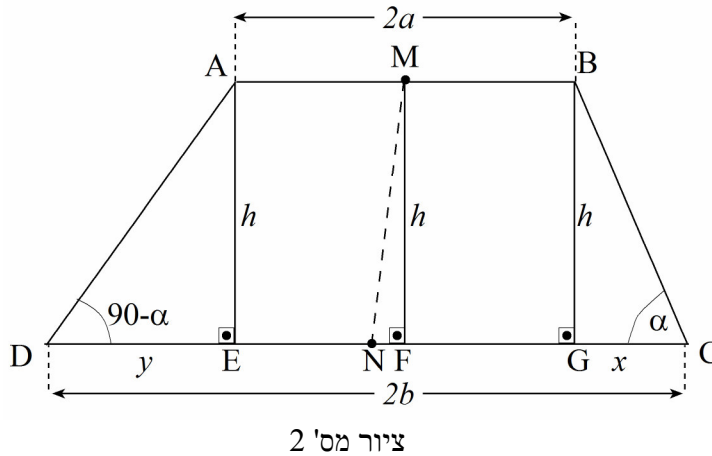
טרפז $ABCD$, שאלכסוניו נפגשים בנקודה E , המשכי שוקיו נפגשים בנקודה F . הישר FE חותך את הבסיס העליון בנקודה M , והמשכו חותך את הבסיס התחתון בנקודה N – כנראה בציור מס' 1.

הנקודות M ו- N הן אמצעי הבסיסים AB ו- DC בהתאמה. למיטב ידיעתנו, המשפט הנ"ל אינו מוכר לתלמידים ומופיע כתרגיל להוכחה בפרק של דמיון משולשים [5].



מסקנת המשפט היא, שהנקודות F, M ו- N נמצאות על ישר אחד. ציור מס' 1

במסגרת לימודי הטריגונומטריה ניתן לתלמידים לפתור את התרגיל הבא:



נתון טרפז, שאורכי
בסיסו: $AB=2a$ ו- $DC=2b$,
וסכום שתי זוויות הבסיס
התחתון 90° , כנראה בציר
מס' 2. מצא את אורך
הקטע, המחבר את אמצעי
בסיסיו (אורך הקטע MN)
– באמצעות a ו- b .
מסמנים: $\angle C = \alpha$,
 $\angle D = 90 - \alpha$.

מורידים גבהים AE , MF ו- BG , ומסמנים אותם ב- h . מסמנים את היטלי השוקיים על
הבסיס: $DE=y$ ו- $GC=x$.

$$\text{לפי משולש } BGC, x = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\text{לפי משולש } AED, y = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

לפי ש- $EG=2a$ (מלבן, מקבלים):

$$x+y=2(b-a)$$

$$\text{או } h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = 2(b-a) \Rightarrow h = \frac{2(b-a)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$$

בעזרת זהויות טריגונומטריות מקבלים: $h = (b-a) \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} NF &= b - (FG + x) = b - a - x = b - a - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha = b - a - (b-a) \sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= (b-a)(1 - \sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = (b-a)(1 - 2\cos^2 \alpha) = -(b-a) \cos 2\alpha \end{aligned}$$

לפי משפט פיתגורס במשולש MNF , מקבלים:

$$MN^2 = NF^2 + h^2 = (b-a)^2 \cdot (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = (b-a)^2$$

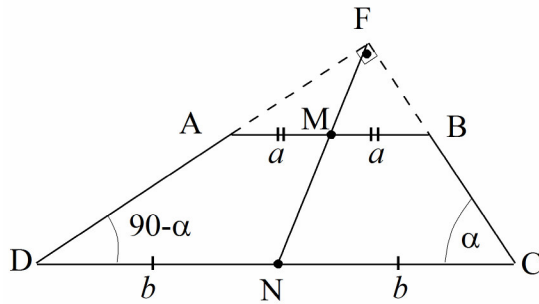
$$MN = b-a, \text{ מכאן,}$$

כלומר אורכו של הקטע MN שווה למחצית ההפרש בין הבסיסים.

שנתון "lee" – תשס"ה כרך י'

פתרון על-ידי שימוש במשפט 1

חישוב אורך הקטע MN על-ידי שימוש בטריגונומטריה – מחייב ידע בזהויות טריגונומטריות.



לעומת זאת, פתרון המשימה בעזרת הנדסת המישור פשוט ביותר, כשמשתמשים במשפט מספר 1.

כשממשיכים את השוקיים עד לנקודת פגישתם F , מתקבל משולש ישר-זווית DFC – כנראה בציור מס' 3.

