

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 6

מרץ 2018



מחקר ועיון בחינוך מתמטי

6

- קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".....3
- דבר העורך - יניב ביטון.....7
- מדור חדשות מתמטיות - נצה מובשוביץ-הדר.....9
- מחשבות על אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה או בלשון החוקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית: חשיבה אינטואיטיבית לעומת חשיבה אנליטית - קרני שיר.....15
- הוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה וסביבת למידה מעצימה כממדים משמעותיים בידע הפדגוגי של מורי מתמטיקה - גלית שבתאי.....20
- פדגוגיה להוראה ולמידה בעזרת מרלו (MERLO): הניסיון המצטבר בהערכה והוראה של חשיבה מושגית - פרדיננדו ארזרלו, אורנלה רובוט, אורי שפריר, מאשה אטקינד ורון קנת.....34
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה בתיכון המעידים על עצמם כי הם מתקשים לראות במרחב, את הוראתם בנושא הגאומטריה במרחב - מירלה וידר.....44
- עקרונות התערבות בהוראת מתמטיקה בקרב תלמידות תיכון חלשות - תקוה עובדיה.....53
- הוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים: מודל לתוכנית התערבות למורים - יחיאל תנעמי.....66
- "אפסילון": סדרת סרטונים עכשווית וקלילה שחושפת את התלמידים לעולם המרתק של המתמטיקה והפיזיקה.....79
- פינה מתמטית - מקומות גאומטריים: מציאת מיקום הצירים נקודות הקודקוד והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה בעזרת סרגל ומחוגה - שולה וייסמן ועידן טל.....80
- המלצה על ספר:
"האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי" - קרני שיר.....86
- מדור חוויות מכנס:
PME-41 2017 - רותי סגל ותקוה עובדיה.....89

”

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 6

מרץ 2018

”

עורך:

ד"ר יניב ביטון שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

חברי ועדת המערכת (בסדר אלפביתי):

ד"ר מארק אפלבוים	מכללת קיי - המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' דוד בן-חיים	מינהלת מל"מ - הטכניון,
ד"ר הגר גל	שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר אילנה לבנברג	דוד ילין - המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר טלי נחליאלי	האקדמית גורדון
פרופ' משה סטופל	לוינסקי - המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר אלכס פרידלנדר	שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר אמאל שריף-רסלאן	מכון ויצמן למדע
פרופ' עטרה שריקי	ד"ר אמאל שריף-רסלאן המכללה האקדמית הערבית לחינוך
פרופ' דינה תירוש	אורנים - המכללה האקדמית לחינוך
	אוניברסיטת תל-אביב

החברים שניאותו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם, אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

שמות הכותבים:

מאשה אטקינד	אוניברסיטת ריירסון, טורונטו, קנדה
פרדיננדו ארזורלו	אוניברסיטת טורינו, איטליה
מירלה וידר	מכללת שאנן, קרית שמואל, חיפה
שולה וייסמן	מכללת גורדון, חיפה
עידן טל	סמינר הקיבוצים, תל-אביב
נצה מובשוביץ-הדר	הטכניון, חיפה
רותי סגל	מכללת שאנן, קרית שמואל, חיפה; מכללת אורנים, קריית טבעון
תקווה עובדיה	מכללת אורנים, קריית טבעון; מכללת ירושלים
רון קנת	KPA, רעננה; מוסד נאמן, הטכניון, חיפה; אוניברסיטת טורינו, איטליה
אורנלה רובוטי	אוניברסיטת טורינו, איטליה
גלית שבתאי	מכללת סמינר הקיבוצים, תל-אביב
קרני שיר	מכללת שאנן, קרית שמואל, חיפה; הטכניון, חיפה
אורי שפירי	אוניברסיטת טורונטו, קנדה
יחיאל תנעמי	מכללת חמדת הדרום, נתיבות

עריכה לשונית:

יפעת פישר, מכללת שאנן

עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:

תמי יהושע, מכללת שאנן

צילום תמונת שער: תמי יהושע

צילום וצילום תמונת תוכן עניינים: תמי יהושע

מכללת שאנן - הוצאה לאור

ISSN 2311-5483

כתובת המערכת:

רח' הים התיכון 7, ת.ד. 906, קריית שמואל, חיפה 3100801

טלפון: 04-8780000 פקס: 04-8714

Email: laor@shaanan.org

כתובת אינטרנט של כתב העת http://shaanan.ac.il/?page_id=4244

כתב העת יוצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה

קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי"

קול קורא

אנו מזמינים את כל העוסקים בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים ואת כל העוסקים במחקר בחינוך מתמטי, לשלוח מאמרים מחקריים בתחום החינוך המתמטי, או מאמרים העוסקים בדרכי הוראה ובתובנות שעולות מהכשרת מורים למתמטיקה ובהתפתחות מקצועית של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי בכל הרמות האקדמיות.

במערכת של כתב העת מכהנים נציגים מהמוסדות השונים להכשרת מורים למתמטיקה בארץ, והוא נחשב כתב עת שפיט.

כתב העת הוא יוזמה מבורכת של נשיא שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, פרופ' יחיאל פריש, והוא יוצא בחסות המכללה ובמימונה.

הנחיות למחברים

כתבי היד של מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" צריכים להיכתב בשפה העברית ולהכיל לכל היותר 25 עמודים. ב-25 עמודים אלו ייכללו כל התקצירים, הטבלאות, האיורים ורשימת המקורות. אם המאמר כולל טבלאות או איורים, יש לשבץ אותם בטקסט במקום שבו הם אמורים להופיע במאמר.

יש להגיש את המאמר בגופן David גודל 12, רווח כפול, יישור דו-צדדי, ולשלוח את המאמר כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת yanivb@cet.ac.il

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 100-200 מילים, ורשימה של 3-5 מילות מפתח.

המאמרים נשלחים אנונימית לשיפוט מקצועי, לכן במאמר יהיה עמוד שער ובו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושייכו האקדמי, המקצועי או אחר של המחבר.

כדי לשמור על אנונימיות הכותבים בתהליך ההערכה והשיפוט, אין לציין את שמות הכותבים בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותבים.

כתבי היד של מאמרים המוערכים כרלוונטיים לאופיו של כתב העת, מועברים לשיפוטם של קוראים המתמחים בנושא המאמר ועוברים תהליך שיפוט על פי שיטת "העיוורון הכפול": זהות המחברים אינה ידועה לקוראים, וזו של הקוראים אינה ידועה למחברים.

המחברים מתבקשים להקפיד על הדפסת מקורות המידע שבסוף המאמר לפי הכללים שנקבעו בידי ארגון A.P.A.

מאמרים שיתקבלו לפרסום יעברו עריכה מדעית ולשונית. הגרסה הסופית, לאחר העריכה, תישלח למחברים לאישור ותוחזר בהקדם.

אין לשלוח מאמר אם הוא כבר התפרסם, או עומד להתפרסם במקום אחר, או שהוא מצוי בתהליך שיפוט בכתב עת אחר.

מצפים לקבל בהקדם הצעות לפרסומים לגיליון הבא של כתב העת!



כיצד תופסים מורים למתמטיקה
בתיכון המעידים על עצמם כי הם
מתקשים לראות במרחב, את
הוראתם בנושא הגאומטריה במרחב
מירלה יידר

41



פדגוגיה להוראה ולמידה
בעזרת מרלו (MERLO):
הניסיון המצטבר בהערכה
והוראה של חשיבה מושגית

פרדיננדו ארנולו
אורנלה רובוטי
אורי שפיר
מאשה אטקינד
רון קנת

34



הוראה מפורשת של אסטרטגיות
הכוונה עצמית בלמידה וסביבת
למידה מעצימה כמימדים
משמעותיים בידע הפדגוגי
של מורי מתמטיקה
גלית שבתאי

20



מחשבות על אינטואיציה
ופורמליזם במתמטיקה או בלשון
החוקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית:
חשיבה אינטואיטיבית
לעומת חשיבה אנליטית
קרני שיר

15



מדור חדשות מתמטיות
נצה מובשוביץ-הדר

9



דבר העורך
יניב ביטון

7

קול קורא
והנחיות להגש
מאמרים

6

תוכן העניינים

עקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמשיות בקרב תלמידות תיכון חלשות
תקוה עובדיה

53



הוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים: מודל לתכנית התערבות למורים
יחיאל תנעמי

66



"אפסילון":

סדרת סרטונים עכשווית וקלילה שחושפת את התלמידים לעולם המרתק של המתמטיקה והפיזיקה

79

פינה מתמטית - מקומות גיאומטריים מציאת מיקום הצירים נקודות הקודקוד והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה בעזרת סרגל ומחוגה שולה ויסמן ועידן טל

80



המלצה על ספר "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית הספר היסודי" קרני שיר

86



פינה מתמטית - מקומות גיאומטריים מדור חוויות מכנס PME-41 2017 רותי סגל ותקוה עובדיה

91



דבר העורך

יניב ביטון



ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במט"ח.
בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.
מרצה לחינוך מתמטי במכללת שאנן.
עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.

לפניכם מובא הגיליון השישי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

ראשית ברצוני לפתוח בשבח האכסניה האמונה על הוצאתו של כתב העת – מכללת שאנן והעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש. הוצאת כתב העת דורשת תמיכה מוסדית ומימון רב. תודה רבה להנהלת מכללת שאנן על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב העת.

אני שמח ונרגש להגיש לכם את הגיליון השישי בעיצוב מרהיב, חדשני ומקצועי שעל הפקתו הופקדה תמי יהושע. על העריכה הלשונית הייתה אחראית יפעת פישר מההוצאה לאור "שאנן". הן וכל שאר חברי הצוות נרתמו יחדיו לעזרה בהוצאת כתב העת, ועל כך נתונה תודה והוקרה.

הגיליון כולל חמישה מאמרים מחקריים וחמישה מדורים. במאמר הראשון גלית שבתאי כותבת על הוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה וסביבת למידה מעצימה כממדים משמעותיים בידע הפדגוגי של מורי מתמטיקה. במאמר השני משתפים אותנו החוקרים פרדיננדו ארזרלו, אורנלה רובוטי, אורי שפריר, מאשה אטקינד ורון קנת על פדגוגיה להוראה ולמידה בעזרת מרלו: הניסיון המצטבר בהערכה והוראה של חשיבה מושגית. במאמר השלישי מירלה וידר משתפת אותנו בממצאי מחקרה הבודק כיצד תופסים מורים למתמטיקה בתיכון המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את הוראתם בנושא הגאומטריה במרחב. במאמר הרביעי תקוה עובדיה כותבת לנו על מחקרה העוסק בעקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות. במאמר החמישי יחיאל תנעמי כותב על הוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים: מודל לתוכנית התערבות למורים.

במדור "חדשות מתמטיות" נצה מובשוביץ-הדר מחדשת לנו ומספרת על שני פרסים יוקרתיים ויקרי ערך – פרס אָבֶּל (Abel Prize) המוענק פעם בשנה ומדליית פילדס (Fields Medal) המוענקת פעם בארבע שנים. לזוכים בהם לאחרונה – בשנת 2017 ובשנת 2014 בהתאמה, ולפועלם המתמטי מוקדש מדור החדשות בגיליון זה.

במדור חדש "ראיונות עם דמויות מפתח בחינוך המתמטי" נפגשה קרני שיר כמה פעמים עם אורי לירון והעניקה לנו ריאיון מרתק על מחשבות על אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה, או בלשון החוקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית: חשיבה אינטואיטיבית לעומת חשיבה אנליטית.

במדור "המלצה על ספר" קרני שיר ממליצה לנו על ספרה של שרה הרשקוביץ: "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית הספר היסודי".

במדור "חוויות מכנס" רותי סגל ותקוה עובדיה משתפות אותנו בחוויותיהן מכנס PME ה-41 שהתקיים בסינגפור הרחוקה.

גם בגיליון זה לא חסכנו והצגנו עוד פינה מתמטית חמה, והפעם שולה וייסמן ועידן טל משתפים אותנו במקומות גאומטריים בדגש במציאת מיקום הצירים, נקודות הקודקוד והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה בעזרת סרגל ומחוגה.

ברצוני להודות לכל השותפים לתהליך ההוצאה לאור של הגיליון השישי: לכותבי המאמרים והמדורים, שדאגו לשתף ולהעשיר את הידע המתמטי והידע הפדגוגי של קהילת אנשי החינוך המתמטי, לחברי הקהילה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי שנרתמו למשימת השיפוט, העירו ותרמו מזמנם והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון המאמרים המופיעים בגיליון ובהשבחתם. תודה גדולה לכולכם.

אסיים בתודה מיוחדת לפרופ' דוד בן-חיים, אדם יקר וחשוב, ראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן, שזכיתי ללמוד ממנו רבות ואף לעבוד לצידו.

מקווה שתיהנו מהקריאה.

יניב ביטון

מדור חדשות מתמטיות



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הביאה לישראל את "תוכנית קולומביה", והנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהטלוויזיה החינוכית זכתה עליהם לפרסים בין-לאומיים.

פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אליבושלהנוער.

היא הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" – מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. בשנים האחרונות היא מתמסרת לפיתוח הבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהקמת אתר "רמזור למורה".

נצה מובשוביץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-100,000 פריטים למאגר המידע הבין-לאומי שמנהלת החברה המתמטית האמריקאית:

[MathSciNet](#) – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info

רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות המעשירות את ענפי המתמטיקה השונים. לציון ההישגים הכבירים האלה, שכולם הם בזכות היצירתיות המפליגה של המתמטיקאים בני זמננו, הונהגו בעת האחרונה פרסים רבים, בהם שני פרסים יוקרתיים ויקרי ערך: פרס אָבֶל (Abel Prize), המוענק אחת לשנה ומדליית פילדס (Fields Medal) המוענקת אחת לארבע שנים. לזוכים בהם בזמן האחרון – בשנת 2017 ובשנת 2014 בהתאמה – ולפועלם המתמטי, מוקדש מדור החדשות בגיליון זה.

פרס אָבֶל לשנת 2017 על תורת ה-wavelets

ב-21 במרץ 2017 הכריז באוסלו אולי מ' סג'רסטד (Ole M. Sejersted), נשיא האקדמיה הלאומית הנורווגית למדעים ולאמנויות, כי ועדת פרס אבל, בראשות ג'ון רוגנס (John Rognes), החליטה להעניק למתמטיקאי הצרפתי, איב מֵאֵייר (Yves Meyer), את פרס אָבֶל לשנת 2017 עבור:

his pivotal role in the development of the mathematical theory of wavelets.

ב-23 במאי 2017 התקיים באוסלו טקס רב רושם שבו העניק הוד



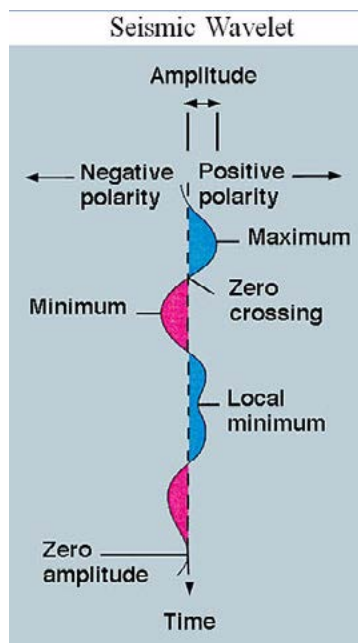
מעלתו הראלד החמישי, מלך נורבגיה, את פרס אָבֶל לאיב מֵאֵייר. באותו ערב ערך הפרלמנט הנורבגי קבלת פנים מפוארת במבצר אקרשוס לכבוד

עבודתו כמתמטיקאי בריאיון שנעשה איתו אחרי קבלת הפרס [כאן](#).

כשנה לפני ההכרזה על הפרס התפרסם "סיפור" שקושר את איב מאייר למתמטיקאים הישראליים, ניר לב מאוניברסיטת בר-אילן ואלכסנדר אולבסקי מאוניברסיטת תל-אביב. תקצר היריעה כאן, אבל [שווה קריאה...](#)

תורת הגלונים (The Theory of Wavelet) על קצה המזל

גלון, כפי שלאחרונה מקובל בקרב המתמטיקאים דוברי עברית



Doubek, J. (2013). *Seismic Wavelet* (Image). Retrieved from <https://en.wikipedia.org/wiki/Wavelet>

לכנות Wavelet, הוא תנודה דמוית גל עם משרעת שמתחילה באפס, עולה ואז יורדת בחזרה לאפס. אפשר לחשוב עליה כ"תנודה קצרה" כמו זו שנוצרת בסיסמוגרף או כזאת שנראית בתוצאות של בדיקת אק"ג של הלב. תורת הגלונים חותרת לפירוק של אותות מורכבים לסוג של חלקיקים מתמטיים פשוטים הנקראים גלונים.

תורת הגלונים חותרת לפירוק של אותות מורכבים לסוג של חלקיקים מתמטיים פשוטים הנקראים גלונים.

תורת הגלונים מיושמת במגוון רחב של תחומים, הן תאורטיים והן מעשיים למדי, כגון אנליזה הרמונית יישומית וחישובית, דחיסת נתונים (תמונות), הפחתת "רעשים" באותות,

הדמיה רפואית, אחסון נתונים, קולנוע דיגיטלי, הפרדה (דה-קונבולוציה) של תמונות טלסקופ החלל האבל וגילוי של [פרינקט LIGO](#) משנת 2015 של גלי כבידה שנוצרים מהתנגשות של שני חורים שחורים.

המתמטיקאי האוסטרלי-אמריקאי המחונן, טרי טאו ([Terence Tao](#)), חתן מדליית פילדס לשנת 2006, חתן [פרס פריצת הדרך המתמטית](#) לשנת 2015 וחבר לשעבר בוועדת פרס אָפֶּל, בישר טלפונית לאיב מאייר על החלטת ועדת פרס אָפֶּל בשם הוועדה. הוא הכין על פי בקשת הוועדה תיאור תמציתי פופולרי בן שני עמודים על תרומתו של איב מאייר לתורת הגלונים. את התיאור הוא פותח באומרו:

In his famous 1960 essay 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', Eugene Wigner noted the uncanny ability of mathematical notions and discoveries, that were often pursued for no other reason than their intrinsic structure and beauty, to become highly relevant in describing the physical world. The work of the 2017 Abel laureate, Yves Meyer, exemplifies this ability of pure mathematics to cross over into practical real-world applications (ההדגשה (שלי, נמ"ה).

המאמר הקצר במלואו מופיע [כאן](#).

הזוכה. יום לפני קבלת הפרס, לציון תחילת חגיגות פרס אָפֶּל כיז המסורת של אירועי הפרס, הניח איב מאייר זר פרחים על אנדרטת הזכרון לאָפֶּל, הניצבת בפארק הארמון, וגם היה אורח הכבוד בטקס חלוקת פרס הולמבווד (Bernt Michael Holmboed Memorial Prize), פרס שנקרא על שם המורה למתמטיקה של אָפֶּל וניתן על הצטיינות בהוראת המתמטיקה. למוחרת הטקס התקיים באוניברסיטת אוסלו אירוע אקדמי מכובד על תורת הגלונים שבו נשא איב מאייר את ההרצאה המרכזית (אפשר לשמוע את ההרצאות [כאן](#)). בתום האירוע האקדמי השתתף איב מאייר ב"קרס מתמטי" – האירוע השנתי ל-400 תלמידי כיתות ה' מבתי הספר באוסלו.

מיהו הזוכה המאושר?



פרופסור איב מאייר, יליד פריז בשנת 1939, צאצא למשפחה יהודית ספרדית, הוא מתמטיקאי רב פעלים שפרש זה לא מכבר, אך עדיין פעיל כחוקר באוניברסיטה הצרפתית הידועה: École normale supérieure, Paris-Saclay, France

הוא החל לפרסם עבודות מתמטיות בשנת 1966. עם קבלת הדוקטורט התגייס לשירות צבאי ועבד כמורה למתמטיקה בבית ספר תיכון צבאי. למרות המחויבות שרחש לחינוך ולתלמידיו, הוא חשב שאינו מתאים להוראה כי לדבריו מורה חייב להיות הרבה יותר שיטתי ומאורגן ממנו. הוא גם חש תחושת אשמה להיות זה ש"תמיד צודק" ויודע את כל התשובות לעומת תלמידיו שמרבים לשגות. לפעול כחוקר, לדעת מאייר, זה בעצם להיות בור רוב הזמן ולעשות שגיאות לעיתים קרובות. עם זאת הוא מרגיש שניסיונו בהוראה תיכונית עיצב את חייו המקצועיים כי הוא הבין שהוא מאושר יותר לחלוק את הידע שלו מאשר רק להכיל אותו. לפי עדותו על עצמו, כילד בתונים הוא פגש קבוצות אתניות רבות והיה סקרן לחצות את גבולותיהן. בבגרותו, הסקרנות לחצות גבולות הביאה אותו לעיסוקיו המתמטיים המגוונים.

עבודותיו המתמטיות משתרעות על קשת רחבה של תחומים ובהם תורת המספרים, אנליזה נומרית, אנליזה פורייה, הסתברות ותהליכים סטוכסטיים, משוואות דיפרנציאליות חלקיות, תורת השדות ותורת האופרטורים, שעסק בהם במהלך שנות עבודתו כשהוא עובר מאוניברסיטה לאוניברסיטה בצרפת, ועל כן זכה לכינוי "האינטלקטואל הנודד". הוא תרם תרומה משמעותית גם לתורה המתמטית של [גבישים-כמו-מחזוריים](#) (קוואזי-קריסטלים) שעל גילויים זכה פרופ' דן שכטמן בפרס נובל לשנת 2011, ולמחקר המתמשך על הבעיה הפתוחה עדיין של משוואות הזרימה ([בעיית נאויה-סטוקס](#)). בשנת 2010 זכה [בפרס גאוס](#) ליישומי המתמטיקה. הוא היה המוביל ואיש החזון בפיתוח המודרני של תורת הגלונים (Wavelet Theory) המהווה צומת שבו נפגשות המתמטיקה, טכנולוגיית המידע ומדעי המחשב. קנט ריבט, נשיא [החברה האמריקאית למתמטיקה](#) (AMS), ציין בדבריו ברכתו כי תרומתו הבסיסית של איב מאייר לתורת הגלונים שינתה לגמרי את העולם של עיבוד אותות והביאה לשפע עצום של יישומים מעשיים שימושיים. חיפוש ב-[MathSciNet](#) מראה כי למעלה מ-4,800 פעמים ציטטו אותו מעל ל-3,200 מחברים שונים של מאמרים. על פי [האתר הגניאלוגי של המתמטיקאים](#) הוא הנחה עד כה 37 סטודנטים לתארים גבוהים, שהנחו בעצמם 141 סטודנטים לתארים גבוהים ("נכדים אקדמיים"). מומלץ לשמוע עדות עצמית שלו על

לראשונה בהיסטוריה הזוכה במדליית פילדס לשנת

2014 היא אישה

המתמטיקאית הדגולה, מרים מירזאחאני (Maryam Mirzakhani),



שנולדה בטהרן, אירן, בשנת 1977 והתחנכה שם, זכתה בגיל 37 בכבוד הגדול ביותר שמתמטיקאים יכולים לזכות בו – מדליית פילדס. הזכייה שלה, לצד שלושה מתמטיקאים אחרים, צוינה במיוחד באירוע הענקת המדליה בכנס הבין-לאומי של המתמטיקאים שהתקיים בקיץ 2014 בסיאול, בירת קוריאה הדרומית, בהיותה האישה

הראשונה והיחידה עד כה שזכתה במדליה היוקרתית. קריטיאנה רוסו, סגנית הנשיא של התאחדות המתמטיקאים הבין-לאומית, השוותה את הזכייה של מרים מירזאחאני במדליית פילדס לזכייתה של מארי קירי בפרס נובל בראשית המאה העשרים, ואמרה שזוהי "חגיגה לנשים". השמחה מהזכייה ביום בצער עמוק על פטירתה בלא עת של המתמטיקאית המבריקה, שהייתה פרופסור באוניברסיטת סטנפורד בקליפורניה מ-2008 עד מותה ביולי 2017 והיא בת 40 בלבד.

חגיגה חדליית פילדס?



מדליית פילדס עשויה 14 קראט זהב, קוטרה 63.5 מ"מ וערכה הוא כ-5,500 דולר קנדי.

הפרופיל של ארכימדס והכיתוב ביוונית כולל את השם ארכימדס, את ראשי התיבות של שם המעצב של המדליה, R(obert) T(ait) M(cKenzie), ואת השנה 1933 שבה אושר עיצובה לאחר החלטה שהתקבלה בשנת 1924 בכנס הבין-לאומי של התאחדות המתמטיקאים הבין-לאומית (ICM – The International Congress of Mathematicians).



בשנת 1936 הוענקו שתי מדליות פילדס בפעם הראשונה. המדליה נקראת על שמו של המתמטיקאי

הקנדי, J. C. Fields (1932-1863), שניהל את הכנס בשנת 1924 בטורונטו, השקיע מאמצים רבים למימוש ההחלטה שהתקבלה בו, אך לא זכה להגיע למעמד הבכורה של חלוקתה ועל ערש דווי ציווה להוסיף סכום נכבד מכספו לקרן שהקים עבור המדליה (עוד פרטים מרתקים על פילדס ועל הולדת המדליה – כאן).

באירוע הפתיחה של הכנס שמתקיים אחת לארבע שנים, מוענקים ארבעה פרסים שהיוקרת בהם הוא מדליית פילדס. היא נחשבת לפרס נובל בתחום המתמטיקה, ומוענקת לשניים עד ארבעה מתמטיקאים שטרם מלאו להם 40 שנות חיים לאות הכרה בהישג מתמטי יוצא דופן עבור עבודה קיימת שיש עימה הבטחה להישג עתידי. המדליה מוענקת עם פרס כספי בשווי של כ-15,000 דולר קנדי. שם הזוכה חרוט סביב שולי המדליה (כזכור, אנדרו וויילס

דרך אגב, בבלוג שלו העלה טרי טאו את שמה של המתמטיקאית הבלגית, הברונית אינגריד דובצ'יס (Ingrid Daubechies), הנושאת בתפקידים מרכזיים בקהילייה המתמטית הבין-לאומית ובגללם היא מנועה מלקבל את הפרס, כראויה לפרס היוקרתית לא פחות מאיב מאייר. מעניין מאוד לקרוא כאן את חילופי הדברים בעניין בין המתמטיקאים הרבים העוקבים בקביעות אחרי הבלוג של המתמטיקאי המיוחד במינו הזה.

כמה מילים על פרס אָבֶל



פרס אָבֶל הוא פרס יוקרתי המוענק מאז שנת 2003 מדי שנה בשנה כהכרה בהישגים בולטים ויוצאי דופן בעומקם ובהשפעתם על המדעים המתמטיים. את הפרס מעניק בטקס רב רושם מלך נורווגיה על שם נילס הנריק אָבֶל (Niels Henrik Abel 1802-)

המתמטיקאי הנורווגי הנודע, שבגיל 16 הכליל והוכיח את משפט הבינום לכל מספר מרוכב, ובגיל 22 הוכיח שלא קיימת דרך כללית לפתרון משוואה פולינומית ממעלה חמישית על ידי רדיקלים, ובכך פתר (באופן בלתי תלוי בעבודתו המקבילה של גלואה) בעיה שהמתינה להוכחה מאות שנים. למרבה הצער נפטר העילוי המתמטי בגיל צעיר משחפת. בשנת 2002, במלאת מאתיים שנה להולדתו של אָבֶל, הוקמה בנורווגיה קרן לחלוקת פרס על שמו. את הקרן מנהלת האקדמיה הנורווגית למדעים ולאומנויות (להבדיל מהקרן השבדית למדעים המנהלת את פרס נובל, שלא ניתן בתחום המתמטיקה). ועדת הפרס מורכבת מחמישה מתמטיקאים בעלי שיעור קומה בין-לאומי. הפרס הוא בסך של שישה מיליון כתרם נורווגיים, שהם קרוב לשלושה מיליון שקלים, נכון למועד כתיבת שורות אלה (במדור החדשות בגיליון 4 צוינה זכייתו של אנדרו וויילס בפרס אָבֶל לשנת 2016 על הוכחת השערת פרמה).

לקריאה נוספת:

[The Abel Prize Laureate 2017](#)

[Yves Meyer receives the Abel Prize](#)

[Wavelet](#)

לפני שנמשיך - עדכון קצרצר למדור שהתפרסם בגיליון 4

שני דברים קרו לאחרונה בהקשר לבעיית הריצוף במחומשים המתוארת בהרחבה במדור החדשות של גיליון 4. בשורה מתמטית משמחת – המתמטיקאי הצרפתי, מיכאל ראו (Michaël Rao), **פרסם הוכחה** (בסיוע מחשב) שאין יותר מ-15 משפחות של ריצופי המישור במחומשים קמורים אחידים (עד כדי הזזה, שיקוף וסיבוב), והיות שידועים כיום כל החמישה עשר, נפתרה בכך בעיה שהייתה פתוחה שנים רבות. ארבעה מתוך הריצופים האלה גילתה חובבת הריצופים, מרג'ורי רייס, שלמרבה הצער נפטרה ביולי 2017 בגיל 94 ולא זכתה לדעת על ההישג האחרון. פרטים נוספים – כאן.

שהוכיח את השערת פרמה, תיקן את הטעויות האחרונות שהיו בה בהיותו בן 41, ולכן לא זכה בה...).

נשיא ההתאחדות (תפקיד זה נבחר לפרק זמן קצוב מראש) עומד בראש וועדה שהרכבה סודי ואת חבריה בוחרים חברי הוועד המנהל של ההתאחדות (הנבחרים כ"ל) כשנתיים לפני מועד הכנס הבא, כדי לבחור את הזכאים למדליה מבין המתמטיקאים מכל העולם, הכול על פי חוקי ההתאחדות.

מאז הוענקה המדליה לראשונה בשנת 1936 ועד היום, זכו בה 55 מתמטיקאים, ובהם כאמור רק מתמטיקאית אחת. המתמטיקאי הרוסי, **גריגורי פרלמן**, סירב לקבל את המדליה שהוענקה לו בשנת 2006 על הוכחת **השערת פואנקרה**. הישראלי הראשון והיחיד בינתיים שזכה במדליית פילדס הוא **אילון לינדנשטראוס** מהאוניברסיטה העברית (בשנת 2010).

קול קורא להמלצה על מועמדים למדליית פילדס לשנת 2018 **כבר פורסם**. מובן (מאליו, כמעט) שבקרב הקהילה המתמטית החלה חרושת שמועות ו**ניחושים רבים** מי הם הזוכים.

על הזוכים במדליית פילדס לשנת 2014 ותחומי עיסוקם

בריאיון מיוחד ומעניין מאוד שנעשה עם מרים מירזחאני בשנת 2008, היא סיפרה שבילדותה אהבה לקרוא ספרים וחלמה להיות סופרת. וחלמה להיות סופרת. אחיה המבוגר שיתף אותה במתמטיקה שלמד בבית הספר והלהיב אותה בסיפוריו. בהשפעתו ובהשפעתה של מנהלת בית הספר התיכון (הנפרד לבנות) שבו למדה, מנהלת שחתרה לכך שתלמידותיה יגיעו להישגים טובים לא פחות מהבנים בבתי הספר האחרים, הגיעה מרים במהלך לימודיה התיכוניים להישגים במתמטיקה, עד כדי כך שלקראת סיומם זכתה פעמיים במדליית זהב באולימפיאדה הבין-לאומית למתמטיקה, בשנים 1994-1995. את התואר הראשון במתמטיקה קיבלה מאוניברסיטת שריף בטהרן ואת לימודי הדוקטורט במתמטיקה השלימה באוניברסיטת הרווארד בארה"ב בהנחייתו של חתן מדליית פילדס לשנת 1998, קרטיס מקמאלן. בריאיון היא מתארת את יכולתו של מקמאלן להציג דברים בבהירות ובפשטות, את היותו קשוב לשאלותיה, ואת השפה המתמטית כמלאה יופי והדר ששבו את ליבה. עם זה לדעתה, דרושה סבלנות כדי להגיע לידי הכרה בכך, כפי שהיא ביטאה זאת:

I can see that without being excited, mathematics can look pointless and cold. The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.

רוב הבעיות שמירזחאני עבדה עליהן כרוכות במבנים גאומטריים של משטחים ועיוותיהם. יש לה עניין מיוחד במשטחים היפרבוליים, שיכולים להיראות כמו הקצוות של עלי כרוב מסולסל, ואותם קל יותר לסרוג מאשר להסביר... היא זכתה במדליית פילדס על תרומתה לדינמיקה ולגאומטריה של משטחי רימן. הסבר פופולרי יפה על תחום עבודתה של מרים מירזחאני מופיע **כאן**. תחומי התמחותה של מרים מירזחאני שייכים למתמטיקה תאורטית גבוהה: **תורת טייכמילר**, **גאומטריה היפרבולית**, **התורה הארגודית וגאומטריה סימפלקטית**. שליטתה בתחומים אלה איפשרה לה לקדם את הקסם שמצאה בתיאור המורכבות הגאומטרית והדינמית של משטחים עקמוניים – כדורים, צורות דמויות כעך ואפילו אמבות – בפירוט רב ככל האפשר. לעבודתה שהייתה בעלת אופי תאורטי לגמרי, יכולה להיות השפעה על התאוריה הפיזיקלית של היווצרות היקום, כי יש בה כדי לשפוך אור על תורת השדות הקוונטית, ויכולים גם

להיות לה יישומים משניים להנדסה ובפרט להנדסת חומרים. גם בתוך המתמטיקה יש לה השלכות על המחקר של מספרים ראשוניים והצפנה (קריפטוגרפיה).

נוסף על **מרים מירזחאני**, אלה שלושת הזוכים במדליות פילדס לשנת 2014:

האוסטרי, **מרטיין היירר** (Martin Hairer), מאוניברסיטת וורוויק בבריטניה בהיותו בן 38, על תרומתו יוצאת הדופן לתאוריה של משוואות דיפרנציאליות סטוכסטיות חלקיות, המכילות מונחים שהם אקראיים מטבעם; **מאנג'ול בהארגאוה** (Manjul Bhargava), מאוניברסיטת פרינסטון בארה"ב בהיותו בן 40 על פיתוח שיטות חדשות רבות עוצמה בתורת המספרים, כולל עקומות אליפטיות המשמשות בתחום הקריפטוגרפיה. לדעתו, בסופו של דבר לכל דבר אלגנטי שהמתמטיקאים מוצאים במהלך חיפושם אחרי יופי מתמטי, נמצאים יישומים שימושיים לחברה; **ארטור אווילה** (Artur Avila), חוקר ברזילאי-צרפתי מהמכון למתמטיקה Jussieu בפריז, בהיותו בן 35, על תרומותיו המעמיקות למערכות דינמיות. פרטים נוספים – **כאן**.

K-12 Mathematics Education in Israel – Issues and Innovation

באפריל 2018 יצא לאור הספר על החינוך המתמטי בישראל – כמחווה למלאת 70 למדינה. הספר הכולל 44 פרקים ולמעלה מ-400 עמודים, מחולק לחמישה שערים. השער הראשון עוסק בסוגיות של מבנה מערכת החינוך המתמטי. הספר נפתח בפרק המתאר את התפתחות מערכת החינוך המתמטי כחלק ממערכת החינוך כולה על פני ציר הזמן (פרק 1).

בשנים האחרונות ננקטת מדיניות ממלכתית המעודדת את בני הנוער להגיע לרמה הגבוהה ביותר של מתמטיקה בית ספרית, כדי למצות את יכולתם הפוטנציאלית, ובכך לטפח צמיחה בחוגי המצוינות של האוכלוסייה. למדיניות זאת הזוכה לתמיכה נרחבת בידי קרן פילנתרופית מוקדשים פרקים 2 ו-3. מדיניות זו הניבה תוכניות חדשניות רבות לתלמידים ומורים ברמות שונות של בית הספר, ובכללן תוכניות למורים פוטנציאליים המשתקפות במספר פרקים בספר זה.

יצירת שפה עברית מודרנית למתמטיקה שימשה אתגר שנים לפני הקמת מדינת ישראל ולאחריה. אי אפשר לספר את סיפור הוראת המתמטיקה בישראל בלי לספר את סיפור התפתחותו של אוצר מילים עברי מודרני למתמטיקה. פרטים על כך מופיעים בפרק 35 הפותח את השער החמישי של הספר. שער זה מוקדש לסוגיות בעלות עניין כוללני.

סוגיה קשורה היא זו של בתי הספר הדוברים ערבית שהם מיעוט במערכת החינוך (פרק 7). עוד מיעוט הוא בתי הספר הממלכתיים-דתיים, שבהם מתמטיקה נלמדת לצד לימודי הדת ומופרדת לפי מגדר (פרק 5). אתגר גדול במיוחד בחתירה למצוינות בחינוך מתמטי יש בקהילה החרדית-קיצונית ביותר (פרק 6). בקצה האחר ניצבת מערכת החינוך הקיבוצית ששייכת לתנועה הקיבוצית הייחודית, שהקימה יישובים פריפריאליים קטנים המבוססים על חיי הקהילה מהשנים הראשונות לקיומה של מדינת ישראל. סיפור החינוך המתמטי בתנועה הקיבוצית נכלל אף הוא בשער החמישי של הספר (פרק 39).

היתר, לשם כך בוגרי ההנדסה, ההיי-טק וגמלאי צה"ל מקבלים מלגה להשלמת השכלתם כדי לקבל רישיון הוראה למתמטיקה. פרקים 27 ו-28 עוסקים בכך.

כמו במדינות רבות אחרות בעולם, הציבור רואה במתמטיקה אחת הדיסציפלינות העיקריות של בית הספר. היא נלמדת מגן חובה ועד כיתה י"ב בהתאם לתוכניות הלימוד המחייבות המתוארות בקצרה בנספח לספר. משרד החינוך מספק הדרכה והדרכה למורים ביישום תוכניות הלימוד כמתואר בפרק 4.

מדינת ישראל משתתפת במחקרים בין-לאומיים של הערכת הישגים במתמטיקה, ותוצאותיהם השפיעו על יוזמות שנקטו לשיפור החינוך המתמטי. פרטים מופיעים בפרק 40.

יש עוד נושאים כלליים שמעסיקים את הקהילה הבין-לאומית העוסקת במחקר בחינוך מתמטי ובהם הישראלים. עם הנושאים האלה נמנים תפקיד הטכנולוגיה בחינוך מתמטי (פרקים 36, 37 וכן 12, 14,

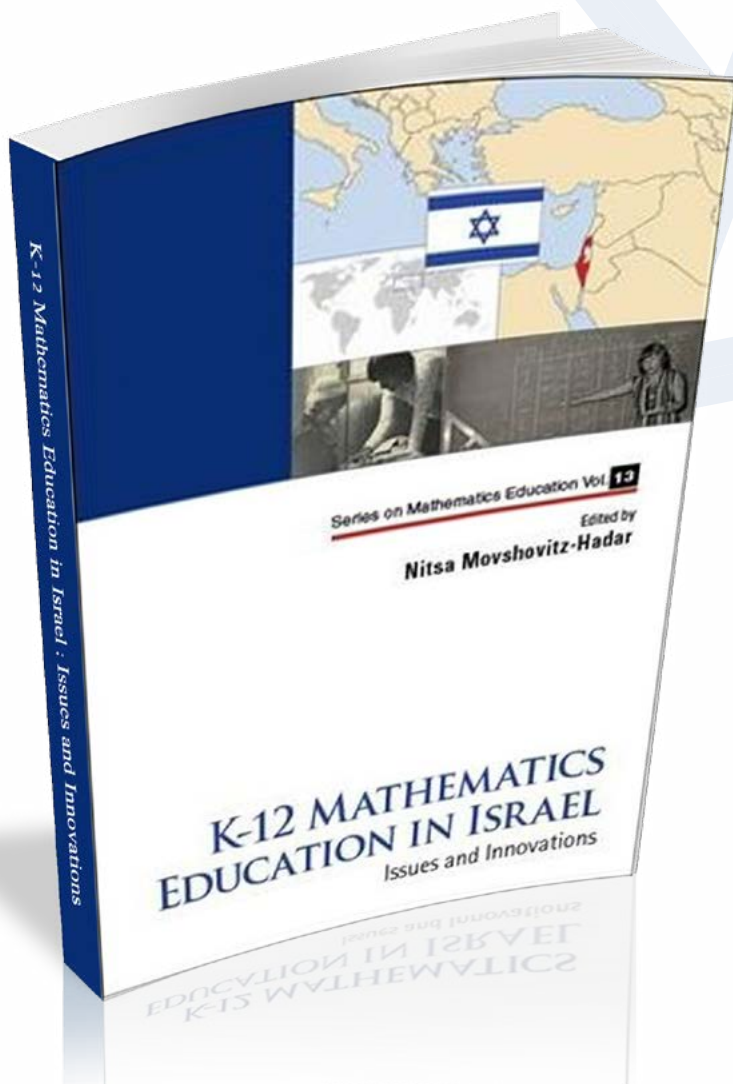
בשער השני (פרקים 8-12) והשלישי (פרקים 13-23) של ספר זה, נידונות סוגיות ותוכניות חדשניות הקשורות בחינוך מתמטי בכיתות א'-ו' ובכיתות ז'-י"ב, בהתאמה. פרקים אלה כוללים נושאים של טיפול מתמטי לילדים מתקשים וגם עבור אלה המוכשרים מבחינה מתמטית, שימוש בכלים מבוססי טכנולוגיה לשיפור ההוראה והלמידה של המתמטיקה בבית הספר, חידושים לימודיים ופעילויות מחוץ לבית הספר עבור אוכלוסיית תלמידים מגוונת.

השער הרביעי מוקדש להכשרת מורים למתמטיקה ולהתפתחותם המקצועית במהלך עבודתם. הכשרת מורים למתמטיקה לכיתות י' נעשית ב-24 מכללות אקדמיות לחינוך. הכנת מורים למתמטיקה לכיתות ז'-י"ב מתקיימת בשש אוניברסיטאות המחקר. מגוון תוכניות פיתוח

מקצועיות חדשניות למורים למתמטיקה שיוזמים משרד החינוך והמוסדות האקדמיים מתוארות בפרקים 24-26, 29-34. תשומת לב מיוחדת מוקדשת בתוכניות אלה לשיפור איכות כוח ההוראה. בין

קהילת חוקרי החינוך המתמטי בישראל הפכה להיות בעלת מוניטין עולמי. היא קהילה מקצועית פעילה ותוססת.

רבים מחברי הקהילה מפרסמים את תוצאות מחקריהם בעולם.



15), שילוב של אתנו-מתמטיקה בלימודי המתמטיקה בבית הספר (פרק 42), אבחון לקויות למידה מתמטיות (פרק 43), וטיפול במחוננים ומוכשרים למתמטיקה (בפרק 16 יש סקירה מקיפה ותוכניות מסוימות מתוארות בפרקים 13, 17, 18, 41).

קהילת חוקרי החינוך המתמטי בישראל הפכה להיות בעלח מוניטין עולמי. היא קהילה מקצועית פעילה ותוססת. כתב העת העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי הוא אחד ממאפייניה ומדי שנה בשנה מתקיים כנס ירושלים למחקר במתמטיקה בישראל (פרק 44). רבים מחברי הקהילה מפרסמים את תוצאות מחקריהם בעולם. אחדים מהם משתקפים בספר זה המוקדש ליישום בית הספר ולפרקטיקה במקום למחקר (בפרט פרק 38).

בסוף הספר הקורא יכול למצוא מילון מונחים הקשורים לחינוך מתמטי, ראשי תיבות וקיצורים שהשתמשו בספר זה, ונספח המתאר את תוכניות הלימודים המתמטיות במתמטיקה מגן חובה עד י"ב המעודכנות לשנת 2017.

ב-15 במאי 2018 עומד להתקיים אירוע השקה לספר באדיבות התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה באוניברסיטת בר אילן. הוא יחתום שנתיים של מאמץ שהשקיעו בהכנת הספר 86 מחברי הקהילייה המקצועית העוסקת בחינוך מתמטי בישראל בהנהגתה של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר מהטכניון. הספר הוא כרך 13 בסדרת ספרים על החינוך המתמטי בארצות התבל שמוציאה לאור World Scientific בהנהגתם של שלושה ממובילי הקהילייה הבין-לאומית של החינוך המתמטי: מוגנס ניס מדנמרק, לי ניאן הו מסינגפור וג'רמי קילפטריק מארה"ב.

"בארץ-ישראל
קם הלם פיפודי,
בה חוצבה
במלך פרחוני,
בדגים אפודיני,
בה חי חיי קלמליה
ממלכה, בה יצר
נכסי גרמל אלמליים
אכל-אנליים
אוריאל אלום
כאלא ספר
הספרים הנצחיים..."
(מליאל פלמליאל)



מחשבות על אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה או בלשון החוקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית:

חשיבה אינטואיטיבית לעומת חשיבה אנליטית
Is mathematics just an elaboration of common sense?

אישית לוחצת עם פרופסור אורי לירון



ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן - המכללה האקדמית הדתית
לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
חוקרת בפרוייקט "הבזקים" - הפקולטה למתמטיקה,
טכניון, חיפה.

קרני שיר

את פרופסור אורי לירון (מכאן ואילך אני מרשה לעצמי לקרוא לו



פשוט 'אורי') יצא לי להכיר לפני
25 שנה בערך, בשנה השנייה
ללימודי התואר הראשון שלי
בטכניון. למדתי אצל אורי את
הקורס "עולמות זוטא – למידה
בסביבות ממוחשבות", ולימים
הפכתי למתרגלת של קורס זה
ובהמשך אפילו למרצה שלו.

חוץ מללמוד על משתנים, לולאות,

רקורסיה, חידוקים ומגדלי האנוני (כי איך אפשר ללמוד מחשבים בלי
לתכנת פתרון רקורסיבי למגדלי האנוני...) למדתי גם מה זו למידה
קונסטרוקטיביסטית אמיתית, מה המשמעות האמיתית של קודם
לבנות את הידע, ואחר כך לערוך רפלקציה (לרוב בשיחה קבוצתית),
ואיך המילה 'מרצה' זו המילה האחרונה שהיה אפשר לתאר בה את
תפקידו של אורי בקורס, או את תפקידה של אורית (היום פרופ'
אורית חזן) – שהייתה "המתרגלת" של אותו קורס.

פגשתי את אורי שוב מספר שנים לאחר מכן, כאשר למדתי לתואר
השלישי שלי. פרט להיותו ראש המחלקה להוראת המדעים באותה
עת, זכיתי ללמוד אצלו את הקורס "היבטים אבולוציוניים בהוראת
המתמטיקה", שהיה אחד הקורסים המעניינים שיצא לי ללמוד
בלימודי הדוקטורט שלי.

מתוקף היותו ראש המחלקה, ומתוקף היותי בוועד הסטודנטים, יצא
לנו לתכנן ביחד כמה אירועים חברתיים, ואפילו זכורה לי תמונה
שצילמה אורית אחרת (פרופ' אורית זסלבסקי, שהייתה בין השאר
גם המנחה שלי בדוקטורט), שבה שנינו ספוגים במים רגע לאחר
ססיימנו רפטינג חווייתי על הירדן בעת טיול מחלקתי.

אחרי ההקדמה הזו, אתם בוודאי לא מתפלאים יותר מדוע בחרתי
בפרופ' אורי לירון להיות המרואיין הראשון שלי בסדרת הראיונות
במדור חדש זה של כתב העת 'מחקר ועיון בחינוך מתמטי'.

נעשים מתוך מסירות ואהבה, ודווקא דגשים אלו הם המאפשרים את ההקפדה והחומרה הנדרשים כדי לגדל כראוי את "ילדיו".

ואם אנו כבר עוסקים בגידול ילדים, בואו נראה מה יש לאורי לספר לנו בתחום זה.

רקע אישי

אורי פגש את אשתו יעל, שהייתה אז סטודנטית לפסיכולוגיה וכיום פסיכולוגית קלינית ופסיכואנליטיקאית, בתזמורת האוניברסיטה העברית בגבעת רם שבה, הוא מדגיש, היא הייתה בתפקיד החליל הראשון והוא החליל השני.



ליעל ואורי שלושה ילדים: **אורנה** (51) שכמו אמה גם היא פסיכולוגית קלינית ופסיכואנליטיקאית; **יובל** (48) (או יובלל – כפי שהוא ידוע בשם החיבה שלו), בוגר תלפיות ובית הספר למשחק של יורם לויןשטיין, עובד במכון ויצמן בפיתוח תוכנה ובקבוצת התיאטרון של חוקרי מכון ויצמן. כמו כן הוא מנחה בסדנאות בין-לאומיות שבהן מאמנים מדענים צעירים לעבוד בעבודת צוות. הבן הצעיר **אמיר** (43) הוא בוגר בית הספר לקולנוע של לוס אנג'לס (LAFS), והיום מתעניין בתרבות האינדיאנים ביערות האמזונס בברזיל.

נוסף על שלושת ילדיו יש לאורי גם שישה **נכדים** שהוא מאוד גאה בהם. למעשה כאשר שאלתי אותו באשר לתחביביו, הוא ענה לי שאחת האהבות הגדולות שלו היא להיות עם הנכדים. לפי המסורת המשפחתית, יעל ואורי נוסעים סולו לחו"ל עם כל נכד או נכדה שמגיעים לגיל המצוות. הם נסעו כבר ללונדון, אמסטרדם וברצלונה עם חמישה מתוך ששת הנכדים. המלצות מקוראים של המדור באשר ליעד השישי שכדאי להם לנסוע אליו לכר המצווה של הנכד האחרון בעוד כשנה אפשר לשלוח למערכת העיתון...

כאשר שאלתי את אורי מה הסוד שלו במערכת היחסים היפה שהוא בנה עם נכדיו, הוא אמר לי שגישתו היא כן לנהל איתם שיחות מעמיקות על כל הנושאים שבעולם, אבל 'לא לחפור ולשאול שאלות טרחניות'. אז לכל הסבים והסבתות שהגיעו בקריאה עד לכאן – נא

לא יודעת מה איתכם, אותי מעניין מאוד להכיר את בן האדם שיושב מולי, את המשפחה שלו, את התחביבים שלו, ועוד דברים שלא נוגעים ישירות לרקע האקדמי שלו ולרשימת הפרסומים שלו (אבל אל חשש, גם לזה נגיע בהמשך). אז אם אתם מתחברים פחות, תרגישו חופשי לדלג על שני החלקים האלה של הריאיון הנוגעים לרקע המקצועי והאישי של אורי ולהמשיך ישר לחלקים הדנים בחינוך מתמטי, אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה.

אורי נולד וגדל בקיבוץ ניר דוד (תל עמל) שבעמק בית שאן. הוא עזב את הקיבוץ רק לאחר השירות הצבאי, כאשר התברר שרצונו ללמוד מתמטיקה-פיזיקה באוניברסיטה לא מתיישב עם האידאולוגיה ששרתה בקיבוץ בימים ההם, על אף מאמצים ניכרים שעשו כל הנוגעים בדבר למצוא פתרון הולם.