לפי משפט מס' 1, הנקודות M, F ו- N נמצאות על ישר אחד. ציור מס' 3

$$FM = \frac{1}{2} AB = a : \text{ולכן הוא שווה למחצית היתר: } FM = \frac{1}{2} AB = a$$

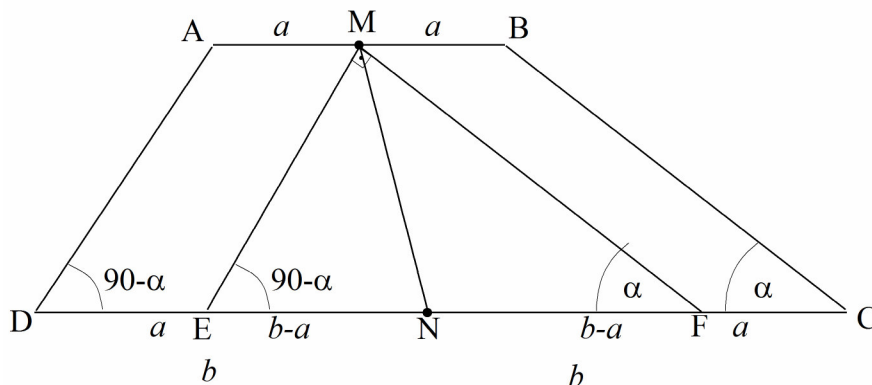
$$FN = \frac{1}{2} DC = b : \text{ולכן הוא שווה למחצית היתר: } FN = \frac{1}{2} DC = b$$

$$MN = FN - FM = b - a, \text{ מכאן,}$$

מ.ש.ל.

פתרון הנדסי ללא שימוש במשפט 1

לשם הצגת ההוכחה החלופית – נתאר את הטרפז בציור 3א.



ציור מס' 3א

שנתון "לע" – תשס"ה כרך י'

פתרון:

מסמנים את נקודות האמצע של הבסיסים ב-M ו-N.

מהנקודה M מעבירים שני ישרים, המקבילים לשוקי הטרפז וחותכים את בסיסו התחתון בנקודות E ו-F.

AMED ו-MBCN הן מקביליות, ולכן $DE=FC=a$, ובהתאמה, $EN=NF=b-a$.

מסמנים $\angle BCF = \alpha$, ולכן גם $\angle MFN = \alpha$. בהתאמה, לפי הנתון, שסכום זוויות הבסיס התחתון הוא 90° , $\angle ADE = \angle MEN = \alpha$.

מסתבר אפוא, שמשולש EMF הוא ישר-זווית ($\angle EMF = 90^\circ$). במשולש זה MN הוא תיכון.

לפי משפט: "התיכון ליתר שווה למחצית היתר" – מקבלים: $MN = b-a$.

מ.ש.ל.

משפט מס' 2 – משפט תלמי

משפט:

בכל מרובע החסום במעגל – סכום מכפלת צלעות נגדיות שווה למכפלת האלכסונים.

משפט זה מיוחס לתלמי האלכסנדרוני, הידוע גם בשם קלאודיוס פתולמאוס – מתמטיקאי, אסטרונום וגאוגרף, בן המאה השנייה לספירה, שחי במצרים, שנשלטה אז בידי רומא, אך באלכסנדריה, מקום מגוריו, עדיין פרוחה התרבות היוונית.

המשפט וההוכחה שלו בדרך הנדסית – מופיעים בפרק התוספות בספרו של לדיז'ינסקי [1]. גם במאמר זה נביא את ההוכחה ההנדסית, המתבססת על בניית עזר, שבחירתה מחייבת הברקה חכמה ואיננה בנייה רגילה. אמנם, שתי ההוכחות הטריגונומטריות, שיובאו למשפט בהמשך, פשוטות יותר וסטנדרטיות, אך הן מתבססות על ידע בזהויות טריגונומטריות. בסיום מובאת ההוכחה, המבוססת על שימוש במספרים מרוכבים ובהויות טריגונומטריות, ובמידה רבה היא דומה לשימוש בהנדסה אנליטית.

ההוכחה על-ידי הנדסת המישור

– $ABCD$ מרובע חסום במעגל

כנראה בציור מס' 4.

זוויות היקפיות שוות מסומנות באותה אות.

בהנחה ש- $\alpha < \gamma$ (זוויות הקדקוד

(A) – בונים ישר AE , היוצר זווית α עם הצלע AB של המרובע.

(*) קיים דמיון משולשים:

$\triangle ABE \approx \triangle ACD$ (שני

המשולשים בעלי שתי זוויות

שוות: (α, β) .

$\angle AED = \alpha + \beta$ (זווית

חיצונית למשולש ABE).

(**) קיים דמיון משולשים:

$\triangle AED \approx \triangle ABC$ (שני

משולשים בעלי שתי זוויות שוות: $(\delta, \alpha + \beta)$.

מדמיון משולשים (*) מקבלים: $BE = \frac{a \cdot c}{AC}$

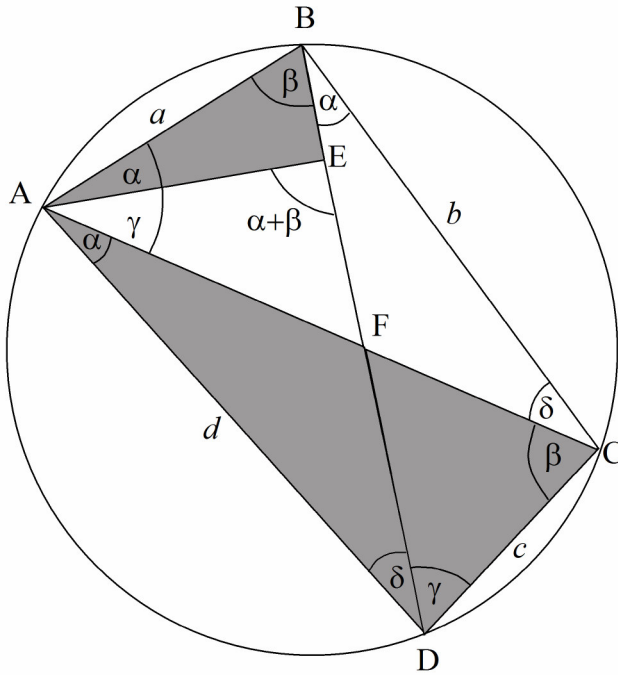
מדמיון משולשים (**) מקבלים: $ED = \frac{b \cdot d}{AC}$

$$BD = BE + ED = \frac{a \cdot c}{AC} + \frac{b \cdot d}{AC} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{AC}$$

$$AC \cdot BD = AC \cdot \frac{a \cdot c + b \cdot d}{AC} = a \cdot c + b \cdot d : \text{מכפלת האלכסונים}$$

מ.ש.ל.

שנתון "לע" – תשס"ה כרך י'

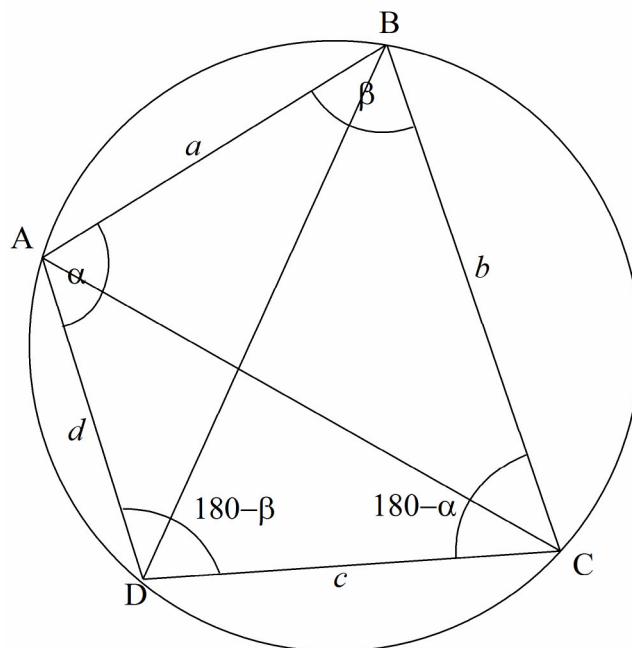


ציור מס' 4

הערות:

- א. אם $\alpha = \gamma$, הרי ש- $b=c$, ואז מקבלים את דמיון המשולשים הבאים: $\Delta ABF \approx \Delta ACD$
 (נקודת פגישת האלכסונים) ו- $\Delta AFD \approx \Delta ABC$, ומוכיחים את הנדרש באותה דרך.
- ב. אם $\alpha > \gamma$ בונים ישר AE , היוצר זווית γ עם צלע המרובע AD , וההוכחה – כמו במקרה של $\alpha < \gamma$.

הוכחות על-ידי שימוש בטריגונומטריה



ציור מס' 5

דרך א' – על-ידי שימוש
 במשפט הקוסינוסים
 במרובע חסום במעגל – סכום
 הזוויות הנגדיות הוא 180° ,
 ולכן
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
 המרובע החסום נראה בציור
 מס' 5.

על-ידי שימוש במשפט הקוסינוסים מקבלים:

$$* \quad BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180 - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a \cdot d + b \cdot c}, \text{ מכאן,}$$

באותו אופן:

$$** \quad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos(180 - \beta) = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a \cdot b + c \cdot d}$$

מציבים את $\cos \alpha$ בחלק השמאלי של המשוואה (*)

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a \cdot d + b \cdot c} = \\ &= \frac{a^3 \cdot d + a^2 \cdot b \cdot c + b \cdot c \cdot d^2 + a \cdot d^3 - a^3 \cdot d - a \cdot d^3 + a \cdot d \cdot b^2 + a \cdot d \cdot c^2}{a \cdot d + b \cdot c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (***) \quad BD^2 &= \frac{a^2 \cdot b \cdot c + b \cdot c \cdot d^2 + a \cdot d \cdot b^2 + a \cdot d \cdot c^2}{a \cdot d + b \cdot c} = \\ &= \frac{a \cdot c(a \cdot b + d \cdot c) + b \cdot d(c \cdot d + a \cdot b)}{a \cdot d + b \cdot c} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c} \end{aligned}$$

מציבים את $\cos \beta$ בחלק השמאלי של המשוואה (**)

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a \cdot b + c \cdot d} = \\ &= \frac{a^3 \cdot b + c \cdot d \cdot a^2 + a \cdot b^3 + c \cdot d \cdot b^2 - a^3 \cdot b - a \cdot b^3 + a \cdot b \cdot c^2 + a \cdot b \cdot d^2}{a \cdot b + c \cdot d} \end{aligned}$$

$$(***) \quad AC^2 = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot c + b \cdot d)}{a \cdot b + c \cdot d}$$

מכפילים את BD^2 (לפי ***) ב- AC^2 (לפי ****) ומקבלים :

$$BD^2 \cdot AC^2 = (a \cdot c + b \cdot d)^2 \Rightarrow BD \cdot AC = a \cdot c + b \cdot d$$

מ.ש.ל.