אביו של אורי לירון, פרופ' שניאור ליפסון, היה מוותיקי מכון ויצמן למדע, מייסד המחלקה לפיזיקה כימית ומנהל מדעי של המכון. מאז היותו ילד, ידע אורי שהוא רוצה ללכת בעקבותיו. כאמור, הוא למד לתואר ראשון במתמטיקה-פיזיקה באוניברסיטה העברית בירושלים, וגילה במהלך לימודי התואר הראשון שהוא הכי אוהב בפיזיקה את המתמטיקה שעומדת מאחוריה. לפיכך הוא המשיך לתואר שני ושלישי במתמטיקה באוניברסיטה העברית, וסיים את הדוקטורט בתורת החוגים בהנחייתו של פרופ' שמשון עמיצור. (בזמן שאורי עבד על הדוקטורט בהנחיית פרופ' עמיצור, הוא היה המתרגל בקורס אלגברה מודרנית של בתו, חנה עמיצור, לימים חנה פרל, מפמ"רית המתמטיקה במשרד החינוך.) לאחר מכן, בעת פוסט-דוקטורט היה מרצה אורח במחלקות למתמטיקה באוניברסיטת אורגון ובאוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס (UCLA). עם חזרתו ארצה הגיע לפקולטה למתמטיקה בטכניון ולימד בה קורסים שונים כגון חדו"א, אלגברה ליניארית ותורת החוגים. אורי התעניין מאוד בפסיכולוגיה של המתמטיקה, בהיסטוריה של המתמטיקה, בפילוסופיה של המתמטיקה, ובעיקר בהוראת המתמטיקה – דבר שלא תמיד קיבלו בעין יפה עמיתיו הבכירים בפקולטה למתמטיקה, שסברו כי רצוי שיקדיש את כל זמנו למחקר המתמטי הטהור. בד בבד הוא החל להרגיש מתוסכל לעיתים עם המחקר במתמטיקה טהורה, שבו מצא את עצמו מצטמצם ומתמחה בפניה זעירה של הידע המתמטי, ועובד בעיקר עם עצמו, וכך לאחר כמה שנים בפקולטה למתמטיקה, החליט לעשות "הסבה מקצועית" ועבר לעסוק במחקר ופיתוח בחינוך מתמטי. המחקר בחינוך מתמטי אפשר לאורי לעבוד עם אנשים, הן עם חוקרים אחרים והן עם מורים ותלמידים, ואפשר להתבונן בתמונה במלואה. המחקר גם אפשר לו להרחיב את תחומי עיסוקו ולהיכנס לעומק לנושאים, כמו מדעי המחשב, פסיכולוגיה קוגניטיבית, פסיכולוגיה אבולוציונית ועוד נושאים שבהם הוא מגדיר את עצמו – בענווה רבה – כחובב רציני שלהם. ("חובב", כי אינו עוסק במחקר בנושאים אלו; "רציני", כי קרא והעמיק בהם עד כדי יכולת לנהל "שיחה אינטליגנטית" עם מקצוענים בשטחים אלו, ואף להשתמש בהם במחקריו בחינוך מתמטי.)

מה שכן, למרות הקריירה המקצועית המרשימה שלו, שבה הוא גם החזיק בקתדרה על שם משפחת צ'רציל להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון, אורי הדגיש לפניי כי כאשר יגיע לפניי כיסאו של הקב"ה ויצטרך להישפט על חייו ועל תרומתו לאנושות, יעיד כי הדבר החשוב ביותר שעשה בחייו המקצועיים ושהוא הכי גאה בו, הוא הדוקטורנטיות והדוקטורנטים הרבים שהנחה. הוא רואה אנלוגיה בין הנחיית הדוקטורנטים שלו ובין גידול ילדיו; שניהם

לקחת לתשומת ליבכם. כאימא לשלושה ילדים אני יכולה להעיד כי זו ללא ספק עצה ששווה זהב.

תחביבים נוספים הם האזנה למוזיקה וקריאת ספרים. כאשר ביקשתי מאורי המלצה על ספר אהוב במיוחד הוא המליץ לי על 'לב לבן כל כך' של חוויאר מריאס (אורית קרוגלנסקי תרגמה אותו מספרדית). מעבר לעלילה המרתקת, הספר עוסק רבות במצב הידיעה של משתתפי העלילה, ולדעתו זה סיפור מדהים עם עומק פילוסופי (והוא לא רצה לספר לי יותר כדי לא להרוס לכם ולי את



חויית הקריאה). מאותה סיבה בדיוק הוא נהנה מאוד מהסרט הוותיק "הבגידה" שמתחיל בהווה וממשיך אחורה בזמן, ועוסק בשאלה הפילוסופית (זהירות ספוילר!) מהי משמעות הבגידה: האם הבוגד הוא חברך הטוב המקיים פרשת אהבים עם אשתך, או שמא הבגידה האמיתית היא שלך, שידעת כל השנים על פרשת האהבים הזו, אבל לא גילית לחברך הטוב שאתה יודע?...

עוד ספר אהוב על אורי הוא הספר "סוס אחד נכנס לבר" של דוד גרוסמן, זוכה פרס ישראל לספרות, שגם בו בא לידי ביטוי המתח הפסיכולוגי האהוב עליו כל כך, בין מצבי הידיעה של המשתתפים השונים.

התחביב האחרון שחלק איתי אורי, שהוא בעצם גם מקצועו, הוא כתיבת מאמרים. מבחינתו לכתוב מאמר על מחקר איכותני, זה בעצם כמו לספר סיפור: אתה מסתכל על סיטואציה מעניינת בזכוכית מגדלת, ומנסה לכתוב עליה סיפור שיאיר אותה בדרך מעניינת וחדשנית.

מחשבות על חינוך מתמטי: אינטואיציה מול פורמליזם במתמטיקה

אורי עבר במשך הקריירה המחקרית שלו בין נושאים רבים ומגוונים, אבל במבט מסכם לאחור, הנושא שמעסיק אותו כחוט השני לאורך כל הקריירה הוא הקשר במתמטיקה והוראתה בין חשיבה אינטואיטיבית לחשיבה פורמלית (או בלשון הפסיכולוגים: חשיבה אנליטית). היות שאורי בקיא בנושא הזה הרבה יותר ממני, ביקשתי ממנו לחשוב על שאלות בנושא זה שהיה מציג לעצמו אילו הוא היה מראיין. השאלות שהציע אורי היו כל כך חשובות וטובות, שהחלטתי להציג אותן כאן כמעט לגמרי בלשון.

אינטואיציה ופורמליזם - האם תוכל לספר לי יותר על חשיבות הנושא?

המתמטיקאי היוצר נמצא רוב הזמן במצב (mode) של חשיבה אינטואיטיבית. כל החלק היצירתי (המנוגד לרוטיני) נמצא שם. הוא נזקק למצב האנליטי בעיקר לצורך בדיקה מדוקדקת של ההשערות שצצות במצב האינטואיטיבי, או לצורך סיכום והצגת התוצאות

לציבור הסטודנטים או החוקרים. מישהו אמר שללמד רק את הצד הפורמלי (כפי שבמידה רבה קורה בבית הספר ובאוניברסיטה) זה כמו ללמד בשיעורי מוזיקה תווים וחוקי המוזיקה, בלי שאי פעם התלמידים ישמעו מוזיקה. במילים אחרות, המוזיקה של המתמטיקה נמצאת בצידה האינטואיטיבי, ודווקא הוא מונח בהוראה.

גם בהוראה ולמידה אורי מעדיף כניסה אינטואיטיבית לנושא הנלמד, ומעבר הדרגתי (תלוי בגיל הלומדים ורמתם) לרמה הפורמלית. לכל נושא מתמטי יש היבטים אינטואיטיביים והיבטים פורמליים, והקשר ביניהם אינו פשוט. לדוגמה: הצגה אינטואיטיבית של פונקציה כמכונת פונקציות לעומת הצגתה הפורמלית כקבוצה של זוגות סדורים. ידוע היטב כי החשיבה האינטואיטיבית חשובה לשגיאות, אבל לתפיסתו של אורי (על סמך פיאה'ה ופאפרט, ממציא לוגו), המעבר לרמה האנליטית צריך להיעשות באמצעות debugging (ולא discarding!) של החשיבה האינטואיטיבית.

האם מתמטיקה היא המשכו של החיגיון הפשוט (elaboration of common sense)?

אורי: בצעירותי חשבתי שהתשובה היא כן, כי לימוד המתמטיקה בא לי בקלות והמושגים וההגדרות נראו לי טבעיים והגיוניים. ככל שהתקדמתי בלימודי המתמטיקה ובהמשך במחקר חינוכי ופסיכולוגי, ראיתי יותר ויותר עד כמה טעיתי במחשבה זו, בעיקר כשמדברים על החלקים המודרניים

והפורמליים של המתמטיקה; אבל יש גם מטלות פשוטות רבות שהתשובות הנכונות להן נוגדות את האינטואיציה. (על מחקרים מסוג זה קיבל הפסיכולוג דני כהנמן בשנת 2002 פרס נובל). החיפוש אחרי מקורות הקשיים הרבים בלימוד מתמטיקה, ובעיקר המקומות שבהם המתמטיקה הפורמלית מתנגשת בהיגיון הישר של חיי יום-יום, הביאו אותי להיכנס לעומק המחקרים בנושאים קרובים בפסיכולוגיה קוגניטיבית ואבולוציונית. למשל, אחת

התובנות שרכשתי מעיוני אלו, היא שהאבולוציה פיתחה את המוח האנושי כך שיצטיין במיוחד בחשיבה חברתית מורכבת, ושחלק מהטעויות הנפוצות נובעות מהתנגשות בין הלוגיקה של חשיבה חברתית ללוגיקה המתמטית (פירוט במאמרים המצורפים).

איך התגלה לך העולם האינטואיטיבי שמתחבא מאחורי המתמטיקה הפורמלית, כפי שהיא נלמדת בבית הספר ובאוניברסיטה?

היום אני יודע שאפשר ללמוד מתמטיקה ולעבור בחינות בהצלחה בלי להיות מודע לצד האינטואיטיבי של החומר הנלמד, כפי שאני עשיתי בבית הספר ואפילו בלימודי התואר הראשון באוניברסיטה, למרות שסיימתי בהצטיינות. רק בלימודי התואר השני, כאשר היה לי יותר זמן ללמוד ולהעמיק בחומר מעבר לדרישות הבחינות, ובמיוחד במרכיבים של לימוד עצמי, גיליתי את העולם האינטואיטיבי הנרחב, העשיר והמקסים שנמצא מאחורי המושגים וההוכחות והתאוריות כפי שלמדנו אותם בחומר הרשמי. התפעלתי מהיופי שגיליתי בעצמי, ואפילו כעסתי על כך שאף אחד לא טרח להאיר את עיניי להכיר את העולם הנפלא הזה. בזמן ההוא גם החלטתי שכאשר אני אהיה מרצה למתמטיקה, אדאג למלא את החסר הזה: אני כן

אלמד את הסטודנטים את הרעיונות האינטואיטיביים שמאחורי הפורמליזם (ה"מוזיקה" של המתמטיקה)! לרוע המזל, שכשהגיע הזמן לממש את ההחלטה הזו, גיליתי שזה לא עובד (מה שכמובן מוכר היטב לחוקרים בחינוך מתמטי): אתה לא יכול "ללמד" אינטואיציה. זה משהו שמתפתח אצל הלומד בעבודה קשה ולאורך זמן, ולא משהו שאפשר "להעביר" מהמורה לתלמיד. חלק גדול מהקריירה שלי הקדשתי לחיפוש ופיתוח דרכים לעזור לתלמידים לפתח אינטואיציות מתמטיות (שזה כמעט כמו לעזור להם להבין מתמטיקה).

האם תוכל לתאר מספר נושאים עיקריים שעסקת בהם לאורך השנים, הקשורים לנושא של אינטואיציה לעומת פורמליזם?

- למידת מתמטיקה דרך תכנות, במיוחד בשנות השמונים בשפת לוגו (לצעירים) ובשפת ISetL (לסטודנטים באוניברסיטה). (היום נעשים מאמצים בכיוונים דומים בסביבת Scratch). הרעיון המרכזי הוא שהתכנות מהווה פורמליזציה של האינטואיציה של הלומד לגבי הנושא הנידון, והתוצאה על מסך המחשב עוזרת לו לעשות דיבאג'ינג בו-זמנית הן של התוכנית שכתב והן של חשיבתו, עד שהוא מגיע לניסוח הפורמלי הנכון. בגלל המשוב מהמחשב, הלומד הרבה פחות תלוי במשוב מהמורה. וגם סוג המשוב הוא שונה. במקום להגיד נכון או לא נכון, המחשב בתגובתו (פלט, ציור או הודעת שגיאה) כאילו אומר: "הנה כך הבנתי (או לא הבנתי) את מה שכתבת, האם לך התכוונת?"

- הוכחות מובנות לעומת הוכחות ליניאריות. מדובר בשיטה מהפכנית שפותחה במדעי המחשב להתמודדות עם סיבוכיות קוגניטיבית של מערכות תוכנה גדולות, ואני הראיתי איך ליישמה לגבי הוכחות במתמטיקה. הרעיון הוא להבנות הוכחות במבנה היררכי בסגנון top-down, שמדגיש את הרעיונות העיקריים שסביבם בנויה ההוכחה, וזאת במקום השיטה הליניארית, שמדגישה את התקפות הלוגית, אבל מסתירה את הרעיונות הגולביים של ההוכחה.

- נושאים נוספים שחקרתי הקשורים בהוכחות: הקשיים המיוחדים בהבנת הוכחות בדרך השלילה, ומחקר משותף עם אורית זסלבסקי בנושא הוכחות גנריות (כלומר הוכחות המתבצעות על דוגמה, אבל בכל זאת מדגישות את כלליות ההוכחה ולמה היא עובדת גם במקרה הכללי).

- תורת התהליך הכפול (Dual-Process Theory). (מחקרים משותפים עם אורית חזן, עם בוריס קויצ'ו ועם ליסר איירסבו מדנמרק). כאן השתמשנו במחקרים ובתאוריות מפסיכולוגיה קוגניטיבית ומפסיכולוגיה אבולוציונית על מנת לנתח בדרכים חדשות שגיאות אופייניות של תלמידים וסטודנטים במטלות מתמטיות שונות. ניתוחים אלו הראו בין השאר שהפער בין החשיבה האינטואיטיבית והאנליטית הוא גדול ועמוק ממה שחשבנו בתחילה, ומכאן הטעות שלי בחשיבתי המוקדמת שמתמטיקה היא בסך הכול המשך מתוחכם של ההיגיון הישר (elaboration of common sense). בנוסף, מחקרים אלו מדגישים את התופעה שטעויות במטלות מתמטיות לעיתים נובעות לא מידע פגום, אלא מ"השתלטות" של החשיבה האינטואיטיבית (הקלה, המהירה והאוטומטית) על החשיבה האנליטית (הכבדה, האיטית והמאומצת). ניתוחים אלו גם הראו שאנשים נוטים להשתמש בסוגי אינטליגנציה אחרים (כגון אינטליגנציה חברתית), שבחיי יום-יום נותנים בדרך כלל תוצאות מצוינות, אבל במטלות מתמטיות גורמים לעיתים לשגיאות.

- "שגיאות טובות" ותהליכי גישור (מחקרים משותפים עם אברהם הרקבי ועם ליסר איירסבו). למחקרים והתאוריות מפסיכולוגיה על הפער בין חשיבה אינטואיטיבית ואנליטית יש חשיבות רבה להבנה מעמיקה יותר של שגיאות נפוצות, אבל בניגוד לפסיכולוגים, אנחנו לא מסתפקים בתיעוד התופעה, אלא שואלים, בתור אנשי חינוך, מה אפשר לעשות בנידון? ביחד עם חלק מהפסיכולוגים (למשל גיגרנצר), אנחנו מאמצים את הגישה שטוענת שאלו הן "שגיאות טובות", כלומר הן תוצאה הכרחית של מערכת אינטליגנטית שהוכשלה על ידי תנאים לא אופייניים. בכך התופעה דומה לזו של האשליות האופטיות, ומכאן הכינוי "אשליות קוגניטיביות" או "מלכודות אינטואיציה". בהתאם לכך אנחנו מאמינים שהאינטואיציות שמייצרות את השגיאות הנ"ל נובעות ממקורות טובים ואין צורך (וגם מחקרים מראים שאין אפשרות) לסלק אותן או להחליף אותן. באנלוגיה לתכנות (כאמור, בעקבות פיאז'ה ופאפרט), כאשר מתגלים "באגים" באינטואיציות, אנחנו לא מסלקים אותן אלא עורכים דיבאג'ינג – שיפורים ותיקונים הדרגתיים עד שהאינטואיציה המתוקנת תביא לתשובות נורמטיביות. לצורך זה פיתחנו שיטות גישור שיכולות להביא את הלומד לתת תשובות שהן גם נכונות וגם אינטואיטיביות עבורו (כלומר מרגישות טבעיות ו"שייכות" לו).

איך ליישם בהוראה בשטח את תאוריית "השגיאות הטובות"? ובמילים אחרות, אם אנחנו מאמינים שהאינטואיציה האנושית היא דבר טוב, איך ניישם אמונה זו בהוראה בשטח, בהתחשב בכך שהאינטואיציה לעיתים קרובות גורמת לשגיאות מתמטיות?

יש דרכים רבות ושונות לענות על שאלה זו, וכאן אביא תיאור סכמתי וקצר של אחת האפשרויות. (בתיאור שלהלן חלק מהפיתוחים הנדרשים הם ברמת המורה וחלק ברמה של צוותים של מפתחי תוכניות לימודים וחומרי למידה).

ראשית, אם בכוונתכם ללמד מושג מתמטי מסוים, חפשו תחילה את הבסיס האינטואיטיבי לאותו נושא. אם הצלחתם, יש לכם גרסה ראשונית "הוגנת" של המושג, גם אם קצת פשטנית ולא לגמרי מדויקת, שתתקבל באופן טבעי על ידי ההיגיון הישר היום-יומי של כמעט כל התלמידים. שנית, במקום לחשוב על איך להסביר את המושג, חישובו על פעילות (עם מחשב או בלעדיו) שתגרום לתלמידים להתנסות בצורה פעילה וחויינית עם מושג זה, ועם הקשריו ותוצאותיו. שלישית, ערכו שיחה קבוצתית שתעודד רפלקציה על הפעילות שחווי התלמידים. במקרים המוצלחים במיוחד, התלמידים יגיעו בכוחות עצמם, דרך השיחה המונחה, לתובנות שאתם (המורים) ממילא רציתם להנחיל להם. במקרים אלו תוכל "להעביר את החומר" המתוכנן פשוט כסיכום מסודר של ההתנסות שלהם ושל הרפלקציה שנערכה בעקבותיה. במקרים אחרים (במטלות מהסוג של "מלכודות אינטואיציה"), התלמידים יכולים להגיע למסקנות מוטעות, ואז המורה יכול לעזור להם ליצור גישור בין הפתרון האינטואיטיבי והפתרון הנורמטיבי. זהו צעד לא פשוט, והדרכים לכך מפורטות במאמרים המצורפים.

ולבסוף אזהרה: הוראה מבוססת אינטואיציה, ומעבר הדרגתי מהאינטואיציה לפורמליזם מהסוג המתואר לעיל, דורשת אינטראקציה הדוקה עם התלמידים, ואלתור מתמיד של איך להמשיך בכל שלב, המתבסס על מה שעולה מהתלמידים, כולל ניצול הטובה של מצבים מפתיעים ובלתי צפויים. סוג הוראה כזה דורש מיומנויות מתמטיות ופדגוגיות מיוחדות שלא תמיד נלמדות במסגרת הכשרת המורים הסטנדרטית.

מחשבות על מערכת החינוך

תובנות רבות על מערכת החינוך בישראל רכש אורי בשנים שבהן עמד בראש מנהלת "מחר 98" (מה שהיה ידוע גם בשם דו"ח הררי). שולמית אלוני, עם כניסתה לתפקיד שרת החינוך, כינסה אנשי חינוך מובילים מרחבי הארץ כדי לשמוע רעיונות שיש להם לקידום מערכת החינוך. במהלך הפגישה אמר אורי שבפגישה הועלו הרבה רעיונות טובים ויפים, אבל זה לא ממש משנה, כי בסוף, בשלב היישום, משרד החינוך בלאו הכי יקלקל אותם. כנראה הערה זו, בשילוב נטויותיה של השרה, שהייתה אופוזיציונרית בטבעה, גרמו לה להזמין אותו למשרדה ולהציע לו לעמוד בראש המנהלת.

אורי מעיד על עצמו כי לאחר השנתיים שעבד בהן במשרד החינוך הוא יצא עם יותר ידע ותובנות על משרד החינוך וכיצד עובדת מערכת החינוך בארץ. לצערו, ואולי גם לצערנו, תובנות רבות לא היו משמחות. כפי שאפשר להבין יש לו הרבה ביקורת על מערכת החינוך ועל משרד החינוך. הביקורת שלו איננה על המורים או התלמידים. נהפוך הוא, לדעתו המורים והתלמידים הם בעצם הקורבנות של מערכת החינוך הזו, והם פועלים ככל יכולתם כדי "לשרוד" במערכת הזו, אבל לימוד המתמטיקה (מנקודת ראות של הבנת המתמטיקה ואהבתה) יוצא ניזוק. מה שכן, הוא מלא הערצה לאותם מורים שבתנאים הקשים הללו מצליחים בכל זאת לשאוב את הכוחות ולגלות מידה של יצירתיות. הוא טוען כי מערכת החינוך בעיקרה לא עוצבה רק משיקולים פדגוגיים ולטובת הילד, אלא במידה רבה משיקולים פוליטיים וסוציולוגיים, וכמו שהוא רואה את הדברים, לרוב מערכות החינוך בארץ ובעולם יש שתי מטרות עיקריות (לא מוצהרות): הראשונה לשמש כבייביסיטר של המדינה כדי שאנשים יוכלו לצאת לעבוד, והשנייה להכין מסות של תלמידים לבחינות הבגרות, ובשני האילוצים האלו קשה להשיג למידה מהותית של מתמטיקה. מסיבה זו גם שינויים ניכרים בדרכי הלמידה מתרחשים בעיקר בכיתות הנמוכות.

להעמקה נוספת, מצורפים כאן לינקים לארבעה מאמרים העוסקים בנושאים הנדונים בסקירה זו: (1) הוכחות מובנות; (2) הוכחות גנריות; (3) פרספקטיבות פסיכולוגיות על שגיאות נפוצות במתמטיקה; (4) דרכי גישור על הפער בין החשיבה האינטואיטיבית לאנליטית.

(המאמרים מס' 2 ו-3, לאחר שהתפרסמו כרגיל בכתבי עת מחקריים, נבחרו להיכלל בכרכים השנתיים של הוצאת אוניברסיטת פרינסטון "The best writing on mathematics" מהשנים 2014 ו-2010, בהתאמה).

לקריאת המאמרים יש להיכנס לדף הבית של פרופ' אורי לירון – הפקולטה לחינוך מדעי וטכנולוגי, הטכניון, חיפה: <http://edu.faculty-ms.technion.ac.il/members/uri-leron>

(יש לגלול לתחתית הדף וללחוץ על הכפתור Selected Publications).

הוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה וסביבת למידה מעצימה כממדים משמעותיים בידע הפדגוגי של מורי מתמטיקה¹

גלית שבתאי



ד"ר גלית שבתאי

בוגרת אוניברסיטת בר אילן. מחקרה עסק בניתוח סיטואציות פדגוגיות מכיית המתמטיקה בדגש על SRL. בעברה המקצועי שימשה מורה למתמטיקה, מדריכת מורים ומדריכה מחוזית במחוז תל אביב. כיום מרצה במכללת סמינר הקיבוצים.

פוסט-דוקטורנטית בפקולטה לחינוך, מדע וטכנולוגיה בטכניון. מחקרה עוסק בקשר בין זהות מורים למתמטיקה, הנרטיבים שלהם באשר להוראת מתמטיקה ולשיח המתמטי שלהם.

תקציר

הכוונה עצמית בלמידה (Self Regulated Learning) היא רכיב חשוב בידע הפדגוגי של מורים. רכיב זה מועצם בכיתה באמצעות אסטרטגיות מפורשות של SRL וזימון סביבת למידה מעצימה. במחקר זה נבדקה ההשפעה של פיתוח פדגוגי (PD) המשלב ניתוח סיטואציות פדגוגיות מצולמות עם דגש בהכוונה עצמית בלמידה (SRL) על ההוראה של מורים למתמטיקה בפועל. אוכלוסיית המחקר כללה 167 מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים שחולקו לארבע קבוצות, וכל אחת מהן קיבלה הכוונה לרכיבים שונים של SRL. במהלך ההתערבות ניתחו המורים צילומי שיעור ועסקו במרכיבי הכוונה העצמית בלמידה שהמורה זימן לכיתתו בהתאם לקבוצת המחקר שהשתייכו אליה. ההתערבות כללה כתיבת מהלכי שיעור, ניתוח שיעורים בדגש על SRL, ניתוח שיעורים אישיים וריאיון אישי עם המורים שהתנדבו למסור את צילומי השיעורים שלהם לטובת המחקר. הממצאים מעידים על הבדלים בין הקבוצות ועל חשיבות הניתוח של כל אסטרטגיות SRL. כמו כן התגלו פערים בין הידע המוצהר של המורים כפי שמשקף בראיונות ובמערכי השיעור שנבנו ובין ההוראה שלהם בפועל.

מילות מפתח: פיתוח פדגוגי של מורים למתמטיקה; הכוונה עצמית בלמידה; סביבת למידה מעצימה; הוראה מפורשת של אסטרטגיות SRL.

רקע תאורטי

א. הכוונה עצמית בלמידה

הכוונה עצמית בלמידה (SRL) נוגעת ליכולתו של הלומד להיות מודע למחשבותיו, לרגשותיו ולהתנהגותו במהלך הלמידה, וכן ליכולת שלו לפקח עליהן ולנהל אותן (מיכלסקי וקרמרסקי, 2008; Zimmerman & Schunk, 2001; Boekaerts, 1999, 2010).

1. מאמר זה הוא תוצר מתוך עבודת הדוקטורט שבוצעה באוניברסיטת בר אילן. ברצוני להוקיר תודה לשתי המנחות היקרות שזכיתי לעבוד במחיצתן: ד"ר טובה מיכלסקי ופרופ' זמירה מברך. תודה רבה על הנחייה צמודה ומועילה ועל ליווי והובלה גם בימים מאתגרים.

ב. ידע פדגוגי

מאז שולמן (Shulman, 1986) טבע את המושג ידע פדגוגי והגדירו, אנשי חינוך רבים חקרו ועיבדו את הנושא (Grossman, 1992; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Park & Oliver, 2008). ממצאיהם מובילים למסקנה שאפשר לפתח את הידע הפדגוגי בתהליך של למידה מתמדת מניסיון אישי המשלב והנשען על עוגן תאורטי (Ball & Cohen, 1999; Darling-Hammond, 2000; Grossman, 1992; Kennedy, 2006). ממצאים אלו מעלים שצריך להעצים מורים בסוגיות של דרכי הוראה כדי שהם יפתחו ידע פדגוגי מתמטי נדרש בהוראת מתמטיקה בכלל ובבית הספר היסודיים בפרט.

כדי שההוראה תהיה טובה יותר נדרשים, לדעת בול וכהן (Ball & Cohen, 1999), לפחות שלושה תנאים: 1. על המורים לאמוד את הסיטואציה בכל רגע נתון. עליהם לדעת כיצד להגיב על מה שהתלמידים עושים או חושבים וכיצד הובנה ההוראה; 2. עליהם ללמוד להשתמש בידע הזה כדי לשפר את פעולותיהם בכיתה; 3. על המורים ללמוד כיצד לפעול במומחיות בתגובה לתלמידים ולסיטואציות. קנדי (Kennedy, 2006) טוענת כי ההוראה דורשת מהמורה להפעיל שיקול דעת סימולטני בזמן אמת ולבחון חלופות כדי להגיב על דרישות המגוונות של הלומדים ועל השינויים. גם שולמן (Shulman, 2004) מדגיש כי מורה צריך לדעת להתמודד עם אי הוודאות ולענות על סיטואציות שאינן צפויות. הוא מכנה את יכולת ההתמודדות של המורה עם אי הוודאות: "פדגוגיה של חוסר ודאות" (Pedagogies of Uncertainty). מכאן, הרבה ממה שעל המורים ללמוד חייב להילמד בהקשר לסיטואציה נתונה ולרגע נתון, שכן על המורה להחליט ולהגיב בשעת עשייה.

המיומנות הזו שנדרשת מהמורה הובילה לאחרונה למחקר נרחב העוסק בפיתוח ידע פדגוגי מצילומי שיעורים מוקלטים בווידאו ומניתוחם (Blomberg, Stürmer, & Seidel, 2011; Borko, 2011; Koellner, & Jacobs, 2014; Santagata & Guarino, 2011). מחקרים אלו מעידים כי מניתוח הסיטואציות הפדגוגיות המצולמות השתפר הידע הפדגוגי של המורים: המורים הצליחו לזהות צומתי הכרעה חשובים בשיעור, לנתחם ולהבין כיצד לימדו, וכן הם זיהו חלופות אפשריות שבעזרתן הצליחו לקדם את תהליכי הלמידה בכיתה. פיתוח מקצועי מסוג זה הולך ומתרחב במשך השנים האחרונות (Lamov, 2010; Robinson & Leikin, 2012), אך למרות הספרות הענפה העוסקת בפדגוגיה של הוראת האסטרטגיות (Dignath & Büttner, 2008) ובסביבת הלמידה המעצימה הכוונה עצמית בלמידה (De Corte, Verschaffel, & Masui, 2004), עדיין יש צורך בעדויות מחקריות המנתחות סיטואציות פדגוגיות מצולמות כדי לקדם ידע פדגוגי המטפח לומדים להכוונה עצמית בלמידה.

א. ידע פדגוגי בטיפוח הכוונה עצמית בלמידה

המורה יכול לטפח הכוונה עצמית בלמידה בהוראה ישירה ועקיפה. הוראה ישירה כוללת אמירות מפורשות הנוגעות לאסטרטגיות הקוגניטיביות, המטה-קוגניטיביות והמוטיבציוניות הנעשות בתהליך הלמידה. הוראה עקיפה מזמנת סביבת למידה מעצימה המאפשרת הכוונה עצמית בלמידה.

הוראה ישירה של אסטרטגיות SRL

הוראה ישירה של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה היא מרכיב ראשון וישיר שתוארו קישטנר ועמיתיהם (Kistner et al., 2010) בתהליך הנעשה בשתי דרכים:

בפירוט השלבים של הכוונה עצמית בלמידה, החוקרות מיכלסקי וקרמרסקי (2008) מכוונות לארבעה שלבים: להצבת מטרות, לתכנון, לפיקוח ולהערכה. מהשלבים אפשר להבין כי תהליכי ההכוונה העצמית בלמידה כוללים אסטרטגיות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות, יוצרים אצל הלומדים מוטיבציה שבעזרתה הם מפקחים על העבודה, מעריכים אותה ומתקדמים בה על פי ההקשר הנלמד וסביבת הלמידה (Schraw, 2006). כל תחום של אסטרטגיות נוגע ללמידה מזווית אחרת, וביחד הם יוצרים מארג הוליסטי הנדרש בהכוונה העצמית בלמידה (Greene & Azevedo, 2007; Mevarech & Kramarski, 2014; Zimmerman, 2000). זה של שלבים בהכוונה עצמית בלמידה מחייב אותנו לדון בתחומים מסוימים שבהם עוסקת ההכוונה העצמית בלמידה:

א. במונחים של **קוגניציה**, לומדים בעלי מכוונות עצמית גבוהה מפעילים ביעילות אסטרטגיות, כמו הרחבה (שבה הם מקשרים את הידע החדש לידע שנלמד קודם לכן), ארגון ומיזוג מידע, תכנון, הצבת יעדים, שימוש בידע קודם, פתרון בעיות, הסקת מסקנות והשוואות (מיכלסקי וקרמרסקי, 2008).

ב. במונחים של **מטה-קוגניציה**, לומדים בעלי מכוונות עצמית גבוהה מפעילים ביעילות אסטרטגיות שבעזרתן הם מבקרים את עצמם ומעריכים את הידע. האסטרטגיות המטה-קוגניטיביות מופעלות בכל שלב בלמידה, ולכן הלומדים מודעים ללמידתם ומחליטים החלטות נכונות באשר ללמידה שלהם (Mevarech & Kramarski, 2003; Mevarech & Kramarski, 2014; Zohar & Dori, 2012).

ג. במונחים של **מוטיבציה**, לומדים בעלי מכוונות עצמית גבוהה מאמינים ביכולות שלהם ללמוד ומדווחים על עניין במשימות שלפניהם, גם כשהם נתקלים בקשיים. המוטיבציה הכרחית ללומדים מכיוון שהיא מאפשרת להם להמשיך ולהתקדם גם כשהמשימה מורכבת ומאתגרת וגם כשהיא אינה עיקר עניינם (מיכלסקי וקרמרסקי, 2008; Pintrich, 2004).

ד. במונחים של **קונטקסט**, לומדים בעלי מכוונות עצמית גבוהה מווסתים את התנהגותם על פי ההקשר, **הסביבה ומצבי הלמידה**.

ה. **בסביבות למידה** למיניהן תלמידים בעלי מכוונות עצמית גבוהה בוחרים מידע מתאים ומחפשים מקורות איכותיים ויעילים שיסייעו להם בתהליך הלמידה.

כדי שהלומדים יישמו את כל האסטרטגיות השונות עליהם לדעת "מתי" ליישם ו"מדוע" הם מיישמים את האסטרטגיות האלה (Koichu, Berman, & Moore, 2007; Zimmerman & Schunk, 2001). מאחר שלא כל האסטרטגיות מתאימות לכל המצבים, התלמיד חייב לפתח יכולת או מיומנות שתסייע לו לקבוע באילו מצבים ומשימות בלמידה עליו להשתמש באסטרטגיות למיניהן. יכולת זו הנקראת הכוונה עצמית בלמידה, תסייע לו להבין מדוע השתמש באסטרטגיה זו וכיצד היא גרמה לו להגיע לפתרון ביעילות רבה יותר כדי שיוכל להפעילה במצבים חדשים בעתיד.

כדי לחנך לומדים להכוונה עצמית בלמידה יש לצייד את המורים, שהם סוכני השינוי, בידע פדגוגי שיסייע להם לטפח לומדים להכוונה עצמית בלמידה. כל עוד אין למורה הכלים והמודלים המעשיים המתאימים לפיתוח לומדים בעלי הכוונה עצמית בלמידה, הוא יתקשה לעשות זאת בפועל, ולכן אופי הפיתוח הפדגוגי של המורים והכשרת פרחי ההוראה חייבים להשתנות (מיכלסקי וקרמרסקי, Dignath, Büttner, & Langfeldt, 2008; Kistner et al., 2010).

הבניית ידע בתהליך פעיל, עצמאי, שיתופי, כך שהלומדים עוסקים בהקשר רלוונטי (Masui & De Corte, 2005).

מסקירה זו עולה כי ידע פדגוגי-תוכני של מורים משפיע על דרכי הוראתם (Grossman, 1992; Hill et al., 2005; Loughran, 2008; Berry, & Mulhall, 2012; Park & Oliver, 2008). נשאלת השאלה מהן דרכי ההכשרה המתאימות כדי לטפח ידע פדגוגי של מורים למתמטיקה ולעצב את תהליכי ההוראה שלהם ברוח הסטנדרטים החדשים המדגישים הבניית ידע מתמטי וטיפוח הכוונה עצמית בלמידה?

מכאן עולה הסוגיה המרכזית המובילה את המחקר: כיצד אפשר לפתח את הידע הפדגוגי (PCK) המדגיש את ההכוונה העצמית בלמידה בקרב מורים למתמטיקה באמצעות ניתוח צילומי שיעורים, כך שהם יטפחו הכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידיהם? בנושא הזה התחבטו חוקרים רבים בעבר, אך הם לא העלו ממצאים חד-משמעיים (Butler & Winne, 1995; Corno & Randi, 1999; Dignath & Büttner, 2010; Randi, 2004).

מטרת המחקר

מטרת המחקר היא לבחון את ההשפעה של פיתוח פדגוגי העוסק בניתוח סיטואציות פדגוגיות מצולמות בדגש על הכוונה עצמית בלמידה על מורי מתמטיקה בבית הספר היסודי.

הליך המחקר

המודל מציע מארג המשלב פיתוח ידע פדגוגי של מורים (PCK) והמדגיש את ההכוונה העצמית בהוראת אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה ישירה ואת זו העקיפה הנעשית בארגון סביבת למידה מעצימה. המחקר המוצג שילב שיטות מחקר כמותיות ואיכותיות.

הפן הכמותי אפשר לבחון את השינוי בניתוח השיעורים ובתכנונם המשקף את הידע הפדגוגי-תוכני של המורים המתנסים בטיפוח הוראה המעצימה הכוונה עצמית בלמידה. הפן האיכותני אפשר לנתח את השיעורים שלמדו המורים בפועל ולבחון את מידת ההוראה המפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה ואת סביבת הלמידה שזימנו המורים בכיתתם. מרכיב זה במחקר אפשר גם לראות את המורים המלמדים, ולכן הוא מאיר את שיקולי הדעת של המורים בתכנון השיעור, בצומתי ההכרעה שלהם במהלך השיעור, את ההתלבטויות שלהם בשיעור ואת תהליכי הרפלקציה שנעשו לאחר ההוראה.

הפיתוח הפדגוגי נתמך בשתי מסגרות תאורטיות העוסקות בניתוח שיעור. המסגרת של סנטגטה וגוארינו (Santagata & Guarino, 2011) שנבנתה לפרחי הוראה מתאימה רק בחלקה למחקר זה, ולכן כדי לנתח את השיעורים גם בהיבט של ההכוונה העצמית בלמידה, התבסס ניתוח השיעורים על המסגרת לניתוח שיעור שיצרו דיגנאט ועמיתיה (Dignath & Büttner, 2008; Dignath et al., 2010; Kistner et al., 2008).

במשך ההתערבות ניתחו המורים שלושה צילומי שיעור מלאים (שאינם שייכים לאף אחד מהמשתתפים בהשתלמות). ניתוח השיעורים נעשה בעת פיתוח

הדרך הראשונה היא הוראה מרומזת (Implicit). הוראה זו מתרחשת כשהמורה משתמש או מאפשר להשתמש באסטרטגיה של הכוונה עצמית בכיתתו בלי שהוא משיימה במפורש ובלי שהוא מזכיר את היעילות והרווח הנעוצים בה. סוג אחר להוראה מרומזת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה היא הוראה על ידי חיקוי. מורים רבים מצפים שהתלמידים יחקו את הפתרון שלהם או פתרון שתלמידים אחרים מציעים בבעיה אחת לפתור כפי שפתרו בבעיה אחרת מאותו סוג. כך הם מחמיצים את ההזדמנות הנעוצה בשיח על האסטרטגיות ויעילותן. שיח כזה יגרום לתלמיד להשתמש באסטרטגיות אלו לא רק כדי לפתור בעיות מאותו סוג, אלא לעשות העברה לפתרונות של משימות בהקשרים ומסוגים מגוונים.

הדרך השנייה היא הוראה מפורשת (Explicit) של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה. כלומר, מורה יכול להדגים בישירות ובמפורש את האסטרטגיות להכוונה עצמית, לציין לפני תלמידיו שאסטרטגיה זו יעילה ושהיא תשפר את הביצועים שלהם, כך שהלומדים מקבלים מידע על משמעות האסטרטגיה וחשיבותה. דוגמה לכך היא מורה המזמין לתלמידיו משימה עם נתונים רבים. לאחר שהתלמידים מציעים כמה אסטרטגיות לפתרון, המורה מדגיש את ארגון הנתונים בדרך שתקל עליהם. השיח על ארגון הנתונים בדרך זו או אחרת ושיום האסטרטגיה חשוב מאוד לתלמידים בכל משימה שיפתרו אותה ולא דווקא במשימה זו, ולכן העברה של האסטרטגיה תתאפשר אם המורה ידון בה וברוחים הנובעים מהשימוש בה. על המורה לעסוק בארגון הנתונים בטבלה (לדוגמה) ולדון עם תלמידיו על כך שהטבלה היא כלי יעיל וחשוב בפתרון משימות מתמטיות המאפשר לפתור משימות מורכבות בשיטתיות. תלמידים המתנסים בשימוש באסטרטגיה זו בבית הספר היסודי, בהקשרים למיניהם ובמשימות מגוונות, יוכלו להשתמש בקלות באסטרטגיה הזו כשיפתרו בעיות מורכבות בהמשך דרכם האקדמית.

ממחקרן של קישטנר ועמיתיה (Kistner et al., 2010) עולה כי הוראה מרומזת יעילה פחות במצבים של הכללה והפשטה, ואילו הוראה מפורשת גורמת להכללה ותורמת רבות ליכולת ההעברה (Transfer) של האסטרטגיה שנלמדה בבעיה אחרת. למרות היתרונות הרבים בהוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה, מחקרים עדכניים מראים כי בפועל מעט מאוד מורים מבצעים הוראה ישירה של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה (Dignath & Büttner, 2008). זאת מכיוון שלמורים חסר ידע מקצועי ומודל שיסייע להם להציג אסטרטגיות אלו במפורש. רוב המורים מלמדים את התוכן המתמטי הנדרש על פי תכנית הלימודים, ולכמה מהם אף ידע פדגוגי רחב, אך הוראתם מאופיינת באסטרטגיות מרומזות שתורמתן, כאמור, פחותה (Corno & Randi, 1999; Dignath & Büttner, 2008; Kistner et al., 2010; Randi, 2004).

הוראה עקיפה של SRL

כמו כן אפשר לעצב ולפתח את השימוש באסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה באמצעות השתתפות בסביבות למידה פעילה המספקות ללומדים הזדמנויות לשלוט על למידתם ולעסוק בפעילות המערבת יחסי גומלין ורפלקציה על עבודתם (Michalsky, 2012; Schraw, 2006).

סביבות אלו מאופיינות בארבעת המרכיבים האלה: (א) פעילות הלומד ויחסי גומלין בין הלומד לסביבתו; (ב) למידה עצמית; (ג) הבניית הלמידה – קשר בין הנושא הנלמד למרכיבי הידע הקודמים; (ד) רלוונטיות לחיי היומיום וקשר בין הנושאים הנלמדים. סביבות מעצימות המבוססות על הגישה הקונסטרוקטיביסטית מזמנות

מורים מנוסים (Santagata & Guarino, 2011). הוא גם משלב מגוון אלמנטים (לומדים ולמידה, הנושא הנלמד, הערכה והוראה) ונתמך במה שכינה דיוויס (Davis, 2006) "רפלקציה פרודוקטיבית" (Productive Reflection).

לבסוף ניתחו המורים את ההשפעה והקשרים שבין ההוראה של המורה ללמידה של התלמידים. דיון זה הוביל לשאלות האלה: באילו חלופות המורה היה יכול להשתמש? באילו אסטרטגיות של הכוונה עצמית בלמידה הוא היה יכול להשתמש? כיצד אתם מצפים שאסטרטגיה חלופית זו שאתם מציעים תשפיע על הלמידה של התלמידים ותוביל אותם למטרות השיעור? אילו מרכיבים בסביבת הלמידה היה צריך להעשיר? כיצד מרכיבים אלו יסייעו ללומדים להיות מכוונים עצמית בלמידתם?

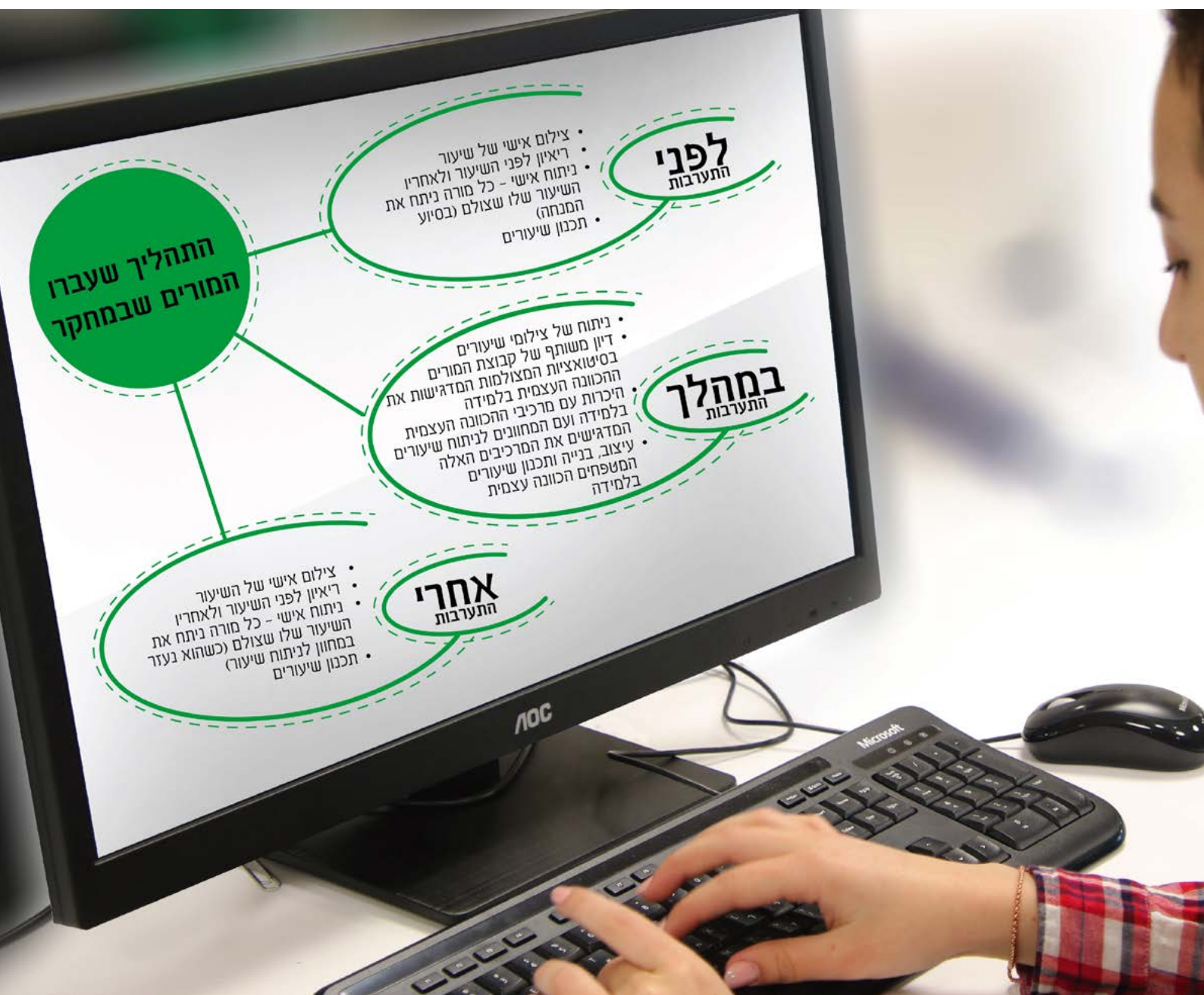
הדיון בחלופה בהוראה חשוב מכיוון שהוא אלמנט המקשר בין הרפלקציה על הפרקטיקה לפעילות על הפרקטיקה (van Es & Sherin, 2002; Santagata & Guarino, 2011). שלב זה מאתגר חלק מן המורים, הוא חשוב מאוד מאחר שהוא מפתח בהם הרגלים של שיקולים חלופיים בהוראה. מחקרם של קרסטינג, גיבין, סוטלו וסטיגלר (Kersting, Givvin, Sotelo, & Stigler, 2010) מצא כי מורים שנחשבו למורים מוצלחים הציעו אסטרטגיות חלופיות בהוראה לעומת מורים שלא הצליחו להציע חלופות.

פדגוגי של מורים (בהשתלמות) שארך 30 שעות (10 מפגשים כשכל מפגש נמשך 3 שעות). למורים ניתנו עוד 30 שעות וירטואליות שבהן ניתחו בביתם שיעורים מצולמים שלהם. הדיון על השיעורים שלהם נעשה אישית עם מנחת ההשתלמות והתמקד בנקודות שבהן ניתן דגש בקבוצת ההתערבות.

ניתוח השיעורים הדגיש את ההוראה בכיתה, והוא התבסס על דיוני המורים שבהשתלמות. המורים התבקשו לנתח את המטרות של השיעור, ונשאלו מהם הרעיונות המתמטיים שהלומדים היו צריכים להבין בשיעור. הם ניתחו את הלמידה של התלמידים בעת שהם שמים לב לשאלות האלה: האם הלומדים התקדמו לעבר המטרות? אילו עדויות יש לנו לכך? אילו עדויות קיימות בסרט לכך שהתלמיד לא התקדם לעבר המטרות? אילו עדויות אנו מחמיצים?

הניתוח שעסק בהבנה של התלמידים גרם למורים לשאול עוד שאלות, כמו איזו אסטרטגיית הוראה תומכת בהתקדמות של התלמיד לעבר המטרות ואיזו אסטרטגיה אינה תומכת בו? לכן התקיים דיון על החשיבות של טיפוח לומד מכוון עצמית ללמידה, וכיצד המורה היה יכול לתמוך בלומדים ולהובילם למכוונות עצמית. כמו כן, הדיונים עסקו בסביבת הלמידה, ולכן נשאלה השאלה כיצד סביבת הלמידה קידמה את הלומד בעבודתו או עיכבה אותו. סוג זה של ניתוח ומתן הצדקות על ההוראה והלמידה הוא טיפוסי ומאפיין

תרשים מספר 1: התהליך שעברו המורים שבמחקר



- תכנון שיעורים (כמותי)
- הוראה בפועל: א. אסטרטגיות SRL; ב. ארגון סביבת הלמידה (איכותני)
- ריאיון אישי לפני השיעור המצולם ולאחריו (איכותני)

הידע הפדגוגי כפי שהתבטא בתכנון השיעורים שכתבו המורים

המורים התבקשו לתכנן שיעור על פי תבנית רשמית לכתיבת מערכי שיעור הלקוחה מאתר מפמ"ר מתמטיקה (משרד החינוך, 2012) והנהוגה בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. תבנית זו מתבססת על מחקר מקיף בתחום (Isoda et al., 2007). התבנית משרתת את אוכלוסיית המורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ומבוססת על מודל שפרסם משרד החינוך (2012) באתר המפמ"ר באותה שנה, העוסק במתודה של פתרון בעיות כבסיס לתכנון שיעורים. תכנוני השיעור הוערכו באמצעות מחוון שפותח ואפשר דיון בסעיפי התבנית שניתנו למורים.

הידע הפדגוגי של המורים כפי שהתבטא בהוראה בפועל

כפי שיוסבר בהליך המחקר, המורים הוסרטו כשהם מלמדים בכיתתם. המורות הן אלה שהתנדבו להיות מצולמות, כ-10 מורות מכל קבוצה. צילומי השיעורים אפשרו לבחון את שני המרכיבים של הכוונה עצמית בלמידה: את השימוש של המורה באסטרטגיות ההכוונה העצמית (הנעשה במפורש ובמרומו) ואת הסביבה הלימודית שמזמן המורה לכיתתו.

מאחר שבשלב הזה של המחקר היה צריך לוודא כי ניתוח הסרטים נעשה בדרך מתודית, מהימנה ועקבית, בהתחלה שתי מומחיות תוכן העריכו יחד את הסרטים ורק לאחר שהגיעו להסכמות בהערכת ארבעה סרטים משותפים, הן העריכו לבדן את הסרטים. לאחר שההערכות נאספו, הן החליפו ביניהן את ההערכות וניגשו להעריך מחדש את התצפיות שהעריכה העמיתה. בשלב זה, במקרה של אי הלימה, דנו השניים באשר לכל סתירה בציינו עד שהגיעו להסכמה.

הידע הפדגוגי של המורים כפי שהתבטא בראיונות

מכיוון שהמורים צולמו פעמיים, לפני ההתערבות ולאחריה, הם רואיינו ארבע פעמים. המורים רואיינו כדי לבחון את עמדותיהם באשר לסוגיות החשובות למחקר: לפני השיעור היא בחנה יחד איתם סוגיות הקשורות לתכנון השיעור, ולאחר שלימדו את השיעור היא בחנה את הסוגיות העוסקות בביצוע השיעור, הרפלקציה על השיעור, סביבת הלמידה שזימנו המורים לתלמידים במשך השיעור והעצמת הכוונה העצמית בקרב התלמידים. הריאיון היה מובנה ונשאלו בו שאלות שנלקחו מרשימה סדורה הנוגעות למטרות השיעור וללמידת התלמידים. מכיוון שלפני ההתערבות נעשו שני ראיונות (לפני הוראת השיעור המצולם ולאחריו), וגם לאחר ההתערבות נעשו שני ראיונות, אוחדו הראיונות של ה-Pre Test למקשה אחת, והם הושוו לראיונות של ה-Post Test. השוואה זו מאפשרת לבחון את ההבדלים בידע הפדגוגי של המורה לפני ההתערבות לעומת הידע הפדגוגי שלו לאחריה.

הראיונות הוקלטו (אודיו) ותוכתבו. הערכות תשובות המורים נעשו עם מומחית תוכן כדי לשמור על הערכה עקבית ומהימנה. תשובות המורים לריאיון הוערכו על פי מחוון שפיתחו פארק, ג'אנג, חן וג'אנג (Park, Jang, Chen, & Jung, 2011). הם פיתחו את הכלי כדי לנתח את השיקולים הפדגוגיים של המורים ולהעריך את הידע הפדגוגי שלהם שנע סביב שני צירים עיקריים:

א. ידע העוסק בהבנה של התלמיד באשר לנושא ולמושגים המתמטיים שנלמדו (KSU – Knowledge of Student Understanding).