דרך ב' – על-ידי שימוש במשפט הסינוסים

סימון הזוויות נראה בציור מס' 6.

אם R רדיוס המעגל החוסם, הרי לפי משפט הסינוסים,

$$a = 2R \sin \delta$$

$$b = 2R \sin \alpha$$

$$c = 2R \sin \beta$$

$$d = 2R \sin \gamma$$

$$AC = 2R \sin(\beta + \gamma)$$

$$BD = 2R \sin(\alpha + \beta)$$

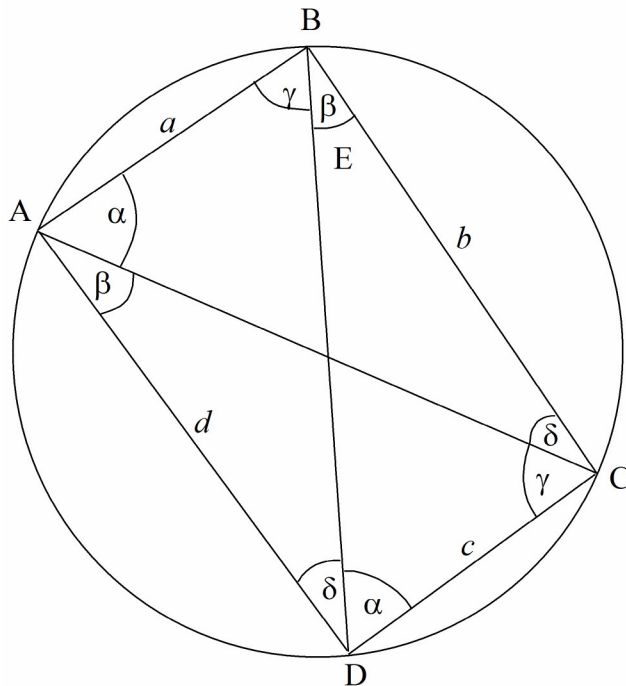
יש להוכיח, ש-

$$AC \cdot BD = ac + bd$$

על-ידי הצבת ערכי הצלעות יש

להוכיח,

ש-



ציור מס' 6

$$4R^2[\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)] \stackrel{?}{=} 4R^2(\sin \delta \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma)$$

מטפלים בכל אחד מהאגפים על-ידי שימוש בנוסחת המעבר מכפל של פונקציות

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \text{לסכום:}$$

אגף שמאל

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + 2\beta + \gamma)] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma + \beta)]\end{aligned}$$

היות ו- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ (סכום הזוויות במשולש), הרי אגף שמאל מקבל את הצורה :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(180^\circ - \delta + \beta)] &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(180^\circ - (\delta - \beta))] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\delta - \beta)]\end{aligned}$$

אגף ימין

$$\begin{aligned}(\sin \delta \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma) &= \\ \frac{1}{2}[\cos(\delta - \beta) - \cos(\delta + \beta) + \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)] &= \\ \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\delta - \beta) - \cos(\delta + \beta) - \cos(\alpha + \gamma)] &= \\ \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\delta - \beta)]\end{aligned}$$

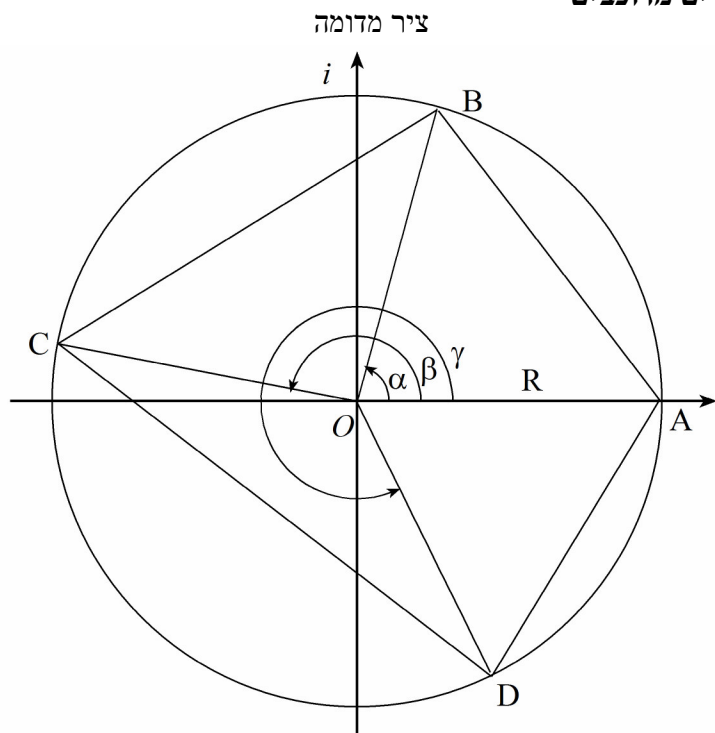
$$\begin{aligned}\cos(\delta + \beta) + \cos(\alpha + \gamma) &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \cos \frac{\delta + \beta - (\alpha + \gamma)}{2} = \\ 2 \cos 90^\circ \cos \frac{\delta + \beta - (\alpha + \gamma)}{2} &= 0\end{aligned}$$

המסקנה

אגף ימין = לאגף שמאל

מ.ש.ל.