הצפייה המשותפת בסרטים גרמה למורים לדון בנושאים המתמטיים, הפדגוגיים וכמו כן באסטרטגיות להעצמת התלמידים כלומדים עצמאיים. השיעורים נותחו על פי אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה וגם מתוך עיון בסביבת הלמידה. להלן תיאור חזותי של המחקר:

השיטה

במחקר השתתפו 167 מורים בעלי השכלה מתמטית הנדרשת להוראת המקצוע בבית הספר היסודי. המורים עברו אימון שבו ניתחו סיטואציות פדגוגיות מצולמות, כשכל הקבוצות ניתחו את סביבות הלמידה שבהן צפו בשיעורים מצולמים זהים. כמו כן, כל קבוצה ניתחה את אותם השיעורים עם התערבות שונה שהדגישה את הצפייה בשיעור:

1. קבוצה אחת (א) ביקורת – השתלמות מסורתית, ללא דגש ב-SRL.
 2. קבוצה שנייה (ב) התמקדה בידע תוכני, בידע פדגוגי, בידע קוריקולרי ובהוראה מפורשת של אסטרטגיות מוטיבציוניות (PCK+Mo).
 3. קבוצה שלישית (ג) התמקדה בידע תוכני, בידע פדגוגי, בידע קוריקולרי ובהוראה מפורשת של אסטרטגיות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות (PCK+CoMe).
 4. קבוצה רביעית (ד) התמקדה בידע תוכני, בידע פדגוגי, בידע קוריקולרי ובהוראה מפורשת של אסטרטגיות קוגניטיביות, מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות בהכוונה עצמית בלמידה (PCK+CoMeMo, כלומר PCK+SRL).
- הרציונל שמאחורי חלוקה זו של הקבוצות צמח מהשאלה: איזו התערבות תיצור את ההשפעה המהותית ביותר על ההוראה בפועל, על תכנון ההוראה, על ניתוח סיטואציות פדגוגיות ועל תפיסותיהם של המורים?

מחקרים בתחום שניתחו שיעורים מצאו כי ההוראה של אסטרטגיות SRL לרוב מוחמצות (Dignath & Büttner, 2008). מחקרים אחרים עסקו בחשיבות שיש להוראה מפורשת של SRL על היכולת של התלמידים לעשות העברה של אסטרטגיה מנושא מסוים לנושא אחר ובחשיבות של המורה כמתווך ומדגים שימוש באסטרטגיות SRL בהקשר לימודי ספציפי (Kistner et al., 2010). מחקרים אלו לא ניסו להבחין בין האסטרטגיות הקוגניטיביות, המטה-קוגניטיביות ובין האסטרטגיות המוטיבציוניות, והם לא בחנו את ההשפעה הדיפרנציאלית של כל אחת מהאסטרטגיות על הידע הפדגוגי של המורים וההוראה שלהם בפועל. השפעה אחרת של המחקר כרוכה באופי השינוי שיתקבל בקבוצת הביקורת שתקבל התערבות דומה שבה ניתחו סיטואציות פדגוגיות מצולמות אך ללא דגש בהכוונה עצמית בלמידה.

שאלות המחקר

1. אילו הבדלים יימצאו בסוג ובכמות אסטרטגיות ההכוונה העצמית (קוגניטיביות, מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות) ובדרך ההוראה (Explicit/Implicit) של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה בקרב המורים מארבע קבוצות המחקר?
2. אילו הבדלים יימצאו בסביבת הלמידה של המורים כפי שמתבטא בראיונות, בסרטי השיעורים ובכתיבת מערכי שיעור?

כלי המחקר

הידע הפדגוגי-תוכני של מורים נבחן במגוון רחב של היבטים הכוללים:

ממצאים

שאלת מחקר מספר 1: הוראה מפורשת של אסטרטגיות SRL

א. בחינת סוגי הביטויים של אסטרטגיות הכוונה עצמית בהוראה בפועל

טבלה מספר 1: טבלה המרכזת את ההבדלים שבין סוגי הביטויים של האסטרטגיות בפילוח לסוג האסטרטגיה ולקבוצת מחקר כפי שהוערכו בסרטי הווידאו

קבוצת מחקר	סוג האסטרטגיה	לפני	אחרי
1	קוגניציה	מפורש > מרומז	-
	מטה-קוגניציה	מפורש > מרומז	מפורש > מרומז
	מוטיבציה	-	-
2	קוגניציה	מפורש > מרומז	-
	מטה-קוגניציה	מפורש > מרומז	-
	מוטיבציה	-	מפורש < מרומז
3	קוגניציה	-	מפורש < מרומז
	מטה-קוגניציה	מפורש > מרומז	מפורש < מרומז
	מוטיבציה	-	-
4	קוגניציה	-	מפורש < מרומז
	מטה-קוגניציה	מפורש > מרומז	מפורש < מרומז
	מוטיבציה	-	מפורש < מרומז

- מייצג שאין הבדל.

ב. מידת הצבת המטרות של הכוונה עצמית כפי שעלו בריאיון האישי של המורה

הריאיון האישי שנעשה עם המורים סייע להעריך בין השאר גם את המטרות שהציב המורה לשיעור. אם כן, השאלה שנשאלה הייתה האם המורה הציב מטרות של טיפוח אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה? אותן מטרות בהוראת אסטרטגיות הכוונה עצמית נבחנו באמצעות ניתוח מדידות חוזרות, כשנבחנו האינטראקציות שבין קבוצת המחקר, סוג האסטרטגיה ונקודת המדידה. בניתוח נמצאו אינטראקציות מובהקות ($F(3,43)=42.62$, $p<0.001$), ולפיהן נערכו ניתוחי שונות חד-גורמים לכל מטרה ולכל נקודת מדידה (הממצאים מפורטים בטבלה מספר 2). כפי שאפשר להתרשם מטבלה מספר 2, נמצא שינוי מובהק בהצבת מטרות SRL בקרב המורים שהשתתפו בהתערבות.

טבלה מספר 2: ההבדלים שבין הקבוצות בדירוג המטרות המגוונות כפי שעלו בריאיון האישי בנקודות המדידה

סוג המטרה	עת המדידה	קבוצה א	קבוצה ב	קבוצה ג	קבוצה ד	הבדל
		קוגניציה + מטה-קוגניציה	מוטיבציה	קוגניציה + מטה-קוגניציה	קבוצה ד	
		SD	M	SD	M	$F_{(3,43)}$
מטרה קוגניטיבית						
לפני		0.40	1.75	0.62	1.73	0.07
אחרי		0.30	2.58 ¹	0.67	3.91 ²	***36.52
מטרה מטה-קוגניטיבית						
לפני		0.47	1.25	0.45	1.27	0.21
אחרי		0.50	1.58 ¹	1.16	3.55 ²	***27.93
מטרה מוטיבציונית						
לפני		0.30	1.17	0.39	1.09	0.20
אחרי		0.30	3.25 ²	0.87	1.55 ¹	***35.51

*** $p<0.001$

^{1,2} הספרות מייצגות את ההבדלים שבין הקבוצות לאחר ניתוח המשך מסוג Tukey.

ג. הערכת מטרות השיעור כפי שעלו בתכנון

כדי להעריך האם נמצא הבדל בין הקבוצות בהצבת המטרות כפי שעלו בתכנון השיעור על פי שלוש האסטרטגיות נעשו ניתוחי שונות חד-גורמים (טבלה מספר 3). כפי שאפשר להתרשם מטבלה מספר 3, ניכר כי הקבוצות נבחנו זו מזו בהשתלמויות שעברו ושהדגישו את מטרות ההכוונה העצמית בלמידה. לא נמצאו הבדלים בין הקבוצות לפני ההשתלמות.

סוג המטרה	עת המדידה	קבוצה א ביקורת	קבוצה ב מוטיבציה	קבוצה ג קוגניציה + מטרה-קוג'	קבוצה ד הכוונה עצמית	הבדל
		SD	M	SD	M	$F_{(3,43)}$
קוגניטיבית						
לפני	1.28	0.46	1.30	0.47	1.31	0.37
אחרי	1.92 ¹	0.70	2.66 ²	0	3.00 ³	†
מטרה-קוגניטיבית						
לפני	0	0	0	0	0	‡
אחרי	1.72 ¹	0.72	1.73 ¹	0.30	2.90 ²	***61.65
מוטיבציונית						
לפני	0.62	0.59	0.68	0.63	0.74	0.33
אחרי	1.03 ¹	0.63	2.95 ³	0.21	1.95 ²	***115.93

*** $p < 0.001$

^{1, 2, 3} הספרות מייצגות את ההבדלים שבין הקבוצות לאחר ניתוח המשך מסוג Tukey.

* מאחר שלא היה הבדל בשתי קבוצות נערכו מבחני t למדגם יחיד ולמדגמים בלתי תלויים כדי להשוות בין הקבוצות. הספרות במקרה המדובר מייצגות את הממצאים שהתקבלו לאחר מבחנים אלו.

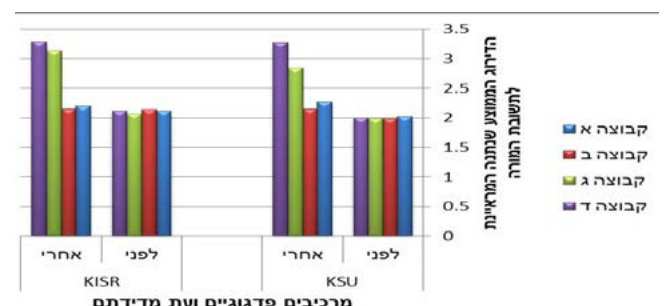
** לא נערכו ניתוחי שונות מאחר שלא היה הבדל בין הקבוצות.

וראיינה לאחר צילום השיעור ונשאלה על מטרות השיעור. השיעור הראשון עסק בכפל מספר דו-ספרתי בחד-ספרתי. המורה נשאלה מה הייתה מטרת השיעור. להלן שרשרת הריאיון:

מס' שורה	הדובר	מה נאמר
13	מראיינת	מה הייתה מטרת השיעור
14	ימית	שהם יפתרו תרגילי כפל. כאלו (מצביעה על תרגיל בדף העבודה – 24X7). ואחר כך נעבור לכאלו (מצביעה על התרגיל 34X28 בדף אחר)
15	מראיינת	ומה את אומרת? השגת את המטרה?
16	ימית	כן ... תראי, הראיתי להם בדיוק איך לעבוד עם תרגילים כאלו. לא יאומן שהם לא יודעים את זה מכיתה ג. זה לא חומר שאני לימדתי. אבל אני חייבת את זה בשביל שהם ידעו אחר כך לעשות את זה (מצביעה על 28X34).
17	מראיינת	כיצד את יודעת שהשגת את המטרה?
18	ימית	כי הם עבדו יפה בדף עבודה, וכל אחד פתר אחרי שהסברתי. ובשיעור הבא, מחר, לא ... ביום חמישי, נבדוק את הדף. אני בטוחה שהם ידעו. כי הסברתי כל שלב בנפרד. וגם הראיתי שזה דומה לפילוג שהם עושים. ואם לא ידעו תמיד אפשר להכין תרגול נוסף. אני מאוד מכילה אותם. אם הם לא מבינים, אני מסבירה שוב ושוב. עד שידעו ...
		אהה ... שוב לא מדברת על אלו שלא מסוגלים. מדברת על רוב הכיתה...
19	מראיינת	ואז את מסבירה אחרת? כלומר אם הם לא מבינים ... מה את עושה?

ד. הידע הפדגוגי כפי שעלה בריאיון

בריאיון האישי הוערכו גם הידע הפדגוגי של המורים על התהליכים הקוגניטיביים שעובר התלמיד כדי להבין מושגים מתמטיים והידע הפדגוגי העוסק באסטרטגיית הוראה ובייצוג הנושא התוכני הנלמד. בניתוח מדידות חוזרות ששילב את נקודת המדידה ואת קבוצת המחקר, נמצאו אינטראקציות מובהקות בין קבוצת המחקר לנקודת המדידה במדד הכללי ($F(3,43)=125.78, p<0.001$). לכן נעשו ניתוחי שונות לפני ההשתלמות ולאחריה גם במדד הכללי וגם בשני תתי-המדדים. קבוצות ג ו-ד שקיבלו את המדדים הקוגניטיביים והמטרה-קוגניטיביים, הצליחו להראות שיפור ניכר בשני המדדים (KSU ו-KISR). הממצאים מפורטים בתרשים מספר 2.



תרשים מספר 2: ההבדלים שבין הקבוצות במרכיבים הפדגוגיים כפי שעלו בריאיון במשך נקודות המדידה

לסיכום הממצאים שהתקבלו נמצא בכל כלי המחקר (הערכת השיעור בפועל של המורים, הראיונות האישיים ובחינת תכנוני השיעורים) כי ההתערבות הצליחה לשנות את התנהגות המורים.

כדי להאיר את השיקולים האיכותניים של הקידוד מצורפת הדוגמה הבאה: ימית (שם בדוי), היא מורה המלמדת מתמטיקה בכיתות ד, ה, ו זה 12 שנים והשתתפה בהתערבות בקבוצה ד (SRL). נציג שתי דוגמאות מהראיונות עם ימית (לפני ההתערבות ולאחריה). ימית

מס' שורה	הדובר	מה נאמר
20	ימית	(הפוגה...) תראי, אני מכירה את כל מלבני הכפל האלה. סתם מסרב. בשלב הזה אני חייבת שהם ידעו את התרגילים האלו ומהר. שידעו את הטכניקה. אני מסבירה להם עם הבנה כי יש קשר לחוק הפילוג. וכל תרגיל פותרים גם במאונך וגם עם חוק הפילוג. ככה (מצביעה על תרגיל שפתור במאוזן, עם פילוג) ואת זה גם אלו שלא הכי טובים מבינים.

בריאיון זה אפשר להבחין כי ימית עוסקת בהוראה של פרוצדורה, וכל עניינה שתלמידה יצליחו לפתור תרגילי כפל של מספרים דו-ספרתיים בחד-ספרתיים, כדי שתוכל ללמד תרגילי כפל של מספרים דו-ספרתיים בדו-ספרתיים. היא מותחת ביקורת על מלבני הכפל, ומצדיקה את הבחירה שלה לא לעסוק בהמחשה זו. היא חוזרת מטרה לראות את תלמידה מתמודדים עם פתרון תרגילים מסוג זה ואפילו משתמשת בביטוי "טכניקה". נוסף על כך, יש דיון רב בעשייה שלה כמורה, ובתפקיד שלה כמדגימה וכזו שמסבירה והם צריכים לתרגל את מה שהראתה קודם לכן.

השיעור השני (שנערך לאחר ההתערבות) עסק במשמעות השבר כחלק מכמות. ימית הכינה משימה עם סיפור מסגרת. המשימה התפתחה והגיעה לשיאה ביצירת קשר בין המשמעות של השבר כחלק משלם (שנלמדה כבר) למשמעות החדשה שהיא רוצה ללמד בכיתתה, השבר כחלק מכמות. להלן קטע מהריאיון:

מס' שורה	הדובר	מה נאמר
7	מראיינת:	מה מטרת השיעור?
8	ימית:	יש פה כמה מטרות ... תראי אני ... אני רוצה שהם יכירו את זה ששבר זה לא רק משלם כמו שהם מכירים עד כה, שלם כמו ריבוע, ... איך קוראים לזה? רציף, זהו רציף. המשמעות של חלק מכמות תמיד קשה להם. אבל פה, יש קשר ... בין זה לזה..., ולכן לדעתי ... זה יותר מוצלח. שנה שעברה לא עשיתי את הדברים כך, ועכשיו אני חושבת שאני מבינה מה היה חסר. (צחוק)
9	מראיינת:	מה?
10	ימית:	כל הקשר בין המשמעויות, הייצוג שהוספתי פה (מצביעה על עיגול מחולק לשמיניות ועל כל חלק 3 כתמים) והם יצרו את הייצוג בעצמם, תוך כדי התפתחות הסיפור. אז זה מה שטוב פה.
11	מראיינת:	ולדעתך השגת את מטרות השיעור?
12	ימית:	אני חושבת שכן. הם ... חילקו לשמיניות. והיו להם 24 חתיכות עגבנייה לשים על הפיצה שמחולקת לשמיניות, הם צריכים לחלק שווה בשווה. ואז חילקו 3 עגבניות לכל שמינית פיצה. ומכאן הבנו את הידע של הקשר בין המשמעות ... של הכמות למשמעות של החלק משלם.

מס' שורה	הדובר	מה נאמר
		ואחר כך, אחר כך ... א ... דיברנו על הדברים במליאה. זה היה מפורש. את ראית מה היה בשיעור. (צחוק) ראית שגבע הציג את האסטרטגיה שלו ... חילק כל אחד לבד ... והיה אפשר לראות שהקבוצה של שרון ... כי הם לא חילקו כמו גבע אחד אחד, אלא עשו 24:8 וידעו לשים 3 עגבניות בכל חלק של פיצה.

בריאיון ניכר כי ימית מעניקה חשיבות לידע הקודם של התלמידים ובונה את הידע החדש עליהם. כמו כן השיח שלה ממוקד בעשייה המתמטית של התלמידים, ולא בעשייה הפדגוגית שלה. יתרה מזו, היא זימנה לתלמידה סביבת למידה פעילה שבה הם התנסו כדי להבנות את הידע החדש, השווה בין האסטרטגיות שלהם, ואפילו יש עדויות מהשיעור לשיח מפורש על האסטרטגיות שבהן פעלו התלמידים.

דוגמה זו של שינוי בשיח הפדגוגי של המורה אפשרה לתת קידוד שונה לריאיון. בדוגמה הראשונה ניכר כי המטרות של השיעור הן פרוצדורליות, ולא מעניקות חשיבות לתהליכים הקוגניטיביים שעובר התלמיד כדי להבין מושגים מתמטיים. כמו כן הידע הפדגוגי של המורה לא מבטא התייחסות לאסטרטגיית הוראה ולייצוג הנושא התוכני הנלמד. לעומת זאת בדוגמה השנייה קיבלו היבטים אלו תשומת לב. המודעות והחשיבות שנותנת ימית לאסטרטגיות שבהם פעלו התלמידים בולטת בשיח הפדגוגי שלה לאחר ההתערבות. ניתוח השיח האיכותני אפשר קידוד מדויק לראיונות ומכאן נבעה ההשוואה המוצגת בתרשים מספר 2.

שאלת מחקר מספר 2: מדדי סביבת הלמידה

שאלת המחקר הייתה מהם ההבדלים בארגון סביבת הלמידה של המורים מארבע קבוצות המחקר? שוער כי יימצאו הבדלים בארגון הסביבה הלימודית בקרב המורים שבקבוצות למיניהן. כדי לבחון האם קיימים הבדלים בין המורים במדדי סביבת הלמידה כפי שהוערכו בכלים (בסרטי הווידאו, בריאיון האישי ובתכנון השיעור) נעשו מספר ניתוחים סטטיסטיים. הממצאים יוצגו על פי סוג הכלי שבאמצעותו הוערכה סביבת הלמידה.

א. סביבת הלמידה כפי שהוערכה בסרטי הווידאו (הוראה בפועל)

כדי לבחון האם המורים שהוסרטו כשהם מלמדים דורגו במדדי סביבת הלמידה המתאימה לקבוצת המחקר שלהם בדרך אחרת בנקודות המדידה, נעשה ניתוח מדידות חוזרות שכלל את ארבעת מדדי סביבת הלמידה (למידה קונסטרוקטיבית, למידה שיתופית, למידה עצמית וביצועי טרנספר), את נקודות המדידה ואת קבוצות המחקר. בניתוח נמצאה אינטראקציה מובהקת בין שלושת המשתנים ($F(3,42)=4.89, p<0.01$). על פי ממצא זה נעשו ניתוחי שונות חד-גורמים בכל נקודת המדידה ולכל תת-מדד סביבת למידה כדי לבחון את ההבדלים שבין ארבע הקבוצות. לפני ההתערבות לא נמצאו הבדלים בין הקבוצות במדדי סביבת הלמידה.

לאחר ההשתלמות נמצא כי המורים שבקבוצה ד הציגו ביטויים רבים יותר בלמידה הקונסטרוקטיבית בשיעורים שהוסרטו לעומת שאר הקבוצות. בטבלה מספר 4 אפשר לראות בבירור את הממצאים.

טבלה מספר 4: ההבדלים שבין קבוצות המחקר באשר למדדי סביבת הלמידה לאחר ההשתלמות בכלים למיניהם

מדד וקבוצה	הוראה בפועל			ריאיון אישי			תכנון השיעור	
	$F_{(3,42)}$	SD	M	$F_{(3,43)}$	SD	M	$F_{(3,163)}$	SD
למידה קונסטרוקטיבית								
א		48.75	62.45 ¹		0.47	1.27 ¹		0.55
ב	9.32***	63.65	95.10 ¹	45.47***	0.52	2.50 ²	*	0.45
ג		67.84	101.72 ¹		0.52	3.45 ³		0.00
ד		31.60	173.75 ²		0.48	3.31 ³		0.15
למידה שיתופית								
א		28.78	55.64		0.52	1.55 ¹		0.44
ב	1.79	22.05	76.72	18.44***	0.79	3.08 ²	**	0.00
ג		41.06	60.84		0.75	3.18 ²		0.40
ד		44.41	85.37		0.48	3.31 ²		0.22
למידה עצמית								
א		23.38	66.05 ¹		0.40	1.82 ¹		0.36
ב	8.00***	28.76	70.11 ¹	21.80***	1.00	2.92 ²	39.09***	0.48
ג		24.43	47.44 ¹		0.40	3.82 ³		0.45
ד		39.71	107.17 ²		0.52	3.54 ²		0.30
ביצועי טרנספר								
א		42.69	42.28		0.30	2.09 ¹		0.37
ב	2.33	47.43	51.49	15.25***	0.87	3.25 ²	****	0.45
ג		47.65	47.75		0.67	3.64 ²		0.22
ד		46.91	86.68		0.51	3.62 ²		0.00

^{1,2,3} הספרות בכתב העילי מבחינות בין הקבוצות על פי ממצאי ניתוח המשך מסוג Tukey. $p < 0.001$ ***

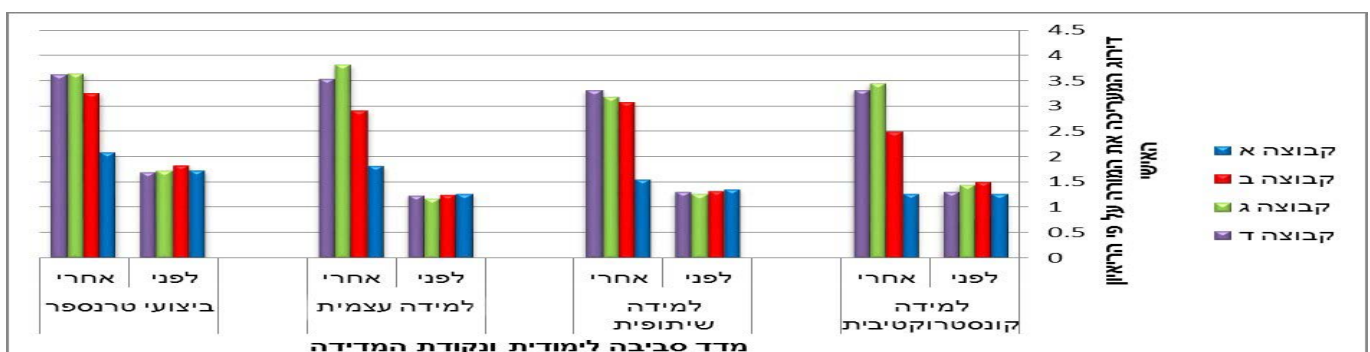
* נעשה ניתוח שונות חד-גורמי בין כל שאר הקבוצות (בלי קבוצה ג) שהניב הבדלים מובהקים ($F(2,122)=18.73$, $p < 0.001$). ממצאי ניתוח זה ומבחני t למדגם יחיד בין כל הקבוצות לערך של קבוצה ג (3.00) מפורטים באמצעות הספרות בכתב עילי.

** נערך ניתוח שונות חד-גורמי בין כל שאר הקבוצות (בלי קבוצה ב) שהניב הבדלים מובהקים ($F(2,120)=3.53$, $p < 0.05$). ממצאי ניתוח זה ומבחני t למדגם יחיד מוצגים בכתב עילי.

**** נערך ניתוח שונות חד-גורמי בין כל שאר הקבוצות (בלי קבוצה ד) שהניב הבדלים מובהקים ($F(2,120)=98.45$, $p < 0.001$). ממצאי ניתוח זה ומבחני t למדגם יחיד מוצגים בכתב עילי.

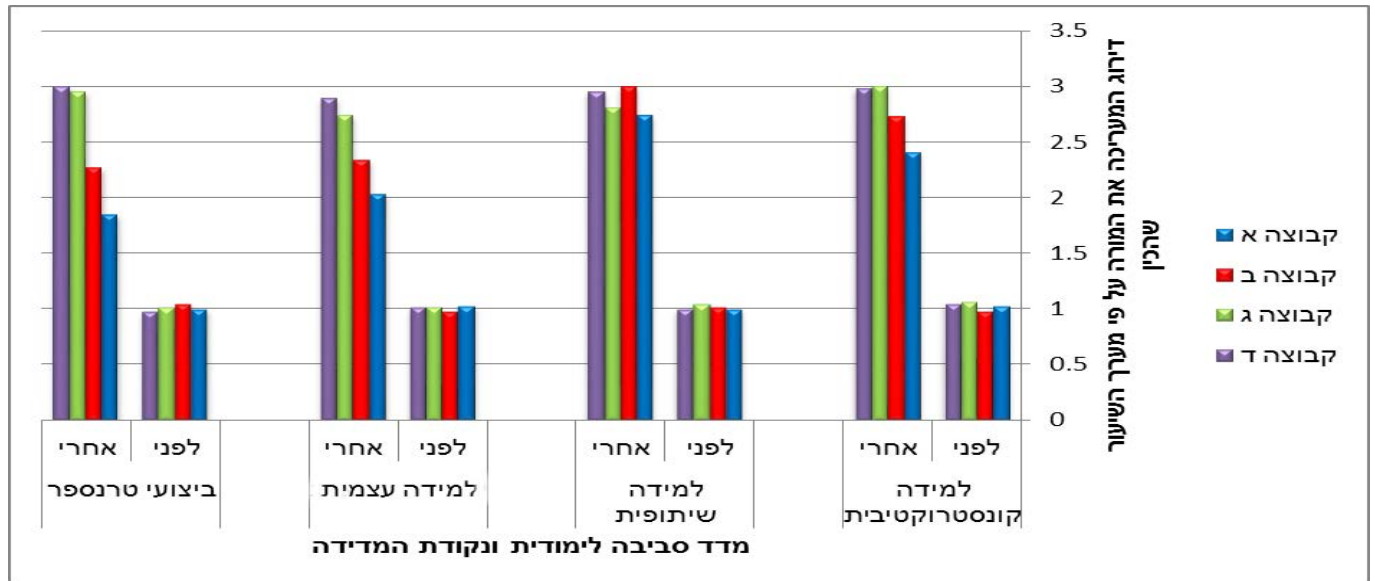
ב. סביבת הלמידה כפי שהוערכה בריאיון האישי

כדי לבחון את השינוי לאחר ההשתלמות בהערכת התשובות של המורים בריאיון באשר להיבטי סביבת הלמידה נעשה ניתוח מדידות חוזרות, הדומה לזה שנעשה על המדדים שבסרטי הווידאו. הממצאים הניבו ממצאים דומים ($F(3,43)=3.19$, $p < 0.05$). על פי האינטראקציות שנמצאו נעשו ניתוחי שונות חד-גורמים לפני ההשתלמות ולאחריה. לא נמצאו הבדלים מובהקים בין קבוצות המחקר לפני ההשתלמות. לעומת זאת, לאחר ההשתלמות נמצא כי כל הקבוצות שעברו הדרכה שעסקה בהכוונה עצמית תפקדו טוב יותר בכל המדדים לעומת קבוצה א (ראו טבלה מספר 4 ותרשים מספר 3). בשני המקרים נמצאו הבדלים נוספים: (א) קבוצות ג ו-ד קיבלו הערכות גבוהות יותר במדד הלמידה קונסטרוקטיבית (קישור ידע חדש לידע קודם) לעומת קבוצה ב, וזו קיבלה הערכה גבוהה יותר מקבוצה א; (ב) במדד למידה עצמית נמצא כי קבוצה ג קיבלה הערכות גבוהות יותר לעומת קבוצות ב ו-ד ושתי קבוצות אלה קיבלו הערכות גבוהות יותר מקבוצה א.



תרשים מספר 3: הבדלים בין קבוצות המחקר במדדי סביבת הלמידה כפי שעלו בריאיון האישי בפילוח לנקודות המדידה

מדדים דומים לאלו שהוערכו בסרטי הווידאו ובריאיון האישי הוערכו גם באמצעות תכנון השיעור של המורים שנבחנו לפני ההשתלמות ולאחריה. לא נמצאו הבדלים מובהקים בין קבוצות המחקר לפני ההשתלמות. לעומת זאת, לאחר ההשתלמות נמצא כי גם בכלי זה, כל הקבוצות שעברו הדרכה שעסקה בהכוונה עצמית תכננו שיעור עם סביבת למידה עשירה יותר בכל המדדים לעומת קבוצה א (ראו טבלה מספר 4 ותרשים מספר 4).



תרשים מספר 4: הבדלים בין קבוצות המחקר במדדי סביבת הלמידה כפי שעלו בתכנון השיעור בפילוח לנקודות המדידה

השפיע על תפקוד המורים בפועל וייתכן שבמקרה זה החשיפה למגוון האסטרטגיות והניתוח של הסרטים סייע למורים בקבוצה ד להעצים את ההוראה המפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה.

הממצאים מעידים כי הלמידה של המורים בהשתלמות הייתה חשובה ובעלת משמעות. הייחודיות של ההתערבות היא בהשתלמות חדשנית ואחרת (שיטת הלמידה), שבמהלכה המורים שצפו בסרטים, עברו תהליך שבו ניתחו סיטואציות פדגוגיות בהקשר של הכוונה עצמית בלמידה (על פי הקבוצה שהיו בה). הצפייה בשיעורי המורים וניתוחם שנעשו בדיונים משותפים שבהם גם שולבו ניתוחי השיעורים האישיים שלהם, יצרה אצל המורים רגישות וערנות, כך שהם התמקדו בדקויות שבהוראת אסטרטגיות של הכוונה עצמית בלמידה. היתרון בניתוח שיעורים מצולמים על פני לימוד מתוך ספר לימוד או הרצאה נובע מהעיסוק בסיטואציות אותנטיות, והוא נתמך גם בספרות המחקרית. חוקרים אחרים שניתחו סיטואציות פדגוגיות מצולמות הגיעו לממצאים דומים (Darling-Hammond, 2000; Grossman, 1992; Leikin, 2006; Robinson, 2010; Robinson & Leikin, 2012).

ניתוח האסטרטגיות גרם למורים למקד את תשומת הלב בהיבטים שנלמדו ולהגיע לתובנה שהם אלו המשפיעים על דרך הלמידה של התלמיד, כפי שמשקף מסרטי המורים, מהראיונות עימם ומתכנוני השיעורים שלהם. המורים שניתחו את הסרטים יכלו להתמקד במקומות שבהם ההוראה החמיצה את העיסוק המפורש באסטרטגיה או עסקה באסטרטגיות במרומז. ניתוח זה הוביל לדיון בחלופות שישרו את ההוראה, כך שזו תהיה מפורשת וכמו כן בהעצמת סביבת הלמידה שהמורה זימן לתלמידיו. המורים הבינו שהוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה חשובה ושיקפו זאת בהוראה שלהם בפועל.

ההשפעה של האסטרטגיות שבהן עסקו המורות במשך ההתערבות

מטבלה מספר 4 אפשר לראות כי קיים דמיון ושוני בתוצאות בין כלי המדידה: הסרט מציג במובהק את המדדים של קבוצה ד שהיו גבוהים מאוד לעומת שאר הקבוצות בכל מרכיבי סביבת הלמידה. לעומת זאת, בריאיון האישי ובמערך השיעור הציגה קבוצה ב מדדים גבוהים במרכיבי סביבת הלמידה האלה: פעילות לומדים ויחסי גומלין בין הלומד לסביבתו. ממצא נוסף ומעניין הוא שכל הקבוצות שעברו ההתערבות שכללה את מרכיבי ההכוונה העצמית בלמידה הושפעו מההתערבות, כך שאף שלא נמצאו כמעט הבדלים בין הקבוצות לפני ההשתלמות, לאחר ההשתלמות נמצאו הבדלים בין הקבוצות שעברו הכשרה בנושא ובין קבוצה שלא עברה הכשרה בנושא בשלושת הכלים.

דיון

במחקר יש עדויות שהמורים העצימו את ההוראה של אסטרטגיות ההכוונה העצמית גם בכמות (הם ייחדו לכך זמן במשך השיעור) וגם באיכות (נתנו אסטרטגיות מפורשות יותר מאסטרטגיות מרומזות). הממצאים מחדדים שחשוב להכיר את ההכוונה העצמית בלמידה ואת ההוראה המפורשת המטפחת לומד יעיל שלו מכוונות עצמית. במחקר שעשה האטיי (Hattie, 2009) נמצא שאחת הפרקטיקות היעילות בהוראה הגורמת להישגים גבוהים אצל הלומדים היא הבניית ידע והוראה ישירה של אסטרטגיות.

למרות הזמן הזה שקיבלו הקבוצות, ניכר כי המורים בקבוצה ד הצליחו ללמד בהוראה ישירה את כל האסטרטגיות שנלמדו לעומת המורים בשאר הקבוצות שניתחו רק חלק מן האסטרטגיות. אם כך, החשש מעומס קוגניטיבי¹ במקרה של הכוונה עצמית בלמידה לא

1. המושג עומס קוגניטיבי (Cognitive Load) עוסק בסוגיה של מורכבות המידע החדש, אופי הלומדים (הידע הקודם שלהם, המוטיבציה שלהם והתפיסות) והשפעתם על יעילות הלמידה (van Merriënboer & Moreno, 2006; Ayres, 2005). כשמעבדים מידע חדש היכולת שלנו מוגבלת לשנים-שלושה מושגים או רעיונות בו זמנית, כשאלו תלויים כמובן בזמן הנדרש לעיבוד (Kirschner, Sweller & Clark, 2006).

ומוטיבציוניות גם יחד, שילוב זה אפשר להעצים את המורים המטפחים תלמידים בעלי יכולת הכוונה עצמית בלמידה ישירה בהוראה מפורשת של אסטרטגיות ובלמידה עקיפה בזימון סביבת למידה מעצימה לתלמידיהם (De Corte et al., 2004; Dignath & Büttner, 2008).

המורים בקבוצה ד זימנו לתלמידיהם (בזמן השיעור) סביבת למידה שבה מופיעים ארבעת המרכיבים שטבעו (De Corte et al., 2004), ואילו שאר הקבוצות זימנו בפועל רק את חלקן. מכאן שהיעדר מרכיבים בהוראה מפורשת של אסטרטגיות גרמו למורים לזמן רק חלק ממרכיבי הסביבה הלימודית המעצימה, ואילו המורים מקבוצה ד הצליחו לזמן בכיתתם סביבת למידה שבה הלומד פעיל בתהליך הבניית הידע.

הידע הפדגוגי של המורים כפי שעלה בריאיון

הריאיון האישי שהתקיים עם המורים העריך כיצד המורים מבחינים בניתוח סיטואציות פדגוגיות אותנטיות בצומתי ההכרעה שלהם במהלך השיעור. כזכור, הממצאים מראים שקבוצות ג ו-ד הציגו תפקוד גבוה יותר לעומת קבוצות א ו-ב. כלומר, מורות שנחשפו לאסטרטגיות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות ידעו להתמודד טוב יותר עם טעויות נפוצות, עם הקשיים של הלומדים ועם ייצוגים ההולמים את הסיטואציה שבה הם נמצאים, וכן הם ידעו להגדיר את האסטרטגיות שבהן ישתמשו מול התלמידים בשיעור. הממצא הזה משקף את העובדה כי קבוצות ג ו-ד שיפרו את היכולת שלהן להתמודד עם סיטואציות מאתגרות פדגוגיות והשתמשו באסטרטגיות קוגניטיביות. ההבדלים בין הקבוצות ניכרו גם ב-KSU (כלומר, בידע על התהליכים הקוגניטיביים שעובר התלמיד כדי להבין מושגים מתמטיים) וגם ב-KISR (בידע העוסק באסטרטגיית הוראה ובייצוג הנושא התוכני הנלמד).

חוקרים העוסקים בהוראת המתמטיקה טוענים כי על המורים למתמטיקה להבין את תפקיד הדוגמאות והמדגם של הנושא כדי ללמד מתמטיקה נכון (Ball et al., 2008; Ma, 1999; Shulman, 1986). חוקרים אלו מעניקים חשיבות רבה לידע הפדגוגי-מתמטי של המורה ורואים בו את הבסיס להוראה בעלת משמעות. פארק ועמיתיו (Park et al., 2011) מציינים כי הידע הפדגוגי של המורה נחשף בריאיון כשהמורה הציג את מגוון האסטרטגיות שהוא מכיר ואת הייצוגים שהוא מזמן לכיתתו. הריאיון לפני השיעור וזה שלאחריו משקפים תהליך רפלקטיבי של המורה על עבודתו. מחקרים אחרים (כהן וקרמרסקי, 2010; Michalsky & Schechter, 2013) מעידים על קשרים בין תהליך רפלקטיבי והתפתחות ידע פדגוגי של פרחי הוראה בהוראה המטפחת הכוונה עצמית בלמידה.

כדי שההוראה המטפחת תכיל את כל מרכיבי הכוונה העצמית בלמידה יש ליצור אצל המורים את המודעות שהוראה כזו חשובה, וכן לחקור את הפרקטיקה שלהם בהיבט הזה. תהליך זה יכול להתבצע בעזרת רפלקציה ממוקדת על המרכיב המוטיבציוני שבהוראה. חוקרים (Paris & Paris, 2001; Pierce & Kalkman, 2003) רואים ברפלקציה תהליך חיוני שבו המורים מעריכים ומקדמים את הוראתם, וכן כאמצעי המאמן את הלומד להפעיל תהליכים של מכוונות עצמית, שכן הרפלקציה מאפשרת ללומד לחשוב על הלמידה שלו ולקשר בין הידע החדש לקיים ולתפוסותיו הקודמות. כמו כן, ברפלקציה על העשייה אפשר להעריך את הסיטואציה מילולית, וכך לתרום לשינוי, שכן הרפלקציה מגשרת בין התאוריה למעשה, כלומר היא מסייעת בהעברה של עקרונות תאורטיים להוראה בפועל (Shulman, 2004).

על ההוראה בפועל ניכרת. ממצא זה מחזק את הממצאים שנמצאו בניתוח סרטי המורות המעיד שניתוח סרטים והעיסוק בכל מרכיבי ההכוונה העצמית בלמידה הכרחיים. אפשר למצוא סימוכין לממצא זה במחקרם של פארק ועמיתיו (Park et al., 2011). חוקרים אלו בחנו את הידע הפדגוגי של המורים באמצעות ריאיונות, הם ניתחו את הידע הפדגוגי שעלה מהריאיונות על פי מחוון שבנו, ועיקר הממצאים שלהם מביאים לידי תובנה כי הידע הפדגוגי נבחן בשני ממדים: הוראת האסטרטגיות וייצוגים הולמים לסיטואציה הנתונה. לטענתם, מחסור באחת האסטרטגיות או חוסר התאמה של ייצוג הולם משפיעים על הידע הפדגוגי של המורה, כך שהשפעה זו תבוא לידי ביטוי בריאיון עם המורה. במחקר זה המורים שלא נחשפו לאסטרטגיות מפורשות מסוג מסוים ביטאו זאת בריאיון, כלומר האסטרטגיות שלא נלמדו לא היו חלק מהריאיון והמורה לא חשב שהאסטרטגיות האלה המסייעות לתפקודו של התלמיד חשובות. ואכן, נמצא כי חשוב לחשוף את המורים לכלול האסטרטגיות והייצוגים. במתמטיקה יש חשיבות רבה לייצוג קונקרטי של מצבים כדי להמחיש לתלמידים את הבעיה ולייצג את פתרונה (Ball, Thames, & Phelps, 2008). מורים ששוחחו במפורש על האסטרטגיות הקוגניטיביות והמטה-קוגניטיביות ועל השימוש בייצוג ויזואלי בדיונים שנערכו במהלך הפיתוח המקצועי שלהם יישמו הוראה מפורשת של אסטרטגיות אלו בכיתתם.

מהממצאים משתמע שאין די בחשיפת מורים לסרטי וידאו וניתוחם, אלא יש להתמקד בניתוח ממוקד בנושא שרוצים לקדם: במחקר זה הוראה מפורשת של אסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה (אסטרטגיות קוגניטיביות, מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות).

סביבת למידה

סביבת הלמידה שזימן המורה לכיתתו נבחנה בעזרת שלושה כלים: ניתוחי סרטים (הוראה בפועל), ריאיון אישי עם המורה (שנעשה לפני השיעור ולאחריו) ותכנון השיעורים.

נמצא הבדל בין כלי המחקר בתוצאות שהתקבלו בסביבת הלמידה שזימן המורה. כשרואים בממצאי סרטי הווידאו כלי המייצג בדרך הישירה והאותנטית ביותר את התנהגות המורה בכיתה, אפשר לראות כי בכלים עקיפים יותר (כמו ריאיון אישי ומערך השיעור) המורים אינם מציגים ממצאים זהים. ניכר כי לא כל ההיבטים של סביבת הלמידה שדיווחו עליהם המורים בריאיון או הציגו בתכנון השיעור ניכרו בסרט: קבוצה ד תפקדה במובהק בשניים מתוך ארבעת המדדים שבסרטי הווידאו (הבניית הלמידה – קישור הנושא הנלמד למרכיבי הידע הקודם ולמידה עצמית טוב יותר לעומת שאר הקבוצות).

לעומת זאת, במדדים של פעילות הלומד ויחסי גומלין בין הלומד לסביבתו התקבל ממוצע גבוה בקבוצה ב בריאיון האישי ובתכנון השיעור. ממצא זה מדגיש את המרכיב המוטיבציוני שקיבלו המורות בהשתלמות, אף שהוא לא היה מובהק סטטיסטית בהתנהגות המורה בפועל (בסרט). ברמה התאורטית אפשר להסיק כי יש קשר בין הוראה מפורשת של אסטרטגיות מוטיבציוניות למידת הפעילות ויחסי הגומלין שהמורה מצהיר שזימן לתלמידיו בשיעור.

הממצאים מלמדים כי סביבת הלמידה-בהוראה בפועל מושפעת מכל מרכיבי ההכוונה העצמית בלמידה, וכשמדברים על השפעת ההתערבות על ההתנהגות של המורה בכיתת הלימוד, ניכר כי היעדר של מרכיב מסוים של הכוונה עצמית (קוגניטיבי, מטה-קוגניטיבי או מוטיבציוני) פוגע ביישום הלכה למעשה של כל מרכיבי סביבת הלמידה. רק כששולבה ההשתלמות שעסקה בסביבת למידה מעצימה עם הוראה מפורשת של אסטרטגיות קוגניטיביות, מטה-קוגניטיביות

כהן, ז' וקרמרסקי, ב' (2010). פיתוח הכוונה עצמית אצל פרחי הוראה באמצעות תמיכה רפלקטיבית בסביבה טכנולוגית. בתוך י' עשת-אלקלעי, א' כספי, ס' עדן, נ' גרי וי' יאיר (עורכים), ספר כנס צ"י למחקרי טכנולוגיות למידה 2010: האדם הלומד בעידן הטכנולוגי (עמ' 101-109). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

מיכלסקי, ט' וקרמרסקי, ב' (2008). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בקרב פרחי הוראה בסביבה מתוקשבת בזיקה לתפיסות של למידה והוראה. מגמות, מה(4), 798-765.

משרד החינוך. (2012). קווים מנחים לתכנון שיעור מתמטיקה ולהערכתו. אווזר מתוך http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matem-/atika/KdamYesodiVeyesodi/DgmeYHoraa

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Blomberg, G., Stürmer, K., & Seidel, T. (2011). How pre-service teachers observe teaching on video: Effects of viewers' teaching subjects and the subject of the video. *Teaching and Teacher Education*, 27(7), 1131-1140. doi: 10.1016/j.tate.2011.04.008

Boekaerts, M. (1999). Self-regulated learning: Where we are today. *International Journal of Educational Research*, 31(6), 445-457. doi: 10.1016/S0883-0355(99)00014-2

Boekaerts, M. (2010). Coping with stressful situations: An important aspect of self-regulation. In P. Peterson, E. Baker, & B. McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of education* (vol. 6, pp. 570-575). Oxford: Elsevier.

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 149-167. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.11.003

Butler, D. L., & Winne, P. H. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of Educational Research*, 65(3), 245-281.

Corno, L., & Randi, J. (1999). A design theory for classroom instruction in self-regulated learning. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (Vol. II, pp. 293-318). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Darling-Hammond, L. (2000). How teacher education matters. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 166-173. doi: 10.1177/0022487100051003002

Davis, E. A. (2006). Characterizing productive reflection among preservice elementary teachers: Seeing what matters. *Teaching and Teacher Education*, 22(3), 281-301. doi: 10.1016/j.tate.2005.11.005

De Corte, E., Verschaffel, L., & Masui, C. (2004). The CLIA-model: A framework for designing powerful learning envi-

המודל המוצע של התערבות דרך פיתוח פדגוגי שבמרכזו עיסוק בניתוח סיטואציות פדגוגיות מצולמות הביא לידי מודעות של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים לחשיבות שלהם כמורים המטפחים הכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידיהם. הממצאים מעידים על כך שעיסוק במכלול האסטרטגיות של הכוונה עצמית בלמידה במהלך הפיתוח הפדגוגי גרם למורים לעסוק במפורש באסטרטגיות הכוונה עצמית בלמידה, העצים את סביבת הלמידה בכיתה והשפיע על ההוראה שלהם בפועל. עיסוק בחלקים ממגוון האסטרטגיות של הכוונה עצמית בלמידה, הוביל שינוי מינורי אם בכלל בהוראה בפועל וכמו כן יש עדויות לפער בין הידע המוצהר שלהם לידע שלהם בהוראה בפועל. אם כך, התפקיד שלנו כמכשירי פרחי הוראה וכמורי מורים לעסוק בסיטואציות פדגוגיות אותנטיות, לנתח אותן ולהעלות את המודעות לחשיבות ההוראה המפורשת (לאחר שהתלמיד מתנסה וחוקר לבד או בקבוצה את המשימה) של אסטרטגיות SRL ולהעצמת סביבת הלמידה.

השימוש בסרטי השיעורים בתהליך הכשרת המורים נעשה פופולרי בזמן האחרון. אך השימוש בווידאו אינו מספיק מכיוון שהוא אינו מזמן דיון במטרות השיעורים, בחשיבה של התלמידים ובהוראה של המורה. השימוש בניתוח סיטואציות מצולמות חייב להיות חלק מתהליך מתמשך ומגישה כוללת להוראה כדי ליצור פיתוח פדגוגי איכותי של מורים (Blomberg et al., 2013; Borko et al., 2014). מחקר זה בחן כיצד משפיע ניתוח סיטואציות פדגוגיות המדגישות את ההכוונה העצמית בלמידה על הידע הפדגוגי של המורה ומהי תרומתו. ההשפעה הדיפרנציאלית שנמצאה על פי קבוצות המחקר, מדגישה שצריך לתכנן בהקפדה ובהירות כשבונים התערבות וכשמכוונים מורים לנתח סיטואציות פדגוגיות מצולמות כדי לפתח בהם אסטרטגיות הוראה המטפחות הכוונה עצמית בלמידה.

”

השימוש בסרטי השיעורים בתהליך הכשרת המורים נעשה פופולרי בזמן האחרון. אך השימוש בווידאו אינו מספיק מכיוון שהוא אינו מזמן דיון במטרות השיעורים, בחשיבה של התלמידים ובהוראה של המורה. השימוש בניתוח סיטואציות מצולמות חייב להיות חלק מתהליך מתמשך ומגישה כוללת להוראה כדי ליצור פיתוח פדגוגי איכותי של מורים

”

- Lamov, D. (2010). *Teach like a champion: 49 techniques that will put students on the path to college*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Leikin, R. (2006). Learning by teaching: The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In R. Zazkis & S. R. Campbaal (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 115-140). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Loughran, J., Berry, A., & Mulhall, P. (2012). *Understanding and developing science teachers' pedagogical content knowledge* (2nd ed.). Rotterdam: Sense.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Masui, C., & De Corte, E. (2005). Learning to reflect and to attribute constructively as basic components of self-regulated learning. *British journal of educational psychology*, 75(3), 351-372. doi: 10.1348/000709905X25030
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). [The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning](#). *British Journal of Educational Psychology*, 73(4), 449-471.
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. Paris: OECD.
- Michalsky, T. (2012). Shaping self-regulation in science teachers' professional growth: Inquiry skills. *Science Education*, 96(6), 1106-1113.
- Michalsky, T., & Schechter, C., (2013). Preservice teachers' capacity to teach self-regulated learning: Integrating learning from problems and learning from successes. *Teaching and Teacher Education*, 30(1), 60-73. doi: 10.1016/j.tate.2012.10.009
- Moreno, R. (2006). When worked examples don't work: Is cognitive load theory at an impasse? *Learning and Instruction*, 16(2), 170-181. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.02.006
- Paris, S. G., & Paris, A. H. (2001). Classroom applications of research on self-regulated learning. *Educational Psychologist*, 36(2), 89-101.
- Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261-284. doi: 10.1007/s11165-007-9049-6
- Park, S., Jang, J. Y., Chen, Y. C., & Jung, J. (2011). Is pedagogical knowledge (PCK) necessary for reformed science teaching? Evidence from an empirical study. *Red Science Education Journal*, 41(2), 245-260. doi: 10.1007/s11165-009-9163-8
- Pierce, J. W., & Kalkman, D. L. (2003). Applying learner-centered principles in teacher education. *Theory into Practice*, 42(2), 127-132. doi: 10.1207/s15430421tip4202_6
- Pintrich, P. R. (2004). A conceptual framework for assessing motivation and self-regulated learning in college students. *Educational Psychology Review*, 16(4), 385-407. doi: 10.1007/s10648-004-0006-x
- Randi, J. (2004). Teachers as self-regulated-learners. *Teachers College Record*, 106(9), 1825-1853. doi: 10.1111/j.1467-9620.2004.00407.x
- ronments for thinking and problem solving. *European Journal of Psychology of Education*, 19(4), 365-384. doi: 10.1007/BF03173216
- Dignath, C., & Büttner, G. (2008). Components of fostering self-regulated learning among students: A meta-analysis on intervention studies at primary and secondary school level. *Metacognition Learning*, 3(3), 231-264. doi: 10.1007/s11409-008-9029-x
- Dignath, C., & Büttner, G. (2010). *Assessing how teachers enhance self-regulated learning (ATES) – Development of an observation instrument for the primary and secondary school classroom*. Manuscript submitted for publication.
- Dignath, C., Büttner, G., & Langfeldt, H. P. (2008). How can primary school students learn self-regulated learning strategies most effectively? A meta-analysis on self-regulation training programmes. *Educational Research Review*, 3(2), 101-129. doi: 10.1016/j.edurev.2008.02.003
- Greene, J. A., & Azevado, R. (2007). A theoretical review of Winne and Hadwin's model of self-regulated learning: New perspectives and directions. *Review of Educational Research*, 77(3), 334-372. doi: 10.3102/003465430303953
- Grossman, P. L. (1992). Why models matter: An alternate view on professional growth in teaching. *Review Educational Research*, 62(2), 171-179.
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London & New York: Routledge.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). [Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement](#). *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Kennedy, M. M. (2006). Knowledge and vision in teaching. *Journal of Teacher Education*, 57(3), 205-211. doi: 10.1177/0022487105285639
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Sotelo, F. L., & Stigler J. W. (2010). [Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: Further explorations of a novel measure of teacher knowledge](#). *Journal of teacher education*, 61(1-2), 172-181.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). [Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching](#). *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.
- Kistner, S., Rakoczy, K., Otto, B., Dignath-van Ewijk, C., Büttner, G., & Klieme, E. (2010). Promoting of self-regulated learning in classrooms: Investigating, frequency, quality, and consequences for student performance. *Metacognition and Learning*, 5(2), 157-171.
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). [Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students](#). *Instructional Science*, 35(2), 99-139. doi: 10.1007/s11251-006-9004-3

- Robinson, N. (2010). *Lesson study as a springboard for the professional development of mathematics teachers* (Doctoral dissertation). University of Haifa.
- Robinson, N., & Leikin, R. (2012). **One teacher, two lessons: The lesson study process**. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(1), 139-161. doi: 10.1007/s10763-011-9282-3
- Santagata, R., & Guarino, J. (2011). **Using video to teach future teachers to learn from teaching**. *ZDM the International Journal of Mathematics Education*, 43(1), 133-145. doi: 10.1007/s11858-010-0292-3
- Schraw, G. (2006). Knowledge: Structures and processes. In P. A. Alexander, & P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (2nd ed., pp. 245-263). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004
- Shulman, L. S. (2004). *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning and learning to teach*. San Francisco: Jossey-Bass.
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). **Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions**. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.
- van Merriënboer, J. J. G., & Ayres, P. (2005). **Research on cognitive load theory and its design implications for E-learning**. *Educational Technology Research and Development*, 53(3), 5-13. doi: 10.1007/BF02504793
- Zimmerman, B. J. & Schunk, D. H. (Eds.). (2001). *Self-regulated learning and academic achievement: Theoretical perspective* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). San Diego: Academic Press. doi: 10.1016/B978-012109890-2/50031-7
- Zohar, A., & Dori, Y. J. (Eds.). (2012). *Metacognition in science education: Trends in current research*. Dordrecht: Springer.

פדגוגיה להוראה ולמידה בעזרת מרלו (MERLO): הניסיון המצטבר בהערכה והוראה של חשיבה מושגית

פרדיננדו ארזרלו
אורנלה רובוטי
אורי שפריד
מאשה אטקינד
רון קנת

Prof. Ferdinando Arzarello

Professor of Elementary Mathematics from a Higher Standpoint at Turin University, President of ICMI (2013 – 2016), President of ERME (2009 – 2013); Member of PME IC (2004 – 2009). His main area of research is Mathematics Education, more precisely: the learning of pre-algebra and algebra, geometry, and calculus in technological environments; embodiment and gestures in mathematics; curricular design and theoretical frameworks for learning and teaching. In the last two decades he has authored more than 130 publications, mainly in international Journals or Volumes.



Prof. Ornella Robutti

Professor of Mathematics Education at the Department of Mathematics at Turin University. Her fields of research are: the teaching and learning processes in Mathematics with the support of technologies; the professional role of mathematics teachers as individuals and in communities. She is author of many articles, chapters, proceedings papers in her research field and has been team leader/lecturer/participant in many international congresses. She is member of CIIM Commission (<http://www.umi-ciim.it/>) in UMI (Italian Mathematical Union), the person in charge of: the GeoGebra Institute of Turin, the project of teachers' professional development Piano Lauree Scientifiche in Piedmont; the project Liceo Matematico; the national congress DIFIMA.



Prof. Uri Shafir

Associate professor in the Department of Human Development and Applied Psychology, and Director of Adult Study Skills Clinic at Ontario Institute for Studies in Education at the University of Toronto. His recent research focuses on concept parsing algorithms in various knowledge domains and on pedagogy for deep comprehension of conceptual content. Shafir received a doctorate in mathematical sciences from the University of California at Los Angeles in 1962 and a doctorate in developmental psychology from York University, Toronto, in 1987. Before moving to the University of Toronto, he was founder and director of the Institute of Planetary and Space Science at Tel-Aviv University, and Adjunct Professor at the University of Wisconsin and Columbia University.



Prof. Masha Etkind

Professor in the Department of Architectural Science at Ryerson University. She teaches design, theory and history of Western architecture. Her recent research focuses on conservation of cultural heritage of built form, on language and roots of living architecture in different cultures, and on instruction for deep comprehension of conceptual content in architectural education. Etkind received a professional degree in architecture from St. Petersburg University of Architecture and Engineering, and Masters in Architecture from the University of Toronto. Etkind is a member of the Royal Architectural Institute of Canada.



פרופ' רון קנת

יו"ר קבוצת KPA ועמית מחקר בכיר במוסד נאמן בטכניון. שימש פרופסור מחקר באוניברסיטת טורינו ופרופסור מן המניין באוניברסיטת מדינת ניו יורק-בינגהמטון. חיבר 12 ספרים ומעל 250 מאמרים בנושאי סטטיסטיקה יישומית, ניהול איכות, הוראת הסטטיסטיקה, סקרי שביעות רצון, ניסויים ובקרת תהליכים סטטיסטית. נשיא לשעבר של האיגוד הישראלי לסטטיסטיקה ושל ENBIS, האיגוד האירופאי ליישומי סטטיסטיקה בתעשייה ועסקים. עורך ראשי של האנציקלופדיה המקוונת לסטטיסטיקה של Wiley, StatsRef ושל מספר כתבי עת בין-לאומיים. זכה ב-2013 במדליית גרינפילד של האיגוד האנגלי לסטטיסטיקה על תרומה ייחודית לסטטיסטיקה יישומית, מדליה שמוענקת פעם ב-4 שנים. בעל תואר ראשון במתמטיקה מאימפריל קולג', לונדון, ודוקטורט במתמטיקה ממכון וייצמן.



1. ron@kpa-group.com

פדגוגיה להוראה של מושגים במתמטיקה וסטטיסטיקה, ושיטות לבחינת מידת ההבנה המושגית על בסיס הערכה מעצבת, משמשות אתגר בעל משמעות במדינות ותרבויות שונות. המחקר המוצג כאן הוא תוצאה של שיתוף פעולה בין-לאומי מתמשך בנושאי חינוך בעזרת כלי מתודולוגי חדשני ודידקטי ששמו מרלו (MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Object). מרלו מאפשר הערכה של מידת ההבנה המושגית של לומדים באמצעות ייצוגים חלופיים. כלי זה מספק הזדמנויות להבהרה מושגית וליצירת דיון על מושגים בקבוצות קטנות ובמסגרת כיתתית. פריטי מרלו מספקים למורה גישה חינוכית מודרנית המאפשרת התמקדות במושגי יסוד ובגיבוש גבולות הבנה המבחינים בין חלופות ייצוגיות עם משמעות דומה ובין חלופות עם דמיון בייצוג אבל עם משמעות אחרת. בגישה זו המורה מנחה דיון המכוון לקידום הבנה מושגית ומאפשר הערכה מעצבת המספקת משוב גם ללומדים וגם למלמדים. המאמר יציג את עקרונות מרלו עם מספר דוגמאות. האמירה העיקרית כאן היא שפריטי מרלו ופדגוגיה מבוססת מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת שהוא.

מילות מפתח: הבנה מושגית; הערכה מעצבת; פדגוגיית מרלו; גבולות הבנה.

מבוא

הבסיס לעבודה זו הוא כלי פדגוגי ואמצעי הערכה מעצבת שפיתחו אורי שפריר ומאשה אטקינד עם יישום בתחומי דעת שונים, כולל מתמטיקה וסטטיסטיקה (Etkind, Kenett, & Shafir, 2010). הכלי הדידקטי נקרא מרלו (MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Object). מרלו מאפשר הערכה של מידת ההבנה המושגית באמצעות ייצוגים חלופיים של משפט מטרה. פריטי מרלו הם בסיס לפעילות מובנית שנתמכת באלמנטים פדגוגיים למיניהם. פריט מרלו מכיל חמישה ייצוגים שונים, כמה מהם עם משמעויות שוות ערך למשפט המטרה, וכמה מהם עם משמעות אחרת אבל עם נראות דומה למשפט המטרה.

מאמר זה אינו מתמקד במשמעות של מושגים מתמטיים, נושא שעומד בפני עצמו. דיון מפורט בתחום זה נמצא בספרם של קילפטרין, הוילס וסקובסמוס (Kilpatrick, Hoyle, & Skovsmose, 2005). בדרך כלל קיימת הבחנה בין מעגלי יישום שבהם מושגים מתמטיים מקבלים משמעויות אחרות. בפועל, מושגים המתמטיים משמשים יצורים או אובייקטים תרבותיים המונגשים באמצעות חלופות ייצוגיות (ייצוגים סמיוטיים) (Duval, 2006). מערכות סמיוטיות מסוג זה משמשות אבן יסוד לפעילות מתמטית ולהבנה על רקע מעגלי הבנה מתמטיים (Arzarello, 2006; Johnson-Laird, 1983; Leung, Graf, & Lopez-Real, 2006; Sfard, 2000).

בחינוך מתמטי המבוסס על ייצוגים סמיוטיים, ההתאמה בין ייצוגים חלופיים של אובייקטים מתמטיים ברגיסטרים סמיוטיים, היא אבן יסוד בהבנה המושגית. אחת המטרות בחינוך מתמטי היא להקנות לתלמיד יכולת לעבור מייצוג אחד לייצוג אחר כששניהם עם משמעויות דומות. לדוגמה, הלומד צריך להיות מסוגל לעבור מייצוג של פרבולה בעזרת נוסחה מתמטית לייצוג גרפי. יכולת זו מוגדרת במבחני הערכה בין-לאומיים (TIMSS, PISA) ולאומיים (למשל z באיטליה). חשוב להתמקד ביכולת זו הן בפיתוח תוכניות לימוד וספרי לימוד, והן בהוראה מתמטיקה ולמידתה בכלל, שני תחומי יישום של MERLO.

דובאל (Duval, 2006), מבחין במחקר מקיף בין שני סוגי מעברים בין יחידות רישום בתודעה (רגיסטרים): אלה בין רגיסטרים לסוגיהם שהוא מגדיר כהמרה, ואלה על יסוד אותו רגיסטר שהוא מגדיר כטיפול. מבחינתו, מעברים אלה מספקים את מהות ההבנה המתמטית. בחינת מעברים אלה, מנקודת הראייה הסמיוטית, מציפה **חסימי מעבר** (Duval, 1983). חסמים אלה באים לידי ביטוי כאשר תלמיד מתקשה לזהות את אותו אובייקט מתמטי בייצוגים חלופיים או שאינו מזהה תכונות שונות בייצוג מסוים. פישביין (Fischbein, 1987) חקר את הקושי בזיהוי ייצוגים חלופיים עם משמעות דומה בתחום הלמידה, והוא הסביר את הקושי בהטיה אינטואיטיבית הנשענת על ניסיון מצטבר או חוקים אמפיריים, כגון "אובייקט ספציפי אינו יכול להיות נוכח, בו זמנית, בשני ייצוגים שונים". הטיות מסוג זה מייצרות חסמים בהבנת מושגים מתמטיים למיניהם.

חקירה מעמיקה של **חסימי המעבר** בין ייצוגים מייצוגים שונים מאפשרת הבחנה בין שלושת המצבים האלה:

1. ייצוגים חלופיים בשפות ייצוג למיניהן, כמו למשל נוסחה מתמטית וגרף (ראה דוגמת הפרבולה בהמשך – איור 3).
2. ייצוג אובייקט בשני רגיסטרים דומים אך לא זהים, למשל הספרה "4" בסדרות 1, 2, 3, 4, ... ו-1, 4, 9, 16, ...
3. ייצוגים חלופיים עם משמעות אחרת באותו רגיסטר ייצוגי, למשל $y = x^2$ ו- $y = x$.

התמודדות עם חסמים להבנה של ייצוגים חלופיים משמשת אתגר בעל משמעות לחוקרים בתחום הפדגוגיה המתמטית.

היבט אחר לשימוש בייצוגים חלופיים נובע מהאזנה לשיח מומחים בתחומים מגוונים. אופייני שבשיחות אלה השתמשו בייצוגים חלופיים כדי לקדם הסבר של מושג כלשהו. החלופות מוצגות לעיתים בשפות ייצוג שונות, כגון מלל, דיאגרמות, נוסחאות, תנועת ידיים וכדומה. כמו כן, שיח מומחים מסוג זה משתמש בתבניות שונות, כולל הקשרים ביניהן. בדיון מסוג זה נדרשים יכולת, ניסיון והבנה המאפשרים הצגת מושגים למיניהם בחלופות ייצוגיות עם משמעות דומה.

פריטי מרלו מספקים למורה כלי מעשי וקונקרטי המאפשר התערבות דידיקטית בכיתה כדי לקדם במוצהר הבנה מושגית. כל זאת מתוך ניגוד לגישה המקדמת הבנה מושגית כתוצר משני ולא כמטרה חינוכית בפני עצמה.

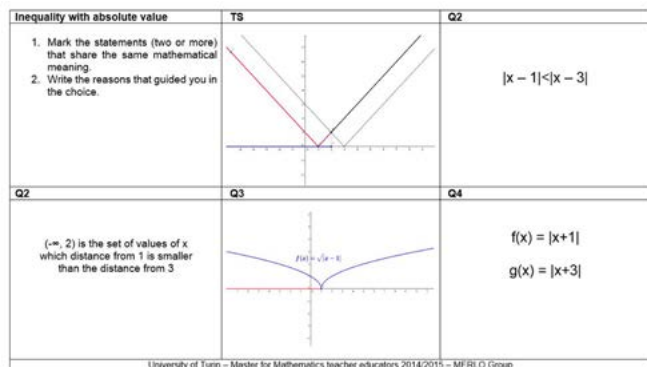
בהמשך נציג מתודולוגיה דידיקטית המבוססת על פריטי מרלו. בסעיף 2 נציג ספציפית פיתוח פריטי מרלו לשימוש בהוראת המתמטיקה בחטיבות עליונות בבתי ספר באיטליה. סעיף 3 עוסק בשימוש בפריטי מרלו ככלי דידיקטי בעת דיונים יחידניים וקבוצתיים בכיתה וכאמצעי להערכה מעצבת המספקת משוב ללומדים ולמורים. בסעיף 4 נציג מסקנות מגוונות הנובעות מהניסיון הנרכש בשימוש בפריטי מרלו, כולל היכולת ליישם את הגישה לרוחב. האמירה העיקרית שלנו היא שפריטי מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת.

תכנון מסגרת פדגוגית על בסיס פריטי מרלו

לפני שנציג את התכנון והשימוש במרלו, נפרט את התכולה של פריטי מרלו: בשלב הראשון, תחום הדעת שמשמש נשוא העניין מפורק ליחידות המשמשות משפטי מטרה (TS-Target Statements). בעיקרון, תחום הדעת מורכב מאוסף של משפטי מטרה שבכללותם מספקים כיסוי שלם לתחום הדעת; בשלב השני מפתחים חלופות

בעת לימודי הוראה מתקדמים, המיועדים למורים מנוסים שמגיעים לאוניברסיטה בטורינו ללימודי תואר שני, מתקיימת סדנה לפיתוח פריטי מרלו. לימודים אלה מעשירים את בסיס הנתונים של פריטי מרלו המותאמים להוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה בבתי ספר באיטליה כולה (למידע על כך ראה, Arzarello, Kenett et al., 2015; Arzarello, Robutti, & Carante, 2015).

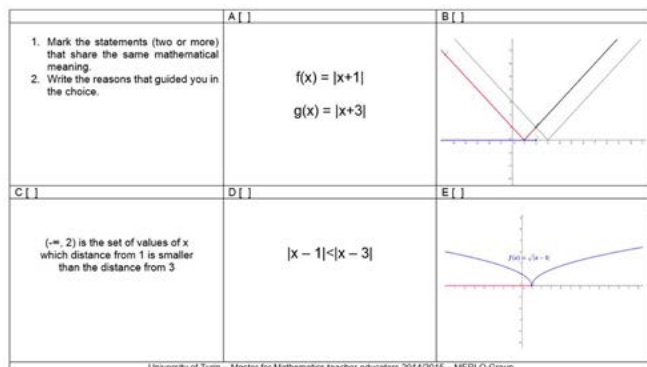
פריט המרלו באיור 4 משמש דוגמה לפריט מרלו שפותח במסגרת הסדנה הנזכרת לעיל:



איור 4: פריט מרלו בתחום אלגברה בנושא אי שוויון בערכים מוחלטים (פריט מפוענח לטובת המורה)

חשוב להדגיש שאין בייצוגים החלופיים ייצוג שגוי. יחידות 3Q ו-4Q נמצאות מחוץ לגבול ההבנה של משפט המטרה, ולכן מתחמים את ההבחנה בין חלופות עם משמעות שווה וחלופות עם משמעות שונה. גבול זה נקרא באנגלית (BOM) Boundary of Meaning.

סיווג יחידות מרלו לקבוצות שבאיור 1 אינו שקוף למשיב שמתבקש לציין חלופות ייצוגיות עם משמעות דומה על בסיס חלופות ייצוגיות המסומנות סימון סתמי A-E, ראה איור 5.



איור 5: פריט מרלו בתחום אלגברה בנושא אי שוויון בערכים מוחלטים (פריט לתלמיד)

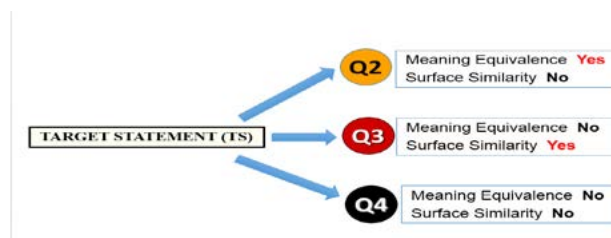
פריטי מרלו מאפשרים הבחנה מובנת של מידת ההבנה של הלומד ומספקים משוב למורה על איך התקבלו בידי התלמידים כל מיני נושאים בתוכנית הלימודים. משוב זה חשוב גם למתכנני הקורסים, חומרי הלימוד ושיטת העברה של חומר לימודי זה או אחר. ראייה משולבת זו מספקת מסגרת כוללת הנקראת פדגוגיה מבוססת מרלו. הנספח מציג דוגמאות לפריטי מרלו המשמשים בהוראת טריגונומטריה וגאומטריה.

פדגוגיה מבוססת מרלו

השימוש בפריטי מרלו אינו שלם ללא תפיסה חינוכית הולמת. בסעיף זה נציג כמה דוגמאות יישום הנובעות מניסיון היישום באיטליה. מרכיב חשוב בפדגוגיה מבוססת מרלו הוא קיום חידון שבועי והכללת בוחן מרלו בבחינות אמצע שנה וסוף שנה. חידון שבועי דורש 20 דקות בערך, וכולל את ארבעת השלבים האלה

ייצוגיות למשפט המטרה. ייצוגים עם משמעות דומה, בשפות ייצוג שונות, נקראים 2Q. ייצוגים הנראים דומים למשפט המטרה אבל עם משמעות שונה נקראים 3Q. ייצוגים עם נראות ומשמעות שונה ממשפט המטרה נקראים 4Q.

תבנית לפיתוח יחידות מרלו המרכיבות פריט מרלו, מוצגת סכמטית באיור 1. דוגמאות ליישום התבנית בתוכנית לימודי המתמטיקה באיטליה אפשר למצוא בתוך מאמרו של רובוטי (Robutti, 2015).



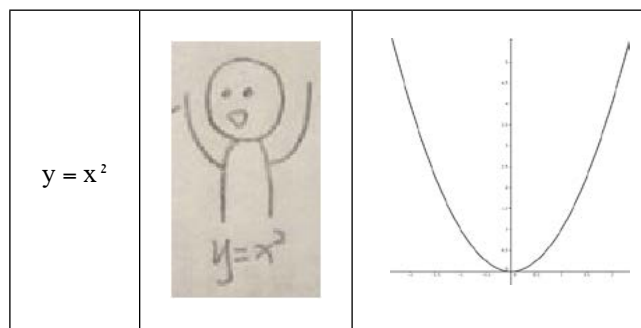
איור 1: תבנית לסוגי יחידות המשתלבות בפריט מרלו

דוגמה למשפט מטרה ושני ייצוגים מסוג 3Q בשפה ייצוגית מסוג מלל מפורטת באיור 2.

3Q	3Q	TS
הנער הצעיר הביט באיש אשר שיחק עם הכדור	האיש ששיחק עם הכדור הסתכל על הנער הצעיר	האיש הסתכל על הנער הצעיר אשר שיחק עם הכדור

איור 2: חלופות ייצוגיות למשפט מטרה עם נראות דומה ומשמעות שונה (יחידות 3Q)

ייצוגים חלופיים עם משמעות שווה מבוססים על שימוש בשפות ייצוג מגוונות. איור 3 מציג דוגמה מסוג זה בהקשר מתמטי.



איור 3: חלופות ייצוגיות למשפט מטרה (בצד ימין) עם נראות שונה ומשמעות דומה (יחידות 2Q)

תכנון פריט מרלו מבוסס על שילוב יחידות מסוגים 2Q, 3Q ו-4Q הסובב על משפט מטרה מסוים (TS).

פריט מרלו כולל תמיד ייצוג של יחידת TS, ולפחות ייצוג אחד מסוג 2Q ו-3Q.

להלן הנחיות למשיב שמופיעות בכל פריט מרלו:

לפחות לשניים – אולי ליותר משניים – מבין חמשת המשפטים האלו יש משמעות שווה-ערך.

1. סמן את כל המשפטים בעלי משמעות שווה-ערך – אבל רק אותם!

2. נסה בקיצור את הסיבות שהביאו אותך לבחור במשפטים אלו. במקום השמור להנחיות הנ"ל, יש שלוש שורות ריקות המאפשרות למשיב לציין בכתב יד את הסיבות שהביאו אותו לציין את הבחירה שביצע.

(בערך חמש דקות כל אחד):

שלב 1 – דיון בקבוצה קטנה: הקרנה של פריט מרלו כאשר התלמידים מתבקשים ליצור קבוצות דיון קטנות ולדון במרלו המוקרן.

שלב 2 – תגובת הפרט: כל תלמיד מסמן לבד לפחות 2 מתוך 5 יחידות בפריט. הנתונים מועברים בהודעות כתובות או באמצעי אחר והמורה מציגה אותם במרוכז. כמו כן התלמיד ממלא כמה שורות עם הסבר לבחירה שביצע.

שלב 3 – דיון בתוצאות: המורה מנהל דיון קבוצתי על בסיס תשובות התלמידים, כולל התיאור המילולי של המושגים הרלוונטיים, וכן שאלות על המשמעות של כל ייצוג.

שלב 4 – דיון בכיתה: המורה ממשיך את הדיון ומתמקד בסיבות בחירה או אי בחירה של כל אחת מחמש יחידות המרלו על בסיס תובנות משותפות.

בחנית הסימונים ב-5 היחידות עם הייצוגים השונים מאפשרת חישוב ציון בין 0 ל-5, כאשר סימון של רק TS ו-2Q מזכה בחמש נקודות. סימון של יחידות 3Q ו-4Q מוריד מהניקוד. את משפטי המלל נהוג להעריך עם ציון המבטא את בהירות ההסבר בעזרת ציון שגם הוא בין 0 ל-5.

דוגמה לציונים מפריטי מרלו בעשרה תחומי דעת במתמטיקה מופיעה באיור 6: המשטחה N מייצג את מספר המשיבים; המשטחה *N נוגע למספר התלמידים שלא השיבו שמספר התלמידים בכיתה הוא $N + N$; העמודה Mean מציגה את הציון הממוצע לכיתה כששתי העמודות האחרות מבטאות ערכי מינימום ומקסימום.

Variable	N	N*	Mean	Minimum	Maximum
Percentages	42	2	3.500	0.000	5.000
Fractions	29	0	4.172	2.000	5.000
Powers	49	1	2.531	1.000	5.000
Transition	43	1	3.930	2.000	5.000
Line	38	7	4.158	0.000	5.000
Inverse proportions	42	0	3.762	1.000	5.000
Circumference	44	2	3.500	1.000	5.000
Angle	18	1	4.444	2.000	5.000
Function	24	0	3.167	1.000	5.000
Equations	23	1	3.130	2.000	5.000

N* represents missing data

איור 6: ציונים לפריטי מרלו בעשרה תחומי דעת במתמטיקה

מאיר 6 עולה שרמת ההבנה שהושגה בתחום **הזוויות** גבוהה במיוחד (ממוצע 4.44). כנגד זה, תחום **החזקות** קיבל ממוצע נמוך במיוחד (2.53). כפי שצוין, במשוב זה יש מידע בעל חשיבות גדולה למורה ולמתכנני חומרי הלימוד.

פדגוגיית ההוראה על בסיס פריטי מרלו גמישה ומאפשרת התאמה לנושא ולכיתה. להלן דוגמה לתבנית הוראה בכיתה הכוללת:

א. עבודה עצמית: כל תלמיד מקבל שניים עד ארבעה פריטי מרלו על גיליונות מודפסים. לכל תלמיד יש בערך 20 דקות למחשבה ולסימון פריט המרלו. לאחר מכן המורה אוסף את הגיליונות.

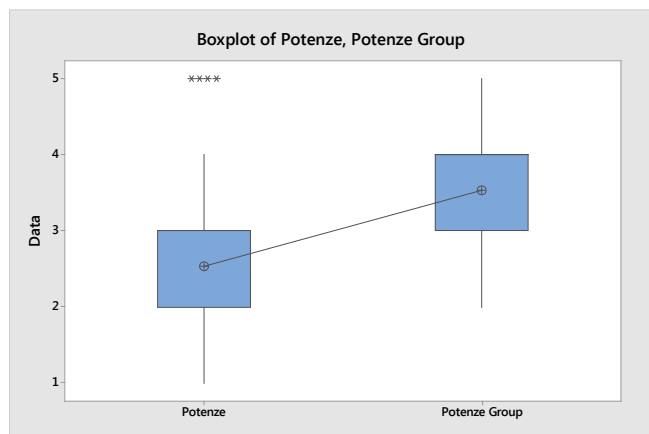
ב. עבודה קבוצתית: התלמידים מחולקים לקבוצות ודנים בתשובות האישיות שסימנו בשלב הקודם. כל קבוצת תלמידים מקבלת שוב את אותם פריטי מרלו ללא סימון. לקבוצות יש עשרים דקות בערך כדי להשוות בין התשובות האישיות ולנהל דיון בעניין זה, ולאחר סיום הדיון, כל תלמיד מסמן תשובה סופית. חשוב שהתלמידים ירגישו חופשי לדבר על הרעיונות שלהם זה עם זה ולדון בהם, כי מניסיון עדיף ליצור קבוצות

הומוגניות. המורה אוסף את פריטי המרלו מכל תלמיד בסיום העבודה הקבוצתית.

ג. דיון מסכם: עשרים הדקות האחרונות של השיעור מוקדשות לדיון מסכם. המורה מציג לכולם את התשובות של כל קבוצה, ובדיון נבחנות נקודות מבט אחרות. המטרה הסופית היא לא להציג תשובות נכונות, אלא להדגיש את הרעיון של גבול של משמעות (BOM) הסובב על משפט מטרה וייצוגים אחרים עם משמעות מתמטית שוות ערך.

באיור 7 מוצגת השוואת ציוני מרלו בתחום **החזקות** בסיום העבודה העצמית (נתונים אלה הוצגו באיור 6) ולאחר העבודה הקבוצתית. העבודה בקבוצה העלתה את הציונים בנקודה שלמה כאשר מובהקות השיפור עם ערך P קטן מ-0.004 (תוצאה מובהקת מאוד). ממצא זה מראה איך במקרה זה עבודה קבוצתית מקדמת הבנה לעומק. בפועל, לעבודה הקבוצתית הייתה השפעה רבה מבחינה פדגוגית.

השימוש בפריטי מרלו ככלי לקידום פעילות בקבוצה, ממחיש את חשיבות למידה מובנית (Vygotsky, 1934). נוסף על כך, פריטי מרלו מספקים נתונים להערכה מעצבת שמשמשת משוב חשוב הן למורים והן לתלמידים.



איור 7: התפלגות ציוני מרלו בנושא חזקות בעבודה עצמית (שמאל) ולאחר עבודה בקבוצה (ימין)

באופן ספציפי יותר אפשר לחשב ציון נפרד לפריטי 2Q ו-3Q. ציונים נמוכים בחתך זה משקפים כל מיני קשיים בהבנה המושגית:

א. ניקוד נמוך ב-2Q מציין כי הלומד נכשל בקביעת הגבול של משמעות של מושגים מתמטיים הסובבים על ייצוגים עם משמעות שוות ערך למשפט מטרה. חלופות אלו אמורות להיות מאובחנות כבתוך גבול המשמעות (BOM).

ב. ניקוד נמוך ב-3Q מציין כי הלומד לא הבחין כראוי בייצוגים חלופיים עם דמיון בנראות למשפט המטרה אבל עם משמעות שונה. חלופות אלה אמורות להיות מחוץ לגבול המשמעות (BOM).

להלן מופיעים כמה ציטוטים מתוך שיחות בין תלמידים שהתקיימו בקבוצת דיון. הדוגמאות נלקחו מתוך דיון קבוצתי בין שלושה תלמידים (להלן "א", "ב" ו-"ג") שפותרים את פריט המרלו שמוצג באיור 5:

א: "מצאתי מיד את דמיון בין D ו-B: אי השוויון והייצוג הגרפי. בגרף עם הערך המוחלט ב-B החלק של מינוס אינסוף ל-2 מודגש. אז קישרתי את B ל-C."

ב: "בדיוק, עשיתי את אותו הדבר."

ג: "אה, אני לא סימנתי את C. למה סימנתי את זה?"

א: "כי כתוב ... התלמיד מקריא את הטקסט ביחידה C (ומצביע על B)."

ג: "כן, אבל אני לא באמת יודע למה C קשור ל-D. הוא שווה ערך ל-D ו-B."

א: "C הוא ההסבר במילים של אי-השוויון."

ב: "כאן (מצביע על D) אתה חייב למצוא את x לפתור את אי-השוויון הזה."

א: "חשבתי על C כשראיתי שיש את אותו דבר."

ג: "יש דרכים שונות לראות את אותו הדבר."

א: "זה מאוד נחמד כשאתה מבין את זה."

ג: "כן."

את הניתוח הסמיוטי אפשר למקד בשפות הייצוג ובמשמעות מושגית לפי משפטי המטרה. בעת תהליך הלמידה ההישענות רק על הסטימולוס הוויזואלי אינה מספקת עקב הטיה מובנית (Husserl, 1931; Levinas, 1989). לפיכך האתגר של הלומד הוא לבחון ייצוגים בהקשר תרבותי עם מטרה ספציפית (Radford, 2010).

שילוב שפות ייצוג מגוונות מאפשר למידה לעומק של ביטויים מתמטיים מורכבים כפי שציין דובאל (Duval, 2006) במחקרו. כמו כן, קלמן, מסאי וסון (Kellman, Massey, & Son, 2010) הראו שהנחיה נכונה מאפשרת לתלמיד לזהות מהר וכיאות את התכונות המאפיינות ביטויים מתמטיים. בסעיף להלן נציג מסקנות מיישום פריטי מרלו ככלי מתודולוגי בהוראת המתמטיקה עם השלכות על תחומים אחרים.

מסקנות מיישומי מרלו

בסעיף 2 הוצגה המסגרת הכללית של מרלו, כולל פיתוח פריטי מרלו המשמשים בהוראת המתמטיקה. בסעיף 3 הוצג השימוש במתודולוגיה מבוססת מרלו ככלי לפעילות קבוצתית ולהערכה מעצבות. נציג כאן כמה תובנות מתוך הניסיון שהצטבר באיטליה, שהשפיעו על תחומי יישום אחרים.

מתודולוגיית מרלו מאפשרת טיפול דידקטי בחסמי מעבר. במובן זה, מרלו משמשת פדגוגיה ייחודית ועד כה לא הוצגה חלופה מעשית המאפשרת זאת. השימוש בפריטי מרלו גורם לתלמיד להתמקד במעברים בין רגיסטרים ובכך לקדם חשיבה מושגית מתוך דיון ממוקד בנושא. התמודדות פראקטיבית חדשנית זו הביאה לידי תוצאות מרשימות בהמחשה מחודשת מהתחום הפנומנולוגי שהעדיף לדון במישרין בחסמי מעבר (Roth, 2001).

סיבות השורש הקוגניטיביות לקשיים בהתמודדות עם חסמי מעבר משוקפות היטב במרכיבים המגוונים של פריטי מרלו. מכאן שפדגוגיה מבוססת מרלו מסייעת מאוד לתלמיד בהתמודדות זו. כמו כן המשוב המתקבל מההערכה המעצבת שמספקים ציוני מרלו משמש משוב חשוב למורה.

דובאל (Duval, 1983, 2006) טוען כי תהליכי טרנספורמציה והמרה בין רגיסטרים מגוונים של מושגים ואובייקטים מתמטיים ובכל אחד מהם מספקים את הליבה של ההבנה המתמטית. שימוש בפריטי מרלו מספק סביבה דידקטית המכוונת לקידום הבנה זו.

נוסף על כך, תוכניות הערכה כמו פיזה שבאות לבחון יכולות של תלמידים באוריינות מתמטית, ממקדות במסוגלות התלמיד לבחור בייצוג נכון של אובייקטים מתמטיים כדי לפתור בעיות או לאפשר דיון בנושא מתמטי. הגישה שמייצגים פריטי מרלו תואמת גם את היוזמה בארה"ב שמקדמת שימוש בקבוצות דיון קטנות (Watkins & Mazur, 2013).

השימוש בפריטי מרלו ובפדגוגיה מבוססת מרלו, התרחב בשנים האחרונות למספר רב של יישומים. להלן רשימה חלקית:

1) האקדמיה הרוסית למדעים (מתמטיקה, פיזיקה, ביולוגיה);
2) אוניברסיטת טורונטו (הכשרת המורים, פסיכולוגיה התפתחותית, ניהול פרויקטים);
3) מכללת ג'ורג' בראון (אנגלית כשפה שנייה);
4) מרכז למידה עצמאית של טלוויזיית אונטריו (מתמטיקה);
5) מרכז אונטריו למצוינות בייצור (ניהול, עסקים);
6) אוניברסיטת טורינו (תוכניות מתקדמות בהכשרת מורים). (למידע נוסף ראה Arzarello, Robutti et al., 2015; Etkind & Shafrir, 2013; Shafrir & Etkind, 2006).

בדוגמה אחרת משנת 2002, מאשה אטקינד מלמדת אדריכלות באוניברסיטת ריירסון בטורונטו בעזרת מרלו באמצעות מערכת לומדה מקוונת בשם **ברייטספייס**.

לסיום, וכפי שצוין בתקציר, האמירה המרכזית שלנו היא שפריטי מרלו ופדגוגיה מבוססת מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת שהוא.

רשימת מקורות

- Arzarello, F. (2006). [Semiosis as a multimodal process](#). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue*, 267-299.
- Arzarello, F., Kenett, R. S., Robutti, O., Shafrir, U., Prodromou, T., & Carante, P. (2015). Teaching and assessing with new methodological tools (MERLO): A new pedagogy? In M. A. Hersh & M. Kotecha (Eds.), *Proceedings of the first IMA international conference on barriers and enablers to learning maths: Enhancing learning and teaching for all learners* (pp. 1-8). Glasgow, Scotland.
- Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: A new tool and a new challenge in mathematics teaching and learning. In K. Beswick, T. Muir, & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 57-64). Hobart, Australia: PME
- Duval, R. (1983). L'obstacle du dedoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14(4), 385-414. doi: 10.1007/BF0036823
- Duval, R. (2006). [A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics](#). *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z
- Etkind, M., Kenett, R. S., & Shafrir, U. (2010). [The evidence based management of learning: Diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects](#) (MERLO). In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS)*. Ljubljana, Slovenia.
- Etkind, M., & Shafrir, U. (2013). [Teaching and learning in the digital age with pedagogy for conceptual thinking and peer cooperation](#). In L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of 7th International Technology, Education and Development Conference (INTED)* (pp. 5342-5352). Valencia, Spain.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.
- Husserl, E. (1931). *Ideas: General introduction to pure phenomenology* (trans. W. R. Boyce Gibson). New York: Macmillan.

Robotti & C. Sabena (Eds.), *Proceedings of the 67th Conference of the Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Aosta, Italy.

Roth, W. M. (2001). Situating cognition. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 27-61. doi: 10.1207/S15327809JLS10-1-2_4

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shafir, U., & Etkind, M. (2006). E-learning for depth in the semantic web. *British Journal for Educational Technology*, 37(3), 425-444. doi: 10.1111/j.1467-8535.2006.00614.x

Vygotsky, L. (1934). *Pensiero e linguaggio*. Roma: Laterza.

Watkins, J., & Mazur, E. (2013). Retaining students in science, technology, engineering, and mathematics (STEM) majors. *Journal of College Science Teaching*, 42(5), 36-41.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kellman, P., Massey, C., & Son, J. (2010). Perceptual learning modules in mathematics: Enriching student's pattern recognition, structure extraction, and fluency. *Topics in Cognitive Science*, 2(2), 285-305. doi: 10.1111/j.1756-8765.2009.01053.x

Kilpatrick, J., Hoyle, C., & Skovsmose, O. (Eds.). (2005). *Meaning in mathematics education*. Springer: New York, NY.

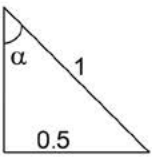
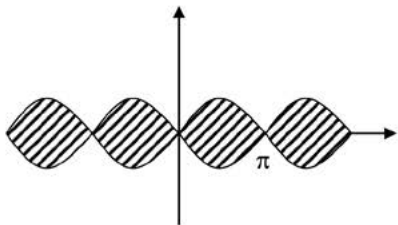
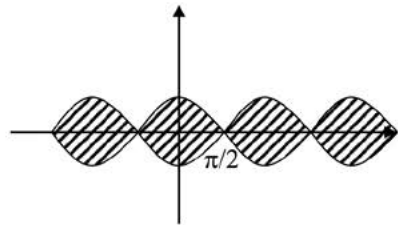
Leung, F.K.S., Graf, K., & Lopez-Real, F. (Eds.). (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West: The 13th ICMI study*. New York: Springer.

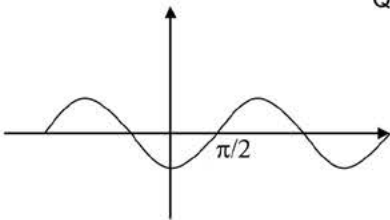
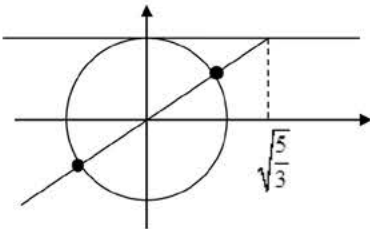
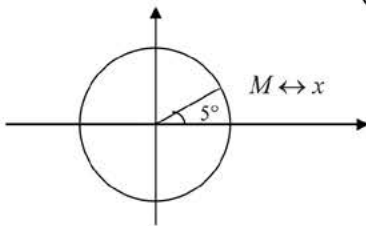
Levinas, E. (1989). *The Levinas reader* (Sean Hand, Ed.). Oxford, UK: Blackwell.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.

Robutti, O. (2015). Mathematics teacher education in the institutions: New frontiers and challenges from research. In E.

נספח

Topic: Elementary trigonometric equations	$x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$	T	Sine of x is equal to (-1/2).	Q2
x is either equal to -30° accurate to $2\pi k$ or equal to -150° accurate to $2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$	Q3	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Q3
Topic: Reduction formulas	$x = \frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \dots \sin 90^\circ}{\sin 91^\circ \cdot \sin 92^\circ \dots \sin 179^\circ}$	T	x is equal to 1	Q2
 $x = 2\sin \alpha$	$x = \frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \dots \sin 45^\circ}{\cos 46^\circ \cdot \cos 47^\circ \dots \cos 89^\circ}$	Q3	$x = \operatorname{ctg} 1^\circ \dots \operatorname{ctg} 179^\circ$	Q3
Topic: Set of points in the plane, which are concerned with trigonometric functions		T	M – is a set of points, which are the middles of segments with the ends belonging to a sine graph	Q2
$x = (a, b) \in M \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 : a = \frac{x_1 + x_2}{2}; b = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$		Q3	M – is a set of points with coordinates (a,b), such that equation $b \sin x = \cos a$ is solvable	Q4

Topic: Graphs and reduction formulas 	A graph of a function is symmetric in abscissa axis with respect to a cosines graph	
$y = \sin(x + 3\pi/2)$	$y = \sin(x - 3\pi/2)$	$y = \sin(-x)$
Topic: Relations between trigonometric functions	$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$	
$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	Modulus of sine is equal to $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
Topic: Radian measure of angle	Angle x is equal to 5°	$x = \frac{\pi}{36}$
There exists an integer k such that $x = 5 + 2\pi k$	$x = 5$	
Topic: Functions of a half argument	Cosine of an angle α is equal to $-\frac{3}{5}$	$ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$
Modulus of cosine of an angle α is equal to $\frac{3}{5}$.	$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$
Topic: Sign of trigonometric functions	x belongs to the third quadrant	$x = 10$
$x = -95^\circ$	$\sin x < 0, \cos x < 0$.	Tangent x is positive
Topic: Definition of sine and cosine	$\sin x = t$	The ordinate of a point corresponding to number x is equal to t
The ordinate of a point corresponding to number $x - \pi$ is equal to -t	If the ordinate of a point corresponding to number y is equal to t, then there exists an integer k such that $y = x + 360^\circ \cdot k$.	$\cos x = \sqrt{1 - t^2}$

כיצד תופסים מורים למתמטיקה בתיכון המעידים על עצמם כי הם מתקשים לראות במרחב, את הוראתם בנושא הגאומטריה במרחב

מירלה יודר



ד"ר מירלה יודר

בוגרת תואר ראשון במתמטיקה באוניברסיטת תל-אביב, תואר שני בחינוך מתמטי באוניברסיטה הפתוחה ותואר שלישי בפקולטה לחינוך למדע ולטכנולוגיה בטכניון.

מרצה במכללת שאנן ובפקולטה לחינוך למדע ולטכנולוגיה בטכניון.

תחומי מחקר עיקריים: תפיסה תלת-ממדית בהוראת גאומטריה במרחב, התפתחות מקצועית של מורים ומורי מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה ותהליך התפתחותן של קהילות מחקר המשלבות מורים למתמטיקה מהשטח עם חוקרים בחינוך המתמטי.

תקציר

מתוך הבנה כי חשוב לפתח כישורים מרחביים אצל התלמידים, תוכנית הלימודים במתמטיקה בתיכון בכל רמות הלימוד (3-5 יח"ל), כוללת את נושא הגאומטריה במרחב. מתוך כך נדרשים המורים למתמטיקה בתיכון להיות בעלי יכולת ויזואליזציה מרחבית מפותחת, הנחוצה לשם הוראת נושא זה. אולם יכולת הוויזואליזציה המרחבית והיכולת הלוגית-מתמטית אינן בהכרח חופפות זו לזו, ולעיתים מורים, אף ותיקים ומוכשרים, שהמתמטיקה היא תחום הידע שהם בקיאים בו, מעידים על עצמם כי הם מתקשים "לראות" במרחב. מורים אלה סובלים מתחושת מסוגלות עצמית נמוכה ומדימוי מקצועי ירוד, והם מצויים בתחושה של תסכול, חוסר אונים וחרדה בכל פעם שהם ניצבים לפני משימה המערבת גאומטריה במרחב, והדבר משליך על ההוראה בכיתות. מטרת המחקר המוצג במאמר לבחון "בזכוכית מגדלת" את המציאות בשיעורי גאומטריה במרחב, מתוך חשיפת תפיסותיהן ותחושותיהן של שלוש מורות למתמטיקה, המעידות על עצמן כי הן מתקשות "לראות" במרחב, החל מחוויותיהן כתלמידות וכלה בהתמודדות שלהן עם ההוראה העכשווית ועם השימוש באמצעי המחשה טכנולוגיים בתלת-ממד. מדובר במחקר איכותני שאינו יוצא מהשערות ברורות, אלא מנסה ללמוד, לאפיין ולהגיע לידי תובנות על המציאות באמצעות ראיונות עומק, יומנים מתמטיים, תצפיות ודיווחים רפלקטיביים של המורות עצמן. הדיון מתמקד במספר הבחנות הקשורות בהיבט הרגשי, בדרכי ההתמודדות ובתפיסת הטכנולוגיה.

מילות מפתח: גאומטריה במרחב; יכולת מרחבית; יכולת לוגית-מתמטית; דימוי עצמי מקצועי; תחושת מסוגלות עצמית.

מבוא

תאוריית "האינטליגנציות המרובות" של גרדנר (Gardner, 1983), מציבה את יכולת הוויזואליזציה המרחבית ביסוד התפתחותן של תאוריות מדעיות עיקריות, המתבססות על שימוש במודלים מרחביים חזותיים לצורך עיבוד מידע והמחשה וויזואלית של תהליכים מורכבים. מקגי (McGee, 1979) הגדיר כישורי ויזואליזציה

שיש ללימוד נושא הגאומטריה במרחב בבית הספר (Ferrara & Mammana, 2014).

כמו כן כדי לתרום להתפתחות יכולות מרחביות אצל התלמידים, חשוב שהמורים למתמטיקה עצמם יהיו בקיאים בתחום הגאומטריה המרחבית ובעלי מיומנויות מרחביות מפותחות. הלימודים המקצועיים וההכשרה של מורי המתמטיקה בישראל מדגישים מאוד את יכולתם הלוגית-מתמטית. מחקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית הראו כי יכולת הוויזואליזציה המרחבית והיכולת הלוגית-מתמטית אינן בהכרח חופפות זו לזו (Friedman, 1995; Gardner, 1983; Mohler, 2008; Tuvi-Arad & Gorsky, 2007). במילים אחרות, יכולת לוגית-מתמטית גבוהה אינה מראה בהכרח יכולת מרחבית גבוהה, ממש כשם שיכולת מרחבית גבוהה אינה מבטיחה יכולת לוגית-מתמטית תואמת. כיוון שהדרישות המתמטיות הגבוהות אינן ערובה למיומנויות מרחביות מפותחות, כמה מהמורים, אפילו מורים למתמטיקה המומחים בתחום הידע שלהם, מתקשים "לראות" במרחב. חוקרים מצאו כי יכולת המרחבית האינדיבידואלית של מורים למתמטיקה משליכה על תחושת המסוגלות העצמית שלהם ועל יעילותם המקצועית (פסקין ומלאת, 1999), ומשתקפת בהוראת נושא הגאומטריה במרחב בכיתתם (Kahle, 2008; Ramirez, 2008; Gunderson, Levine, & Beilock, 2012). מורים בעלי יכולת מרחבית נמוכה סובלים מתחושת מסוגלות עצמית נמוכה ומדימוי מקצועי נמוך; הם מרגישים מתוסכלים, חסרי ישע וחרדים בכל פעם שהם עומדים לפני משימה שמעורבת בגאומטריה מרחבית, ויש לכך השלכות שליליות על ההוראה בכיתה (פסקין ומלאת, 1999).

בעיית המחקר

כאמור, במהלך לימודיהם והכשרתם המקצועית של מורי מתמטיקה מושם דגש רב על יכולת לוגית-מתמטית. עם זה היותם מורים מוכשרים במתמטיקה אינה הופכת אותם אוטומטית לבעלי יכולת מרחבית גבוהה הנחוצה להוראת הגאומטריה במרחב, בו בזמן שתוכנית הלימודים במתמטיקה בתיכון ותוכנית ההיבחנות בבחינות הבגרות מחייבות גם מורים המתקשים "לראות" במרחב, ללמד גאומטריה במרחב. הדבר מעלה תהיות באשר לאופן שבו נוגע היעדר היכולת של המורה לראות במרחב בטיב הוראתו, בתחושת המסוגלות העצמית המקצועית שלו כמורה, בדימוי העצמי שלו בכיתה ובהתמודדות של תלמידיו עם נושא הגאומטריה במרחב. מעניין להבין כיצד מורה המעיד על עצמו כמתקשה "לראות" במרחב, תופס את התנסותו בנושא הגאומטריה במרחב כתלמיד, לעומת התנסותו העכשווית בהוראת הנושא, וגם כיצד הוא תופס את התנהלותו בסביבת למידה שבה הוא יכול להשתמש באמצעי המחשה טכנולוגיים.

מטרת המחקר

מחקר זה צמח מתוך ההכרה כי כדי לקדם את הוראת הגאומטריה במרחב כחלק מהוראת המתמטיקה, חשוב לבחון ולהבין לעומק את נקודת המבט של המורה למתמטיקה על הוראת גאומטריה במרחב, במיוחד של זה המתקשה בראייה מרחבית. מתוך כך, מטרת המחקר היא לאפיין את התפיסות של מורים למתמטיקה המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, בעניין מקצועיותם כמורים, הוראתם את נושא הגאומטריה במרחב בכיתות והתנהלותם בסביבת למידה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים.

שאלות המחקר

• כיצד תופסים מורים למתמטיקה את הקושי שלהם לראות במרחב,

מרחביים כמיומנויות שכליות המאפשרות ביצוע של מניפולציות מנטליות, כגון סיבוב, עיוות, הזזה או היפוך של ייצוגים תמונתיים לאובייקטים תלת-ממדיים. בעידן המודרני, מיומנויות אלו חיוניות לא רק לביסוס ההבנה והשליטה בנושאים מדעיים מורכבים, אלא גם לתפקוד ההולם של הפרט ברמה האינטלקטואלית היום-יומית (McGee, 1979). מתוך כך תוכניות הלימודים במתמטיקה, החל בגיל הרך, דרך בית הספר היסודי וכלה בחטיבת הביניים והתיכון, מדגישות את הנחיצות שבלמוד נושא הגאומטריה במרחב כאמצעי לפיתוח כישורי ויזואליזציה מרחביים (Ferrara & Duval, 2003; Mammana, 2014; McGee, 1979; Parzysz, 1988).

המכשולים ללימוד גאומטריה מרחבית תועדו ונחקרו בכמה מדינות. כך למשל, מצאו פרארלו, ממאנה ופניסי (Ferrarello, Mammana, & Pennisi, 2014), כי באיטליה יש נטייה לדחות את הוראת הגאומטריה במרחב לסוף שנת הלימודים, וללמד את הנושא בשטחיות בלבד, אם בכלל מגיעים אליו. לדעתם, מצב זה התפתח כתוצר של דרישות נמוכות בבעיות הנדסת המרחב בבחינות הסופיות באיטליה. בקו (Bakó, 2003) מביאה במאמרה את תוצאות סקר שעשה משרד החינוך הצרפתי, המראה כי נושא הגאומטריה במרחב נכלל בין הנושאים המתמטיים המרתיעים ביותר את הלומדים ואת המורים כאחד, כאשר רק כ-10% מהמורים דיווחו כי הם אכן מלמדים גאומטריה מרחבית בכיתות, בעוד האחרים נמנעים מללמד את הנושא באמתלות למיניהן. בישראל, התלמידים נחשפים לנושא הגאומטריה במרחב כבר מגיל הגן. מבנה תוכנית הלימודים במתמטיקה, כמו מבנה בחינות הבגרות, כמעט שאינו מאפשר הימנעות מהוראת הגאומטריה במרחב, ומחייב את מורי המתמטיקה ללמד את הנושא בכל רמות הלימוד (3-5 יח"ל). עם זאת ההישגים הנמוכים של תלמידי תיכון ישראליים בשאלות המרחב, הן בבחינות הבגרות והן במבחני PISA (OECD, 2007; OECD, 2006), מעידים כי גם בישראל ההוראה והלמידה של הגאומטריה במרחב מזמנות אתגרים (פסקין ומלאת, 1999).

בקו (Bakó, 2003) עומדת על הקושי של מורים ותלמידים רבים "לראות" במרחב. לדעתה, קושי זה הנובע מן הצורך לדמיין סיטואציות גאומטריות תלת-ממדיות מתוך שרטוטים דו-ממדיים משוטחים על גבי הלוח, הדף בספר או גיליון הבחינה, הוא אחד הקשיים העיקריים בהוראה ובלמידה של גאומטריה במרחב (Bakó, 2003). השימוש בשרטוטים דו-ממדיים לתיאור סיטואציות גאומטריות תלת-ממדיות מסתמך על ההנחה הנאיבית כי לקוגניציה האנושית יכולת גבוהה של זיהוי תבניות וסינתזה, המאפשרת להשלים בנקל אינפורמציה שאבדה במעבר מתלת-ממד אל דו-ממד (Gutiérrez, 1996). אולם לומדים רבים אינם מודעים כלל לאובדן המידע, ונמצאים באשליה שהשרטוט הדו-ממדי אכן מייצג נאמנה את האובייקט התלת-ממדי (Gutiérrez, 1996; Parzysz, 1988). מחקרים אמפיריים רבים הראו כי הוויזואליזציה של מצבים גאומטריים תלת-ממדיים מתוך שרטוטים משוטחים במישור הדו-ממדי של הדף אינה קלה וטבעית ללומד (Bakó, 2003; Christou, 2005; Pittalis, Mousoulides, & Jones, 2005; Gutiérrez, 1996; Kali & Orion, 1996; McGee, 1979; Parzysz, 1988; Yeh & Nason, 2004; Tuvi-Arad & Gorski, 2007; Widder & Gorsky, 2013; Widder, Berman, & Koichu, 2014).