הוכחה על-ידי שימוש במספרים מרוכבים



בוחרים מערכת צירים
באופן שמרכז המעגל
החוסם – בראשית
הצירים, והקרן OA –
בכיוון החיובי של ציר x
($OA=R$), כנראה בציר מס'
7.

בהתאם לכך שיעורי
נקודות המרובע:

$$A : R(\cos 0^0 + i \sin 0^0) = R$$

$$B : R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$C : R(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$D : R(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

לפי הכללים של מספר מרוכבים,

$$AB = |R(\cos \alpha + i \sin \alpha) - R| = R|(\cos \alpha - 1) + i \sin \alpha| =$$

$$R\sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

שנתון "ke" – תשס"ה כרך י'

באופן דומה :

$$\begin{aligned} AC &= 2R \sin \frac{\beta}{2}, \quad AD = 2R \sin \frac{\gamma}{2} \\ BC &= |R(\cos \beta + i \sin \beta) - R(\cos \alpha + i \sin \alpha)| = \\ &= R |\cos \beta - \cos \alpha + i(\sin \beta - \sin \alpha)| = \\ &= 2R \left| -\sin \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + i \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \right| = \\ &2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

$$CD = 2R \sin \frac{\gamma - \beta}{2}, \quad BD = 2R \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \quad \text{באותו אופן מקבלים :}$$

כדי להוכיח, ש-

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

יש להוכיח, ש-

$$2R \sin \frac{\beta}{2} \cdot 2R \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2R \sin \frac{\gamma - \beta}{2} + 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot 2R \sin \frac{\gamma}{2}$$

לפי נוסחת המעבר מכפל – לסכום של פונקציות טריגונומטריות, מקבלים :

אגף שמאל

$$\cos \frac{\beta + \alpha - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$$

אגף ימין

$$\begin{aligned} &\cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} + \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \\ &\cos \frac{\beta + \alpha - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \end{aligned}$$

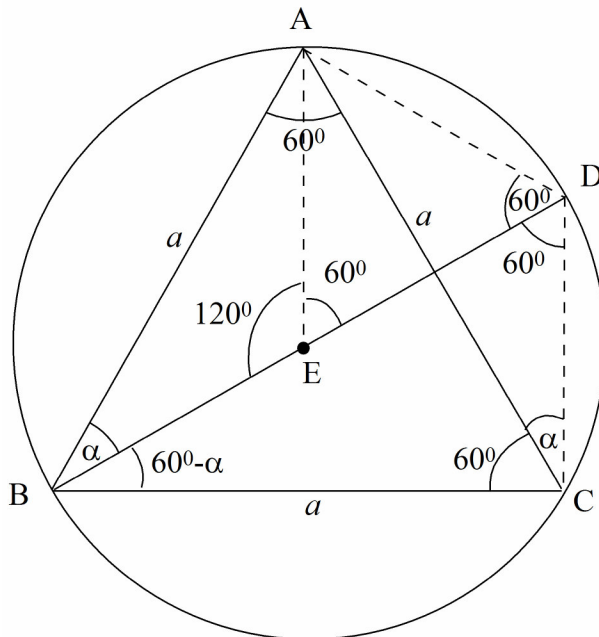
המסקנה

אגף ימין = לאגף שמאל

מ.ש.ל.

יישום משפט תלמי לפתרון משימות בהנדסת המישור

1. במשולש שווה-צלעות החסום במעגל – סכום שני מיתרים שווה למיתר שלישי.



ציור מס' 8

במשימה שתוצג יובאו פתרונות בדרכים שונות, כמקובל בלימודי המתמטיקה בחטיבה העליונה. לסיום יובא פתרון בעזרת משפט תלמי. הקוראים מוזמנים לבחור את הפתרון הפשוט והיפה ביותר, ויש להניח, שבמקרה זה הבחירה תהיה קלה.

$\triangle ABC$ – משולש שווה-צלעות בעל צלע באורך a החסום במעגל. העבר מיתר כלשהו BD .

הוכח, ש- $BD = AD + DC$. השאלה מופיעה במקור [6].

מסמנים: $\angle ABD = \alpha$ ואת שאר

הזוויות ההיקפיות השוות, כנראה בציור מס' 8.

דרך א' – הוכחה על-ידי שימוש בהנדסת המישור

על המיתר BD מסמנים נקודה E באופן ש- $AD = DE$. המשולש שהתקבל AED הוא שווה-צלעות (משולש שווה-שוקיים בעל זווית ראש של 60°). המשולשים ABE ו- ADC שווים בזווית α (זווית היקפית), והם בעלי זווית של 120° ($\angle AEB = \angle ADC$), ולכן שווים גם בזווית השלישית.

כמו כן, הם בעלי צלע שווה a , ועל כן על סמך ז.צ.ז. הם חופפים.

מהחפיפה נובע: $EB = DC$.