בקו (Bakó, 2003) זיהתה כי בגאומטריה במרחב הלומדים מרבים להסתמך על היבטים ויזואליים בשרטוט, ונוטים להתעלם מהיקשים לוגיים דידקטיים. נראה כי במרחב, לקונפליקט שבין היבטים צורניים וקונספטואליים של סיטואציה גאומטרית, נוסף גם קונפליקט עם התפיסה הוויזואלית, והדבר רק מדגיש את החשיבות

על סמך התנסותם בנושא הגאומטריה במרחב כתלמידים?

- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את ההוראה העכשווית שלהם בגאומטריה במרחב?
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את חלקם בפיתוח כישורים מרחביים אצל תלמידיהם?
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את התנהלותם בסביבת למידה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים?

מסגרת תאורטית

מורים למתמטיקה המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, נאלצים ללמד גאומטריה במרחב, ובתוך כך משתמשים במונחים מרחביות שאינן תמיד בשליטתם. בבסיס רעיון הוויזואליזציה של מצבים גאומטריים תלת-ממדיים מתוך שרטוטים דו-ממדיים משוטחים עומדת הנחה סמויה כי הראייה והקוגניציה האנושית הן בעלות יכולות גבוהות של סינתזה ושל זיהוי תבניות, ומאפשרות על כן להשלים בנקל אינפורמציה החסרה בשרטוט (Christou et al., 1996; Gutiérrez, 2005). אולם הנחה נאיבית זו הוראה לנגד עיניה

מורים ותלמידים בעלי כישורי חשיבה ויזואלית מפותחים היטב, המסוגלים להפעיל אותם נכונה בשעת הצורך, הוכחה על ידי חוקרים רבים (כמוטעית Christou et al., 2005; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzys, & Van Dormolen, 1997; Kali & Orion, 1996; Parzys, 1988). קשיים אלה מועצמים בשל מחסור בכלים להמחשה: בתוכניות הלימודים הקיימות אין כמעט דיון בהתפתחות טכנולוגיית המחשב ובתרומתה הפוטנציאלית לוויזואליזציה המרחבית, ובשיעורי הגאומטריה במרחב,

ההדגמה של עקרונות ומושגים נעשית בעיקר בעזרת גופים שקופים, שמטבע הדברים מייצגים אופק מצומצם מאוד של מצבים גאומטריים, או באמצעות שרטוטים דו-ממדיים שמספקים את האמצעי היחיד להמחשה בספרי הלימוד, על גבי לוח הכיתה ובבחינות (Clements & Sarama, 2000).

המורה הוא דמות מפתח בקידום הלימודי והרגשי של התלמידים בכל מקצועות הלימוד, ובפרט במקצוע המתמטיקה. תפקודו והצלחתו המקצועית של המורה למתמטיקה נשענים לא רק על ידע מקצועי, ידע דידיקטי-פדגוגי וידע קוריקולרי (Shulman, 1987), אלא גם על תחושת המסוגלות העצמית ועל הדימוי העצמי המקצועי של המורה (Kahle, 2008). גיבסון ודמבו (Gibson & Dembo, 1984) ובנדורה (Bandura, 1997), הגדירו תחושת מסוגלות אישית מקצועית בהוראה כאמונה של המורה בעצמו שיש לו את הכישורים הדרושים לקידום ההישגים הלימודיים של תלמידיו. מדובר בתחושת הכוח האישי שהמורה מאמין שהוא קיים בקרבו, וכי באמצעותו יוכל להשפיע על הביצוע וההתנהגות של התלמידים בכיתה בדרכים הרצויות לו. תחושה זו היא המבחינה בין מורה שחש כי בכוחו

לממש את הפוטנציאל המקצועי שלו ולהתמודד במקצועיות וביעילות עם אתגרי ההוראה, ובין מורה שחש כי אינו מסוגל לתפקד ברמה מיטבית (קס, 2000). לטענת קס (2000), תחושת המסוגלות העצמית המקצועית נוגעת להיבטים עיקריים בהוראה, כמו למשל מידת הדיוק, השפה המקצועית שבה הוא משתמש בכיתה, מידת האחריות של המורה להישגי תלמידיו, מידת הנינוחות והגמישות של המורה בשיעורים, יכולתו של המורה לספק לתלמידיו משובים למיניהם, מידת הנכונות של המורה להתמודד עם מצבים קשים ועוד. על פי פרידמן וקס (2000), תחושת המסוגלות המקצועית האישית של המורה נבנית בין השאר מתפיסותיו באשר ליכולתו לקדם את הישגי התלמידים ובאשר להיבטים מקצועיים, כגון שליטה בידע, תכנון השיעור וביצועו ותיקון של ביצועי התלמידים. מתוך כך יתמקד מחקר זה באופן שבו תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את ההוראה שלהם ואת תחושת המסוגלות העצמית שלהם בהוראת גאומטריה במרחב, לעומת הוראת נושאים מתמטיים אחרים. התמקדות זו עולה בקנה אחד עם אבחנתו של בנדורה כי תחושת המסוגלות העצמית המקצועית היא תלויה נסיבות, ולפיכך חשוב לבחון את המסוגלות בכל תחום תפקוד בנפרד (Bandura, 1997).

כיוון שבני אדם מפתחים כישורים מרחביים מתוך התנסות יום-יומית ממשית ולאורך זמן (Robichaux & Guarino, 2000), אפשר לראות את שורשי הקשיים בוויזואליזציה מרחבית כנעוצים וכמשותפים מתוך החוויות שעברו המורים עוד בצעירותם כתלמידים. בהוראת המדעים נמצא כי למורים רבים יש תחושת מסוגלות נמוכה מכיוון שחוו בעברם התנסויות לא מוצלחות בלמידת מדעים (Ramey-Gassert & Shroyer, 1992). מתוך כך מעניין לבחון כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את הקושי שלהם על סמך התנסותם בנושא המרחב כתלמידים, לעומת תפיסתם את ההוראה העכשווית שלהם

המורה הוא דמות מפתח בקידום הלימודי והרגשי של התלמידים בכל מקצועות הלימוד, ובפרט במקצוע המתמטיקה.

תפקודו והצלחתו המקצועית של המורה למתמטיקה נשענים לא רק על ידע מקצועי, ידע דידיקטי-פדגוגי וידע קוריקולרי, אלא גם על תחושת המסוגלות העצמית ועל הדימוי העצמי המקצועי של המורה

בגאומטריה במרחב.

יתרה מזו, בעידן הטכנולוגיה שאנו חיים בו, מצפים מהמורים להיות מסוגלים לשלב ביעילות עזרי למידה והמחשה ממוחשבים בהוראתם. עוד סוגיה שמחקר זה מבקש להתמקד בה, נוגעת לתפיסות המורים באשר לשימוש בתוכנות מחשב בהוראת הגאומטריה במרחב. מצד אחד חוקרים רבים מכירים ביתרון שיש בשילוב של אפליקציות תלת-ממדיות ממוחשבות, אינטראקטיביות ודינמיות בסביבת הלמידה, ככלי רב עוצמה לוויזואליזציה ולקידום החשיבה הגאומטרית במרחב (Christou et al., 2005; Gutiérrez, 1996; Laborde, 2000; Roschelle, Pea, Hoadley, Gordin, & Means, 2000; Yeh & Nason, 2004; Yerushalmy & Chazan, 1990). מצד אחר נמצא כי מורים בעלי תחושת מסוגלות נמוכה במתמטיקה אינם בוטחים ביכולתם להשתמש במחשבים לצורך ההוראה (Olivier, 1985 in Bandura, 1997). ראסל ובראדלי אבחנו את חרדת המחשב כסיבה העיקרית שמנעה מורים מלאמץ טכנולוגיה בכיתה (Russell & Bradley, 1997). בנדורה (Bandura, 1997) נתן דעתו על השינויים הטכנולוגיים המהירים של תקופתנו,

המשפיעים גם על תחום החינוך, וטען כי תחושת המסוגלות של המורה משפיעה על יכולתו לאמץ חידושים טכנולוגיים. נשאלת אפוא השאלה: כיצד תופסים מורי המתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את התנהלותם בסביבת למידה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים בתלת-ממד? האם הם רואים בטכנולוגיה הזדמנות או איום?

מתודולוגיה

מחקר זה נעשה בגישה איכותנית-קונסטרוקטיביסטית, בלי לצאת מתוך השערות ראשוניות ברורות. המחקר מבקש לבחון מקרוב את המציאות בשיעורי גאומטריה במרחב, מתוך חשיפת תפישותיהן ותחושותיהן של שלוש מורות למתמטיקה, המעידות על עצמן שהן מתקשות "לראות" במרחב, החל מחוויותיהן כתלמידות וכלה בהתמודדות שלהן עם ההוראה העכשווית ועם השימוש באמצעי המחשה טכנולוגיים בתלת-ממד. מתוך כך מטרת המחקר ושאלות המחקר הן באופיין פתוחות ומזמנות חיפוש גמיש אחר תובנות (Lincoln & Guba, 1985). שיטת המחקר היא אינדוקטיבית, צומחת ומגבשת תובנות מתוך המציאות המאפיינת מורות אלו, כפי שזו משתקפת מתוך הראיונות, התצפיות והמסמכים הנאספים.

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו שלוש מורות מנוסות למתמטיקה בתיכון, המעידות על עצמן שיש להן קושי "לראות" במרחב, העולה בכל פעם שהן נדרשות ללמד את הנושא (השמות בדויים):

- ניצה, מלמדת מתמטיקה בתיכון זה שלושים שנה, במהלכן לימדה מתמטיקה בכל רמות הלימוד 3-5 יח"ל, ושימשה רכזת מקצוע. ניצה, בעלת תואר ראשון במתמטיקה באוניברסיטת תל-אביב, היא מורה בעלת ניסיון ונזקפות לזכותה הצלחות מוכחות בבחינות הבגרות לאורך השנים.

- סמדר, בעלת תואר שני בהוראת המתמטיקה באוניברסיטה הפתוחה, מלמדת מתמטיקה בתיכון בכל רמות הלימוד 3-5 יח"ל, זה עשרים ואחת שנה. לסמדר יש ניסיון והצלחות מוכחות בבחינות הבגרות לאורך השנים. בארבע השנים האחרונות סמדר מלמדת באוניברסיטה ובמכללה, ובזמן האחרון היא עוסקת גם בהדרכת מורים למתמטיקה.

- ורד, בעלת תואר ראשון בהוראת המתמטיקה בסמינר הקיבוצים, מלמדת מתמטיקה בתיכון זה שלושים ואחת שנה, בעיקר ברמת 3 יחידות לימוד, וגם בכיתות מב"ר ואתגר. לורד יש ניסיון והצלחות מוכחות בבחינות הבגרות ב-3 יח"ל לאורך השנים. ורד מדריכה פרחי הוראה בבית ספרה, ובזמן האחרון היא מדריכה גם מורים חדשים שהגיעו להוראה לאחר הסבה מקצועית.

את ניצה פגשתי כשהגיעה להשתלמות של גאומטריה במרחב. באותה השתלמות התבקשו המשתתפים לכתוב קטע רפלקטיבי קצר על התנסותם בגאומטריה במרחב כתלמידים וכמורים. ניצה הייתה אז המורה היחידה שהעידה על עצמה, בדיון רפלקטיבי בכתב, שהיא מתקשה לראות במרחב. את ורד ואת סמדר פגשתי שנתיים לאחר מכן, שוב בהשתלמות מורים, כאשר חיפשתי עוד מורים המעידים על קושי בראייה המרחבית שלהם.

כלי המחקר

- ראיון עומק – נעשה עם כל אחת משלוש המורות. מטרת הראיון לחשוף תפישות קיימות של המורות באשר להוראת גאומטריה במרחב. הראיון מכיל שאלות רקע כלליות ושאלות שמטרתן לחשוף את הנרטיב האישי בהקשר של גאומטריה במרחב, החל בילדות, דרך התפקוד היומיומי העכשווי וכלה בתפקוד המקצועי. בחלקו השלישי והאחרון, הראיון מכיל שאלות להערכה עצמית כמורה לגאומטריה במרחב בשיטת ה-SWOT (Strengths, Weaknesses, Opportunities and Threats),

טבלה 1: מבנה ראיון עומק אישי

שאלות רקע כלליות	שאלות שמטרתן לחשוף את הסיטואציה העכשווית	SWOT אישי כמורה לגאומטריה במרחב
מהו הרקע האקדמי והמקצועי שלך?	כיצד היית מאפיינת את היכולת המרחבית שלך?	מהן החוזקות שלך כמורה כשאת מלמדת גאומטריה במרחב?
כיצד היית מאפיינת את היכולת המתמטית שלך?	תוכלי בבקשה לספרי לי סיפור על אחד משיעורי הגאומטריה במרחב שלך כתלמידה?	מהן לדעתך נקודות החוזק של תוכנית הלימודים בגאומטריה מרחבית?
ספרי על הוראת המתמטיקה שלך – מני מספר מאפיינים אישיים שלך בהוראה.	תארי את תחושותייך כאשר את ניצבת לפני בעיה חדשה בגאומטריה במרחב, שאותה לא הכרת קודם?	במה היית רוצה לשפר את הוראת הגאומטריה במרחב שלך?
	איזה חלק את לוקחת בתכנון מטבח חדש, ריהוט חדש לחדר או בעיצוב תלת-ממדי אחר?	אילו חולשות את מזהה בתוכנית הלימודים הקיימת בגאומטריה במרחב?
	ספרי בבקשה על אחד משיעורי הגאומטריה במרחב שהעברת כמורה.	בהקשר של הוראת הגאומטריה במרחב, מהם האיומים שאת חוששת מפניהם כמורה?
	כיצד היית מאפיינת את הוראת הגאומטריה במרחב שלך?	בהקשר של הוראת הגאומטריה במרחב, אילו הזדמנויות את רואה לפניך כמורה?
	תארי את תחושותייך כשאת מלמדת גאומטריה מרחבית כיום?	לאור ההתפתחות הטכנולוגית העצומה, אילו הזדמנויות את רואה עבור הוראת הגאומטריה במרחב?
	עד כמה חשובה לדעתך הוראת הגאומטריה במרחב?	
	כיצד ניתן לדעתך לפתח יכולות מרחביות אצל תלמידים?	
	איזה חלק יש לך לדעתך בפיתוח היכולות המרחביות של תלמידייך?	

המשמשת כדרך לזיהוי הזדמנויות ולניהול סיכונים בעולם העסקי. כאן ניתוח ה-SWOT נועד לחשוף את תפיסות המורות, המעידות על עצמן שהן מתקשות בראייה מרחבית, באשר לחזקות ולחולשות שלהן, וגם באשר להזדמנויות הנפתחות לפנייהן באמצעות הטכנולוגיה וכמובן האיומים והפחדים שלהן עצמן כמורות למתמטיקה המלמדות גאומטריה במרחב. מבנה כללי של ראיון העומק מובא בטבלה 1.

- תצפיות – צפייה בכל אחת מהמורות במהלך שיעור גאומטריה במרחב, שבו משולב אמצעי המחשה ממוחשב אינטראקטיבי ודינמי, כדי לראות כיצד מתמודדות המורות בסביבת הלמידה הטכנולוגית.
 - יומן המחקר שלי כחוקרת – ובו מחשבות, תהיות ותובנות על הנושא הנחקר ועל התנהלות המרואיינות מושאות המחקר שלי.
 - דיון רפלקטיבי בכתב – של ניצה, אחת המורות נשואות המחקר, באשר להתמודדותה האישית עם הקושי בראייה מרחבית במהלך השנים.
 - יומן אישי מוכוון שאלות בנושא הוראת גאומטריה במרחב – כל אחת מהמורות התבקשה לנהל יומן אישי מכוון שאלות (ראו טבלה 2), ולרשום בו לפני שני שיעורים בגאומטריה במרחב ולאחריהם (שיעור אחד היה שיעור רגיל בגאומטריה במרחב, ואילו השיעור השני לווה באמצעי המחשה ממוחשב), כדי לחשוף מחשבות ותחושות המורות סמוך לשיעורים אלו.
- טבלה 2:** יומן אישי שמילאה כל מורה לפני שני שיעורים בגאומטריה במרחב ולאחריהם

יומן אישי - גאומטריה במרחב	
אנא מלאי תאריך ושעה ועני על השאלות במשפטים קצרים וברורים, לפני תחילת השיעור בגאומטריה מרחבית, ומיד לאחריו (20 דקות +/-)	
שם:	_____
תאריך:	_____
שעה:	_____ לפני השיעור / אחרי השיעור
איזו תחושה פוזית את חווה?	
איילו רגשות את חווה?	
מהן המחשבות שלך?	
כיצד את מעריכה שתעבירי (או שכבר העברת) את השיעור?	
מהו לדעתך הגורם החשוב ביותר בשיעור?	
כיצד לדעתך יתפקדו / תפקדו תלמידיו במהלך השיעור? מדוע את חושבת כך?	

- תוכנת Cabri 3D V2 – כדי לבחון את התפיסה של המורות באשר להתנהלותן בסביבת למידה המאפשרת שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת להמחשת סיטואציות גאומטריות תלת-ממדיות, בהרתי בתוכנת 3D Cabri (Bainville & Laborde, 2004), שנמצאה כתוכנה פתוחה וגמישה במידה מספקת כדי לאפשר למורות

אינטראקציה קלה וחלקה. תוכנת 3D Cabri עוצבה כדי לאפשר בנייה, צפייה ומניפולציה של אובייקטים גאומטריים תלת-ממדיים, כדי לצמצם את הקשיים הוויזואליים בהוראה ובלמוד הגאומטריה במרחב בחטיבת הביניים ובתיכון. מטרת ההדמיה לאפשר ללומד התבוננות בממד השלישי באמצעות סיבוב ושינוי של נקודת המבט, וגם באמצעות בנייה דינמית של צורות גאומטריות מתוך קבלת משוב ויזואלי מן התוכנה וחקר של תכונות ושל עקרונות גאומטריים. 3D Cabri נמצאה כאפליקציה גמישה, המאפשרת שיקול דעת בבחירת דרגת החופש המוענקת למשתמש. מתוך כך בחרו המורות, שזו להן ההתנסות הראשונה בשילוב של טכנולוגיית מחשב בשיעוריהן, להשתמש בתוכנה לצורך הדגמה. סביבת הלמידה שהוכנה עבור שיעורי הגאומטריה במרחב שצפיתי בהם, שילבה בין הדגמות ויזואליות שנועדו להמחשה ולהבנה, ובין פתרון תרגילים מתוך ספר הלימוד. את מהלך השיעור תכננו המורות עצמן, ואילו את הדגמים התלת-ממדיים הממוחשבים בנינו ביחד.

מהלך המחקר

בשלב הראשון רואיינה כל אחת מהמורות ראיון עומק, כדי לחשוף תפיסות קיימות שלהן באשר להיבטים מגוונים של הוראת הגאומטריה במרחב. שלושת הראיונות הוקלטו ותומללו. נוסף על הראיון, התבקשה כל אחת מהמורות להעלות בכתב את התנסותה, רשמיה ותחושותיה סמוך לפני השיעור בגאומטריה במרחב ומיד לאחריו.

בשלב השני עברה כל אחת מהמורות סדנת למידה והתנסות קצרה עם התוכנה הממוחשבת Cabri 3D. במהלך סדנה זו תכננו המורות את שיעורן הבא בגאומטריה במרחב, ובנו בהדרגתי דגמים תלת-ממדיים שבאמצעותם ביקשו המורות להמחיש לתלמידים כל מיני בעיות. הכוונה הייתה שהמורות תתנסנה ותתיידדנה עם התוכנה כדי שתהיינה מסוגלות להדגים באמצעותה במהלך השיעורים שהתכוונות לצפות בהם. אף ששלוש המורות הסכימו שאצפה בהן בשיעור גאומטריה במרחב, בסופו של דבר הצלחתי לצפות רק בשתי מורות, מכיוון שהמורה השלישית התחמקה מכך בשיטתיות ובאמתלות מגוונות, עד שלבסוף הודיעה כי לא תאפשר לי לצפות בה. שתי המורות שצפיתי בהן כתבו ביומן האישי את מה שחוו והרגישו סמוך לשיעור זה. במהלך המחקר כולו ניהלתי גם אני יומן חוקר שבועי, ובו פירטתי חוויות, תחושות ותובנות.

ממצאים

ניתוח הנתונים נעשה באמצעות תהליך של קטגוריזציה ממקדת (שקדי, 2003), ונגע למילים ולתיאורים העולים מתוך המסמכים, הראיונות והתצפיות, כמשקפים את התפיסות, התחושות, המחשבות, האמונות, והידע של המורות על הוראת הגאומטריה במרחב. השוואת הנתונים, מיונם וניתוחם נעשו לצד איסוף הנתונים וכמובן גם לאחריו. ממצאי המחקר מסוכמים להלן בטבלה מספר 3, המופיעה בסוף פרק הממצאים.

הנתונים המצטברים חולקו לארבע קטגוריות ראשוניות, על פי הנושאים האלה:

- התנסותן של המורות במתמטיקה ובגאומטריה במרחב כתלמידות.
- היבט רגשי – דימוי עצמי מקצועי ותחושת מסוגלות עצמית.
- דרכי ההתמודדות של המורות עם הוראת הגאומטריה במרחב.
- התנהלות המורות בסביבה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים.

הניסיון להיזכר בהתנסותן כתלמידות בגאומטריה במרחב, היה קשה ולא ממש נעים עבור שלוש המורות. הדבר התבלט במיוחד על רקע זיכרון הצלחתן ואהבתן למקצוע המתמטיקה. סמדר מתארת זאת כך:

[...] למדתי מתמטיקה כי אהבתי אותה [...] בזה הרגשתי שאני טובה [...] דווקא המתמטיקה הייתה אלי [...]

אולם בד בבד, סמדר מתארת קושי בגאומטריה במרחב, קושי שעל פי תיאורה, ייתכן שהיה שותף לו גם המורה שלה עצמו:

[...] אני רק זוכרת שהיה לי קשה עם הקווים והזוויות. אבל המורה שלי התאים לי [...] גם הוא לא היה ממחיש דבר בכיתה. היה משרטט על הלוח, שולף את המשולשים החוצה, ועובר מהר מאוד להיבט האנליטי יותר של הדברים. עשינו את המינימום הנדרש - ממש רק את התרגילים הבסיסיים והפשוטים.

ורד תיארה את הצטיינותה בלימודי המתמטיקה בתיכון ואחר כך בתואר הראשון, וגם תיארה את תסכולה בניסיונות ההתמודדות שלה עם גאומטריה במרחב:

[...] אני רק זוכרת שנתקעתי ברוב השאלות שהיו קשורות איכשהו למרחב [...] עד כמה שאני זוכרת, הייתי די מנסה להדחיק את זה מרוב תסכול [...] ברחתי מהמרחב כי האמנתי בצורה עיוורת למורה שלי שאמרה כי "בחינים שלך לא תדעי הנדסת המרחב", והמשפט הזה מלווה אותי עד עצם היום הזה.

ניצה תיארה את התסכול שלה בדרך ספרותית במיוחד בדבריה הרפלקטיביים:

[...] הכול התחיל ביום בהיר ושטוף שמש כשצעדתי בכיתה י"א, ברגליים קלות לשיעור מתמטיקה, אחד מהשיעורים האהובים עלי במיוחד. הנושא הפעם היה "הנדסת המרחב". זו הייתה תחילתו של רומן ארוך, מתסכל ומקרע. נכנסתי לרומן הזה מאד אופטימית: ידעתי ואהבתי מתמטיקה [...] כל שאלה הייתה פגישה חדשה שתחילתה אופטימיות וחזירה ואחריה מפה נפש [...]

במהלך הריאיון עימה תיארה ניצה תחושה של עלבון צורב, הזכורה לה בשל הכינוי "סתומה" שהדביק לה אחיה הגדול לאחר ניסיונות לא מוצלחים לעזור לה בגאומטריה במרחב. למרות התיאור החי של התחושות והקשיים, לא זכרו שלוש המורות להוסיף פרטים על שיעורי גאומטריה במרחב שלהן כתלמידות. סמדר פטרה אותם בשל חוסר זיכרון:

"[...] אני לא ממש זוכרת. אני רק זוכרת שהיה לי קשה [...]" ניצה טענה כי "[...] השיעורים עצמם נמחקו - delete - מהזיכרון [...]"

ואילו ורד הסבירה את חוסר הזיכרון כהדחקה:

"[...] אני לא יודעת אם לא הדחקתי את זה, עד כדי חוסר זיכרון מוחלט [...]"

חיבת רגשי - דימוי עצמי מקצועי ותחושת מסוגלות עצמית

כמורות למתמטיקה, שלוש המורות רואות עצמן בעלות ידע מתמטי המתאים להוראה בכיתות שהן מלמדות בתיכון.

להלן טענתה של ורד:

[...] מבחינת יכולות מתמטיות, אני חושבת שיש לי יכולות מצוינות, ואני מביאה כיתות לתוצאות מאוד טובות [...]

סמדר משתפת בתחושותיה:

[...] פשוט אוהבת מתמטיקה [...] אני לא פרופסור למתמטיקה [...] אבל בעיקרון אני מרגישה שהיכולות שלי הן מעט יותר משל תלמיד 5 יחידות במתמטיקה [...]

אלה דבריה של ניצה:

[...] יש לי ידע מתמטי טוב. ברמת העיקרון, אין לי פחד משאלות מאתגרות במתמטיקה [...] אני נהנית מזה! אבל [...] אני לא

אחד המאפיינים הבולטים של ההוראה שעלה אצל שלוש המורות, קשור באישיותו של המורה ובקשר האישי שהוא יוצר עם תלמידיו, להלן הסברה של ניצה:

[...] המון נעוץ בפרסונה [...] מי המורה, איזו דמות הוא?? אם הוא דמות שניעים איתה וטוב איתה, אז הוא יסחוב אותך להרבה מקומות [...] יש לי קשר טוב בדרך כלל עם התלמידים שלי, השיעורים הם באווירה מאוד נינוחה, אנחנו צוחקים בשיעורים [...] אני משתדלת לבנות להעביר את הלימוד לפן האישי [...]

להלן דעתה של סמדר:

[...] קודם כל יצירת החיבורים החברתיים מול התלמיד [...] שהוא ירגיש שאני כל הדרך לידו [...] מבחינתי, היכולות שלנו בשיעור זהות: מה שאני יכולה גם אתה יכול! [...] ליצור איזשהו מין חיבור טוב ונעים [...]

ורד משתפת אותנו בשאיפתה ליצור קשר עם כל תלמידה:

[...] קודם כל, הרבה חומר [...] יש הרבה חומר בצורת העבודה שלי. אני חושבת שזאת הדרך הטובה ביותר להגיע לכולם, גם לאלה שמתקשים ביותר במתמטיקה [...] כל מיני דברים שככה עושים את השיעור יותר נעים ומעניין. אני מלמדת מאוד צבעוני. אני חושבת שאני מאוד צבעונית באישיות שלי [...]

שלוש המורות מעידות על עצמן כי הן מתקשות לראות במרחב. הן מזכירות מקומות שבהם הן נתקלות בקשיים בשל כך, ונוקטות לעזרה גם בחיי היומיום. ורד, למשל, מספרת על קשיים שהיא נתקלת בהם במהלך תחביב הציור או שרטוט אחר בפרספקטיבה:

[...] דווקא שמה אני כן טובה. זה מוזר אבל באופן פרדוקסלי, אני מציירת עם פרספקטיבה, כאילו ראייה מרחבית, ומציירת בצורה נכונה [...] גם כשכתננתי את המטבח [...] כתננתי את זה בצורה נכונה [...] באופן כללי, כן מצליחה, אבל לפעמים אני מרגישה שמשהו לא בסדר, ושם אני זקוקה לעזרה [...] נראה כי גם בכך מעורבת מדי פעם הראייה המרחבית החלשה שלי [...]

סמדר מתארת קושי בהבנת שרטוטים אדריכליים:

[...] השרטוטים למשל, של האדריכליות [...] לא יודעת, לא מבינה אותם. לא מדברים אליי. זה במישור וכיצד פותחים את זה למרחב? [...] נאלצתי לסמוך על אחרים, שהבינו טוב יותר מה רואים בשרטוטים [...]

ניצה קושרת במטפורה בין יכולת ההתמצאות הטובה שלה, ובין הקושי שלה לאמוד גדלים במרחב או להבין שרטוטים דו-ממדיים:

[...] אני יכולה להיות באולימפיאדה, אבל יכול להיות שאני צריכה אולימפיאדה של נכים! [...] יכול להיות שיש איזשהו קושי שיש לי אישית [...] ואני צריכה כלים בשביל הקושי הזה [...]

שלוש המורות חשות במהלך העבודה בבית הספר תחושות של אי-נוחות, איום, לחץ, חרדה, בושה, כעס, תסכול וחוסר אונים בהוראת הגאומטריה במרחב:

[...] אני בלחץ, ממש בלחץ [...] יש לי גם אי-נוחות [...]

ניצה מגדירה את תחושותיה כאשר היא ניצבת לפני בעיה חדשה בגאומטריה במרחב שלא ראתה אותה קודם לכן, ומביעה חשש:

[...] אני חוששת שאני לא אראה את הדברים [...] לפעמים על הלוח זה עוד יותר קשה [...]

ניצה עצמה רואה בהוראת הגאומטריה במרחב "חור שחור" ו"משהו לא סגור".

ורד מגדירה את נושא הגאומטריה במרחב כטראומטי עבורה, ומעידה על עצמה כי היא "[...] מסתובבת עם הטראומה העצמית [...] שלה; היא חשה פחד וחוסר ביטחון כאשר היא מלמדת את הנושא:

[...] בור כזה [...] לפעמים בור של פחד כזה [...] אתה מרגיש חוסר ביטחון! [...]

כאשר סמדר ניצבת לפני בעיה חדשה בגאומטריה במרחב, היא

"מתחילה בחשש גדול" וחשה אי נעימות ואי נוחות כאשר אינה מצליחה לפתור אותה:

[...] אני נאבקת עם עצמי כי לא נעים, ואני מנסה עוד קצת ועוד קצת, ואז לפעמים אני מוצאת את עצמי בפלונטר כזה, ואני רואה שאני לא מוצאת ככה את הכיוון [...] התחושה לא נוחה [...] אם הכיתה חדשה, ואני לא יודעת [...] ואני נתקעת - אבוי, זוועה! בוש! אז אני מתוסכלת וכועסת על עצמי ממש. מאוד. הרס לי את היום!

סמדר מתארת תחושה של חוסר שליטה:

[...] אני מרגישה שזה כאילו "יש לך את זה" או "אין לך את זה", ובעצם אין לי שליטה על זה [...]

לפני הכניסה לשיעורי הגאומטריה במרחב, שלוש המורות מתארות תחושות פיזיות המאפיינות חדרה. להלן וידויה של ניצה:

[...] הבטן שלי מתהפכת, פשוט ככה [...] הכנתי את השיעור הזה לכל פרטיו, ועדיין אני בחרדה. אני מרגישה כאילו משהו תקוע לי בגרון [...]

סמדר רוטנר:

[...] אני מאוד עצבנית היום [...] בנוסף לכול, גם שן הבינה שלי מתחילה להציק לי [...] אולי בגלל שקר מדי [...]

כאן נראה את תחושותיה של ורד:

[...] כמו תמיד, הכנתי היטב את כל התרגילים שאצא בשיעור [...] לא הפסקתי לחשוב על זה לרגע כבר יומיים!!! אני אפילו חולמת על קוביות [...] מרוב לחץ, נתפס לי הגב [...] אני מרגישה חשש. אפשר לומר חשש לא הגיוני [...]

המורות רואות בקושי לראות במרחב איום על מעמדן המקצועי בכיתה ועל הדימוי העצמי המקצועי שלהן. ניצה מתארת זאת כך:

[...] יש לי אי נוחות מזה שהתלמידים חושבים ומרגישים שאני תותת, ופתאום אני מגומגמת אפילו בעיני עצמי, גם אם הם לא רואים [...] אני לא יכולה לבוא ולהגיד שאני מלמדת נושא ואני לא שולטת בו. זה משהו בעייתי בעיני [...] אין מה לעשות - מבחינת התלמידים אנחנו יודעים מתמטיקה, אנחנו וירטואוזים, זה איזושהי אוטוריטה מקצועית [...]

סמדר עוסקת אף היא בדימוי המקצועי העצמי שלה:

הרבה פעמים נורא קשה לי ואני נאבקת [...] זו תחושה לא נוחה [...] כי אני חושבת שאני צריכה להיות יותר מקצועית. אני מצליחה לעשות זאת בכל נושא אחר, פרט לגאומטריה במרחב, שם אני לפעמים מרגישה חוסר ביטחון כי אני לא רואה את הדברים. מבחינה מקצועית, אני המורה למתמטיקה [...] ואני אמורה לדעת לפתור את כל התרגילים בנושא הזה! [...] אני מרגישה לא מספיק מקצועית. אני מרגישה מאוד לא טוב עם זה [...]

ורד מתארת תחושה של חוסר ביטחון מקצועי, שאף כיוונה את הקריירה שלה כמורה וגרמה לה שלא ללמד מתמטיקה ברמות הגבוהות:

[...] יכול להיות שאחת הסיבות בגללן נמנעתי לעבור ללמד ב-4-5 יח"ל זה הגאומטריה במרחב [...] תמיד השאלה הבאה מפחידה אותי: לחשוב מה יהיה אם יבוא תלמיד בכיתה וישאל אותי שאלה, ואני לא אדע [...] זה מפחיד כשאתה לא יודע משהו, אז גם לא נעים לך, אתה המורה! [...] בגאומטריה במרחב, אני מרגישה שהידיעה שלי פחותה - ושם אני מרגישה חלשה. שם אני מרגישה פגיעה, ואני מפחדת [...] זאת תחושה של חוסר ביטחון. זה לא נעים. אתה מעדיף תמיד להיות ב-zone המוכר שלך [...] יחסית אני בסדר, זאת אומרת, בגלל שזה 3 יח"ל ואתגר ומב"ר, שמה פחות מרגישים את החולשות שלי [...] אם הייתי צריכה ללמד ברמה יותר גבוהה, ב-4-5 יח"ל מיד היו מרגישים [...] אני הייתי מגמגמת לדעת, או משהו כזה [...]

כפועל יוצא, תחושת המסוגלות העצמית של שלוש המורות בהוראת הגאומטריה במרחב היא נמוכה, וזאת בניגוד לתחושת המסוגלות העצמית הגבוהה שלהן בנושאים מתמטיים אחרים. ניצה חשה כי הוראת הגאומטריה במרחב היא מעבר לכוחותיה:

[...] הדבר הראשון שחשבתי, שאין לי כוח להתמודד עם זה עכשיו,

כי אני יודעת כמה אנרגיות זה דורש ממני [...]

היא מתארת את ההשקעה הרבה הנדרשת ממנה בשיעורי הגאומטריה במרחב:

[...] אם אני מלמדת את זה, ואי! אני תמיד מכינה את השיעור מלפני ולפנים, אני תמיד משתמשת בעוזרים. תמיד, תמיד, תמיד! הם לא מבינים שהעוזרים הם בשבילי ולא בשבילם [...] הילדים בטוחים שאני עושה את זה בשביל שהם יראו את זה. הם לא מבינים שאני עושה את זה בשביל שאני אראה את זה [...]

סמדר חשה מאוד לא בטוחה במקצועיות ההוראה שלה בגאומטריה במרחב, ואף חושבת כי מוטב לתלמידים בלעדיה:

[...] אם תראי לי שאלות שהן פשוטות, אסתדר, אבל אם יעבירו בפנים כל מיני קווים הזויים, אני לא רואה את הדברים! את מבינה? אז אני משתדלת להימנע, בטח בנוכחות התלמידים, משאלות שלא פתרתי אותן קודם בבית, מה שבכל נושא אחר לא קורה לי [...] בנושאים אחרים אני אומרת: "תביאו כל מה שאתם לא יודעים" [...] פה אני אגיד "בואו נחזור מפה עד לפה" [...] משהו כזה [...] מצאתי שגם אם אני לא מלמדת גאומטריה במרחב כמו שאני מלמדת בדרך כלל באופן מובנה, אבל אני נותנת בסיס ושולחת את התלמידים לדרך, כאשר אין להם את המעצורים שלי, הם מסתדרים עם זה נהדר [...] אין לי עם זה שום בעיה [...] כי אני לא יכולה לבוא ולהגיד שאני מלמדת נושא ואני לא שולטת בו [...] זה בעייתי מבחינת הביטחון של התלמידים - "אם היא לא מצליחה לראות את זה, איך אני אמור להצליח?" [...]

תחושת המסוגלות העצמית הנמוכה של ורד הביאה אותה להתמקד ברמה הנמוכה של 3 יח"ל מתמטיקה, ולפקפק ביכולתה ללמד ברמה גבוהה יותר:

[...] יש איזושהי דמות מסוימת שיש לילדים כשהם רואים אותי, אני רוצה להאמין שהם לא מזהים שדווקא בנושא הזה יש איזו נפילה בידע [...] זאת אומרת, בגלל שזה 3 יח"ל ואתגר ומב"ר, שמה פחות מרגישים את החולשות האלה שלי [...] אם הייתי צריכה ללמד ברמה גבוהה יותר, מייד היו מרגישים [...]

אולם גם ברמה הנמוכה יותר של 3 יח"ל, ורד חוששת משאלות בגאומטריה במרחב:

[...] בעצם כל אחד יכול להתקיל אותי באיזושהי שאלה לגבי גאומטריה במרחב [...] הדבר מהווה מבחינתי איום, ואני חוששת ממנו כמורה. זה תמיד השאלה הבאה בתור שמישהו ישאל [...] מה אם זה משהו שלא אדע לענות עליו? [...]

סמדר מתארת את חששה:

כל אותם שרטוטים שבהם יש אלף קווים והתלמיד נדרש לזהות זוויות בין ישרים ומישורים ובין מישורים לבין עצמם. אני לא יודעת, אותי זה מפחיד [...] זה מפחיד מפני שזה לוקח הרבה זמן עד שאני רואה את זה, אם בכלל [...] אני יכולה להגיד שקשה לי יחסית ודורש ממני הרבה מאד עבודה. אני מתגלצ'ת על הדיפרנציאל, לא צריכה להכין את עצמי, יכולה לענות בלי בעיה על כל שאלה שתבוא כי אני שולטת שליטה מלאה באנליזה [...] אבל פה אני יכולה, לא משנה כמה אני יודעת את הפרק, אני יכולה ליפול, לא לראות ולא להצליח לפתור, מה שפחות סביר שיקרה לי בפרקי לימוד אחרים [...]

סמדר רואה בהדרגתיות כלי שיכול לאפשר לה ללמד גאומטריה במרחב בכל זאת:

[...] כשזה מוגש בצורה מדורגת, אז אתה קולט לאט, לאט, אולי קודם צורות פשוטות יותר, כמו המנסרות, התיבות, הקוביות [...] אחר כך, לאט, לאט, יותר שרטוטים מפחידים [...] החיסרון הוא באיטיות; מובן שזה לוקח לי הרבה יותר זמן לצעוד צעד קטן קדימה, לעומת נושאים מתמטיים אחרים [...]

דרכי ההתמודדות של המורות עם הוראת הגאומטריה במרחב

למרות הקושי האישי שלהן, המורות מאמינות כי אפשר לקדם ראייה מרחבית ולפתח אותה אצל תלמידיהן. סמדר מאמינה כי אפשר לשפר ראייה מרחבית [...] דרך תרגול רב והרבה התעסקות בזה [...].

ורד מציעה לשנות את דרכי ההוראה ולהיעזר בהמחשה באמצעות תוכנת מחשב. לניצה, לעומת זאת, אין מרשמים להצלחה:

[...] אם הייתי יודעת את הסוד, אז הייתי מיישמת אותו על עצמי קודם כול [...] בשנים שלימדתי [...] הסתדרתי גם בלי הנושא הזה [...] אז אין לי טיפים להגיד לאנשים אחרים [...]

עם זה ההתייחסות של המורות למקומן בפיתוח היכולות המרחביות של תלמידיהן מציאותית מאוד, כאן נראה את דבריה של ורד:

...אני לא חושבת שאני מפתחת יותר מדי כישורים מרחביים אצל התלמידים שלי, כי לי בעצמי יש לקונה מהסיפור הזה...

בהמשך נראה את וידויה של ניצה בעניין:

...אני לא מלמדת את זה... הרבה פעמים אין לי כל חלק בפיתוח היכולות המרחביות של תלמידי...

ואת הרגשתה של סמדר:

[...] אני מרגישה שזה כאילו "יש לך את זה" או "אין לך את זה" ובעצם אין לי שליטה על זה. ואז יש ילדים שבאמת "יש להם את זה". אז הם כאילו [...] בהקשר של ללמד אותם, אני חושפת אותם לתרגיל חדש [...] אני כן מרגישה שנעשית שם למידה, גם אם אני לא מומחית להנדסת המרחב [...]

עם זה שלוש המורות רואות את הוראת הגאומטריה במרחב חשובה. ורד רואה בגאומטריה במרחב כלי בעל חשיבות להכרת מרחב המחיה שלנו.

ניצה מסייגת זאת:

[...] מרחב הוא לא מדע בדיוני. את חיה בתוך מרחב. זה משהו שחשוב ללמוד. השאלה היא עד איזה רמה זה חשוב: האם זה חשוב ברמה של להכיר קיבולת ולהכיר מעטפת, שטח פנים [...] או באמת חזונית הנוצרות בפנים?

במחשבה אחרת, ניצה מציינת שהגאומטריה במרחב [...] מגוונת את דמות המתמטיקה [...] עוד משהו שהתלמידים לא ראו כמוהו".

סמדר עוסקת בוויזואליות שבגאומטריה במרחב ורואה חשיבות בהנדסת המרחב כהכנה ללימודים מתקדמים יותר:

[...] אם נחלק את זה לאלגברה ולהסתכלות, צריך גם את ההסתכלות [...] אם הם יצטרכו ללמוד אחר כך משהו כזה באוניברסיטה, באחד מתחומי המדעים או ההנדסה [...] גאומטריה במרחב הוא גם סוג של כלי, שאם הם ייחשפו אליו בתיכון, הם ידעו להשתמש בו גם אחר כך [...]

מתוך תפיסה זו שלוש המורות מנסות להתמודד, כל אחת בדרכה, עם ההוראה של גאומטריה במרחב בכיתות. לסמדר דרישות גבוהות מעצמה ומתלמידיה:

"[...] אני דורשת רמה טובה ורמת הבנה גבוהה [...]"

כיוון שסמדר אינה מתפשרת על איכות ההוראה, היא מצאה דרך מילוט "מכובדת": היא רותמת לעזרתה את הניסיון שלה בהוראה ואת היכולות המתמטיות והאנליטיות הגבוהות שלה, ומגבשת לעצמה תוכנית הוראה הדרגתית מאוד, בדרך שדוחה את השאלות הקשות ממש לסוף. סמדר רואה את תפקידה בחשיפת התלמידים לנושא הגאומטריה במרחב, כאשר בשלבים המתקדמים של ההוראה היא נעזרת בראייתם המרחבית הטובה של כמה מתלמידיה:

[...] גם אם אני לא מומחית להנדסת המרחב [...] בא תלמיד והוא רואה ומראה פתאום [...] הוא מלמד את האחרים [...] אני לוקחת את הרעיון שלו וברגע שאני רואה ומבינה, אז אני חושבת שאני כן יכולה להסביר להם, והם מבינים [...] אני כבר לא אשפר את הראייה המרחבית שלי, אבל חשוב לחשוף אותם לגופים ולהגדרות. לי נראה שאם יש תלמידים עם ראייה מרחבית טובה, הם כבר יתקדמו משם בעצמם [...]

סמדר מודה כי חשבה לא אחת שלא ללמד גאומטריה במרחב:

[...] אני שמתעשעת במחשבה לוותר על הפרק הזה [...] יכול להיות שאם הייתה לי בחירה כמורה ויכולתי לבחור לוותר על איזשהו פרק,

אני חושבת שזה הפרק שהייתי מוותרת עליו, מסיבות שקשורות ברמת הקושי האישי שלי [...]

למרות מחשבותיה אלה, נראה כי דרישותיה הגבוהות מעצמה אינן מניחות לה לוותר, והדבר ניכר גם בשיעור שצפיתי בו, כאשר סמדר מצליחה לשמור על שפה מתמטית ועל חזות מקצועית מאוד בכיתה.

ניצה, המלמדת מתמטיקה זה 30 שנה, הצליחה לרוב לחמוק מללמד גאומטריה במרחב בכל מיני דרכים:

[...] אני רוצה לחדד את העניין הזה, שאני לא מלמדת את זה. זה לא ששלושים שנה אני מלמדת ואין אני לא מסתדרת עם זה. אני שלושים שנה לא מלמדת את זה. אני לא מלמדת את זה וככה אני מסתדרת עם זה [...] כשאני יודעת שאני צריכה ללמד את זה, אני קודם כל חושבת על אלטרנטיבות - מי ילמד במקומי [...] אני בכל פעם חושבת מי ילמד במקומי [...] בשנה שעברה למשל, יאיר לקח את שתי הכיתות [...] אני תמיד מוצאת פתרונות: שנה אחת הייתה אנה, החלפנו בינינו כיתות [...] תמיד היו לי פתרונות איך לא ללמד גאומטריה במרחב. ואם לא היה לי פתרון, אז דחית את זה עד סוף השנה. אז היה לי פחות זמן, ונתתי רק את הבסיס, והילדים הסתדרו טוב מאוד בלעדיי [...]

את הוראתה במעט השיעורים שלימדה בהם ניצה גאומטריה במרחב, היא מאפיינת כזוהירה וכנתמכת בתלמידים עצמם:

[...] להבדיל מנושאים אחרים בהם אין לי בעיה כשאני אומרת [...] תשאלו מה שאתם רוצים, לא חשוב מאיזה ספרים [...] פה אני יותר זהירה, ועוד משהו - אני יותר נעזרת בהם. זאת אומרת, אם בשיעור לפני מבחן, השאלות מופנות אליי, ואני זאת שעונה, אם יופנו אלי שאלות במרחב, אני בהחלט אגיד "מי רוצה לנסות?" כי אני שמה לב לפעמים, שיש ילדים שרואים את זה בשנייה הרבה יותר מהר ממני. אז אני פשוט נעזרת בהם. אני כאילו מטילה עליהם את העבודה [...]

חוסר הניסיון המקצועי של ניצה בהוראת הגאומטריה במרחב ניכר גם במהלך השיעור הפרונטלי שצפיתי בו. בשיעור זה היא השתמשה בשפה אינטואיטיבית מאוד ולא מדויקת, והתמקדה בדוגמאות בסיסיות ביותר. הרושם שלי בשיעור היה כי ניצה התרכזה מאוד בהעברת הנושא, והתמקדה פחות בתלמידים עצמם ובהבנה שלהם.

כאשר החליטה ורד ללמד מתמטיקה ברמה נמוכה בלבד, היא בעצם ויתרה מראש על ההתמודדות עם שאלות המרחב המסובכות שנדרשים להן תלמידי הרמות הגבוהות במתמטיקה. למרות זאת, ורד מאפיינת את הוראת הגאומטריה במרחב שלה כמינימלית, ועדיין חשה חוסר ביטחון ורצון לצמצם עוד יותר את הוראת נושא הגאומטריה במרחב:

[...] לימדתי תיבה וקובייה, והסברתי לתלמידים איך מוצאים שטח פנים, מה זה מקצוע, ומה זה נפח [...] אבל בבסיס, ממש הכי בסיסי שיכול להיות. כשלימדתי על פרישות, מורה אחרת הכינה ונתנה לנו [...] זהו, כמה שפחות להתעסק עם זה, ככה אני מרגישה יותר טוב [...] יש פשוט מורה שמגיעה ומדגימה [...]

נוסף על כך, ורד מתארת כיצד היא נאלצת לפעמים להתמודד בתחום עם שאלות תלמידים:

[...] אם אני במקרה הבנתי את השאלה והכול בסדר, יופי, אני אסביר והכול, ואם לא, אז בדרך כלל אני אמצא לזה פתרון כמו "אני אחשוב על זה ואני אחזיר לך תשובה מחר" או אנסה להרוויח זמן באופן אחר, ובינתיים אנסה להתייעץ עם מישהו [...]

מתוך החרדה, התסכול והכעס שהמורות חשות, הן מפנות אצבע מאשימה הן כלפי עצמן והן כלפי חוץ. ניצה נוטה להאשים את עצמה בפינוק יתר ובהזנחה:

[...] זה סוג של פינוק. אני מוותרת לעצמי, וזה סוג של פינוק. כאילו, אני אומרת: "O.K. אני תותחת בשאר, אז בסדר, אני לא יודעת הנדסת המרחב..." [...] אולי זה סוג של פינוק [...] זאת הזנחה שלי. ברור לי, לא נדרשתי לזה. תמיד הסתדרתי בלי זה [...]

עם זאת ניצה חושבת שחלק מן הקשיים נובעים מכך שתוכנית

[...] תמיד הנדסת המרחב נכנסת בדלת האחורית - מתבוננים בצורות במרחב, אבל לא רכשנו כלים לכך כי הגאומטריה במרחב היא לא נושא בפני עצמו. מראש לא נותנים לגאומטריה במרחב מספיק מקום בתוכנית הלימודים [...]

לסמדר ביקורת נוקבת כלפי תוכנית הלימודים שאינה משתמשת בטכנולוגיה:

[...] אני בהחלט חושבת שאילו הייתה לי תוכנה שמדמה זאת ומקלה על הראייה, אפשר היה לשאול גם שאלות מורכבות יותר בגאומטריה במרחב. בגאומטריה במישור נבנה, התרגיל הרבה יותר מורכב מאשר כל הזמן למצוא זוויות בין ישרים. לעומת זאת, במרחב, פרטור השאלות שלי מאוד מצומצם, רק בגלל שלא מראים לי את זה. ברגע שיראו לי את זה, השאלות תוכלנה להיות יותר מעניינות [...]

לטענת סמדר:

[...] השאלות פשטניות, לא מעניינות ומאתגרות בעצם רק את מי שמתקשה לראות במרחב [...]

ורד מציינת כי היא לא היחידה שמתקשה לראות במרחב:

[...] וזה קשה לכולם, אני לא היחידה, לבד שקשה לה. אני מרגישה את אותו קושי גם אצל מורים אחרים. בישיבות זה פתאום יוצא החוצה. פתאום זה לא יודע, והוא לא יודע, והרבה מתביישים להגיד שהם לא יודעים [...]

מתוך כך ורד מפנה אצבע מאשימה כלפי גורמים רבים, החל במורה שלה:

[...] זה בטוח קשור למורה שהייתה לי, שלימדה אותי ושלא הפנימה אצלי את הנושא הזה [...]

דרך התנהלות מערכת החינוך:

[...] אני חושבת שאפשר היה לתקן את זה בצורה מאוד ברורה, כמו שמתקנים ראייה עם משקפיים, אני חושבת שאפשר היה לתקן את זה מאוד פשוט, ולא עשו את זה במערכת החינוך, ועד היום לא עושים [...]. אולי זה לא ממש כמו תיקון ראייה. אבל יכול להיות, אם היו נותנים לי הזדמנות לעשות שינוי, אז הייתי רואה אם זה משהו שקשור להוראה של גאומטריה במרחב, שלא נעשתה כמו שצריך, ואני בטראומה, או שאני לא רואה במרחב, וזהו [...]

וכלה בתוכנית הלימודים:

[...] אתה אומר "וואלה, אני לא לבד. משהו לא בסדר?" [...] איפה מה שלא בסדר? מאיפה זה מגיע? אני חושבת שזה כרוך בזה שבגן משחקים בקוביות, ובעצם מה הלאה? אחרי זה מפסיקים לשחק בקוביות, ומתחילים לעבור לשרטוטים דו-ממדיים, ושם אני חושבת שיש איזשהו נתק, בין מה ששיחקנו בגן לבין מה שהתחילו ללמד אותנו ב"סודי". פתאום איכשהו, התלת-ממד הפך להיות משהו אחר, זה כבר לא התלת-ממד המוכר. ולא מלמדים אותו בצורה נכונה [...]

מתוך היוםננים המתמטיים שכתבו, נדמה כי המורות מדגישות את חשיבות תפקודן בכיתה בשיעורי גאומטריה במרחב לא פחות, ואפילו יותר את תפקודם של התלמידים, כך ניצה כותבת לקראת שיעור הגאומטריה במרחב שהסכימה להעביר לצורך מחקר זה:

[...] הכי חשוב שאני אהיה רגועה ואצליח לראות את הדברים מתוך הדגמים, כפי שעשיתי בבית. חשוב שהם התלמידים יצליחו לראות מתוך הדגמים [...]

סמדר מנסה להתבונן התבוננות רפלקטיבית בשיעור שהעבירה. מבחינתה של סמדר חשוב לחשוף את התלמידים לגופים ולהגדרות ויהי מה:

[...] חשוב לי שלא להעביר את המצוקה והפחדים שלי לתלמידים. נראה לי ששידירתי ביטחון עצמי והתלמידים לא הרגישו שיש כאן רגישות כלשהי ושיש לי קושי אישי עם הנושא [...] אם יש תלמידים עם ראייה מרחבית טובה, הם כבר יתקדמו משם בעצמם [...]

התנהלות המורות בסביבה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים

ברמה ההצהרתית, שלוש המורות תולות תקוות רבות בשילוב הטכנולוגיה בהוראת הגאומטריה במרחב, ורואות בכך הזדמנות עבור עצמן, עבור התלמידים ועבור המקצוע. ורד מדברת בהתלהבות:

[...] כשראיתי את זה, אמרתי לעצמי: הנה ההזדמנות שלי להבין משהו בגאומטריה במרחב. פשוט הזדמנות מדהימה לקחת ולראות את הדברים as is [...] סובבנו, הזננו, הרמנו [...] דבר יוצא מן הכלל, שצריך להיות דבר נפוץ בכל מערכת החינוך, החל מן הגן [...]

כאן סמדר מעזה להביע את תקוותה:

[...] אני בהחלט חושבת שאילו הייתה לי תוכנה שמדמה זאת ומקלה על הראייה, אפשר היה לשאול גם שאלות מורכבות יותר בגאומטריה במרחב [...] במרחב, פרטור השאלות מאוד מצומצם, רק בגלל שלא מראים לי את זה. ברגע שיראו לי את זה, השאלות תוכלנה גם להיות יותר מעניינות. צריך לחשוב על זה [...] נוסף על זה, הייתי שמחה שלי תהיה ראייה מרחבית טובה יותר. ואולי השימוש בתוכנה מדמה כזאת הייתה גם עוזרת לי ומשפרת את הראייה המרחבית שלי [...]

להלן מתוארת השערתה של ניצה:

[...] ההמחשה תהיה הרבה יותר קלה עם טכנולוגיה כי את לא צריכה להעביר את כל השיפודים והמקלות בתוך ה [...] זה פרימיטיבי, זה של דב המעורות! ברור לי שיש אמצעי המחשה הרבה יותר מתקדמים [...]

עם זה עלו גם הרבה חששות כלפי הטכנולוגיה. ניצה העלתה שאלה נוקבת מאוד הנוגעת לכלי המחשה טכנולוגיים:

[...] האם השימוש בכלי לאורך זמן מלמד אותך משהו, שבבוא הזמן המוח שלך כבר ידע לעשות בעצמו, ללא כלי ההמחשה? זאת השאלה [...] או שזה נהיה קביום שאתה כבר לא יכול ללכת בלעדיהם? זאת השאלה שלי ברמת העיקרון. עד כמה, הקביום האלה [...] אתה הופך להיות תלוי בהם? כי הרי בחיים האמיתיים, אין לך אותם. אתה לא תתחיל להעביר בתוך החדר שיפודים ועניינים [...] או לחלופין לרוץ אל הטכנולוגיה בכל פעם [...]

במהלך הסדנה שבה נחשפה ניצה לתוכנת ה-Cabri 3D, כמו ביומן האישי שרשמה, הביעה ניצה חשש כי ניהול השיעור בגאומטריה במרחב, בצירוף הצורך להתמצא בתוכנה עצמה, יקשו עליה מאוד. חשש זה גבר אצלה גם בשל חוסר הצלחתה להתמודד לבדה עם התוכנה במהלך היום שלפני השיעור. כך היא אמרה:

[...] אני לא לימדתי אף פעם שיעור כזה בגאומטריה במרחב - עם כל ההגדרות והזוויות בדגמים ממוחשבים, אז אני ממש מפחדת [...]

כדי להפחית חרדה, החלטתי להשתתף בשיעור עצמו ולנהל תצפית מעורבת (שקדי, 2003). במהלך השיעור לימדה ניצה גאומטריה במרחב, ואילו אני הדגמתי את התרגילים באמצעות התוכנה, וביצעתי סיבובים, מדידות ובניות בהתאם לבקשותיה של ניצה ושל התלמידים. למרות זמינות התוכנה הממוחשבת והעזרה שלי, שמתי לב כי ניצה הרבתה לנצל את הדגמים הממוחשבים בעיקר כתחליף לשרטוטים שלה על גבי הלוח.

לעומתה, סמדר הסתדרה נפלא עם התוכנה ואף פיתחה עצמאות בהדגמות באמצעותה, כך שלא נעזרה בי כלל במהלך השיעור כולו. שליטתה בתוכנה והידיעה שזה היה שיעור בסיסי בנושא המרחב, תרמו לכך שסמדר חשה רגועה גם לפני תחילת השיעור:

[...] אין לי ניסיון קודם בהמחשה ממוחשבת, אך נראה לי שאסתדר [...]

לאחר השיעור סיכמה סמדר את חוויותיה בהתלהבות:

[...] אני אף פעם לא נעזרתי באמצעי המחשה בשיעורי גאומטריה

במרחב, אבל עכשיו אני חושבת שזה משהו מאוד חשוב, אולי הכי חשוב. זה עוד לא רק לתלמידים, אלא גם למורה. ככה אפשר להקריין את הדגם, לסובב ולמדוד ולהמחיש את הכול. זה עולם אחר!

שלא כניצה וסמדר שנענו לאתגר, דחתה ורד באמתלות למיניהן שלושה מועדים שבהם קבענו כי אצפה בה מלמדת גאומטריה במרחב בשילוב תוכנת ה-Cabri 3D. לבסוף היא התוודתה לפניי כי היא חשה מאוד לא נוח לגבי שיעור כזה ואין בכוונתה לקיימו מאחר שאינה מאמינה שיש בכוחה להתמודד עם המשימה. בדיעבד חדרה לתודעתי נימת הייאוש בדבריה של ורד:

[...] מבחינתי [...] לא יודעת. אני לא רואה מקום לשינוי. אצלי, באופן אישי אני לא רואה מקום לשינוי, אלא אם כן [...] יקרה נס [...]

במחקר זה נשמע קולן של שלוש מורות למתמטיקה המעידות על עצמן שהן מתקשות לראות במרחב. היותן שלוש מורות בלבד אפשר לנו לבחון ב"זכוכית מגדלת" את תחושותיהן ותפיסותיהן. עם זה חשוב להסתייג מניסיון להגיע להכללות כלשהן, שכן אין לשכוח כי מדובר רק בשלוש מורות מסוימות, וחשוב שלא לטעות ולהגיע להכללות יתר. מתוך מודעות זו לחוזקות המחקר ולמגבלותיו, בטבלה 3 להלן ניסיון לסכם את ממצאי שלוש המורות, מתוך השוואה שיטתית בין תפיסת הוראת גאומטריה במרחב לתפיסת ההוראה בתחומי מתמטיקה אחרים, כפי שאלו עולות מתוך ממצאי המחקר. השוואה זו נעשתה על פי ארבע קטגוריות שעלו מתוך ניתוח הממצאים: התנסות בעבר כתלמידה, ההיבט הרגשי, ההתמודדות עם ההוראה והתפיסה של הטכנולוגיה.

טבלה 3: סיכום ממצאי המחקר

תפיסות באשר להוראת מתמטיקה		תפיסות באשר להוראת גאומטריה במרחב		קטגוריה
יכולת מתמטית טובה	התנסות חיובית כתלמיד: חוויית הצלחה והצטיינות	קושי בראייה מרחבית	התנסות שלילית כתלמיד: חוויית כישלון	התנסות בעבר כתלמיד
אהבה למקצוע			מצוקה, אי-נוחות, פחד, חשש, חרדה, לחץ, איום, תסכול, כעס, בושה, תשישות, חוסר מקצועיות, חוסר ביטחון, חוסר אונים	היבט רגשי
דימוי עצמי מקצועי גבוה			דימוי עצמי מקצועי נמוך	
תחושת מסוגלות עצמית גבוהה			תחושת מסוגלות עצמית נמוכה,	
ביטחון ברמת הידע המקצועי,			אמונה כי רמת הידע הקיימת אינה מספקת, חשש משאלות חדשות	
אין חששות, אין פחד משאלות חדשות ומאתגרות				
התמודדות באמצעות מקצועיות המורה כוורטואז, כאוטוריטה מקצועית			התמודדות באמצעות בריחה, הדחקה, דחיית מענה בניסיון "להרוויח זמן", אחיזת עיניים, העברת אחריות לאחרים, האשמה, פטליזם, נטישת האחריות להישגי התלמידים, תפקוד בסיסי ומינימלי, שפה עמומה וחוסר דיוק מקצועי, שימוש ביכולות המתמטיות החזקות	התמודדות
השיעורים אינם מערבים טכנולוגיה ועזרים אחרים			חיפוש אחר עזרים שונים מתוך רצון לשנות: הטכנולוגיה כתרופת פלא	טכנולוגיה

מסקנות ודין

שלוש המורות קשרו את התנסותן בהנדסת המרחב כתלמידות וגם את התנסותן העכשווית בהוראת הגאומטריה במרחב בכיתה, אל התפיסה שלהן את עצמן כמתקשות לראות במרחב. תפיסה זו כלפי הזיקה בין הדברים, היא טבעית ומובנת, במיוחד על פי התאוריה ההתפתחותית ארוכת השנים של הכישורים המרחביים (Robichaux & Guarino, 2000). מתוך ההתנסות והחווייה השלילית בעברן, אין זה מפליא כי שלוש המורות פיתחו תחושת מסוגלות עצמית נמוכה כלפי הוראת הגאומטריה במרחב (Ramey-Gassert & Shroyer, 1992). שלושתן זכרו את הקושי שליווה אותן כתלמידות המנוגד לחוויית המתמטיקה החיובית שהייתה להן, וסברו כי שורשי הבעיה בוויזואליזציה המרחבית שלהן נעוצים בחוויות עבר אלו. מאז ילדותן ועד עצם היום הזה, ראו שלוש המורות בגאומטריה המרחבית חלק אינטגרלי מתוכנית הלימודים במתמטיקה. למרות זאת, מתוך דברי המורות בולטת ההנגדה המקצועית, המחשבתית והרגשית בין הוראת הגאומטריה במרחב להוראת הנושאים המתמטיים האחרים. מהו מקור הפרדה זו וכיצד קרה שהמורות המשיכו באהבת המתמטיקה שלהן, ואף פיתחו קריירה מקצועית בהוראת המתמטיקה על אף הקושי שחוו בגאומטריה במרחב? האם אפשר לומר שזו

תולדה של מסרים, מפורשים או סמויים, שקיבלו כתלמידות מתוך ההבדלים בין חוסר תפקודן בהנדסת המרחב ובין הישגיהן המרשימים בשאר הנושאים המתמטיים? זו סוגיה מעניינת למחקר עתידי.

מכל מקום, שחזור חוויות מן העבר איפשר למורות העמקת ההבנה העצמית, אם מתוך השלמה עם המצב ואם מתוך רצון ומוטיבציה להשתתף במחקר מתוך תקווה לשינוי. תפיסתן העצמית של שלוש המורות כבעלות קושי בראייה מרחבית, מתקשרת אצלן לתחושות קשות מאוד: מצוקה, אי-נוחות, חשש, חרדה, פחד, לחץ, איום, תסכול, כעס, בושה, תשישות, חוסר ביטחון, חוסר אונים וחוסר מקצועיות. תחושות אלו עולות בקנה אחד עם תחושת המסוגלות העצמית הנמוכה ועם הדימוי העצמי המקצועי הנמוך המשתקפים מדבריהן של שלוש המורות על הוראת הגאומטריה במרחב (קס, 2000). חוסר הביטחון בידע ובתפקוד המקצועי שלהן בגאומטריה במרחב, עומד בניגוד מוחלט לתחושת המסוגלות העצמית הגבוהה שלהן בנושאים מתמטיים אחרים, תחושה המושתתת על ידע מקצועי, קוריקולרי ופדגוגי ועל ניסיון מקצועי עשיר בכיתות שהן מלמדות בהן.

נראה כי דווקא ניגוד זה מעמיד את המורות במצב בלתי אפשרי מבחינתן בכיתותיהן: מצד אחד נחשפו התלמידים למורות למתמטיקה

סיכום

המסקנות המובאות כאן הן למעשה פרשנויות שלי כחוקרת לסיטואציות שנחשפתי אליהן במהלך התצפיות, ולדברים שעלו מתוך המסמכים למיניהם שאספתי או שעלו מתוך אמירותיהן של שלוש המורות, מושאות המחקר שלי במהלך הראיונות. מתוך כך השתדלתי לספק תיאור מעובה ועשיר הסובב על הקטגוריות המוצעות, והוא כולל ציטוטים מתוך הראיונות והמסמכים שנאספו, כמו רשמים מתוך התצפיות. כמו כן דאגתי לבקש את הסכמת שלוש המורות הנחקרות לפרשנות שלי, כפי שזו מופיעה בניתוח הנתונים, בהסקת המסקנות ובדיון. להערכתי יש בכך כדי לחזק את התוקף והמהימנות של ניתוח הנתונים, כמו את הצד האתי שבמחקר. עם זה יש לזכור כי מדובר בשלוש מורות מסוימות שנבחרו מלכתחילה ככאלה שמתקשות לראות במרחב, ולהיזהר מהכללות יתר.

רשימת מקורות

פסקין, ד' ומלאת, ש' (1999). ידע עצמי בהנדסת המרחב של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי. **דפים**, 28, 91-106.

פרידמן, י' וקס, א' (2000). **תחושת המסוגלות העצמית של המורה: המושג ומדידתו**. ירושלים: מכון הנרייטה סאלד.

קס, א' (2000). **תחושת המסוגלות המקצועית של המורה – סקירת ממצאי הספרות בחלוקה תלת ממדית של המושג**. מעוף ומעשה במכללת אחוה, 6, 73-103.

שקדי, א' (2003). **מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני – תאוריה ויישום**. תל-אביב: רמות - אוניברסיטת תל אביב.

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. In M. A. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italia. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf

Bainville, E., & Laborde, J. M. (2004). *Cabri 3D (version 2.0)* [Software]. Grenoble: Cabrilog. Retrieved from <http://www.cabri.com>

Bandura, A. (1997). *Self efficacy: The exercise of control*. New York: Freeman.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., & Jones, K. (2005). *Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design*. In F. Olivero & R. Sutherland (Eds.), *Visions of mathematics education: Embedding technology in learning: Proceedings of the 7th international conference on technology in mathematics teaching* (pp. 69-77). Bristol, UK: University of Bristol.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-488.

Duval, R. (2003). "Voir" en mathématiques. In E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México, México: Cinvestav y Fondo de Cultura Económica.

Ferrara, F., & Mammana, M. F. (2014). Seeing in space is difficult: An approach to 3d geometry through a dge. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 57-64). Vancouver, Canada: PME.

מנסות ומקצועיות המאמינות ביכולתן ומפגינות אותה בשיעורים; מצד אחר הן מתקשות בהוראת הגאומטריה במרחב, אינן מאמינות ביכולתן ללמד את הנושא בדרך מובנית ומעמיקה שבה הן רגילות ללמד נושאים אחרים, וחוששות כי "חרפתן" תגלה בכיתה. הן רואות זאת כחוסר מקצועיות מצדן להודות בקושי שלהן לראות במרחב לפני התלמידים, ומעדיפות להעמיד פנים "כאילו הכול כשורה" ולנצל את כישוריהן האנליטיים החזקים כדי "לשחק את המשחק" עד הסוף. הטקטיקות שהן מאמצות כדי להתמודד עם הוראת הגאומטריה המרחבית, כוללות הדחקת הקשיים באמצעות הוראה תוחמת המערבת תרגול בקושי בסיסי בלבד, דחייה מתוחכמת של פרק הלימוד לסוף שנת הלימודים כדי להספיק ללמד כמה שפחות, ניסיונות "להרוויח זמן" בשיעור כדי לשאול עמיתים באותם מקרים שבהם לא מצליחות לענות על שאלות, העברת האחריות על הידע לתלמידים, במיוחד לקראת סוף הנושא, והעברת האחריות על ההוראה אל עמיתים למקצוע, עד כדי התחמקות מלאה מהוראת הנושא.

לי נראה כי טקטיקת הברחה מללמד גאומטריה במרחב מאפיינת במידה זו או אחרת את כל אחת משלוש המורות הנבדקות: 1. ורד ברח מללמד גאומטריה במרחב ברמה גבוהה בכך שבחרה במודע ללמד מתמטיקה רק ברמה הנמוכה של 3 יח"ל; 2. סמדר מלמדת גאומטריה במרחב ברמה בסיסית ב-5 יח"ל בדרך כה מתמשכת ומדורגת, עד שבסופו של דבר, כשכבר מגיעים לתרגילים המסובכים, היא כבר יכולה להסתמך על הידע שרכשו התלמידים, ולהעביר אליהם את האחריות; 3. ניצה מצליחה להתחמק שנה אחר שנה מללמד את הנושא וממנה מורה אחר שילמד במקומה. בשנים שפתרון כזה אינו מתאפשר, דוחה ניצה במודע את הוראת הנושא ממש לשיעורים האחרונים, ומשאירה מעט מאוד זמן להוראה בסיסית ביותר. ממצאים אלו עולים בקנה אחד עם ממצאיה של קס (2000) באשר ל"ברחה מאחריות" על הישגי התלמידים אצל מורים בעלי תחושת מסוגלות עצמית נמוכה; כמו אצל קס (2000), גם מתוך ממצאי מחקר זה עולה תחושה כי המורות עסוקות יותר בעצמן ובהתמודדותן עם הקושי שלהן בגאומטריה במרחב, ופחות עסוקות בתלמידים, בהבנה שלהם ובהישגים שלהם.

בד בבד עולה מתוך הממצאים תחושה כי תפיסת המורות את התנהלותן בסביבה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים נגזרת מתוך חרדת המחשב שלהן (Russell & Bradley, 1997). התלהבותן של שלוש המורות מרעיון שילוב הטכנולוגיה בשיעורי הגאומטריה במרחב, ברמה ההצהרתית, לא זכתה אצל כולן לאותה התלהבות גם ברמה המעשית, וזאת כנראה בשל מידת האוריינות הטכנולוגית השונה של שלוש המורות. נוסף על כך, בהתחשב בכך שאף אחת מהמורות לא הזכירה שימוש בטכנולוגיה בהוראת נושאים מתמטיים אחרים, עולה המחשבה כי למעשה תופסות המורות את השימוש בטכנולוגיה בגאומטריה במרחב כאמצעי לשעת חירום, כקביים או כתרופת פלא העשויה לעזור להן עזרה מקומית בהוראת הנושא הבעייתי. תפיסות אלו תואמות את הרצון שהביעו המורות לשנות ולשפר את אופן התמודדותן עם הוראת נושא הגאומטריה במרחב. אולם, על פי בנדורה (Bandura, 1997), ייתכן שדווקא תחושת המסוגלות העצמית הנמוכה של המורות, היא שתמנע מהן לאמץ באורח קבע את השימוש בטכנולוגיה שהוצגה לפנייהן, על אף התלהבותן הראשונית. בהיבט הפרקטי, רצוי שהעוסקים בהכשרת מורים למתמטיקה יפתחו מודעות לתחושת המסוגלות הנמוכה של חלק מן המורים כלפי הוראת הגאומטריה במרחב, ויכוונו את תוכנית ההכשרה לשיפור תחושה זו.

- Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2012). [Spatial anxiety relates to spatial skills as a function of working memory in children](#). *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 65(3), 474-487. doi: 10.1080/17470218.2011.616214
- Robichaux, R. R., & Guarino, A. J. (2000). [Predictors of visualization: A structural equation model](#). Paper presented at the annual meeting of the Mid-South Educational Research Association. Bowling Green, KY.
- Roschelle, J. M., Pea, R. D., Hoadley, C. M., Gordin, D. N., & Means, B. M. (2000). [Changing how and what children learn in school with computer-based technologies](#). *The Future of Children*, 10(2), 76-101.
- Russell, G., & Bradley, G. (1997). [Teachers' computer anxiety: Implications for professional development](#). *Education and Information Technologies*, 2(1), 17-30. doi: 10.1023/A:1018680322904
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411
- Tuvi-Arad, I., & Gorsky, P. (2007). New visualization tools for learning molecular symmetry: A preliminary evaluation. *Chemistry Education Research and Practice*, 8(1), 61-72. doi: 10.1039/B6RP90020H
- Widder, M., & Gorsky, P. (2013). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 32(1), 89-120.
- Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2014). Dismantling Visual Obstacles to Comprehension of 2-D Sketches Depicting 3-D Objects. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), [Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education](#) (Vol. 5, pp. 369-376). Vancouver, Canada: PME.
- Yeh, A., & Nason, R. (2004). VRMath: A 3D microworld for learning 3D geometry. In L. Cantoni & C. McLoughlin (Eds.), *Proceedings of EdMedia 2004: World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (pp. 2183-2194). Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from <http://www.editlib.org/p/12323>
- Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 199-219. doi: 10.1007/BF00305090
- Ferrarello, D., Mammanna, M. F., & Pennisi, M. (2014). *From 2D to 3D geometry: Discovering, conjecturing, proving*. In A. Rogerson (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project: The future of mathematics education in a connected world* (pp 21-26). Montenegro. Retrieved from <http://directorymathsed.net/montenegro/Ferrarello.pdf>
- Friedman, L. (1995). The space factor in mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research*, 65(1), 22-50. doi: 10.3102/00346543065001022
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- Gibson, S., & Dembo, M. H. (1984). Teacher efficacy: A construct validation. *Journal of Educational Psychology*, 76, 569-582. doi: 10.1037/0022-0663.76.4.569
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), [Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education](#) (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & van Dormolen, J. (1997). *Shape and space*. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kahle, D. K. B. (2008). *How elementary school teachers' mathematical self-efficacy and mathematics teaching self-efficacy relate to conceptually and procedurally oriented teaching practices* (Doctoral dissertation). Ohio State University. Retrieved from https://etd.ohiolink.edu/pg_1070::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1211122861
- Kali, Y., & Orion, N. (1996). Spatial abilities of high-school students in the perception of geologic structures. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(4), 369-391. doi: 10.1002/(SICI)1098-2736(199604)33:4<369::AID-TEA2>3.0.CO;2-Q
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 151-161. doi: 10.1023/A:1012793121648
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage. doi: 10.1037/0033-2909.86.5.889
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918. doi: 10.1037/0033-2909.86.5.889
- Mohler, J. L., (2008). [A review of spatial ability research](#). *Engineering Design Graphics Journal*, 72(3), 19-30.
- OECD. (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework for PISA 2006*. Retrieved from http://www.oecd-ilibrary.org/education/assessing-scientific-reading-and-mathematical-literacy_9789264026407-en
- OECD. (2007). *ISA 2006 – Advanced Details*. Retrieved from <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>
- Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs. 'seeing': Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92. doi: 10.1007/BF00428386
- Ramey-Gassert, L., & Shroyer, M. G. (1992) Enhancing science teaching self-efficacy in preservice elementary teachers. *Journal of Elementary Science Education*, 4(1), 26-34. doi: 10.1007/BF03173752

עקרונות התערבות בהוראת מתמטיקה בקרב תלמידות תיכון חלשות

תקוה עובדיה



ד"ר תקוה עובדיה

בוגרת תואר ראשון ממכללת אורנים, תואר שני בחינוך מתמטי מאוניברסיטת חיפה ותואר שלישי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון.

מרצה במכללת אורנים ובמכללה ירושלים.

עוסקת במחקר ויישום של פיתוח חשיבה מתמטית לפתרון בעיות בקרב תלמידים (תיכון ומטה) מתקשים במתמטיקה, בעקרונות לשילוב טכנולוגיה בהוראה בחינוך גבוה ובלמידה מנתונים ונתוני עתק בחינוך מתמטי ומדעי.

תקציר¹

המאמר המוצג להלן מתאר מחקר שבחן יישום עקרונות תאורטיים להוראת מתמטיקה, ליישום בהוראה בכיתות תיכון המאוכלסות בתלמידים חלשים. סביבת המחקר כללה הוראת מתמטיקה באמצעות יישום עקרונות ההוראה תאורטיים, בקרב שתי כיתות לימוד של תלמידות תיכון חלשות בתיכון. שתי הכיתות למדו את תוכנית הלימודים במתמטיקה לקראת היבחנות בבחינות בסוף שנת הלימודים. לאורך השנה תועדו כל שיעורי המתמטיקה, מניתוח השיעורים נמצא כי העקרונות התאורטיים שיושמו בכיתות בעלי פוטנציאל לקדם תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות.

מאמר זה מתאר את העקרונות התאורטיים כפי שהם נלמדו מהספרות המחקרית, ומתאר את יישומם בפועל כתכנית כיתה שנבחנה באמצעות כלים מחקרניים.

העקרונות שיושמו בתהליך ההתערבות הכיתתי במחקר זה, הם חיבור בין מסקנות מנושאי מחקרים קודמים, הנוגעים לשלושה רעיונות תאורטיים עיקריים: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות, בניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות ויעילות שימוש בדפי דוגמאות פתורות בכיתת המתמטיקה.

מילות מפתח: עקרונות התערבות; הוראת מתמטיקה לתלמידי תיכון חלשים; קידום פתרון בעיות.

רקע תאורטי למחקר

הרקע התאורטי למחקר מתאר את שלושת הרעיונות התאורטיים שמהם נגזרו עקרונות ההתערבות: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות, בניית קשרי דמיון בין רעיונות מתמטיים ובניית סכמות קוגניטיביות ולמידה באמצעות דוגמאות פתורות.

1 מאמר זה מעובד בחלקו מתוך עבודת מחקר שנעשתה בטכניון לצורך קבלת דוקטורט בהנחיית פרופ' בוריס קויצ'ו.

מחקר זה מתמקד בחקר סביבת למידה שאחד מעקרונותיה הוא הוראה מפורשת של אסטרטגיות הוריסטיות, ככלי המקדם פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות.

לפי מחקרים המאפיינים תלמידים חלשים במתמטיקה (Geary & Brown, 1991; Geary & Widaman, 1992; Geary, Hoard, & Hamson, 1999) מאפייני החשיבה של תלמידים חלשים מתייחסים להיבטים רחבים של הלמידה, החל בקושי להבין אריתמטיקה באמצעות פעולות חשבון המבוצעות על כמויות המיוצגות באמצעות מספרים, ועד היכולת לעבד מידע, ולהסיק מסקנות לוגיות בהקשר של תובנה מספרית ובהקשר של מתמטיקה מופשטת המתארת אובייקטים ויחסים מבנים מתמטיים (Geary, 2004, 2005).

לפי גישות ההוראה המסורתיות, מורים לתלמידים חלשים פותרים עם תלמידיהם בעיות הדורשות מיומנויות חשיבה בסיסיות, ורק בשלבים מאוחרים של הלמידה, התלמידים פוגשים בעיות הדורשות מהם מיומנויות חשיבה גבוהות (כגון לוגיקה ושרשור של הסקת מסקנות, או יישום ידע מתמטי מנושאים מתמטיים מגוונים בפתרון בעיה אחת), ולכן זיכרון הלמידה הוא בטווח קצר. על פי חזן, הרכבי וקרסנטי (הרכבי, 1999, 2000; קרסנטי והרכבי, 2001; Chazan, 1996, 2000; Chazan, Callis, & Lehman, 2008; Karsenty, 2010, 2012, 2014), חוסר ניסיון במיומנות לפתור בעיות מורכבות באמצעות אסטרטגיות הוא אחד הגורמים להישגים דלים של תלמידים במתמטיקה. במחקרה של ווטסון (Watson, 2001) נמצא כי תלמידים חלשים שנחשפו להוראה של בעיות מתמטיות לא רוטניות, הצליחו ליישם פתרון בעיות מתמטיות באמצעות אסטרטגיות המייצגות מיומנויות, כגון יישום ידע מתמטי המשלב כל מיני נושאים מתמטיים, שרשור לוגי מתמטי, או ייצוג מגוון של פתרונות לבעיה אחת. מיומנויות אלה קשורות בדרך כלל לתלמידים המצטיינים ולא לתלמידים החלשים. נוסף על כך, אחת ממסקנות המחקרים עוסקת בצורך של תלמידים חלשים לחיזוק המשמעות של הנלמד. במחקר שביצעו קויצ'ו, ברמן ומור (Koichu, Berman, & Moore, 2007a) נבנו סיטואציות מתמטיות דידקטיות, שמטרתן ליישם הוריסטיות מסוימות כדי לקדם אוריינות יוריסטית באמצעות שימוש בתרגילים ששייכים לשגרה של תוכנית הלימודים. בין השאר נלמד ממחקרם כי תלמידים שהיו חלשים יותר במבחני ה-SAT בתחילת הניסוי, הראו התקדמות רבת משמעות לעומת שתי המדידות בסוף הניסוי, מה שהעלה את המסקנה שחווית למידה המשלבת למידה של אסטרטגיות הוריסטיות מקדמת בהכרח פתרון בעיות של תלמידים חלשים (Koichu, Berman, & Moore, 2007b).

טענה זו היא טענה חדשה בספרות המקצועית שעוסקת בקידום פתרון בעיות בקרב תלמידים חלשים. כמו כן בדו"ח מחקר של המועצה הלאומית למדע בארה"ב (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2011) הומלצו דרכי הוראה לפיתוח מיומנויות של לימוד התואמות את המאה העשרים ואחת. בין המיומנויות המומלצות התמקדו בהוראה הכוללת תהליכים ואסטרטגיות קוגניטיביים לפיתוח לומד המיומן בפתרון בעיות.

תהליך בניית סכמות מנטליות לפתרון בעיות

עיקרון ההוראה שמשמש מרכיב עיקרי בסביבת הלמידה התמקד בפיתוח מיומנות לבניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות.

שלב הכרחי לצורך פיתוח יכולת ומיומנות לפתרון בעיות הוא שלב

שבו הלומד בונה בזיכרון לטווח הארוך סכמות קוגניטיביות או מודלים מנטליים, כמו רשת של קורי עכביש, הכוללים ידע קריטי שיאוחזר בעתיד במהלך פתרון בעיות חדשות (Gick & Holyoak, 1987; Sweler, 1998). פישיבין (Fischbein, 1987) מתאר את הלומד כאקטיבי המפתח מודלים מנטליים של המושגים שהוא לומד. הלומד מאחד את הידע הפורמלי והבלתי פורמלי לסכמות תפיסיות המושפעות ומעוצבות מסך כל החוויות וההתנסויות שלו. רוסו (Rossow, 2005) מתאר את הסכמה הקוגניטיבית כמרכיב שכולל פיסות ידע וקשר ביניהן. כאשר הסכמה מאורגנת נכון, ידע מסוים מתוך הסכמה יאוחזר לזיכרון העבודה בעת הצורך בהקשר הנכון. חשיבה באמצעות מודלים וסכמות יעילה בעיקר לצורך פיתוח חשיבה אנלוגית (Mayer, 1998a, 1998b; Mayer, 2004). חשיבה אנלוגית יעילה היא חשיבה שיש בה מיפוי בין שתי סכמות רלוונטיות, שהלומד מנתח אותן על פי דמיון חיצוני (מילים, מושגים), דמיון מבני (אסטרטגיות הוריסטיות, פרוצדורות ואלגוריתמים) או שניהם יחד. קירשנר, סוולר וקלארק (Kirschner, Sweller & Clark, 2006) מאפיינים את התהליך של פתרון בעיות כתהליך שבו הפותר צריך לבחור מתוך מאגר סכמות מצטבר, את הסכמה הרלוונטית הכוללת את חלקי הידע המסוים הנדרש לפתרון הבעיה הנוכחית.

ככל שהפותר מומחה יותר, הוא מזהה בקלות רבה יותר את הסכמה הרלוונטית, ובכך הוא מונע מעצמו עומס קוגניטיבי מיותר על זיכרון העבודה. כמו כן נמצא כי בזמן הפתרון, פותר לא מומחה מעמס על זיכרון העבודה נתונים לא רלוונטיים לפתרון הבעיה. העיסוק בנתונים הרלוונטיים פחות גורם לפותר להתנהג התנהגות לא יעילה ולא חסכונית מבחינת משאבי הקשב והקוגניציה, וזו גורמת לעצירת הפתרון טרם סיומו (Jaeggi, Buschkuhl, Jonides, & Perrig, 2007; Jaeggi et al., 2008). לומד שאינו מומחה לפתרון בעיות, בבואו לפתור בעיה, סורק את מאגר הסכמות הקשור לפתרון בעיות הנמצא בזיכרון לטווח הארוך, לפי הקשר אסוציאטיבי שלא דווקא מתאים לבעיה הזו, מאחר שאינו מצליח לזהות בקלות את הסכמה הרלוונטית שהבעיה שייכת לה. בתהליך סריקה ארוך זה, הלומד הבלתי מומחה מעמס על זיכרון העבודה עומס מיותר או עוצר את הסריקה טרם סיומה, בגלל מגבלות של קשב או זיכרון העבודה (de Jong, 2010; de Jong & Ferguson-Hessler, 1986). מחקר זה מנסה להתגבר על בעיה זו באמצעות הוראה הכוללת בניית קשרי דמיון באופן מודרך והכרתי בין הבעיות, כך שבניית הסכמות הקוגניטיביות אינה תהליך פנימי בלתי מכוון ובלתי מודע, אלא ההפך, הלומד מתנסה במיומנות של בניית קשרים רלוונטיים (כך גם במחקרם של Kuo, Hull, Gupta, & Elby, 2013).

בניית קשרים בין בעיות מתמטיות ככלי לקידום

מיומנויות לפתרון בעיות

בניית קשרים בין נושאים מתמטיים, בין בעיות מתמטיות, או בתוך אותה בעיה במרכיבים שונים שלה, היא מיומנות. מיומנות זו אמורה להיות חלק ממטרותיה של כל תוכנית לימודים במתמטיקה לפי ההמלצות של המועצה הלאומית למדע בארה"ב (NCTM, 2000). היכולת לראות קשרים בין בעיות עשויה לסייע ללומד להעביר ידע ומיומנויות מבעיות שנלמדו בעבר אל פתרון בעיות יעד חדשות לו.

היברט וגקווס (Hiebert & Grouws's in NCTM, 2011, p. 17) טוענים כי שימוש מפורש במושגים בעת הוראה מקדם למידה של מתמטיקה. כאשר תלמידי תיכון התעסקו בפתרון בעיות ושיתפו זה את זה בתוצאות הפתרון ובתהליכיהם, ההמשגה של הקשר בין הפתרונות הפכה למפורשת וכך הם קידמו את היכולת שלהם בפתרון בעיות.

מסוגלים לייצר הסברים הולמים לתהליך במהלך חקר הדוגמה Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glaser, 1989; Sweller & Cooper, 1985).

מחקרים מראים כי כאשר ניתנה לתלמידים אפשרות לבחור בין שימוש בדוגמאות פתורות ובין הנחיות והסברים כתובים, תלמידים העדיפו באופן גורף דוגמאות פתורות (LeFevre & Dixon, 1986; Pirolli & Anderson, 1985). תוצאות דומות נמצאו גם אצל חוקרים אחרים (Mevarech & Kramarski, 2003; van Gog & Paas, 2008; van Gog, Paas & van Merriënboer, 2008).

צ'י ואחרים (Chi et al., 1989) מבדילים בין תלמידים מומחים לפתרון בעיות לתלמידים חלשים בדרך שבה הם משתמשים ביעילות בדוגמאות פתורות. כאשר תלמידים מומחים נחשפו לדוגמאות פתורות במבחן, הם חזרו לדוגמה הפתורה המתאימה מתוך כוונה להבין בדרך ברורה ומוגדרת את המבנה המתמטי של תהליך הפתרון ואת הקשר לבעיה הנוכחית שעליהם לפתור. לעומתם, תלמידים חלשים חזרו לדוגמאות הפתורות מתוך כוונה כללית, ולא הגדירו לעצמם את מטרת העיון בדוגמה. קירשנר ואחרים (Kirschner et al., 2006) רואים בדוגמאות פתורות בעלות פוטנציאל להכוונה ישירה של הלומד. הן יעילות בהקטנת עומס קוגניטיבי ועשויות לכוון את התלמיד לפתח סכמה קוגניטיבית רלוונטית מינימלית מצד אחד (ידע קריטי בלבד) ומקסימלית מצד אחר (כל התוכן הרלוונטי), שתסייע לו בפתרון בעיות בעתיד.

כמו כן, סוולר (Sweller, 1988) מציין במחקרו כי תלמידים חלשים נתרמים יותר מדוגמאות פתורות הכוללות אסטרטגיות לפתרון הבעיה יותר מהסברים פורמליים של המתמטיקה המופיעים בדוגמה הפתורה.

במחקר זה נגזרו משלושת הרעיונות התאורטיים שהוצגו לעיל, רשימה של עקרונות התערבות תאורטיים להוראת מתמטיקה. העקרונות נוגעים

לניהול שיעור מתמטיקה בכיתת תלמידים חלשים, בהיבט הרחב של ההוראה.

מעקר המחקר

מטרת המחקר הזה הייתה כפולה: לזהות יישום יעיל של עקרונות תאורטיים בכיתות מתמטיקה המאכלסות תלמידים חלשים. כמו כן המחקר בחן את התפתחות תהליך פתרון בעיות של התלמידים בכיתה, כתוצאה של יישום עקרונות ההוראה בידי המורה.

המאמר עונה על שאלת המחקר: מהם עקרונות ההתערבות התאורטיים המתאימים ליישום בכיתת מתמטיקה, לצורך קידום מיומנות של תלמידות תיכון חלשות לפתור בעצמן בעיות מתמטיות?

סביבת המחקר: המחקר בוצע בבית ספר תיכון שש-שנתי בכיתות י"א וי"ב, לאורך שנת לימודים אחת. אוכלוסיית המחקר כללה תלמידות חלשות בשתי כיתות, המסווגות לרמת 3 יח"ל.

כלי המחקר: לאורך שנת הלימודים תועדו כל שיעורי המתמטיקה (300) שנבנו בהתאם לעקרונות ההתערבות, ונאספו מסמכים מהשיעורים, מההערכות והעבודות שביצעו התלמידות. כמו כן

למידה במונחים של קשרים היא אחד מאבני היסוד של למידה מתמטיקה, ההופכת את הלמידה למפורשת, מובנת ובעלת משמעות. גיק והוליק (Gick & Holyoak, 1980, 1983, 1987) מסבירים כי פעולה קוגניטיבית של איתור קשרי דמיון בין שתי בעיות, מפתחת את הסכמה הקוגניטיבית המושגית שקשורה בנושא הבעיה, וגם את הסכמות הקשורות באסטרטגיות לפתרון הבעיה. דיקסון ובראון (Dixon & Brown, 2012), מצאו במחקרם בקרב סטודנטים כי תוכנית לימודים הכוללת קישור מתמיד בין מושגים מתחום המתמטיקה והמדעים, מקדמת מיומנות גבוהה יותר של פתרון בעיות במתמטיקה, או בתחום המדע שלמדו הסטודנטים בקורסים. ממצא דומה התקבל במחקרים של קווי ואחרים (Kuo et al., 2013) אשר בדקו התפתחות מצבי פתרון בעיה בקרב לומדים שבנו קשרים בין בעיות מתמטיות לבעיות פיזיקליות המיישמות את הידע המתמטי. בהדיר ואוטווי (Bahadir & Ottway, 2013) מגדירים למידה אותנטית כסיטואציה הכוללת עיסוק מפורש בקשרים בין תחומי הדעת השונים בתחום, בין כל המושגים הנלמדים בנושא ובין תהליכים ואסטרטגיות לפתרון בעיות, הן בתוכנית הלימודים המוצהרת והן בתוכנית הלימודים המופעלת (ראה גם מחקר בתחום הוראת הפיזיקה של Roorda, Vos, & Goedhart, 2015).

תהליך יישום למידה או העברת למידה (Bassok & Holyoak, 1993; Detterman & Sternberg, 1993) מורכב מתת-תהליכים,

שכמעט כולם דורשים מהלומד בניית קשרים בין סוגי ידע תוכן, בין מיומנויות, בין מושגים ובין אסטרטגיות לצורך בניית סכמה לפתרון בעיות (Jaeggi et al., 2008; Lobato, 2003; Reed, 1993; Robins & Mayer, 1993).

שימוש בדוגמאות פתורות ככלי לקידום פתרון בעיות במתמטיקה

עיקרון ההוראה השלישי ששימש חלק מסביבת הלמידה, הוא יישום בדפי דוגמאות פתורות שנבנו

בהתאם לעקרונות שנמצאו במחקרים קודמים. דוגמאות פתורות הן בסיס לכל הסבר לימודי כמעט. מאייר (Mayer, 1998a, 1998b) טוען כי למידה במהלך חקר דוגמאות פתורות, מזמנת יצירת סכמה קוגניטיבית יעילה לפתרון בעיות לפי סוגיהן. רוסו (Rossow, 2005) מוסיף כי התהליך עשוי להביא אפילו לידי אוטומטיזציה של היישום, במעבר מדוגמה פתורה לבעיה חדשה דומה. לפי רוסו, דוגמה פתורה יעילה היא זו שערוכה בהתאם לשלושת השיקולים האלה: מסבירה היבטים חשובים בבעיה, מסבירה ביעילות רבה את הקשרים והיחסים של נתוני הבעיה ומתעלמת מהיבטים מיותרים של הבעיה, כדי להקטין עומס קוגניטיבי של הפותר בזמן למידה ממנה.

יש עדויות אמפיריות לכך שתלמידים יוצרים הכללה או הפשטה של תהליך, על סמך מעקב אחר שלבי פתרון של דוגמאות פתורות. כמו כן יש הסכמה בספרות העוסקת בפתרון בעיות, שתלמידים לומדים למידה אינדוקטיבית באמצעות למידה מתוך דוגמאות פתורות (Artino, 2008).

באמצעות מעקב אחרי שלבי פתרון של בעיה פתורה, התלמידים יכולים להכליל או לתפוס את התהליך הנכון לביצוע משימה או מיומנות. כאשר הדוגמה היא מסוימת ולא כללית, התלמידים

Chazan, 1996, 2000; Sweller,) קודם לצורך שימוש בו בעתיד (2016).

4. **שימוש בדפי "דוגמה פתורה"** – הוא כלי ללמידה של ידע חדש על אודות אסטרטגיות לפתרון בעיות. דפי דוגמה פתורה מסייעים בארגון ידע, כגון ידע מתמטי של נוסחאות או פרוצדורות ויישומן בבעיות, או ידע על אודות אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות מתמטיות מסוג ותוכן מסוימים (Bokosmaty, Sweller, & Kalyuga, 2015; Mayer, 1998a, 1998b; Mousel, 2006; Rossow, 2005; Sweller, 2016). דוגמה פתורה מקטינה עומס על זיכרון העבודה (Sweller, 2015a, 2015b; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011).

נוסף על כך, דוגמאות פתורות ממוקדות בהסבר אסטרטגיה היוריסטית לפתרון מסייעות להתרכז בנלמד, ממקדות קשב, עוזרות לבניית סכמה קוגניטיבית באמצעות זיהוי והשאלה של אלמנטים חדשים בהתאמה לקודמים ומקטינות עומס קוגניטיבי מיותר בזמן למידה (Kirschner et al., 2006; Sweller, 2016). דוגמאות פתורות יש להתאים באופן דיפרנציאלי ללומדים בעלי ידע מתמטי שונה (Kollar et al., 2014).

5. **הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות** – נמצאה כמקדמת פתרון בעיות ומפתחת אוריינות היוריסטית לפתרון בעיות (Koichu, 2003; Koichu, 2015; Ovadiya, 2017; Nelson, 2007; Nunokawa, 2006).

6. **התלמידים במרכז** – כל הפעילות הלימודית נעשית בשיתוף התלמידים. אחת המטרות העיקריות בשיעור היא להביא תלמידים למצבי למידה כך שהם יהיו לומדים, סקרנים, יוזמים, חוקרים עצמאיים ופעילים (Chi et al., 1989). שאלה מהותית שתלמידים שואלים והיא מופנית אל המורה, חוזרת לחלל הכיתה ומופנית לקהל הלומדים כשאלה המזמינה תגובה (Mayer, 1998a, 1998b). התלמידים אחראים למצוא מענה לשאלה. יוזמות של תלמידים ופעילות שלהם מקדמת זיכרון של התכנים שנלמדו (Rossow, 2005). התלמידים מכתיבים את הקצב בכיתה, הם אחראים עליו ומכתיבים את סגנון העשייה המתמטית, את שלבי הפתרון ואת תהליכיו (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Cobb, Yackel, & Wood, 1989/2011; Rogoff, 1990; van Gog, & Paas, 2008; van Gog, Paas & van Merriënboer, 2008).

7. **המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה קוגניטיביים** – (המורה לא מקור הידע אלא מנטור). המורה משקפת ומתארת בקול, "מה אמרנו?", "מה עשינו?", "איך פתרנו?" (Mevarech & Kramarski, 2003) לעומת האחריות של התלמידים ליוזם, לפעול ולגלות. המורה עוסקת בשונות החשיבה של התלמידים באמצעות סכום הרעיונות (Desoete, Roeyers, & De Clercq, 2002).

8. **פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה** – השקעת זמן רב יותר בניתוח הבעיה, הן כדי להבין אותה והן כדי להנחיל נורמה של ניתוח בעיה, כשלב קריטי לפתרון (Chazan, 1996, 2000). מומחים משקיעים משאבים בניתוח הבעיה יותר מבפתונה (Mousel, 2006).

9. **השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות** – התלמידים מודעים לנורמות מראש. הנורמות כוללות את עקרונות ההתערבות, כגון בניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות, נתינת כינוי של אסטרטגיה היוריסטית לפתרון,

החוקרת תיעדה מחקר זה ביומנה. נתוני המחקר הם כל החומרים שנאספו מתוך ההוראה לאורך שנה בשתי כיתות לימוד בתיכון.

הנתונים נותחו באמצעות שיטת תאוריה מעוגנת בשדה מתוך שתי נקודות התבוננות: התבוננות בנתונים באמצעות עקרונות ההתערבות התאורטיים, וניסיון לזהות התאמת העיקרון התאורטי להוראה בפועל. התבוננות רוחב וחקר הדינאים שנסובו על פתרון הבעיות, וניסיון לזהות בהם מאפיינים שחוזרים על עצמם ושיש בהם זיקה לעקרונות ההתערבות. לאחר ניתוח הנתונים הוגדרו העקרונות כתאוריה העומדת בפני עצמה, ושיש לה תרומה ייחודית להוראה בכיתות תיכון שלומדים בהן תלמידים חלשים במתמטיקה.

ממצאים

הממצאים מוצגים להלן באמצעות שני היבטים עיקריים:

א. ההיבט הראשון נוגע לתשובה תאורטית על שאלת המחקר הכוללת את רשימת עקרונות ההתערבות ומאפייניה, כפי שהם התגבשו מהספרות המחקרית. כלומר רשימת עקרונות ההתערבות היא ממצא תאורטי בפני עצמו העונה על שאלת המחקר. רשימה זו שטרם המחקר הייתה תאורטית, הפכה בסופו של המחקר לרשימה יישומית להוראה.

ב. ההיבט השני נוגע לתיאור אותנטי של שני שיעורים מתקופת ההתערבות וניתוחם על פי עקרונות ההתערבות. ניתוח השיעורים מתבונן ביישום העקרונות התאורטיים ובהתפתחות תהליך פתרון בעיות של התלמידים המשתתפים במחקר.

היבט ראשון: תיאור עקרונות ההתערבות והמשגתם

להלן אסקור את עקרונות ההוראה שנוסחו טרם המחקר והוגדרו באמצעות ספרות מחקרית. עקרונות ההתערבות הנמנים להלן, הם דרכי ההוראה הסטנדרטיים והנורמות המתמטיות והסוציו-מתמטיות שביססו את מבנה ניהול השיעורים לאורך השנה. **עקרונות אלה הם ממצא העומד בפני עצמו ועונה תשובה תאורטית על שאלת המחקר.**

1. **עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד** – (לעומת הוראה מדגימה וממחישה) (Kamiski, Sloutsky, & Heckler, 2008). עיקרון זה נוגע לעובדה שבפתרון כל בעיה מכללים את האסטרטגיה שיושמה, ומשווים לבעיות אחרות הנפתרות באמצעות אותה אסטרטגיה היוריסטית. כך הופך פתרון בעיה לרעיון כללי על אודות פתרונה, ולא למקרה הפרטי של הבעיה הנתונה בלבד.

2. **בניית קשרי דמיון בין בעיות** – פעולת בניית קשרי דמיון בין בעיות נוגעת למיפוי בין שתי בעיות ויותר. המיפוי כולל השוואה בין נתונים, פרוצדורות, מושגים ותהליכים או כל רעיון דומה שראוי להשוואה (NCTM, 2000). פעולה זו מביאה את הלומד לידי מצב של הכללת הבעיה והשוואתה לבעיות אחרות, לא רק במאפיינים חיצוניים כמו ניסוח, אלא גם במאפיינים פנימיים כמו תהליך הפתרון והאסטרטגיות הכלולות בו. פעולה זו מפתחת מיומנות של פתרון בעיות מתמטיות (Dixon & Brown, 2012; Reed, 1993; Gentner, 1983). בניית קשרים מפתחת גם חשיבה אנלוגית (Robins & Mayer, 1993; Mayer, 2011).

3. **חשיבה רפלקטיבית על פתרון** – פעולה זו המובעת במפורש ועיסוק בשאלות מטה-קוגניטיביות מגבירים את הקשר וההבנה של משמעות המושגים ותהליכים הנלמדים. חשיבה רפלקטיבית מסייעת ללומד לארגן את המידע החדש שלמד על בסיס ידע

הצדקה והסבר של רעיונות בידי התלמידים, השתתפות בדיון באופן שמתאים לרעיונות העולים בו, סובלנות לרעיונות המובעים בכיתה, הקשבה לדברי עמיתים והשתתפות בפעילות הכיתתית על פי הכללים הנהוגים בכיתה (Cobb et al., 1989/2011).

כל תשעת העקרונות לעיל נוגעים לשלושה עקרונות ראשיים: הוראה מפורשת של אסטרטגיות הוריסטיות (5-6-8-9), בניית קשרי דמיון בין בעיות (1-2-3-6-8-9) ולמידה באמצעות דוגמה פתורה (4-5-8-9).

היבט שני: ניתוח שני תסריטים של שיעורים בתקופת ההתערבות

להלן אציג שני קטעי שיעורים. הדוגמאות של התסריטים מייצגות תמונה של שיעור שגרתי במהלך תקופת המחקר. כלומר, מוצגים להלן שיעורים שיש בהם מאפיינים שחזרו על עצמם בשיעורים רבים דומים באותה עת. מטרת ההדגמה היא מיפוי של רכיבים בשיעור וסיווגם לעקרונות ההתערבות, כדי להציג את קיומם ויישומם של העקרונות בשדה המחקר, כלומר ההוראה. כמו כן כל תסריט מציג התקדמות בפתרון בעיות מתמטיות בקרב הלומדים.