מכאן:

שנתון "lee" – תשס"ה כרך י'

$$BD = DE + EB = AD + DC$$

מ.ש.ל.

דרכים ב'–ג' – הוכחה על-ידי שימוש בטריגונומטריה

דרך א' – טריגונומטריה – שימוש במשפט הסינוסים

שימוש במשפט הסינוסים במשולש BDC – נותן :

$$\frac{BD}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow BD = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin(60^\circ + \alpha)$$

$$\frac{DC}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow DC = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin(60^\circ - \alpha)$$

שימוש במשפט הסינוסים במשולש ADB נותן :

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AD = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin \alpha$$

מכאן,

$$AD + DC = \frac{2a}{\sqrt{3}} [\sin(60^\circ - \alpha) + \sin \alpha] =$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin 30^\circ \cos(30^\circ - \alpha) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin(60^\circ + \alpha) = BD$$

מ.ש.ל.

דרך ב' – טריגונומטריה – שימוש במשפט הקוסינוסים

שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש ADB – נותן :

$$a^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 60^\circ = AD^2 + BD^2 - AD \cdot BD \quad (*)$$

שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש ADC – נותן :

$$a^2 = DC^2 + BD^2 - 2DC \cdot BD \cos 60^\circ = DC^2 + BD^2 - DC \cdot BD \quad (**)$$

חיסור שני הקשרים – נותן :

$$O = AD^2 - DC^2 - 2BD \cdot (AD - DC) \cos 60^\circ$$

$$(AD - DC) \cdot (AD + DC - BD) = 0$$

אם $AD - DC = 0$, אז $AD = DC$, ולכן $\angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$.

המשולשים BDC ו- BAD הם בעלי זוויות: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. במשולשים כאלו ידוע, ש-

$$BD = AD + DC \text{ או } BD = 2DC = 2AD$$

מ.ש.ל.

אם $AD + DC - BD = 0$, אז $BD = AD + DC$

מ.ש.ל.

אפשרות נוספת היא להתייחס לקשרים (*) ו-(**) כאל מערכת של שתי משוואות ריבועיות, כדלקמן :

$$AD^2 - BD \cdot AD + BD^2 - a^2 = 0$$

$$DC^2 - BD \cdot DC + BD^2 - a^2 = 0$$

זאת אומרת, ש- AD ו- DC הם שורשים של משוואה ריבועית מהצורה :

$$x^2 - BD \cdot x + BD^2 - a^2 = 0$$

לפי משפט ויטה ביחס לסכום שורשי המשוואה, $AD + DC = BD$

מ.ש.ל.

2. הוכח, כי במצולע משוכלל בעל 7 צלעות $ABCDEFGH$ מתקיים הקשר:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

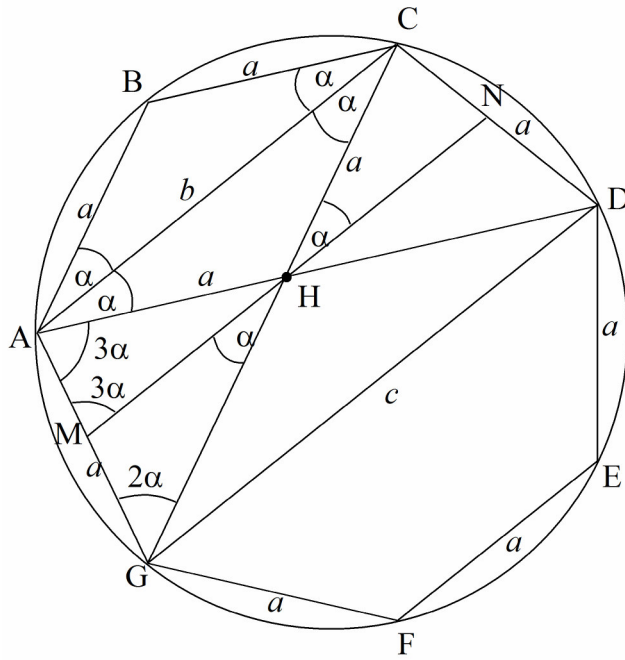
מאחר שהמצולע משוכלל, הרי הוא בר-חסימה במעגל – כנראה בציור מס' 9.

צלע המצולע a ,

b – אלכסונו הקטן,

c – אלכסונו הגדול,

5α – גודלה של הזווית הפנימית במצולע, ובהתאם לכך חלקי הזווית, שהאלכסונים יוצרים עם הצלעות וביניהם – כנראה בציור מס' 9.



ציור מס' 9

הוכחות גאומטריות

א – הוכחה על-ידי דמיון

$ACDG$ – טרפז ש"ש, שאלכסוניו נחתכים בנקודה H . דרך הנקודה H מעבירים ישר MN , במקביל לבסיסי הטרפז.

לפי הוכחת פרופורציה בין קווים מקבילים (הבעיה הוצגה במקור [7]),

$$\frac{1}{HM} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{GD}$$

$HM = a = AB$, לפי ש- $ABCH$ מעוין, ו- AHM משולש ש"ש (לפי שבמשולש שתי זוויות בנות 3α).

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}, \text{ מכאן,}$$

מ.ש.ל.

ב – הוכחה על-ידי שימוש במשפט תלמי

השימוש במשפט תלמי לגבי המרובע ACDE, נותן את הקשר:

$$AD \cdot CE = AC \cdot DE + CD \cdot AE$$

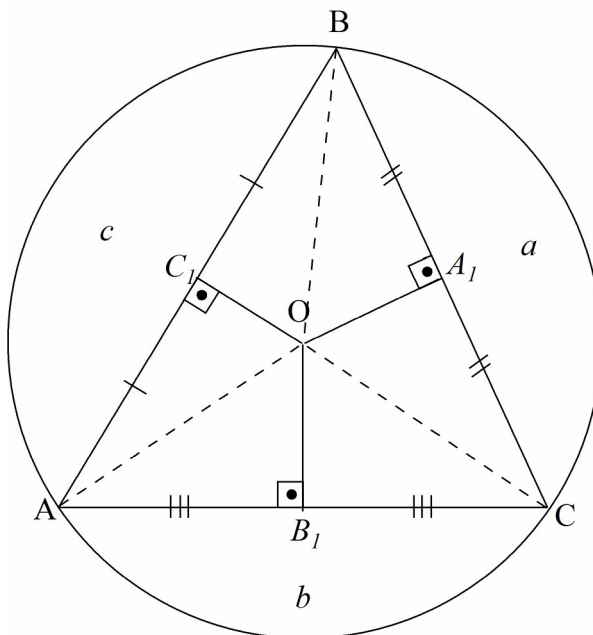
בהתאם לנתון: $AB=BC=CD=DE$, $AE=AD$, $AC=CE$, הרי שעל-ידי שימוש בהם – מקבלים:

$$AD \cdot AC = AC \cdot AB + AB \cdot AD$$

מחלקים את שני האגפים במכפלה: $AB \cdot AC \cdot AD$,

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} \text{ : ומקבלים:}$$

מ.ש.ל.



ציור מס' 10

3. הוכח, כי במשולש חד-זוויות, סכום המרחקים ממרכז המעגל החוסם לצלעות המשולש – שווה לסכום $r+R$, כאשר r רדיוס המעגל החוסם ו- R רדיוס המעגל החוסם.

צ"ל: $OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + R$
(O – מרכז מעגל חוסם – מפגש אנכים אמצעיים).

הוכחה:

נסמן את הצלעות ב- a , ב- b ו- c , כנראה בציר מס' 10.

שנתון "lee" – תשס"ה כרך י'

מרובע AC_1OB_1 הוא בר-חסימה, לפי שסכום שתי זוויות נגדיות בו הוא $180^\circ (\angle C_1 + \angle B_1)$.
לפי משפט תלמי, מקבלים:

$$AO \cdot B_1C_1 = AB_1 \cdot OC_1 + AC_1 \cdot OB_1 \quad (1)$$

$$B_1C_1 - \text{הוא קטע אמצעים במשולש } ABC, \text{ ולכן } B_1C_1 = \frac{a}{2}. \quad AB_1 = \frac{b}{2}, \quad AC_1 = \frac{c}{2}, \quad AO = R$$

נציב קשרים אלו למשוואה (1), ונקבל:

$$R \cdot a = b \cdot OC_1 + c \cdot OB_1 \quad (2)$$

גם המרובעים OA_1BC_1 ו- OA_1CB_1 הם בני-חסימה, ולכן באותה הדרך נקבל:

$$R \cdot b = c \cdot OA_1 + a \cdot OC_1 \quad (3)$$

$$R \cdot c = b \cdot OA_1 + a \cdot OB_1 \quad (4)$$

מצד אחד, שטח המשולש ABC הוא $S = P \cdot r$ (כאשר P – מחצית היקף) או באמצעות השטחים המרכיבים את המשולש:

$$\frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{a \cdot OA_1}{2} + \frac{b \cdot OB_1}{2} + \frac{c \cdot OC_1}{2}$$

ואז,

$$(a+b+c)r = a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1 \quad (5)$$

על-ידי חישוב שוויונים (2), (3), (4), (5) – מקבלים:

$$r(a+b+c) + R(a+b+c) = OA_1(a+b+c) + OB_1(a+b+c) + OC_1(a+b+c)$$

על-ידי חלוקת שני האגפים בסכום $a+b+c$, מקבלים: $r + R = OA_1 + OB_1 + OC_1$.

מ.ש.ל.

משפט מס' 3 – משפט ברייט-שניידר

בכל מרובע בעל צלעות a, b, c, d ואלכסונים m ו- n מתקיים הקשר המתמטי הבא :

$$m^2 \cdot n^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2a \cdot b \cdot c \cdot d \cos(\angle A + \angle C)$$

כאשר $\angle A$ ו- $\angle C$ הן הזוויות בקדקודים A ו-C.

משפט ברייט-שניידר הוא

הרחבה של משפט

הקוסינוסים לכל מרובע.