תסריט א' – חקירת פונקציה

להלן מתואר בכלליות תכתוב חלקי של קטע שיעור (כ-20 דקות מתוך כ-90 דקות). בפתחת השיעור התלמידות מבקשות לפתור בעיה שלא הצליחו לפתור בשיעורי הבית. בשיעור הקודם הן נחשפו לדוגמאות פתרון הכוללות שלוש בעיות שונות והסבר אסטרטגי למציאת משוואת משיק לגרף פונקציה. הבעיה להלן לקוחה מתוך ספרו של יקואל (2007, עמ' 244 בעיה 11):

נתונה הפונקציה: $y = x^2$

מצא באיזו נקודה על גרף הפונקציה הנתונה עלינו להעביר משיק אשר:

א. יהיה מקביל לישר $y = 4x - 5$

ב. יהיה מאונך לישר: $2x - 6y + 5 = 0$

להזכיר: מכפלת שיפועי שני ישרים מאונכים זה לזה היא -1

תרשים מס' 1: בעיית חקירת פונקציה (כיתה י"ב)

הבעיה ניתנה כשיעורי בית והתלמידות טענו שלא הצליחו לפתור אותה.

אני מבקשת מתלמידה מתנדבת לפתור את התרגיל שרשמתי על הלוח, ומאפשרת לה להצטייד בכל מה שהיא צריכה. (בכיתה תמיהה, וקולות מהסוג: "אבל ניסינו לפתור ולא הצליח", "חבל על הזמן תפתרי לנו המורה", "הרי לא הצלחנו בבית, איך נצליח כעת?") שקט מתוח בכיתה. אביטל ניגשת ללוח. היא מצהירה שהיא לא יודעת לפתור את הבעיה, אבל מעיזה לנסות. בזמן שאביטל מנסה לפתור את התרגיל, שלוש תלמידות בכיתה מנסות לעיין בספר, במחברת, או בדפי דוגמה פתורה. תלמידות אחרות ממתינות שאביטל תסיים לכתוב בלוח. תלמידות אחרות צופות בה מחרישות. אביטל שואלת שאלות, כגון "אני אתחיל בנגזרת?" אני לא עונה. היא מתחילה בנגזרת אף שלא קיבלה מענה על השאלה ממני או מהכיתה. אביטל כותבת בלוח נגזרת. היא כותבת גם $x=2$ ואומרת בשקט כי השיפוע 4. היא מצהירה שסיימה. מתחיל דיאלוג ספונטני בכיתה:

1. המורה: מי זה $x=2$?

2. אביטל: אין תגובה.

3. המורה: אביטל, למה את מתייחסת רק לאלגוריתם? מה לדעתך

אני מצפה ממך? מה יכול לייצג לך את הבעיה? (פונה לכיתה) מה נעשה שיסביר לנו את השאלה?

4. רחלי: נצייר את הפונקציה ונבין את הבעיה.

5. המורה: יפה. מי מוכנה לומר לי איך מציירים את $y = x^2$?

6. תלמידות מדריכות את המורה לצייר פרבולה סימטרית בהתאם לציר ה-y שקודקודה מונח בראשית הצירים.

7. המורה: מה עוד נצייר?

8. רלי: את המקביל.

9. יפית: לפי נקודות [חיתוך] עם צירים.

10. המורה: מציירת בהדרכת יפית גם נקודת השקה וגם ישר מקביל לה.

11. רחלי: מה זה קשור לשאלה?

12. המורה: (לכיתה) מה זה קשור לשאלה?

13. מעיין: זה מסביר מה צריך לעשות. כי הנה הגרף והנה הישר ועכשיו צריך למצוא.... (לא ממשיכה)

14. רחלי: אבל לא אומרים מה לעשות.

15. המורה: לא אומרים מה לעשות?

16. מעיין: לא קראת נכון את השאלה. סעיפים א' וב' הם על השאלה מצא נקודה ש....

17. רלי: (מתבוננת בדוגמה פתורה ובתוך כך אומרת) ככה, יש שאלה על נקודה. והנקודה היא מקום שבו עובר משיק מקביל לישר הנתון ואנך לישר אחר? (את שלוש המילים האחרונות מביעה בנימת ספק)

18. יפית: אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'.

19. המורה: אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'?

20. רלי: מצאנו את א'. הנה נכון אביטל מצאה שיפוע. וציירונו על הלוח את המקביל, וציירונו את המקביל מנקודה על הפונקציה. עכשיו אין קשר לסעיף ב'.

21. המורה: מה יסביר לנו את השאלה?

22. רלי: ננסה בעיה פשוטה יותר דומה [לנוכחית].

23. יפית: נצייר אותה.

24. המורה: נמשיך בציור שציירנו?

25. יפית: נמחק את המקביל.

26. מוריה: מה עשיתם שם (מצביעה על הלוח) (משום מה לא מבחינים בשאלתה, לא עונים לה, ממשיכה להקשיב לדיון הכיתתי).

27. המורה: מה נשרטט?

28. יפית: אין כזה דבר מחפשים ישר אנך.

29. המורה: מדוע?

30. יפית: כי הוא אנך למשהו.

31. המורה: איזה יופי, אתן מבינות מה יפית אומרת? אין ישר אוניברסלי "אנך"! לפונקציה הזו יכולים להיות אין סוף אנכים. אנחנו כאן במצב מסוים.

32. יפית: אנך לנקודה.

33. רלי: אז בטח שאין קשר בין סעיף א' ל-[סעיף] ב'. זו נקודה אחרת. (מתקנת את הספק שהביעה באמירתה בשורה 20).

34. המורה: יפה! תוכיחי.

35. המורה: אני צריכה את עזרתך לצייר ציור.

36. אוריה: "ציירי את האנך. אני מפרשת לך אותו". אוריה מדריכה את המורה לצייר אנך. המורה מציירת.

37. רחלי: "לא מבינה"

38. רלי: (לרחלי) חכי רגע, הנה אנחנו מציירים ותביני.

39. המורה: (הציור בלוח הסתיים) אז בואו ונכליל כל מה שעשינו עד כה. (יחד עם התלמידות מונים את כל הפעולות).

2. במאמר זה סימון בסוגריים מרובעים מציג תוספת שלי לדברי תלמידות כדי להבהיר את הנאמר, כמו כן בחרתי להשאיר את הציטוטים כפי שהם עם טעויות לשוניות.

- לומדים מדוגמה פתורה", "למידה מנתונים סמויים", "איך זוכרים הגדרות ששכחנו", "כללי ציור-שרטוט", מה מרוויחים מביצוע ציור-שרטוט, איך מזהים בעיה דומה לבעיה נתונה ועוד.
46. **בתיה:** (למורה) בואי נפתור עוד.
47. **יפית:** (למורה) אמרת שלא כדאי לפתור בעיות פשוטות.
48. **רלי:** יש לי בעיה, שבה יצא פתרון כמו בספר אפילו שיש לי שגיאה בדרך. זה עמוד 274 תרגיל 12.
49. **המורה:** חני תקראי את הבעיה.
50. **חני:** לא.
51. **המורה:** אין לא. לא ביקשתי פתרון. לקרוא את חייבת.

40. (להלן תשובות שנאמרות בכיתה) קראנו את השאלה, אביטל מצאה נגזרת ונקודה, ציירנו את הבעיה, שאלנו את השאלות של הבעיה, ציירנו שוב, ניסינו להבין מה צריך למצוא, נזכרנו מה הקשר בין ישרים מקבילים, מה זה ישרים אנכים, הבנו מה צריך למצוא, חיפשנו בעיה דומה, חיפשנו את הפתרון, חיפשנו את התרגיל, מצאנו שסעיף א' וב' דומים, מצאנו במה הסעיפים שונים, מצאנו תשובה, הסברנו למה היא תשובה לבעיה.
41. **המורה:** אז התהליך הכללי שלנו לפתרון יהיה מיפוי הבעיה, ואז כאשר ברור מי הנעלם ומהם הנתונים, יש לנו בדפי הפתרון דוגמה לכל מקרה. (מורה ותלמידות) מקרה שבו x נעלם. מקרה שבו שיפוע נעלם, מקרה שבו המשיק נעלם. (כמה מהתלמידות מתבוננות בדפי הפתרון.)
42. **רלי:** בערך כמו שניחשתי לפי הציור, הנקודה הזו (מציינת את הערכים של הנקודה) שבה עובר משיק אנך.
43. **המורה:** מה הרווחנו מהציור?
44. **אוריה:** הבנו איזה תוצאות לא יתכנו, למשל, ויכולנו להעריך מה יהיה הפתרון.
45. **המורה:** היום חזרנו על הרבה "אסטרטגיות למידה": "איך

סיכום תסריט לכיתה י"ב

בטבלה מס' 1 להלן, מיפוי של סיטואציות באמצעות ציטוטים מדגים את קיומם של עקרונות ההתערבות כחלק מתהליך הלימוד:

טבלה מס' 1: תסריט שיעור לכיתה י"ב

עקרונות ההתערבות	הדגמת העיקרון באמצעות סיטואציה או ציטוט
עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד	המורה: (הציור בלוח הסתיים) אז בואו ונכליל כל מה שעשינו עד כה? יחד עם התלמידות מונים את כל הפעולות. [...] המורה: מה הרווחנו מהציור? אוריה: הבנו איזה תוצאות לא יתכנו למשל. ויכולנו להעריך מה יהיה הפתרון.
בניית קשרי דמיון בין בעיות	בקטע זה אין שיה מפורש על אודות מיפוי דמיון בין בעיות.
חשיבה רפלקטיבית על כל פתרון	(שורה 40) קראנו את השאלה, אביטל מצאה נגזרת ונקודה, ציירנו את הבעיה, שאלנו את השאלות של הבעיה, ציירנו שוב, ניסינו להבין מה צריך למצוא, נזכרנו מה הקשר בין ישרים מקבילים, מה זה ישרים אנכים, הבנו מה צריך למצוא, חיפשנו בעיה דומה, חיפשנו את הפתרון, חיפשנו את התרגיל, מצאנו ש-א' ו-ב' דומים, מצאנו במה הם שונים, מצאנו תשובה, הסברנו למה היא תשובה לבעיה.
שימוש בדפי "דוגמה פתורה"	(שורה 41) המורה: אז התהליך הכללי שלנו לפתרון יהיה מיפוי הבעיה, ואז כאשר ברור מי הנעלם ומי הנתונים, יש לנו בדפי הפתרון דוגמה לכל מקרה (מקרה שבו x נעלם. מקרה שבו שיפוע נעלם, מקרה שבו המשיק נעלם).
התלמידות במרכז	שאלות של התלמידות חוזרות מהמורה אליהן. רחלי: מה זה קשור לשאלה? המורה: (לכיתה) מה זה קשור לשאלה? יפית: אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'. המורה: אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'?
התלמידות מכתובות את הקצב בכיתה.	בתיה: (למורה) בואי נפתור עוד. המורה: את מה? יפית: (למורה) אמרת שלא כדאי לפתור בעיות פשוטות. רלי: יש לי בעיה, שבה יצא פתרון כמו בספר אפילו שיש לי שגיאה בדרך. זה עמוד 274, תרגיל 12. המורה: חני תקראי את הבעיה.
הפתרון מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה.	המורה: אביטל, למה את מתייחסת רק לאלגוריתם? מה לדעתך, אני מצפה ממך? מה יכול לייצג לך את הבעיה? (פונה לכיתה) מה נעשה שיסביר לנו את השאלה?
מכל תרחיש לומדים אפילו מטעות.	המורה: "אז בזכות חני, למדנו לזנוח עוד הרגל פחות חיובי....."
המורה אחראית על סכום תהליכים מטה-קוגניטיביים. (המורה לא מקור הידע אלא מנטור.)	המורה: היום חזרנו על הרבה אסטרטגיות למידה, איך לומדים מדוגמה, איך קוראים פתרון, הזכרנו נתונים סמויים, איך זוכרים הגדרות ששכחנו, איך מציירים, מה מרוויחים מביצוע ציור, איך מזהים בעיה דומה לבעיה נתונה ועוד.
הכיתה מתנהלת על פי נורמות מוסכמות מראש	(שורות 49-51) המורה: חני תקראי את הבעיה. חני: לא. המורה: אין לא. לא ביקשתי פתרון. לקרוא את חייבת.

כיצד התסריט מציג קידום פתרון בעיה?

הטבלה לעיל מציגה את יישום עקרונות ההתערבות בשיעור, כך שהמורה מנהלת את השיעור בספונטניות בהתאם לעקרונות. כמו כן אפשר לראות כיצד בעיה שלא נפתרה בשיעורי הבית, נפתרת באמצעות דיון קבוצתי שבו כל תלמידה מוסיפה רעיון לניתוח הבעיה, לייצוג שלה ולבסוף רעיונות לדרכי הפתרון, עד לפתרון המלא. לפי התסריט, כל שאלות המורה אינן מכוונות לפתרון או לרעיונות לפתרון, אלא מנתבות את דברי התלמידות כך שהמחשבות והרעיונות שהן מעלות יקדמו ביעילות את הדיון. כמו כן על פי התסריט ההתקדמות לקראת הפתרון והבנתו, ניכר משיח התלמידות שמסבות את תשומת ליבן זו לדברי זו ומנסות להמשיך את הרעיונות שלהן באמצעות רעיונות של עמיתות לשיח.

תסריט ב' - הסתברות "בעיית הכדורים"

התלמידות נדרשות לפתור בעיה בעצמן. המשימה לקוחה מתוך ספרו של יקואל (2008, עמ' 652, בעיה 3):

לפניך שלוש קופסאות. בכל קופסה ישנם ארבעה כדורים:

כדור אדום, כדור שחור, כדור לבן וכדור ירוק.

שולפים בזה אחר זה כדור אחד מכל קופסה.

א. מה ההסתברות שסדר הוצאת הכדורים יהיה אדום, שחור, לבן?

ב. מה ההסתברות שהכדורים שהוצאו יהיו בצבעים: אדום שחור ולבן אך בסדר שונה מאשר בסעיף א'?

ג. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו כולם באותו צבע?

ד. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בצבעים שונים, אך אף אחד מהם לא יהיה בצבע לבן?

תרשים מס' 2: הסתברות "בעיית הכדורים" (כיתה י"א)

52. **המורה:** נקדיש לפחות עשר דקות לעבודה עצמית.

53. **מורה:** (לאחר שניות מעטות מתפרצת) זה דומה לבעיה עם "ה.ד.ס".

תיאור כללי של הכיתה: אין חלוקה של דפי דוגמת פתרון. אין בקשה לדפים כאלה מצד התלמידות. התלמידות מדפדפות במחברת, מחפשות פתרון ובעיה דומה לבעיה הנתונה. התלמידות עסוקות בהבנת הבעיה. תלמידות קוראות לעצמן, או בזוג, או מנסות לשאול בקול או להגיב בקצרה ובשקט לשאלות שנשאלו בסביבה. המורה מסתובבת בין התלמידות, לא מגיבה להערותיהן. ליטל היחידה שמבקשת מהמורה הסבר לבעיה. תלמידות מצהירות בקול שהתחילו מציור עץ המדגם, אחרות כותבות בשקט. יש זוגות של תלמידות שבודקות זו לזו את הפתרון, יש שאלות של תלמידות המופנות למורה כדי להבין את ההבדל בין סעיף ב' לסעיף ג'. כשהתלמידות הצהירו שסיימו, הן יוזמות דיון במליאה.

54. **מורה:** זה דומה לבעיה עם ה.ד.ס.3

55. **המורה:** את בטוחה? זה דומה לבעיית ה.ד.ס. (השאלה השנייה מופנית לכיתה)

56. **רונה:** זה לא דומה כי "ה.ד.ס" זו קובייה עם שש פאות שהוטלה שלוש פעמים וכאן שלוש קופסאות [יש] ארבע[ה] כדורים.

57. **המורה:** ואז?

3. בעיה על אודות קובייה שבפאותיה המילה ה.ד.ס כתובה באותיות ה.ד.ס פעמיים על שש הפאות.

58. **רונה:** זה לא אותו מרחב מדגם כי פה המקרים אחרת.

59. **מורה:** לא קשור, התכוונתי דומה בתהליך הפתרון, נעשה עץ או טבלת אירועים.

60. **המורה:** אז בואו נכליל איך נחליט מהו מרחב מדגם?

61. **רונה:** נבין אירוע אחד ואז באמצעות "או" ו"גם" ואפשר גם לזכור מי בחזקת מי. כדורים בחזקת קופסאות.

62. **המורה:** בואו נדון בתשובות. עשיתי סיבוב בכיתה, ראיתי שחלקן ציירתן קופסאות ובהם כדורים כדי להבין את הסיטואציה. חלקן חיפשתן בעיה דומה, חלקן באמצעות דפדוף במחברת, אחרות שאלו את עצמן שאלות בקול, כגון "האם זה כמו בעיית ה.ד.ס.?"

63. **המורה:** "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"

64. **שלי:** אחד חלקי ארבע כפול עצמו שלוש פעמים. (התגובה של שלי היא הזמנה לפתרון, היוזמה של שלי היא לבקש מהמורה להפסיק לדבר על הבעיה ולפתור אותה.)

65. **המורה:** הכללה?

66. **ליטל:** יש מקרה אחד כזה.

67. **המורה:** מהו?

68. **שלי:** אחד חלקי שישים וארבע שזה כל המקרים.

69. **הכיתה:** מכתובה ב"מקלה" למורה את כל האפשרויות.

71. **המורה:** בואו נעשה זאת מסודר, מה האסטרטגיה?

71. **ג'ודי:** להתחיל מצבע [אחד] 4 לעשות [לחשב לו את] כל האפשרויות ונעבור לצבע אחר.

72. התלמידות מכתבות את הפתרון לסעיף ג'. המורה כותבת בלוח:

73. מראה לוח

74. מתפתח דיון על פתרון סעיף ד':

75. **המורה:** (פונה לגיטי ולכיתה בו בזמן): מה ההסתברות לצבעים שונים פרט ללבן?

76. **שלי:** הכול רק לא לבן.

77. **ג'ודי:** זה כמו סעיף ב' במקום ה"לבן" שהיה בסעיף ב' עכשיו זה "ירוק". כתוב צבעים שונים.

78. **שלי:** לא.

79. **ליטל:** עשיתי את זה.

80. **רונה:** כן. (מגיבה ללא של שלי)

81. **שלי:** במקום הרביעי זה שלישי כאילו.

82. **ג'ודי:** (לשלי) למה? יש לך ארבע[ה] כדורים? תמיד יהיו לך ארבע[ה] כדורים!

83. **שלי:** אין ארבע[ה]. לא יהיה, כי אין לבן.

84. **ג'ודי:** יש בקופסה! תמיד יהיה ארבע, את לא מוציאה ארבע.

85. **שלי:** אז נשאר 64 [במרחב המדגם] אבל המונה ישתנה לי.

86. **ג'ודי:** מה שמשתנה זה רק דבר אחד מ[צבע] לבן [לצבע] לירוק וזהו.

87. **המורה:** ליטל, את רוצה לומר משהו?

88. **ליטל:** כן. הוצאתי את כל ההסתברויות שיכולים להביא צבעים שונים אדום שחור ירוק.

89. **המורה:** בואו נחבר בין דברי ליטל וג'ודי.

90. **ג'ודי:** נזרוק את הלבן ונוסיף לו עוד הסתברות נראה לי כמו בסעיף א'.

91. **המורה:** מהם המקרים?

92. **תלמידות** (חמש ביחד): שישה מקרים (מקריאות את כל המקרים, המורה כותבת בלוח)

4. בתוך הסוגריים המרובעים מופיעים הסברים לדברי התלמידות.

93. ג'ודי: (משתלטת על הדיון) אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע[ה] כדורים ואני בוחרת שלוש[ה] אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי. (בקריות

(ניצחון)

בטבלה מס' 2 להלן, מיפוי של סיטואציות באמצעות ציטוטים מדגים את קיומם של עקרונות ההתערבות כחלק ספונטני מתהליך הלימוד

וההוראה:

טבלה מס' 2: תסריט שיעור לכיתה י"א

כיצד התסריט מציג קידום תהליך של פתרון בעיה?

עקרונות ההתערבות	הדגמת העיקרון באמצעות סיטואציה או ציטוט
עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד	רוני: נבין אירוע אחד ואז באמצעות "או" ו"גם" ואפשר גם לזכור מי בחזקת מי. כדורים בחזקת קופסאות. (שורה 93) ג'ודי: אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע כדורים ואני בוחרת שלוש אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי.
בניית קשרי דמיון בין בעיות	(שורה 54) מורן: זה דומה לבעיה עם ה.ד.ס.¹ (שורה 63) מורה: "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"
חשיבה רפלקטיבית על פתרון	(שורות 62-63) המורה: בואו נדון בתשובות. עשיתי סיבוב בכיתה ראיתי שחלקן ציירו קופסאות ובהם כדורים כדי להבין את הסיטואציה, חלקן מחפשות בעיה דומה, חלקן באמצעות דפדוף במחברת, אחרות שאלו את עצמן שאלות בקול, כגון "האם זה כמו בעיית ה.ד.ס.?", "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"
שימוש בדפי "דוגמה פתורה"	(תיאור כללי של הכיתה) אין חלוקת דפים של דוגמת פתרון. אין בקשה לדפים כאלה. התלמידות מדפדפות במחברת מחפשות פתרון של בעיה דומה.
התלמידים במרכז	הדיון מתמקד בשאלות ותשובות של התלמידות זו לזו.
התלמידות מכתיבות את הקצב בכיתה	(שורות 63-64) המורה: "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?" שלי: אחד חלקי ארבע כפול עצמו שלוש פעמים. (התגובה של שלי היא הזמנה לפתרון, היוזמה של שלי היא לבקש מהמורה להפסיק לדבר על הבעיה ולפתור אותה)
הפתרון מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה	(שורות 54-58) מורן: דומה לבעיה עם ה.ד.ס. המורה: את בטוחה? זה דומה לבעיית ה.ד.ס. (מופנה לכיתה) רוני: זה לא דומה כי "ה.ד.ס" זה קובייה עם שש פאות שהוטלה שלוש פעמים וכאן שלוש קופסאות ארבע כדורים. המורה: ואז? רוני: זה לא אותו מרחב מדגם, כי פה המקרים אחרת.
מכל תרחיש לומדים אפילו מטעות	המורה מתייחסת לקריאת הביניים של מורן לגבי הדמיון לבעיית ה.ד.ס. רוני מתקנת לשלי את הטעות אודות מרחב המדגם.
המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (המורה לא מקור הידע אלא מנטור)	(שורות 70-72) המורה: בואו נעשה זאת מסודר, מה האסטרטגיה? ג'ודי: להתחיל מצבע [אחד] לעשות [לחשב לו את] כל האפשרויות ונעבור לצבע אחר. התלמידות מכתיבות את הפתרון לסעיף ג'. המורה כותבת בלוח.
הכיתה מתנהלת לפי הנורמות המוכתבות	המורה: (פונה לגיתי ולכיתה בו בזמן) מה ההסתברות לצבעים שונים פרט ללבן? שלי: הכול רק לא לבן. ג'ודי: זה כמו סעיף ב' במקום ה"לבן" שהיה בסעיף ב' עכשיו זה "ירוק". כתוב צבעים שונים. שלי: לא. ליטל: עשיתי את זה. רוני: כן (מגיבה ללא של שלי) שלי: במקום הרביעי זה שלי כאלו. ג'ודי: (לשלי) למה, יש לך ארבע כדורים? תמיד יהיו לך ארבע כדורים! שלי: אין ארבע. לא יהיה כי אין לבן. ג'ודי: יש בקופסה! תמיד יהיה ארבע, את לא מוציאה ארבע. שלי: אז נשאר 64 [במרחב המדגם] אבל המונה ישתנה לי. ג'ודי: מה שמשנתה זה רק דבר אחד מ[צבע]לבן [לצבע] לירוק וזהו.

1. לעיל הערה 2.

מבצעות כשלב ראשון בניתוח הבעיה. הנורמות בכיתה הן של התעסקות בניתוח הבעיה, דיון והצדקה, ציור תמונה של סטואציית הבעיה ועוד. הדיון בכיתה י"א מתנהל בין התלמידות. התלמידות שואלות זו את זו ומגיבות זו לזו.

אף שטבלאות 1 ו-2 מציגות בשני התסריטים את יישום עקרונות ההתערבות, יש הבדל בין שני התסריטים. תסריט כיתה י"ב מציג את המורה כמנהילה את הנורמות. תסריט כיתה י"א מציג את התלמידות כמנהלות את השיעור על פי נורמות שהוטמעו והיו לחלק בלתי נפרד מהלמידה שלהן. כמו כן תסריט כיתה י"ב מתאר קידום פתרון בעיה שהתלמידות ניסו לפתור אותה ולא הצליחו, ותסריט כיתה י"א מציג דיון על אודות כמה פתרונות של אותה בעיה, החל משלב ניתוח הבעיה וכלה בהכללה של הבעיה למקרים עתידיים.

דיון ומסקנות

הוצגו לעיל שני היבטים כתשובה לשאלה: מהם עקרונות ההתערבות התאורטיים המתאימים ליישום בכיתה מתמטיקה לצורך קידום מיומנות של תלמידות תיכון חלשות לפתור בעצמן בעיות מתמטיות?

ההיבט הראשון של התשובה לשאלה הציג את עקרונות ההתערבות כממצא של המחקר הזה הנוגע לנורמות וסטנדרטים של תרבות כיתה מתמטית לפיתוח לומד עצמאי בכיתות המאוכלסות בתלמידים חלשים.

ההיבט השני התבונן, תיאר וניתח תסריטי שיעור. על פי שני התסריטים נמצא כי בשתי כיתות הלימוד, יישום של עקרונות ההתערבות הוא תהליך מעשי להוראה בכיתה מתמטיקה המקדם פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידים מתקשים.

גולדין (Goldin, 2014) מציג לראות בתהליך פתרון בעיות תהליך שיש לו פוטנציאל לפתח ייצוגים מתוחכמים, תהליך

שפתח הכללה היווריסטית, מגדיל את היכולת האינטואיטיבית, מפתח המשגה מתמטית מובנית, מפתח יצירה ועשייה של פתרון בעיות, מפתח אסטרטגיות לחקר, מקדם סכמות הוכחה ומקדם תחושה חיובית לפתרון בעיות. למעשה ראוי לומר כי עקרונות ההתערבות שנמצאו במחקר הזה, תומכים בקיומם של התהליכים שמציג גולדין שוינפלד (Schoenfeld, 2014). הוא מציג חמישה ממדים לכיתה מתמטיקה מעצימת למידה, והם מכוונים לחמש קטגוריות עיקריות: הוראת מתמטיקה המכוונת לקוהרנטיות של המתמטיקה ומדגישה אותה; הוראה הלוקחת בחשבון את ההיבטים הקוגניטיביים של הפרט בהקשר של למידת מתמטיקה; הוראה שיש בה תשומת לב רבה של המורה לדרך שבה הוא מנגיש את התוכן המתמטי כך שיהיה ברור; הוראה הנוגעת לסמכות המורה והשפעתה על התפתחות הזהות של התלמיד; הוראה שיש בה תהליכי הערכה רב-שלבים בזמן ההוראה בטווח קצר וארוך; התפתחות הוראה שנובעת מתהליכי הערכה אלה.

על פי המיון להלן בטבלה מס' 3 נבחין כי חמשת הממדים שציין שוינפלד (Schoenfeld, 2014) לכיתה מתמטיקה מעצימת למידה, כוללים את עקרונות ההתערבות ששימשו את סביבת הלמידה בכיתה המתמטיקה:

הטבלה לעיל מציגה את יישום עקרונות ההתערבות בשיעור, כך שהמורה מנהלת בספונטניות את השיעור בהתאם לעקרונות. כמו כן אפשר לראות כיצד נראה תהליך של פתרון בעיה בקרב תלמידות שעד כה לא פתרו בעיות מתמטיות בעצמן. לאחר שרוב הכיתה פתרה את הבעיה, מתנהל דיון שבו יש רמות שונות של פתרון הבעיה, מהרמה האלגוריתמית שבה מציגה שלי את דרך הפתרון ועד הרמה הגבוהה ביותר של ג'ודי, שמתארת בכלליות את כל הבעיות שעשויות להיפתר באותה דרך. ג'ודי מכלילה את המקרה הפרטי של הבעיה למקרה כללי, ובאמצעות ההכללה מסבירה לכיתה את המרכיב החדש בבעיה הנוכחית לעומת סעיפים אחרים בבעיה ולעומת בעיות אחרות דומות שנפתרו בעבר בשיעורים.

סיכום שני התסריטים

שני התסריטים מדגימים שיעורים המיישמים את עקרונות ההתערבות. שני קטעי השיעור המודגמים מציגים שני פרקי זמן אחרים בתקופת ההתערבות בכל אחת מהכיתות. הקטע המתאר את כיתה י"ב מתאר פתרון של בעיה רויטנייט בנושא חשבון דיפרנציאלי, שלמרות פשטותה, התלמידות לא הצליחו לפתור אותה בעצמן. יישום של עקרונות ההתערבות מהסוגים האלה: ניתוח הבעיה, הכללה של הרעיון, עיון בדפי דוגמת פתרון ומציאת קשרים בין הבעיה הנתונה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר, מקדם בכיתה רעיונות

להתחלה של הפתרון שהתלמידות לא הצליחו לחשוב עליהם בעצמן. בהמשך השיעור, לאחר ניתוח הבעיה וייצוגה באמצעות שרטוט, תלמידות רבות בכיתה מבינות את הבעיה ואפילו מנסות לשער את הפתרון על פי השרטוט הכללי טרם כתיבת אלגוריתם מתאים.

השיעור בכיתה י"ב התרחש בראשית תקופת ההתערבות. אף שהתלמידות קיבלו דפי דוגמת פתרון הכוללים הסבר לפתרון בעיות כמו הבעיה הנתונה, הן עדיין לא מורגלות בעיון בדפי

הדוגמאות, בחקירתן ובניסיון לפתור את בעיית היעד באמצעותן. נוסף על כך, התלמידות נחשפו לשינויים רבים בנורמות ניהול הכיתה. הרעיונות שהן מביעות בדיון הופכים להיות הרעיונות העיקריים של השיעור. המורה לא הוגה רעיונות משלה, אלא עוזרת להן להוציא לפועל רעיונות שהן הוגות.

בכיתה י"א התקיים השיעור בשליש האחרון של תקופת ההתערבות. הכיתה מתמודדת עם פתרון עצמי של בעיה בהסתברות. השיח ברובו נסוב על הרעיון של דמיון הבעיה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר. החל מהרעיון הראשון של מורן להשוות את פתרון הבעיה לבעיית ה"ד.ס." וכלה ברעיונות של ג'ודי שמלמדת את הכיתה פרק בהכללה, כאשר היא הופכת כל סעיף בשאלה לשאלה כללית שאינה קשורה דווקא בכדורים והיא דומה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר, כגון "אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע כדורים ואני בוחרת שלוש אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי". על סמך המידע שנצפה בשיעור, ניכר כי הושגה המטרה העיקרית ליישום עקרונות ההתערבות. כל התלמידות עוסקות בעצמן בפתרון של הבעיה. הדיון על אודות דמיון של הבעיה לבעיה אחרת שנפתרה בעבר הוא טבעי וניכר שהוא חלק מהתהליך השגרתי שהכיתה חווה, וזו גם הפעולה הראשונה שתלמידות

ממדים של שוינפלד (Schoenfeld, 2014)	עקרונות התערבות להוראת תלמידים מתקשים בתיכון
הדגשת הקוהרנטיות של המתמטיקה	בניית קשרי דמיון בין בעיות (2) ² שימוש בדפי "דוגמה פתורה" (4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8)
עיון בהיבטים קוגניטיביים של הלומד	עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד (1) בניית קשרי דמיון בין בעיות (2) חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה" (4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) התלמידים במרכז (6) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8)
הנגשת המתמטיקה	עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד (1) בניית קשרי דמיון בין בעיות (2) חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה" (4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8) השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות (9)
סמכות המורה ופיתוח זהות לומד	חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה" (4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) התלמידים במרכז (6) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8) השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות (9)
הערכה	חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה" (4)

2. המספר מייצג את עיקרון ההוראה.

כמו כן נמצא כי העקרונות שנמצאו בספרות והותאמו להתערבות, עולים בקנה אחד עם עקרונות שניסה שוינפלד (Schoenfeld, 2014) לכיתת מתמטיקה מעצימת למידה. אחד האתגרים של הוראת מתמטיקה הוא לפתח תלמידים פותרים בעיות עצמאיים (NCTM, 2011), והוא מומש במחקר הנוכחי באמצעות עקרונות ההתערבות. גולדין (Goldin, 2014) מציג את תהליך פתרון בעיות כתהליך המקדם בניית סכמות לפתרון בעיות, אך לא מתאר את הדרך שבאמצעותה אפשר לבנות סכמה קוגניטיבית למתקשים בפתרון בעיות. עקרונות ההוראה שנמצאו למחקר הזה, נמצאו כמקדמות בניית סכמה קוגניטיבית לפתרון בעיה באמצעות קידום חשיבה היוריסטית של פתרון בעיות ופיתוחה, כך שהם משמשים השלמה ותשתית ליישום רעיונותיו של גולדין.

המחקר הנוכחי התמקד בניסיון לנסח עקרונות להוראה המותאמים לכיתות תיכון המאכלסות בתלמידות תיכון חלשות. המחקר על אודות מאפייני התלמיד החלש הוא מקיף, אך המחקר המתמקד בשיטות להוראה ולקידום פתרון בעיות בקרב תלמידי תיכון הוא מועט עד כי כמעט לא קיים. המחקר הנוכחי שאסף נתונים לאורך שנת לימודים שלמה והוראה בשתי כיתות תיכון, מציג עקרונות תאורטיים שהפכו לשיטה מעשית המקדמת פתרון בעיות בקרב תלמידי תיכון חלשים. בשונה מן מחקרים שאפשר ליישם את רעיונותיהם במצומצם בשדה החינוך המסורתי, מחקר זה מציג שיטה שאפשר ליישמה בכל כיתת תיכון ובהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך.

- children's emotional acts while engaged in mathematical problem solving. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research – insights from the work of Paul Cobb* (pp. 41-71). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-90-481-9729-3_5
- de Jong, T. (2010). Cognitive load theory, educational research, and instructional design: Some food for thought. *Instructional Science*, 38(2), 105-134. doi: 10.1007/s11251-009-9110-0
- de Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. (1986). Cognitive structures of good and poor novice problem solvers in physics. *Journal of Educational Psychology*, 78(4), 279-288. doi: 10.1037/0022-0663.78.4.279
- Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2002). The measurement of individual metacognitive differences in mathematical problem solving. In M. Valcke, D. Gombeir, & W. C. Smith (Eds.), *Learning styles: Reliability and validity. Proceedings of the 7th annual ELSIN Conference* (pp. 93-102). Ghent, Belgium: Academia Press.
- Detterman, D. K., & Sternberg, R. J. (Eds.). (1993). *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corporation.
- Dixon, R. A., & Brown, R. A. (2012). Transfer of learning: Connecting concepts during problem solving. *Journal of Technology Education*, 24(1), 2-17.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel.
- Geary, D. C. (2003). [Arithmetical development: Commentary and future directions](#). In A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 453-464). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Geary, D. C. (2004). [Mathematics and learning disabilities](#). *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.
- Geary, D. C., & Brown, S. C. (1991). [Cognitive addition: Strategy choice and speed-of processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children](#). *Developmental Psychology*, 27(3), 398-406. doi: 10.1037/0012-1649.27.3.398
- Geary, D. C., & Widaman, K. F. (1992). [Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models](#). *Intelligence*, 16(1), 47-80.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., & Hamson, C. O. (1999). [Numerical and arithmetical cognition: patterns of functions and deficits in children at risk for a mathematical disability](#). *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 213-239.
- Gentner, D. (1983). [Structure-mapping: A theoretical framework for analogy](#). *Cognitive Science*, 7(2), 155-170. doi: 10.1207/s15516709cog0702_3
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. In L. B. Resnick, J. M. Glaser, & S. K. Glaser (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 307-333). Cambridge, MA: MIT Press.
- הרכבי, א' (1999). תלמידים חלשים במתמטיקה - סיכום מחקר: דו"ח מוגש למשרד החינוך. רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.
- הרכבי, א' (2000). אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב): דו"ח ראשוני, מוגש למשרד החינוך. רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.
- יקואל, ג' (2007). מתמטיקה במבנה הצבירה לתלמידי 3-4 יחידות לימוד: שאלון ג' 035003 (מהדורה מעודכנת). קריית טבעון: משבצת.
- יקואל, ג' (2008). מתמטיקה במבנה הצבירה לתלמידי 3 יחידות לימוד: שאלון ב' 035002 (מהדורה מעודכנת). קריית טבעון: משבצת.
- קרסנטי, ר' והרכבי, א' (2001). אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב): דו"ח פעילות לשנת 2001, מוגש למשרד החינוך. רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.
- Artino, A. R., Jr. (2008). Cognitive load theory and the role of learner experience: An abbreviated review for educational practitioners. *AACE Journal*, 16(4), 425-439.
- Bahadir, M. E., & Ottway, J. R. (2013). Authentic teaching and learning through extra-curricular activities. [Technology Interface International Journal](#), 13(2), 87-95.
- Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1993). Pragmatic knowledge and conceptual structure: determinants of transfer between quantitative domains. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 68-98). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Bokosmaty, S., Sweller, J., & Kalyuga, S. (2015). Learning geometry problem solving by studying worked examples: Effects of learner guidance and expertise. *American Educational Research Journal*, 52(2), 307-333. doi: 10.3102/0002831214549450
- Chazan, D. (1996). Algebra for all students? The algebra policy debate. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 455-477. doi: /10.1016/S0732-3123(96)90030-9
- Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. New York: Teachers College Press.
- Chazan, D., Callis, S., & Lehman, M. (2008). *Embracing reason: Egalitarian ideals and teaching of high school mathematics*. New York: Routledge.
- Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M.W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13(2), 145-182. doi: 10.1016/0364-0213(89)90002-5
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1989/2011). Young

- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007a). [Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students](#). *Instructional Science*, 35(2), 99-139. doi: 10.1007/s11251-006-9004-3
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007b). [The effect of promoting heuristic literacy on the mathematic aptitude of middle-school students](#). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(1), 1-17. doi: 10.1080/00207390600861161
- Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., & Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction* 32, 22-36. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.01.003
- Kuo, E., Hull, M. M., Gupta, A., & Elby, A. (2013). [How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems](#). *Science Education*, 97(1), 32-57. doi: 10.1002/sce.21043
- LeFevre, J. A., & Dixon, P. (1986). Do written instructions need examples? *Cognition and Instruction*, 3(1), 1-30.
- Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20. doi: 10.3102/0013189X032001017
- Mayer, R. E. (1998a). [Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving](#). *Instructional Science*, 26(1-2), 49-63. doi: 10.1023/A:1003088013286
- Mayer, R. E. (1998b). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: W. H. Freeman.
- Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59(1), 14-19. doi: 10.1037/0003-066X.59.1.14
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training vs. worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 73(4), 449-471. doi: 10.1348/000709903322591181
- Mousel, S. (2006). [Bad medicine: Homework or headache? Responsibility and accountability for middle level mathematics students](#). Action Research Projects, 51, University of Nebraska-Lincoln.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2011). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nelson, B. C. (2007). [Exploring the use of individualized](#) solving. *Cognitive Psychology*, 12(3), 306-355. doi: 10.1016/0010-0285(80)90013-4
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15(1), 1-38.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1987). The cognitive basis of knowledge transfer. In S. M. Cormier & J. D. Hagman (Eds.). *Transfer of learning: Contemporary research and applications* (pp. 9-46). San Diego, CA: Academic Press.
- Goldin, G. A. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem solving. In R. Pekrun, & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education* (pp. 391-414). New York: Routledge.
- Jaeggi, M., Buschkuhl, M., Jonides, J., & Perrig, W. (2008). [Improving fluid intelligence with training on working memory](#). *PNAS*, 105(19), 6829-6833. doi: 10.1073/pnas.0801268105
- Jaeggi, S. M., Buschkuhl, M., Etienne, A., Ozdoba, C., Perrig, W. J., & Nirkko, A. C. (2007). [On how high performers keep cool brains in situations of cognitive overload](#). *Cognitive, Affective & Behavioral Neuroscience*, 7(2), 75-89. doi: 10.3758/CABN.7.2.75
- Kamiski, J., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). [The advantage of abstract examples in learning math](#). *Science*, 320(5875), 454-455. doi: 10.1126/science.1154659
- Karsenty, R. (2010). [Nonprofessional mathematics tutoring for low achieving students in secondary schools: A case study](#). *Educational Studies in Mathematics*, 74(1), 1-21. doi: 10.1007/s10649-009-9223-z
- Karsenty, R. (2012). Supporting mathematics teachers of at-risk students: A model of personalized professional development. In [Monograph: Mathematics teacher retention](#) (pp.93-100). Los Angeles, CA: California Mathematics Project.
- Karsenty, R. (2014). Mathematical Ability. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 372-375). Dordrecht: Springer.
- Kirschner, P., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). [Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based experiential, and inquiry-based teaching](#). *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.
- Koichu, B. (2003). *Junior high school students' heuristic behaviors in mathematical problem solving* (Doctoral dissertation). Technion, Haifa.
- Koichu, B. (2015). Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), [CERME9: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education](#) (pp. 2668-2674). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague.

- Sweller, J. (2015b). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 5(4), 360-367. doi: 10.1016/j.jarmac.2015.12.002
- Sweller, J. (2016). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 5(4), 360-367. doi: 10.1016/j.jarmac.2015.12.002
- Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning Algebra. *Cognition and instruction*, 2(1), 59-89.
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). Measuring cognitive load. In *Cognitive load theory* (pp. 71-85). Springer, New York, NY.
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). [Cognitive architecture and instructional design](#). *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296. doi: 10.1023/A:1022193728205.
- van Gog, T., & Paas, F. (2008). Instructional efficiency: Revisiting the original construct in educational research. *Educational Psychologist*, 43(1), 16-26. doi: 10.1080/00461520701756248
- van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2008). Effects of studying sequences of process-oriented and product-oriented worked examples on troubleshooting transfer efficiency. *Learning and Instruction*, 18(3), 211-222. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.03.003
- Watson, A. (2001). Low attainers exhibiting higher-order mathematical thinking. *Support for learning*, 16(4), 179-183. doi: 10.1111/1467-9604.00215
- [reflective guidance in an educational multi-user virtual environment](#). *Journal of Science Education and Technology*, 16(1), 83-97. doi: 10.1007/s10956-006-9039-x
- Nunokawa, K. (2006). [Using drawings and generating information in mathematical problem solving](#). *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2(3), 33-54. doi: 10.12973/ejmste/75463
- Ovadiya, T. (2017). Constructing similarity connections between mathematics problems: The case of "weak" high school students. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 71). Singapore: PME.
- Pirolli, P. L., & Anderson, J. R. (1985). [The role of practice in fact retrieval](#). *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 11(1), 136-153. doi: 10.1037/0278-7393.11.1.136
- Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 39-67). Norwood, N.J.: Ablex.
- Robins, S., & Mayer, R. E. (1993). [Schema training in analogical reasoning](#). *Journal of Educational Psychology*, 85(3), 529-538. doi: 10.1037/0022-0663.85.3.529
- Rogoff, B. (1990). Explanations of cognitive development through social interaction: Vygotsky and Piaget. In B. Rogoff (Ed.), *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context* (pp. 137-150). New York: Oxford University Press.
- Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M. J. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on "rate of change". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 863-889. doi: 10.1007/s10763-013-9501-1
- Rossow, M. P. (2005). Theoretical basis for learning statics by studying worked examples. Retrieved from http://www.ce.siu.edu/examples/Worked_examples_Internet_text-only/Home_page/Theoretical_basis.pdf
- Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404-412. doi: 10.3102/0013189X14554450
- Sweller, J. (1988). [Cognitive load during problem solving: Effects on learning](#). *Cognitive Science*, 12(2), 257-285. doi: 10.1207/s15516709cog1202_4
- Sweller, J. (2005). The redundancy principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 159-167). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Sweller, J. (2015a). In academe, what is learned, and how is it learned? *Current Directions in Psychological Science*, 24(3), 190-194. doi: 10.1177/0963721415569570

הוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים: מודל לתוכנית התערבות למורים

יחיאל תנעמי



ד"ר יחיאל תנעמי

מרצה בחוג לחינוך מיוחד במכללת חמדת הדרום, מלמד מתמטיקה בחט"ב ומנחה מורים בהוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד.

תחומי המחקר שלו הם תפקודים קוגניטיביים והקשר שלהם למתמטיקה, וכן לפיתוח מקצועי של מורים.

תקציר

הוראת המתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים הלומדים בכיתה רגילה מאופיינת בקשיים הנובעים בחלקם מהיעדר הכשרה מקצועית מתאימה לעבודה עם תלמידים אלו. כדי לקדם את מומחיות המורים במתן מענה מקצועי לתלמידים, הופעלה תוכנית התערבות במסגרת השתלמות מורים, על פי מודל שפותח למטרה זו. המודל מכון להרחבת מומחיות המורה בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים ומעוגן בעקרונות של "הלמידה המשמעותית" עבור מורים. כמו כן את התוכנית הנחו שני מנחים: האחד מומחה בדיסציפלינה, והשני – בחינוך מיוחד. נערך סקר בקרב 36 מורים שהשתתפו בהשתלמות באמצעות שאלון אינטרנטי שנבנה לצורך הערכת המודל. מניתוח התשובות עולה שביצוע רצון כללית ברמה גבוהה בשני ההיבטים העיקריים של התוכנית: האחד – הרחבת מומחיותם של המשתתפים בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים, והשני – דרכי העברת התוכנית על ידי המנחים. כמו כן עלה צורך להעמקת הידע המתמטי והעשרתו. מודל התערבות זה יכול לשמש דגם לקידום מומחיותם של מורים בתחומי דעת אחרים, בקבוצות גיל שונות, ולאזן דווקא בתחום המתמטיקה.

מילות מפתח: מתמטיקה; תלמידים מתקשים; הוראה שיתופית; תוכנית התערבות; רפלקציה.

מבוא

מקצוע המתמטיקה הוא אחד ממקצועות הליבה אותם מחויבים ללמוד כל תלמידים. הוא נחשב מקצוע קשה ומורכב הן להוראה והן ללמידה בין השאר על רקע ההטרונגויות בכיתה. אחד מסוגי ההטרונגויות בכיתה החינוך הרגיל היא השונות הגדולה של מגוון תלמידים על הרצף שבין תלמידים רגילים לתלמידים עם צרכים מיוחדים. תלמידים עם צרכים מיוחדים יכולים להיות תלמידים מתקשים, תלמידים בתוכנית השילוב ותלמידי חינוך מיוחד.

יוזמות מקומיות שנועדו לאפשר התנסות למתכשרים בהוראת מתמטיקה במתן מענה לתלמידים עם צרכים מיוחדים (ראה למשל ברש ומנדל, 2012).

סטודנט לחינוך מיוחד יעמיק את הידע שלו בגישות פילוסופיות, היסטוריות ובהתפתחות החקיקה מחינוך מבדל לחינוך מכיל; בהיבטים תפקודיים והתפתחותיים שונים הקשורים ללמידה; בגישות עדכניות בעבודה עם משפחות עם ילדים עם צרכים מיוחדים; בהכשרה לעבודה עם תלמידים עם לקויות קלות בחינוך המכיל ועם תלמידים עם לקויות קשות ומורכבות יותר בחינוך המיוחד; ירכוש כלים ומיומנויות לקידום תפקודם של תלמידים עם צרכים מיוחדים. ההתנסות המעשית בהוראה תהיה במספר תחומים ולעיתים תכלול גם את המתמטיקה. בלימודים אלו הוא בדרך כלל לומד קורס אחד עד שלושה קורסים בחינוך מתמטי העוסקים בדרך כלל בתכנים של בית הספר היסודי ולא מעבר לכך.

תקופה שנייה - תקופת ההתמחות והכניסה להוראה

תקופת זמן זו נחלקת לשני חלקים: א. לשנת העבודה הראשונה במערכת החינוך; ב. ולאחר שנת ההתמחות בהוראה. חלקים אלו נועדו ללוות את המורה בתמיכה מקצועית בדילמות יומיומיות שהוא פוגש בהן בתחילת דרכו בשדה ולקראת עבודה עצמאית. שני החלקים נבדלים בהיקף משרת ההוראה, במידת העצמאות הנדרשת מהמורה בשדה, בסוג הליווי ובאופיו (משרד החינוך, 2017).

מורה למתמטיקה יבצע שני חלקים אלו בתחום המתמטיקה במסגרות רגילות בעוד מורה לחינוך מיוחד יבצע שלב זה בסוג מסוים של אוכלוסייה בחינוך המיוחד – בעלי לקויות קלות או מורכבות הלומדים בחינוך המכיל או המיוחד. כמו כן מורה לחינוך מיוחד יתנסה במגוון תחומי דעת, ולא מן ההכרח שתחום המתמטיקה יהיה אחד מהם.

משתי תקופות ההכשרה הראשונות נובע שמורים בעלי ההתמחות במתמטיקה באים לשטח עם ידע נרחב בתחום הדיסציפלינרי והתנסות בהוראתו, אך בדרך כלל אין להם כלים לתת מענה לתלמידים עם צרכים מיוחדים בכיתתם. המורים לחינוך מיוחד באים עם ארגז כלים עשיר לתהליכי התערבות פדגוגית-דידקטית ליישום במגוון תחומי דעת, אך הם בדרך כלל חסרים את הידע וההבנה הרחבה והמעמיקה בתחום המתמטיקה. לשני סוגי מורים אלו יש מטרה משותפת – להיות משמעותיים בהוראת המתמטיקה לתלמידיהם המתקשים בתחום דעת זה.

מהספרות המחקרית עולה כי אצל תלמידים מתקשים במתמטיקה בולטים מרכיבים קוגניטיביים ורגשיים-חברתיים במעגל ההוראה והלמידה. בתחום הקוגניטיבי ניכרים קשיים בשפה (NCTM, 2007), בקריאה, בכתיבה ובהבעה בעל-פה (Chazan, 2000); קושי בהבנת תפקידם של סמלים ומהותם (קרטנטי והרכבי, 2003), בשימוש בהם (Chazan, 2000) ומתן עדיפות לעבודה קונקרטי עם מספרים (קרטנטי והרכבי, 2003); בזיכרון, בשליפה איטית או לא מדויקת של עובדות חשבון בסיסיות (למשל; Geary, 2004; Lovin, Kyger, & Allsopp, 2004) ובהחזקת מידע בזיכרון עבודה (למשל NCTM, 2007; Geary, 2004); בקשב לסוגי (למשל תנעמי, 2001, 2007; Lovin et al. 2004); קושי ביצירת דימוי מנטלי של מושגים מתמטיים (NCTM, 2007) וקושי בהעברה (קרטנטי והרכבי, 2003).

בתחום הרגשי-חברתי הקשיים מתבטאים במוטיבציה נמוכה ללמידה, בדימוי עצמי נמוך, בחוסר ביטחון, בתחושת מסוגלות נמוכה ובמיקוד שליטה חיצוני; פסיביות בדיונים כיתתיים (למשל

המשתלבים בכיתה רגילה. ידע של מורה במתמטיקה הוא קריטי להצלחת תלמידיו, אולם מורה המומחה להורות תחום מסוים אינו בהכרח כשיר ללמד תלמידים עם מגוון צרכים, כמו תלמידים עם צרכים מיוחדים (Rosas & Campbell, 2010). לאור זאת, לא מעט מהקשיים של המורה בחינוך הרגיל נובעים מכך שהשכלתו היא דיסציפלינרית בלבד, ובדרך כלל חסרה לו הכשרה מקצועית וכלים מתאימים לעבודה בכיתה הטרוגנית שתוארה לעיל. בדומה לכך, חלק מהקשיים של המורה לחינוך מיוחד המלמד מתמטיקה בכיתה החינוך המיוחד או בתוכנית השילוב, נובעים מכך שהוא בדרך כלל חסר השכלה דיסציפלינרית, אך יש לו ארגז כלים עשיר לקידום תלמיד מתקשה (Rosas & Campbell, 2010). כדי לקדם את מומחיות המורים, הופעלה במסגרת השתלמות מורים דיסציפלינרית במתמטיקה תוכנית התערבות למורים המלמדים תלמידים מתקשים בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד, על פי מודל שפותח למטרה זו. מטרת מאמר זה היא לאפיין ולתאר את המודל שעל פיו הופעלה תוכנית ההתערבות ולתאר ממצאים שעלו מתוך הערכת תוכנית ההתערבות.¹

רקע תאורטי

פיתוח מקצועי

אחת מהנחות היסוד ששמדו בבסיס קביעת המתווים הנמחים בהכשרה להוראה טוענת כי "הוראה היא מקצוע מורכב [...] ולכן רכישת הידע והיכולת להיות מורה היא תהליך מורכב והדרגתי. לא ניתן להקנות במהלך ההכשרה הראשונית להוראה את כל תשתית הידע הנדרשת למורה העתידי. לכן, על תכנית ההכשרה להיות ממוקדת ובסיסית, כאשר רבדים נוספים בידע ובמיומנויות יילמדו בזמן תקופת ההתמחות (סטאז', induction) של המורה, ובמהלך שנות עבודתו (Life Long Learning)" (משרד החינוך, 2006). מכאן שמדובר בשלוש תקופות בהתפתחות המקצועית של העוסקים בהוראה: הראשונה – בהכשרתם להוראה, השנייה – בהתמחות ובכניסה להוראה והשלישית – במשך רוב שנות עבודתו של המורה (אבידב-אונגר, רוזנר ורוזנברג, 2013).