הוכחת המשפט:

למרובע ABCD, הנראה

בציור מס' 11, מוסיפים

בניות עזר:

$$\angle ABK = \angle CAD$$

$$\angle BAK = \angle ACD$$

$$\angle ADM = \angle BAC$$

$$\angle DAM = \angle ACB$$

מבניית העזר נובע דמיון המשולשים:

$$\triangle ABK \approx \triangle CAD \quad (ז.ז.)$$

$$\triangle ADM \approx \triangle CAB \quad (ז.ז.)$$

מדמיון המשולשים נובעים הקשרים הבאים:

$$\frac{AK}{c} = \frac{a}{m} \Rightarrow AK = \frac{a \cdot c}{m}; \quad \frac{AM}{b} = \frac{d}{m} \Rightarrow AM = \frac{b \cdot d}{m}$$

$$\frac{BK}{d} = \frac{a}{m} \Rightarrow BK = \frac{a \cdot d}{m}; \quad \frac{DM}{a} = \frac{d}{m} \Rightarrow DM = \frac{a \cdot d}{m}$$

$$BK = DM$$

$$\angle KBD + \angle MDB = 180^\circ \quad (\text{השוואת זוויות})$$

שנתון "ke" – תשס"ה כרך י'

לכן $BK \parallel DM$

ואז צורת (המרובע) $KBDM$ היא מקבילית (זוג צלעות שוות ומקבילות).

לכן $KM = BD = n$

ב- ΔKAM , $\angle KAM = \angle A + \angle C$, $\angle C$ ו- $\angle A$ – הן זווית המרובע $ABCD$.

משפט קוסינוסים למשולש

$$KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos \angle KAM$$

נציב את ערכי הקטעים שהתקבלו מהדמיון ונקבל,

$$n^2 = \frac{a^2 \cdot c^2}{m^2} + \frac{b^2 \cdot d^2}{m^2} - 2 \frac{a \cdot c}{m} \cdot \frac{b \cdot d}{m} \cos(\angle A + \angle C)$$

נכפיל את שני האגפים ב- m^2 , ונקבל:

$$m^2 \cdot n^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2a \cdot b \cdot c \cdot d \cos(\angle A + \angle C) :$$

מ.ש.ל.

הוכחת משפט תלמי על סמך משפט ברייט-שניידר

אם המרובע חסום במעגל, סכום זוויותיו הנגדיות 180° , כלומר

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos 180^\circ = -1$$

הצבת ערך זה במשפט ברייט-שניידר – נותנת:

$$m^2 \cdot n^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 + 2a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot c + b \cdot d)^2 \Rightarrow m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$$

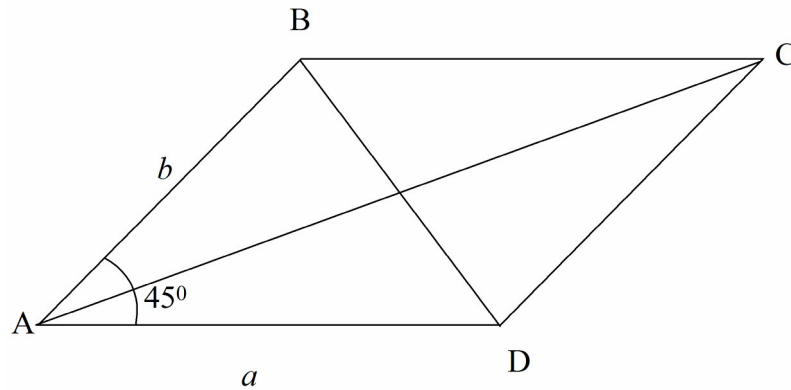
מ.ש.ל.

יישום משפט ברייט-שניידר לפתרון בעיה הנדסית

הוכח, שבמקבילית בעלת זווית של 45^0 , שווה מכפלת ריבועי האלכסונים לסכום החזקות הרביעיות של שתי הצלעות (ציור מס' 12).

נסמן את צלעות המקבילית ב- a וב- b .

$$\text{צ"ל: } AC^2 \cdot BD^2 = a^4 + b^4$$



ציור מס' 12

הוכחה

לפי משפט ברייט-שניידר

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot AD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\angle A + \angle C)$$

מאחר שמדובר במקבילית בעלת זווית חדה של 45^0 , מקבלים:

$$AC^2 \cdot BD^2 = a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 - 2a^2 \cdot b^2 \cos(45^0 + 45^0) = a^4 + b^4$$

מ.ש.ל.

הערה: את המשימה הנ"ל אפשר להוכיח בקלות על-ידי שימוש במשפט הקוסינוסים.

מראי מקומות

1. לדיז'נסקי, ל' (1954). **גאומטריה, א'-ב'**. ירושלים, אמנות.
2. קלעי, ג', תוכמן, ב' (1959). **גאומטריה המישור**. ירושלים, עבר.
3. אספיס, א' (1988). **גאומטריה, טריגונומטריה, סטריאומטריה**. תל-אביב, המחבר.
4. גורן, ב' (1994). **גאומטריה של המישור**. תל-אביב, מישלב.
5. מקור [4] עמ' 304, שאלה 13.
6. יקואל, ג' (2001). **מבחני מתכונת במתמטיקה 5 י"ל**, קרית ביאליק, משבצת, (עמ' 87, שאלה מס' 8).
7. יקואל, ג' (1997). **מבחני מתכונת במתמטיקה 4 י"ל**, קרית ביאליק, משבצת (עמ' 99, שאלה מס' 1).