להלן נסקור את שלוש תקופות ההתפתחות המקצועית ונדגיש את השפעתן על הכשרתו של המורה למתמטיקה או לחינוך מיוחד:

תקופה ראשונה - הכשרה להוראה

בתקופה זו לומדים המתכשרים להוראה: (א) לימודים דיסציפלינריים; (ב) לימודי הכשרה להוראה לעיצוב דמות המורה כאישיות מחנכת; פדגוגיה ומתודיקה בהוראת המקצועות שבהם מתמחה הסטודנט; אוריינות מחקר והתנסות מעשית במערכת החינוך; (ג) לימודי יסוד והעשרה הכוללים לימודי שפת ההוראה, אנגלית, אוריינות עבודה בסביבה ממוחשבת ולימודי תרבות ומורשת עם (משרד החינוך, 2006). על פי המתווה של המועצה להשכלה גבוהה, המתכשרים להוראת מתמטיקה בחינוך היסודי לומדים בדרך כלל במסלול דו-חוגי (מתמטיקה ותחום דיסציפלינרי נוסף) ולחינוך העל-יסודי במסלול חד-חוגי. מגמת משרד החינוך היא שההכשרה במתמטיקה תהיה חד-חוגית כדי להעשיר את הידע הדיסציפלינרי.

בתקופה זו סטודנט להוראת מתמטיקה יעמיק את הידע המתמטי שלו לרבות היבטים התפתחותיים והיסטוריים של המתמטיקה, היבטים פסיכו-דידקטיים בהוראת מתמטיקה, דרכי הוראת מתמטיקה והתנסות מהותית בהוראת הדיסציפלינה. בלימודים אלו הוא בדרך כלל ילמד קורס אחד העוסק בהיכרות עם סוגי אוכלוסיות של תלמידים עם צרכים מיוחדים בזיקה למתמטיקה. כמו כן, ננקטות

1. מחקר זה נערך בסיוע רשות המחקר הבין-מכללתית של מכון מופ"ת.

(Lovin et al., 2004), אי הכנת שיעורי בית וקוצר רוח לעבודה עם פרופדורות ארוכות (קרסנטי והרכבי, 2003). (לעיון מעמיק יותר ראו קרסנטי והרכבי, 2003; Geary, 2004; Chazan, 2000; Lovin et al., 2004; NCTM, 2007).

תקופה שלישית - פיתוח מקצועי במשך רוב שנות עבודתו של המורה

מערכת החינוך בארץ פועלת בהתמדה לקידום איכות כוחות ההוראה. היא עושה זאת בין השאר באמצעות תהליך מובנה ושיטתי של פיתוח מקצועי עבור עובדי ההוראה, לאורך כל שנות עבודתו. הפיתוח המקצועי נועד להתאים את מערכת החינוך לעתיד. כמו כן הוא ממצב את עובדי ההוראה כמומחים בתחומם וכבעלי ידע פדגוגי וחינוכי עדכני, שבכוחו לשפר את עבודתם, להובילם לפיתוח הפרופסיה והאחריותיות, לקדם את הישגי תלמידיהם והאקלים הבית ספרי (אבידב-אונגר ואחרים, 2013). לצורך כך נבנו מתווים גמישים המסייעים לפיתוח המקצועי של המורים בדרך מאורגנת ומובנית. במתווים אלו מוסדרים קורסים רלוונטיים למערכת והכרחיים לקידום המקצועי של המורים ולהעצמתם האישית (נגר, 2013), שנעשים בדרכים רבות ומגוונות (משרד החינוך, 2012).

במאמר זה נעסוק בפיתוח המקצועי של מורים המלמדים מתמטיקה בחטיבות הביניים הנמצאים בתקופה השלישית של התפתחותם המקצועית. אחת הדוגמאות לקידום הפיתוח המקצועי של המורים המלמדים מתמטיקה בחינוך הרגיל והמיוחד היה בשנת תש"ע, כאשר הוכנסה למערכת החינוך תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה לחטיבת ביניים. הטמעת התוכנית נעשתה בשני ערוצים עיקריים: האחד – הדרכה אינטנסיבית למורים שניתנה על ידי מדריכים שהגיעו אחת לחודש לבית הספר, והשני – באמצעות השתלמויות בפסג"ות השונות. להשתלמויות אלו נדרשו להגיע כל המורים המלמדים מתמטיקה בחטיבת ביניים, והן נועדו למורים המלמדים אוכלוסיות רגילות ולמורים המלמדים אוכלוסיות מתקשות (תלמידי מיצוי – השישית השנייה של התלמידים וכן תלמידי חינוך מיוחד). בשנה השנייה להטמעת התוכנית התברר שההשתלמויות אינן נותנות מענה מספק לצורכי המורים לחינוך מיוחד, ולכן יזם האגף לחינוך מיוחד השתלמויות להטמעת תוכנית הלימודים המיועדות למורי החינוך המיוחד. ההשתלמויות השונות למורי החינוך הרגיל והחינוך המיוחד נערכו במהלך ארבע השנים הראשונות להטמעת התוכנית.

ניסיונו רב השנים של כותב המאמר בהטמעת תוכנית לימודים זו באגף לחינוך המיוחד והחינוך הרגיל, מעיד על כך שבכיתות חינוך מיוחד מעט מאוד מהמורים המלמדים מתמטיקה הם מורים שתחום התמחותם הוא מתמטיקה, ומרביתם הם מורים לחינוך מיוחד, המלמדים מקצוע זה מכורח המציאות. בכיתות הרגילות מלמדים מורים שתחום התמחותם הוא מתמטיקה. בחלק מהקבוצות ג' מלמדים מורים שתחום התמחותם מתמטיקה או מורים לחינוך מיוחד. כלומר, המורים המלמדים מתמטיקה תלמידים עם צרכים מיוחדים, הם בדרך כלל חסרי הכשרה מקצועית מספקת להוראה אפקטיבית של תלמידים אלו, אף שהם עושים כל שביכולתם כדי לקדם את תלמידיהם. ראוי לציין שמחקרים מראים בעקביות כי קיים פער בהישגים במתמטיקה בקרב תלמידים לקויי למידה ושאינם לקויי למידה לעומת הרמה הבסיסית הנדרשת מבני גילם, כאשר הפער גדול יותר אצל תלמידים לקויי למידה (NAEP, 2005, 2007). כמו כן, ככל שהם מתקדמים בדרגת הכיתה שלהם, כך יש ירידה במיומנויות המתמטיות בקרב שתי האוכלוסיות (National Mathematics Advisory Panel, 2008). להוראה יעילה ואפקטיבית של תלמידים עם צרכים מיוחדים יש צורך בשילוב של ידע דיסציפלינרי וכלים מתאימים.

לאור זאת, כדי לגשר על הפער בידיע הדיסציפלינרי של המורים לחינוך מיוחד ובידיע הפדגוגי-דידקטי של המורים המלמדים מתמטיקה אוכלוסיות אלו, הוחלט לבנות מודל של תוכנית התערבות דיסציפלינרית במתמטיקה המיועדת למורים בחינוך המיוחד ובחינוך הרגיל המלמדים מתמטיקה תלמידים מתקשים. מטרת העל של התוכנית היא לקדם את מומחיותם של המורים במתן מענה מקצועי לתלמידיהם בתחום המתמטיקה שהם מלמדים. התוכנית נבנתה על פי העקרונות האלה:

1. **תחום הדעת** – יצירת בהירות במטרות וביעדים של תוכנית הלימודים, העלאת קשיים ודרכי פתרון בהוראתם ובניהול ההוראה-למידה של הנושא הנלמד.
2. **כלים** – מתן כלים ספציפיים להוראת נושאים מתמטיים וכלים גנריים שיש בהם לסייע בהוראת המתמטיקה ורלוונטיים לנושא הנלמד.
3. **הוראה שיתופית** – הנחיה שיתופית של שני מנחים מתחומי דעת שונים: חינוך מיוחד ומתמטיקה.
4. **שיתוף הלומדים** – שיתוף הלומדים בתהליך הלמידה.
5. **ליווי המורה** – ליווי המורה בתהליך ההוראה לאורך השנה.

שני העקרונות הראשונים נוגעים להרחבת מומחיות המורה בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים. שלושת העקרונות האחרונים נוגעים לדרכי העברת ההשתלמות בידי מנחי ההשתלמות. האמונה בבסיס עקרונות אלו היא שתהליך משמעותי שהמורה יעבור בהשתלמות, יביא לידי הפנמת העקרונות וייתן בידו כלים להוראה מכילה, יעילה ומקצועית יותר בכיתתו.

א. עקרונות הנוגעים להרחבת מומחיות המורה בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים

אחד ממאפיינייה של המתמטיקה הוא שהיא מופשטת ומכאן נובע הקושי הגדול בהוראת מתמטיקה – הוראת המופשט. תפקידו של המורה בתהליך ההוראה הוא לכוון את הלמידה בסדר הנכון כדי שהתלמיד יגיע להבנה ולהפשטה הנדרשת (אהרונ, 2004). ידיעה או מומחיות בתחום התוכן המתמטי של המורה אינה מספיקה להוראה מאחר שההוראה היא גם היכולת למסור את הידע עם מכלול של ערכים העוטפים ידע זה, כלומר המורה יוצר דיאלוג של אמת עם התלמיד ועם עולמו, ומעניק לתלמיד מעבר לידיע ולהבנה גם הזדמנויות לצמיחה, ערכים ומרחב ייחודי של התפתחות והתנסות (אזולאי, 2015). מממצאי מחקרים עולה כי סדנאות בעלות מיקוד דיסציפלינרי נותנות מענה לצרכים הפרופסיונליים והמיידיים של המורה המתחיל ובכך מסייעות לו בתהליך החברות שלו לתפקיד, בהתפתחותו המקצועית ובחזיון שביעות הרצון מהעבודה (ארכיב-אלישיב ולדרר, 2011; נאסר-אבו אלהיג'א, פרסקו ורייכנברג, 2011).

לצורך כך נכללו בהשתלמות המרכיבים האלה:

1. במפגש ההשתלמות הראשון נעשה בירור והבהרת משמעות צמד המילים "תלמיד מתקשה" על פי תפיסתם של המורים. התשובות שהתקבלו כווננו למאפיינים קוגניטיביים, התנהגותיים-רגשיים, סביבתיים ולימודיים של התלמידים, כמו קשיי הבנה וזכירה, קשיים בקשב, קשיים במוטיבציה, חוסר שיתוף פעולה, מה התלמיד מקבל מזה, קושי להתחבר למורה, חוסר אמונה של התלמיד ביכולתו, קשיים בהרגלי למידה, תרגול והתארגנות, קשיים בגיוס הבית לתמיכה בלמידה, העדר ספרי לימוד וחומרי למידה מתאימים, איסור לכתיבה בספרים, העדר מיומנויות בסיסיות, פערים לימודיים משנים קודמות. חלק מתשובותיהם שימשו סמן למיקוד העבודה איתם או לרצף נושאי העבודה

במהלך ההשתלמות.

2. כל מפגש נפתח בהצגת שקף המתאר בקצרה את הנושאים הנלמדים בכיתה ז' בתחומים השונים ומספר שעות הלימוד המוקצות לכל תחום, כפי שהם מופיעים בתוכנית הלימודים (איור 1). מטרת הצגה זו היא לחבר את המורה למסמך תוכנית הלימודים כמסמך מנחה שמחייבים אליו המורים כאנשי מקצוע, וגם להראות היכן אנו עומדים ברצף ההוראה שנדרש על פי תוכנית הלימודים ועל אילו נושאים נדבר במפגש זה. המשפט ארוך.

איור 1

סבב 1		
תחום אלגברי משוואות, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	תחום מספרי פעולות החשבון וחוקיותן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	תחום גאומטרי חלון, חיבה ניצבות והקבלה (15 שעות)
סבב 2		
תחום אלגברי פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	תחום מספרי מספרים שליליים חיוביים ואס (20 שעות)	תחום גאומטרי שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)
סבב 3		
תחום אלגברי פונקציות (18 שעות) משוואות ושאלות מילוליות (20 שעות)	תחום גאומטרי משולש ומנסרה משולשת (10 שעות)	

3. עבודה ברמה של תחום שאמור להילמד בסבב זה: הצגה כללית של התחום המובא בפתיחה לתוכנית הלימודים (איור 2); לאחר מכן הצגת הנושאים המרכיבים את התחום כפי שהם כתובים בתוכנית הלימודים ומספר השעות המוקצה לכל הנושאים; דיון עם המורים בחלוקת מכסת השעות בין הנושאים למיניהם. חלוקה זו היא חלוקה סכמתית ללא העמקה והנמקה (איור 3).

איור 2

מתוך מבנה תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתה ז':

לימודי האלגברה נפתחים ביצירת תשתית, שבמרכזה מושג המשתנה והביטוי האלגברי. משוואות נלמדות בשני סבבים. תוך שימת דגש על הבנת מושגי המשוואה ופתרונה. בשלב זה של הלימוד ילמדו דרכי פתרון המצריכות מיומנויות בסיסיות בלבד, כשהעמקה במיומנויות הטכניות נדחת לכיתה ח. בסבב השלישי נלמד מושג הפונקציה. יש לפתוח נושא זה בהיכרות עם מצבים מציאותיים שבהם טבעי להגדיר התאמות בין מספרים, ולשלב בהדרגה הגדרות וסימונים פורמליים.

סבב 1	סבב 2	סבב 3
משוואות, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	פונקציות (18 ש') משוואות ושאלות מילוליות (20 ש')

↑
תחום אלגברי

איור 3

נושאים בסבב 3 - פונקציות, משוואות ושאלות מילוליות

א. גרפים שימושיים – קריאה ושרטוט	ה. עלייה וירידה של פונקציה
ב. מבוא לפונקציות	ו. השתנות של פונקציה בקצב אחיד ובקצב לא אחיד
ג. ייצוגים שונים של פונקציה	ז. פתרון משוואות קוויות
ד. השתנות של פונקציה	ח. שאלות מילוליות בשילוב משוואות קוויות

סבב 1	סבב 2	סבב 3
משוואות, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	פונקציות (18 ש') משוואות ושאלות מילוליות (20 ש')

תחום אלגברי 38 שעות

4. הצגת היעדים המרכיבים כל נושא בתחום. היעדים הם פרשנות של תוכנית הלימודים ומתבססים ברובם על הדגשים והדוגמאות המובאים בתוכנית הלימודים והשלמות פדגוגיות-דידקטיות ליעדים או של יעדים (איור 4).

איור 4

יעדים בלימוד הנושא:
גרפים שימושיים – קריאה ושרטוט

מושגים:
✓ ערך של x
✓ ערך של y
✓ הערך הגבוה/ הנמוך ביותר
✓ תחום

- התלמיד ידע לקרוא תופעות המיוצגות באמצעות גרף:
א- מציאת ערך המתאים לערך נתון של x
ב- מציאת ערך או ערכים של x שמתאים לערך נתון של y
ג- מציאת הערך הגבוה / הנמוך ביותר של y, ומציאת הערך או הערכים של x שעבורם מתקבל ערך זה של y.
ד- מציאת טווח הערכים של y המתקבלים עבור תחום נתון של x.
- התלמיד ידע לקשר בין הייצוג הגרפי לבין ייצוגים אחרים שכבר נלמדו במהלך השנה:
תיאור מילולי, טבלאות ערכים וביטויים אלגבריים.
- התלמיד ידע ליצור טבלת ערכים חלקית, מתוך תופעות המיוצגות באמצעות גרף.
- התלמיד ידע לעבור מביטוי אלגברי לייצוג גרפי באמצעות טבלת ערכים, כשלב מתווך.
- התלמיד ידע ש"תחום" הוא מושג המתייחס בגרף:
א- לחלק מציר X
ב- לחלק מציר Y יכול להיות קטע, קרן או קבוצה סופית של נקודות.

ביעדים ננקטו שלבים אלה:

- קריאת היעדים ויצירת בהירות בהבנתם ובדרישה הנובעת מהם לשלב למידה זה.
- בירור המושגים המתמטיים שיש להקנות בשלב למידה זה.
- בירור גורמים מקדמים או מעכבים הקניית יעדי הנושא כפי שהמשתלמים או מנחי ההשתלמות חווים אותם בקרב מורים או תלמידים. הגורמים המעכבים יכולים להיות קשורים לדרכי הוראה, לרלוונטיות של היעד להמשך הדרך ולרצף הקניית היעדים.
- הצעת דרכי התערבות בתהליך ההקניה, על ידי המשתלמים עצמם או מנחי ההשתלמות. מנחי ההשתלמות בחרו נושאים ספציפיים שניתנו בהם הדגמות מעמיקות יותר להקניית הנושא. ההדגמות ניתנו מתוך התאמה למורכבות הנושא, לחשיבותו ולשכיחות הקושי של הנושא בעת שילוב משימות מאתגרות, חומרי למידה כתובים, מתוקשבים והערכה חלופית לנושאים מגוונים. במגוון הדרכים שהוצעו יש מענה לסגנונות מגוונים של מורים ותלמידים כאחד, ולתת למורה כמה דרכים שיוכל לבחור מהן את הדרך המתאימה להקניית הנושא ברמת הכיתה או בשעות הפרטניות.

דוגמה: הקניית נושא מערכת צירים שהומחשה במהלך ההשתלמות על המורים

שלב ראשון: המחשה קונקרטית של בניין דירות ארוך בעיר חיפה הבנוי על צלע הר. לבניין יש 10 כניסות ו-10 קומות שמקצתן נמצא בחלק העליון של ההר ומקצתן בחלקו התחתון של ההר. זיהוי הכניסה לבניין ומיקום הקומה במעלה ההר או בתחתית ההר נעשה באמצעות סימן "מינוס" או "פלוס" לפני מספר הקומה או הכניסה. על רצפת הכיתה יצר המורה מערכת צירים קרטזית באמצעות סרט צבעוני דביק, כך שהמספרים על ציר X מייצגים את הכניסות לבניין ומספרים על ציר Y מייצגים את מספר הקומה. 5 קומות נמצאות בחלק העליון של הבניין ו-5 קומות בחלק התחתון. המשימה: כל תלמיד בתורו התבקש להגיע לדירה ספציפית בבניין הדירות על פי הנחיות המורה. שאר התלמידים עוקבים ובודקים האם התלמיד אכן הגיע ליעד. לדוגמה: כניסה 3 דירה 5. התלמיד היה צריך לנוע על ציר ה-X ולהגיע לכניסה 3 ולעלות לקומה 5 על ציר ה-Y. במידה

שהתלמיד לא הגיע ליעד הנדרש, התנהל דיון בכיתה על מהות השגיאה והתלמיד תיקן את שגיאתו. הזוגות הסדורים שניתנו לתלמידים כללו מספרים חיוביים, שליליים ואפס, כך שהייתה התנסות בנקודות הנמצאות בכל אחד מהרביעים במערכת הצירים, לרבות הצירים עצמם. לאחר שהתלמידים למדו היטב את המשחק, הם הונחו לשחק משחק הפוך: תלמיד עמד במיקום של דירה מסוימת ותלמיד אחר היה צריך לומר את הזוג הסדור המייצג את "כתובת" הדירה שהתלמיד נמצא בה.

שלב שני: קישור היבטים שמתבטאים במשחק למושגים מתמטיים של נושא מערכת צירים, כמו למשל: הבניין לאורכו מייצג את ציר X והגובה את ציר Y; רצף המספרים של כניסה וקומה מייצג זוג סדור.

שלב שלישי: העברה של קריאה וזיהוי נקודות במערכת הצירים על מערכת צירים שהוצגה על הלוח. במידת הצורך, עדיין נעשה מעבר מהייצוג המתמטי לייצוג המוחשי באמצעות המשחק על הלוח.

שלב רביעי: העברה של קריאה וזיהוי נקודות במערכת צירים כפי שהוצגה על הלוח למערכת צירים שחולקה לכל תלמיד בדפים.

יש לציין כי המשימות שניתנו בכל אחד משלבי המשחק היו ברמת קושי עולה, מתוך התאמה לשליטת התלמידים במשימות. כמו כן נעשתה העברה מהוראה מפורשת בשפת המשחק לשפה המתמטית, למשל: כניסה 3, קומה 5 עבר בשלב מסוים לאמירה של שני המספרים בלבד ללא המילים כניסה וקומה, והתלמיד היה צריך לזכור שהמספר הראשון הוא כניסה והשני קומה. בשלב מסוים נעשה גם מעבר מאמירה בקול לכתיבה פורמלית של זוג סדור על הלוח (3,5) והם היו צריכים לדעת שהמספר השמאלי הוא הכניסה והימני קומה.

במשימה זו ניתן מענה לפן הקוגניטיבי ורגשי-חברתי של התלמידים. בפן הקוגניטיבי דורגה הלמידה מהמוחשי אל המופשט, דירוג שסייע בתפיסה וזכירה של הנושא, הפיכת הלמידה לבעלת משמעות מתוך התנסות פיזית. מתן לגיטימציה לתנועה ברמות הדירוג למיניהן – מהקונקרטי למופשט ובחזרה – לצורך חיזוק ההבנה, ובהתאמה לצורכי התלמיד; כמו כן הבנת מהות זוג סדור של מספרים, משמעות הסמל המתמטי המייצג אותם, הצורך ברלוונטיות של הסמל ובדיוק בו; קריאה וכתיבה של זוג סדור של מספרים; הקניית אסטרטגיות של זיהוי וסימון זוג סדור בשלבים המגוונים של הפעילות; יצירת דימוי מנטלי של מערכת הצירים ושל הזוג הסדור; חיזוק החזקת מידע בזיכרון העבודה; הקניית מושגים רלוונטיים לנושא ועוד. בפן הרגשי-חברתי יש הפחתת חרדה וחיזוק תחושת מסוגלות, מיקוד שליטה פנימי וחיזוק הדימוי העצמי ביכולת להתמודד עם המטלה, מעורבות חברתית ועוד.

נוסף על כך הוצעו למשתתפים רצף פעילויות מגוונות להקניית הנושא ותרגולו. ההקניה ותרגול יכולים להתנהל בפעילויות משחק חווייתיות, דפים, יישומונים, שימוש בתוכנת גאוגרפה וכדומה.

- דיון בהתאמת התרגול ליעדים שנבחרו והשלמת חומרים לתרגול בידי מנחי ההשתלמות. לדוגמה: היעד ללמידה הוא חישוב שטח של מצולעים. תלמיד נדרש לחשב שטח של מלבן ומשולש כידע בסיסי. בשלב מתקדם יותר הוא נדרש לחשב שטח של צורה מורכבת יותר כמו הצורה הזאת:



כדי לחשב את שטח הצורה שיש לעשות עליו תחילה אנליזה של הצורה ולזהות בה את הצורות הבסיסיות (מלבן,

משולש), לחשב שטח של כל אחד מהם בנפרד ואז לחבר אותם לסכום אחד. משימה זו מקשה על תלמיד מתקשה. כדי להתאים את התרגול להשגת היעד עלינו ללמדו תחילה להתבונן בצורה, לזהות ולסמן בה חלוקות אפשריות למרכיבים הבסיסיים. ביצוע אנליזה זו הוא תנאי לחישוב שטח הצורה המורכבת באמצעים חשבוניים או אלגבריים בהמשך. ראוי לציין כי תרגול מעין זה משמש תמיכה בפיתוח מיומנות האנליזה אצל התלמיד שאפשר ליישמה בתחומים אחרים.

- דיון במספר השעות הנדרש לצורך הקניית היעדים והשוואה למספר השעות שהקצו המשתלמים בשלב 3. שיח זה נועד לתת למורה את האחריות לכך שלממד הזמן יש חשיבות בהספק הקניית התכנים ויש להביא אותו בחשבון בתכנון השנה.

שלבים אלו בוצעו על כל אחד מהתחומים הרלוונטיים למפגש. עיסוק בהם מפתח אצל המורה הבנה והעמקה של תוכנית הלימודים, כלים לתכנון וניהול הלמידה, הבנה של צורכי התלמיד המתקשה בתכנים וקבלת כלים להנגשה מיטבית של התכנים לתלמיד. כל אלה מאפשרים למורה ליישם את הדברים בכיתתו, לצמצם את השונות בקרב תלמידיו בידע המוקנה שיש בהם כדי להניב תוצאות חיוביות והישגים גבוהים אצל תלמידיו.

5. נבחרו נושאים גנריים שלדעת מנחי ההשתלמות חשוב שיהיו מוכרים למורה המלמד תלמידים מתקשים. בנושאים אלו הם נתנו הרצאה או פעילות להרחבת הידע של המורים והוצעו דרכים ליישומם בתכנים השונים לאורך השנה. הנושאים שנבחרו לשנה הראשונה היו עקרונות בתוכניות הלימודים החדשות במתמטיקה ויישומם; מדיניות האגף לחינוך מיוחד בהוראת מתמטיקה בהתאמה לתפקוד קוגניטיבי של הלומד; אסטרטגיות של התאמה בדרכי למידה והיבחנות; שלבים בבניית יחידת הוראה; השלמת תכנים רלוונטיים חסרים בשעת תנועה; הערכה חלופית; חשיבות השימוש במגוון אמצעי המחשה; שימוש בטכנולוגיה; הדגמה להוראה משותפת של מורה מחינוך רגיל ומורה לחינוך מיוחד; תשעה עקרונות בהוראה משמעתית; יצירתיות אצל תלמידים עם צרכים מיוחדים; דיון וגביש עקרונות למתן עבודת קיץ לתלמידים מתקשים.

דוגמה לפירוט נושא גנרי אחד – דיון בגיבוש עקרונות למתן עבודת קיץ לתלמידים מתקשים: המנחים העלו את השאלה האם לתת לתלמידים מתקשים עבודת חזרה על הנלמד בכיתה ז'?" לאחר דיון סוער בנושא, ניתנה למשתתפים דוגמה לעבודת חזרה והם התבקשו להביע את דעתם עליה. בתום הדיון התקבלה החלטה על מתן עבודת חזרה והועלו הקווים הכלליים של מבנה העבודה הרצוי: אינה עמוסה בכמות הדפים ובכמות המטלות בכל דף, חזרה על תכנים רלוונטיים להמשך הלמידה המגוונת ברמות קושי למיניהן, אמצעי תמיכה ומשוב במהלך הביצוע, וכן הוצעו מגוון דרכים להערכתה. כל אלו נועדו כדי לחזק תחושת מסוגלות, הנעה ללמידה וחיזוק תחושת מחויבות.

6. בסוף כל מפגש השתלמות ובתחילתו נעשה "שיתוף": בסוף המפגש נשאלו המשתתפים מה הם הפיקו מהמפגש. בתחילת כל מפגש שיתפו המשתתפים בהשתלמות בהתנסויות שלהם בשטח בדברים שהפיקו מההשתלמות.

להלן תיאור חוויה של מורה שיישם פעילות שנלמדה בהשתלמות והעביר אותה בכיתתו:

אוקלוסיית יעד: כיתה ז' רמה ב' או מיצוי. נושא השיעור: מספרים מכוונים.

מספרים מכוונים הוא אחד הנושאים שאני הכי פחות אוהב ללמד. התלמידים מתבלבלים על ציר המספרים בין ערך המספר לבין השינוי במיקום לפי התקדמות. תמיד זה מרגיש כך וזה מייאש ללמד את הנושא. ההרגשה היא שתלמידים ברמות המתקשות פשוט לא מבינים.

בהשתלמות זו למדתי שיטה חדשה של לימוד מספרים מכוונים. הסתכלות מחדש על מספרים מכוונים כאל "פלוסים" ו"מינוסים" מוקפים במעגלים. כל מה שהתלמיד צריך לעשות הוא לצייר את מספר הפלוסים במעגלים קטנים לפי הערך של מספר חיובי וכנ"ל מספר המינוסים לפי המספר השלילי. כאשר מחברים מספרים מכוונים מעקשיו, התלמיד סופר את סך כל המעגלים של הפלוסים וסך כל המעגלים של המינוסים. לבסוף מעגל של פלוס ומעגל של מינוס מבטלים אחד את השני. התלמידים מוחקים פלוס ומינוס שוב ושוב עד שנותרים רק פלוסים או רק מינוסים. המעגלים הנותרים הם התשובה. התלמיד רשם את מספר המעגלים כמספר מכוון.

התלמידים אותם לימדתי את השיטה הזאת עברו כבר שיעור "רגיל" של מספרים מכוונים והעידו כי השיטה הזאת "הרבה יותר מובנת ולא סתם מסבכת" כלשונם.

את שאר הנושא לימדתי כרגיל והרגשתי שהיסודות להבנה של מספרים מכוונים נמצאים אצל התלמידים הרבה יותר מאשר בעבר, כאשר לימדתי ללא השיטה. בחיסור מספרים מכוונים נדרשו התלמידים לזכור הליכי פתרון שהביאו את התרגיל למצב המוכר של חיבור בלבד של מספרים מכוונים ומשם כבר ידעו התלמידים כיצד לפתור. השיטה חיזקה את תחושת המסוגלות של התלמידים והם ממש התפרצו לענות על שאלות.

כמורה נהייתי סוף סוף משיטה שעובדת עם תלמידים מתקשים לאחר הרבה שנים של התנסויות לא יעילות שתסכלו את התלמידים ואותי. כמובן שאמשיך ללמד מעתה את תחילת הנושא של חיבור ומספרים מכוונים לפי השיטה שלמדתי בהשתלמות.

ב. עקרונות הנוגעים לדרכי העברת השתלמות בידי המנחים

הבסיס המנחה לעקרונות הנוגעים לדרכי העברת ההשתלמות היה יצירת השתלמות בעלת משמעות ורלוונטיות למורה המשתלם וקישור מידי לתהליך ההוראה בכיתה.

1. הוראה שיתופית (Co-Teaching) היא שיתוף פעולה בין מורה המלמד בכיתה הרגילה למורה או תומך מקצועי אחר, החולקים את האחריות לתכנון, העברה והערכה של ההוראה עבור קבוצה מעורבת של תלמידים (Friend, Reising & Cook, 1993). טריי וגורגאנוס (Treahy & Gurganus, 2010) מציינים שיש כמה יתרונות ליישום הוראה שיתופית בתחום המתמטיקה: (א) בנושא מתמטי אחד מורים יכולים לתכנן את הוראת הנושא, בכל מיני רמות של יכולת; (ב) מאפשרת גמישות בבניית קבוצות למידה בתחילת השיעור או במהלכו. גמישות זו תתבטא גם בתכנים המתמטיים הנלמדים בכל קבוצה, וכן בתפקידים למיניהם של כל אחד משני מהשותפים, בהתאמה לצורך; (ג) יכולת מעקב תכופה יותר אחר התקדמותו של כל תלמיד בכיתה ותמיכה בתלמידים מתקשים כדי שישליחו לעמוד ברמת הכיתה; (ד) המגוון העצום של יישומים מתמטיים בכל נושא מספק למורים הזדמנות לחזור על מיומנויות או להרחיב מושגים על פי הצרכים האישיים של התלמידים; (ה) תרומה ייחודית של כל אחד משני השותפים בעלי מומחיות אחרת כדי לקדם את תלמידי הכיתה; (ו) שני המורים לומדים יותר על אודות אופי ההבנה המתמטית. ג'ימס (James, 2015) שבדק את השפעת למידה שיתופית בתחום המתמטיקה בקרב תלמידים רגילים בכיתה ז' מדווח כי למידה שיתופית יכולה להיות יעילה לתלמידים לקויי למידה ואינה פוגעת בתלמידים רגילים.

כחלק מיישום חוק השילוב (וורגן, 2007) יש בכל חטיבת ביניים מורת שילוב שמתפקידה לסייע לתלמידים מתקשים הזכאים לקבלת מענה מתוכנית השילוב. כפי שזכר לעיל, למורת השילוב ולמורה למתמטיקה יש תחומי חזק וחולשה בהיבט המקצועי בהוראת מתמטיקה. שיתוף פעולה בין שני סוגי המורים יכול לסייע לשני הצדדים בקידום תלמידים עם צרכים מיוחדים. לכן את ההשתלמות הזאת העבירו שני מרצים – האחד מתחום הדיסציפלינה והאחר מתחום החינוך המיוחד בעל ידע וניסיון בהוראת מתמטיקה – באמצעות הוראה שיתופית. דאיי (Day, 1999) טוען כי לשני מרצים משני תחומים אחרים יש פוטנציאל טוב לתרום להתפתחות המקצועית של המורים. בתוכנית זו שני המרצים תכננו ביחד את מפגשי ההתערבות, הם

קבעו את התכנים שיועברו ומה כל אחד מכין ומוביל בהעברה. הכנת החומרים לעיתים הייתה משותפת ולעיתים כל אחד מהמנחים קיבל נושא אחד או חלק מהנושא, והם עיבדו והעבירו למשתתפים מתוך דיאלוג ביניהם. ההכנה הדיאלוגית המשותפת תרמה למנחים תרומה אישית, ושידרגה את עולם המושגים והידע שהובא והועבר למשתתפים ולהנחיה. השיתוף בהעברת התכנים היה דינמי: כשהאחד העביר לעיתים המנחה השני שאל שאלות לצורך הבהרה, הדגיש, הדגים או התאים את התכנים למגוון אוכלוסיות. לדוגמה: במפגש מנחה אחד פתח בנושא שעל הפרק, דיבר על רצף תוכני הנושא בין בית הספר היסודי לחטיבת הביניים, יצר בהירות ביעדים, והועלו קשיים בהוראת הנושא. המנחה השני דיבר על דרכי הוראה-למידה של יעדי הנושא. בהמשך התנהל שיח על ניצול יעיל של הזמן המוקצה להוראת יעדי הנושא. שני המנחים היו שותפים בדיון עם המשתתפים, מתוך מיקוד בתלמידים עם צרכים מיוחדים.

יש לציין שהיה חשוב למנחים להעביר למשתתפים את המסר שההנחיה השיתופית נעשתה במודע ובמכוון ואת היתרונות המתקבלים מסינרגיה של שני התחומים למען הקידום המקצועי של המורים וקידום התלמידים בפרט. למעשה, ההנחיה המשותפת במהלך המפגשים המגוונים שימשה דוגמה מוחשית למסר זה.

2. שיתוף המשתלמים בתהליך הלמידה התבצע באמצעות רפלקציה שיתופית. רפלקציה שיתופית (collaborative reflection) היא רפלקציה המסתייעת בקבוצת עמיתים תומכת ומעצימה, הנפגשת פגישות סדירות (מאי, ריינגולד, גריסרו ולוי, 2011). הרפלקציה יושמה באמצעות מודל מדר"ש (מנחה, דיסציפלינה, רפלקציה שיתופית) של פרלשטיין (Perlshtein, 2017) הכולל תיאור אירוע, מיקוד והגדרת הקושי, הצעות לדרכי התמודדות ובחירת דרך התמודדות כמפורט להלן:

- **תיאור אירוע** המדגים את הקושי של המורים או מנחי ההשתלמות בהוראת יעד או נושא מתמטי. האירוע גם יכול להיות תוכן מתמטי שרוצים ללמד.

- **מיקוד והגדרת הקושי**: שאלות ששואלים המורים או מנחי ההשתלמות, לצורך בחינת הקושי או מיקודו, כדי להביא לידי המשגה בהירה ומדויקת של הקושי. לעיתים המיקוד הוא במאפייניו של תוכן או יעד מתמטי שרוצים ללמד ולא דווקא בקושי.

- **הצעות לדרכי התמודדות**: יצירת סיעור מוחין להעלאת מגוון רעיונות לפתרון הקושי או הצעות להקניית תוכן מתמטי. המורים או מנחי ההשתלמות יכולים להציע את הרעיונות. לעיתים הציעו המנחים דרכי התמודדות גנריות כדי להרחיב את רפרטואר הכלים של המורה וכמניעה מלהגיע לקושי ולא כמענה לקושי (לדוגמה, מעבר מהקונקרטי אל המופשט בשלבים מסוימים של המחשה).

- **בחירת דרך התמודדות ויישומה**: לעיתים בסוף מפגש ההשתלמות נשאלו המורים מה הם הפיקו מהמפגש. בתחילתו של כל מפגש נשאלה השאלה למי יש לשאת בהתנסויות שהתנסו בכיתה מתוך יישום של תכנים מההשתלמות.

מסגרת זו מאפשרת לדון דיון רפלקטיבי על אודות הפעולה בשדה בהיבט הפרקטי והתאורטי. דיון מעין זה מקטין חרדות מפני היחשפות, מגביר תחושת ביטחון ומסוגלות, מאפשר פתיחות מחשבתית, כבוד הדדי וקבלת שונות (מאי ואחרים, 2011; Hatton & Smith, 1995).

3. ליווי המורה בתהליך ההוראה: ליווי המורה לאורך כל השנה כדי ליצור רלוונטיות בין מה שמועבר בהשתלמות ובין הנלמד בכיתה, כך שמורה יגיע מוכן יותר להוראת הנושא בכיתה.

הדבר נעשה באמצעות העקרונות האלה:

- עיסוק בתכנים שהמורה אמור ללמד בסבב הקרוב.

- התאמת מבנה ההשתלמות לשלושת סבבי הלמידה של תוכנית הלימודים. לצורך כך בהשתלמות היו מפגשים מעטים אך ארוכים, כאשר כל מפגש היה סמוך לתחילת הוראת תכני הסבב בכיתה; מפגש אחרון קצר שהוקדש לאסטרטגיות התאמה בדרכי היבחנות לקראת מבחן סוף השנה, בהיערכות לעבודת קיץ במתמטיקה ובסיכום ההשתלמות.

- בניית אתר מלווה קורס שרוכז בו חומרי הלמידה שניתנו למשתלמים בכל סבב.

הערכת ההשתלמות

כדי לקבל משוב מהמשתלמים, הועבר בתום ההשתלמות שאלון שחיבר עורך המחקר. בשאלון מופיעים הנושאים האלה: מאפיינים אישיים, הערכת עקרונות ההשתלמות ומידת הרלוונטיות והתועלת של ההשתלמות לקידום מומחיותם במתן מענה לתלמידים מתקשים במתמטיקה.

המשיבים התבקשו לסמן את מידת הסכמתם להיגדים בסולם ליקרט של 6 דרגות. כמו כן שולבו כמה שאלות פתוחות, כגון תפיסת התרומה של ההשתלמות, יתרונות בהנחיה המשותפת והצעות לשינוי בהשתלמות ובהנחיה המשותפת. בדיקת תקיפות התוכן של המבחן נעשתה באמצעות פנייה לשני מורים העוסקים בחינוך מתמטי בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד ובהערכת תוכניות חינוכיות. המורים נתבקשו לציין עבור כל היגד אם הוא מתאים להערכת הנושא. נמצא שרוב השאלות הוערכו מתאימות לנושא המוערך. הורדו כמה היגדים שחזרו על עצמם ואוחדו היגדים אחרים. לאחר גיבוש גרסה סופית של השאלון הוא נמסר לשלושה מורים מההשתלמות (שלא

ההשתלמות.

לוח 1: שביעות רצון המשתלמים: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

השאלה	N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
1. באיזו מידה אתה שבע רצון מההשתלמות	36		27.8	72.2	5.08	1.05
2. באיזו מידה תמליץ לחברך להשתתף בהשתלמות כזו?	35		22.2	75.0	5.20	99.
3. ההשתלמות עסקה בתכנים המתמטיים של כיתה ז'	36		8.4	91.6	5.72	70.
4. ההשתלמות עסקה בהנגשת התכנים של תוכנית הלימודים לתלמידים (הגשה ברורה יותר של התכנים לתלמיד)	35		1.1	86.1	5.46	78.
5. הוצגו דרכים להנגשת משימות מאתגרות לתלמידים מתקשים	36	8.4	38.9	52.8	4.58	1.42
6. הכלים שהוצגו להנגשת תכנים היו מגוונים: תקשוב, הערכה חלופית, דפי עזר, אמצעי המחשה	36	5.6	22.2	72.2	4.75	1.27

מהלוח עולה כי שביעות הרצון הכללית של רוב המשתלמים היא גבוהה עד גבוהה מאוד (ממוצעים מעל 5). הרוב הגדול של המשתלמים הביעו שביעות רצון גבוהה מאוד מהרלוונטיות של התכנים ושביעות רצון גבוהה מיצירת בהירות בתוכני התוכנית (ממוצעים מעל 5). שביעות רצון ברמה בינונית-גבוהה (ממוצעים 4.5-4.8) התקבלה בעניין הצגת דרכים להנגשת משימות מאתגרות לתלמידים מתקשים ומהצגת מגוון כלים להנגשת התכנים.

ב. תרומת ההשתלמות לשיפור המקצועיות של המשתלמים

בלוח 2 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור הערכת תרומת ההשתלמות לשיפור המקצועיות של המשתלמים.

השתתפו בהערכה הסופית) לצורך מילוי כדי שיעריכו את הבהירות והרלוונטיות של השאלות. על פי הערותיהם שונה ניסוחם של כמה היגדים. תחילה נציג את מאפייני המשתתפים ולאחר מכן נציג את תוצאות ההערכה.

מאפייני המשתתפים

מתוך 39 משתתפים בהשתלמות, 36 משתתפים מילאו את השאלון, מורות (75%) ומורים (25%) בני 27-64 (ממוצע: 39, סטיית תקן: 8.79), 47% מהם בעלי תואר שני. כל המורים מלמדים מתמטיקה כאשר תחומי התמחותם הם מתמטיקה (69%), חינוך מיוחד (17%), התמחות כפולה במתמטיקה ובחינוך מיוחד (11%) והתמחויות אחרות (3%). מרביתם (89%) עובדים בבתי ספר שש שנתיים, כמו בתי ספר רגילים (63%), כפרי נוער (17%) או בתי ספר לחינוך מיוחד (17%). הם מלמדים בכיתות רגילות (50%), בכיתות חינוך מיוחד (22%) או גם וגם (25%). ממוצע שנות הוותק שלהם בהוראה הוא 12 שנים (סטיית תקן: 8.10, טווח: 39-2) מתוכן ממוצע של 10 שנים בהוראת מתמטיקה (סטיית תקן: 6.85, טווח: 2-29). 75% מהמשתלמים מגישים לבגרות. ההשתלמות הייתה וולונטרית לצורך קבלת גמול ונעשתה בשני מוקדים – דרומי (67%) וצפוני (33%) שבשניהם הועברו תכנים זהים.

בלוחות האלה תוצג הערכת המשתתפים על פי נושאים מגוונים הקשורים להשתלמות:

א. הערכת שביעות רצון מההשתלמות

בלוח 1 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור הערכת שביעות רצון כללית של המשתלמים מההשתלמות וכן מהיבטים למיניהם של

לוח 2: תרומת ההשתלמות לשיפור המקצועיות של המשתלמים: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

השאלה	N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
1. ההשתלמות קידמה את מומחיותך בהנגשת התכנים של כיתה ז' לתלמידים	36		16.6	75.0	4.94	1.29
2. ההשתלמות תרמה ליכולתך לתת מענה מקצועי יותר לתלמיד כיתה ז' המתקשה במתמטיקה	36	8.3	19.4	72.2	4.89	1.33
3. קיבלת כלים להנגשה מיטבית של התכנים לתלמיד המתקשה	36	11.2	30.5	58.3	4.56	1.46
4. דיון ביעדים ובדרכי ההוראה-למידה שלהם, פתח לפניך אפשרות ללמד את התלמיד המתקשה יותר נושאים	36	8.3	33.4	58.4	4.78	1.29
5. דיון בתכנון הזמן להוראת היעדים השונים פתח לפניך אפשרויות לניצול יעיל יותר של הזמן להוראת הנושא	35		13.9	83.3	5.31	.87
6. הכלים שהוצגו להנגשת תכנים היו מעשיים וזמינים / אפשריים לשימושך בכיתה?	36		22.2	77.7	5.14	.96
7. השתמשתי בחומרים שבאתר מלווה הקורס שבו היו כל חומרי ההשתלמות	36	5.6	27.8	66.7	4.86	1.25

מהלוח עולה כי יש הסכמה אצל מרבית המשתתפים שההשתלמות תרמה במידה בינונית-גבוהה עד גבוהה לשיפור מקצועיותם של המשתלמים. אלה התחומים שבהם ההשתלמות נתפסת אצל הרוב הגדול של המשתלמים כתורמת ביותר לקידום מקצועיותם ומומחיותם (ממוצעים בטווח של 4.75-5.46): הנגשת תכנים, יכולתם לתת מענה מקצועי יותר לתלמיד מתקשה בכיתה ז', לתכנן ולנצל ביעילות את זמן ההוראה-למידה, מתוך שימוש בכלים מעשיים וזמינים.

אלה התחומים שבהם ההשתלמות נתפסת אצל רוב המשתלמים כתורמת במידה בינונית-גבוהה (ממוצעים בטווח של 4.56-4.78) לקידום מקצועיותם ומומחיותם: קבלת כלים להנגשה מיטבית של תכנים לתלמיד המתקשה, היכולת ללמד את התלמיד המתקשה יותר נושאים ולהנגיש לו משימות מאתגרות.

ג. הערכת היבטים בתכנון ההשתלמות

בלוח 3 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור הערכת היבטים בתכנון ההשתלמות.

לוח 3: הערכת היבטים בתכנון ההשתלמות: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

השאלה	N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
1. היחס בין תחום התוכן המתמטי לדרכי הוראה כפי שניתן בהשתלמות היה יעיל	36	2.8	16.7	80.6	5.14	96.
2. היה צריך להעמיק ולהעשיר יותר את תחום הידע המתמטי	36	8.4	16.7	75.0	4.86	1.33
3. ארגון ההשתלמות למפגשים ארוכים סמוך לתחילת הוראת תכנים של כל סבב בתוכנית היה יעיל	36	2.8	25	72.2	4.89	1.14

מהלוח עולה כי רוב גדול של המשתלמים מביעים שביעות רצון גבוהה מהיחס בין תחום התוכן המתמטי לדרכי ההוראה ומארגון ההשתלמות למפגשים ארוכים כהכנה לקראת סבב הלמידה הבא (ממוצעים בטווח של 4.86-5.14). כמו כן, סברו המשתלמים שהיה צורך להעמיק בתחום הידע המתמטי ולהעשיר אותו יותר (ממוצע 4.86).

ד. תפיסת המשתלמים את יכולתם ליישם את הידע הגנרי שקיבלו גם בתכנים של כיתות אחרות

בלוח 4 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור תפיסת המשתלמים את יכולתם ליישם את הידע הגנרי שקיבלו בהשתלמות גם בתכנים של כיתות אחרות.

לוח 4: תפיסת המשתלמים את יכולתם ליישם את התכנים הגנריים שקיבלו גם בתכנים של כיתות אחרות: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

אוכל ליישם את הידע הגנרי שקיבלתי בנושאים המובאים מטה גם בכיתות אחרות	N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
1. עקרונות של תוכניות הלימודים החדשות במתמטיקה	34	2.8	36.1	55.5	4.74	1.19
2. אסטרטגיות של התאמה בדרכי למידה והיבחנות	33	5.6	16.6	69.5	4.97	1.21
3. שלבים בבניית תוכנית הוראה	34	5.6	33.3	55.6	4.77	1.28
4. השלמת פערים	34	5.6	27.8	61.1	4.77	1.28
5. שימוש באמצעי המחשה	34		27.7	66.7	5.06	1.01
6. שימוש בטכנולוגיה (מצגות, גיאוגרפה)	34	13.9	19.4	61.1	4.68	1.55
7. דוגמה להערכה חלופית	34	11.1	27.7	55.5	4.59	1.44

מהלוח עולה כי רוב המשתלמים סבורים שיש ביכולתם ליישם במידה רבה את הידע הגנרי שקיבלו בהשתלמות, גם בתכנים של כיתות אחרות, כגון כיתות ח' וט' (ממוצעים בטווח של 4.59-5.06)

בלוח 5 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור הערכת תפיסת המשתלמים את תרומת ההוראה המשותפת להשתלמות ולמשתלמים.

לוח 5: תפיסת המשתלמים את תרומת ההוראה המשותפת להשתלמות ולמשתלמים: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
36	5.6	16.6	77.8	5.06	1.19
36	8.4	16.7	75.0	4.94	1.41

מהלוח עולה כי רוב המשתלמים סבורים שהם נתנו במידה רבה מההוראה המשותפת של מרצה מתחום המתמטיקה ומרצה מתחום החינוך המיוחד תרומה להשתלמות.

ו. תפיסת המשתלמים את תרומת הרפלקציה השיתופית

בלוח 6 מוצגות התוצאות שהתקבלו עבור תפיסת המשתלמים את תרומת הרפלקציה השיתופית בהשתלמות.

לוח 6: תפיסת המשתלמים את תרומת הרפלקציה השיתופית: שכיחות באחוזים, ממוצעים וסטיות תקן

השאלה	N	אחוז דירוג 1+2	אחוז דירוג 3+4	אחוז דירוג 5+6	ממוצע	ס.ת.
1. העלאת קשים בהוראת הנושאים למיניהם בידי המשתלמים והמרצים תרמה לי	36	8.3	22.3	69.4	4.83	1.23
2. ההצעות לפתרון שהועלו היו יעילות גם לך	36	5.6	25	69.4	4.75	1.34
3. הקשיים שהועלו היו ברורים או הובהרו במידה מספקת	36	2.8	25	72.3	5.03	1.06
4. המשתלמים ו/או המרצים הציעו מגוון של רעיונות כפתרון לקשיים שהועלו בהוראת נושא	36		27.8	72.2	5.06	1.04
5. נעשה שיתוף ו/או משותף במליאה על התנסות בכיתה ברעיונות וחומרים שניתנו בהשתלמות	35	5.6	30.5	61.1	4.74	1.22

מהלוח עולה כי רוב המשתלמים סבורים שהם נתנו במידה רבה מהשימוש בתהליך של רפלקציה שיתופית במהלך ההשתלמות (ממוצעים בטווח של 4.74-5.06).

כדי לבחון האם תפיסת תרומת ההשתלמות שונה בקרב מורים למתמטיקה שאין להם התמחות בחינוך מיוחד שיש להם זיקה בהכשרתם לעבודה עם תלמידים עם צרכים מיוחדים (מורים לחינוך מיוחד עם התמחות במתמטיקה) נעשתה השוואה בין שתי הקבוצות באמצעות מבחן t על כל אחת מהשאלות הסגורות. לא נמצאו הבדלים מובהקים בין שתי הקבוצות למעט שתי שאלות: (א) מורים למתמטיקה סבורים שההשתלמות עסקה בתכנים של כיתה ז' (ממוצע: 5.88, ס.ת.: 0.44) יותר ממורים עם זיקה לחינוך המיוחד (ממוצע: 5.36, ס.ת.: 1.02) ($t(34)=2.13$; $p<0.04$); (ב) מורים למתמטיקה השתמשו בחומרי ההשתלמות שהיו באתר מלווה קורס (ממוצע: 5.16, ס.ת.: 1.07) יותר ממורים בעלי זיקה לחינוך מיוחד (ממוצע: 4.18, ס.ת.: 1.40) ($t(34)=2.30$, $p<0.03$). כיוון שכך יש לומר שההשתלמות הצליחה לענות על הצרכים של שתי האוכלוסיות במידה דומה.

ניתוח תשובות לשאלות הפתוחות

כדי לעמוד על מוקדי חוזק ונקודות לחיזוק בהשתלמות, ניתנו שאלות פתוחות שנגנו להשתלמות ולהוראה המשותפת. ניתוח התשובות העלה שלושה נושאים. עיון מפורט בתשובות הראה כי נושאים אלו באו לידי ביטוי בקרב מורים למתמטיקה ומורים בעלי זיקה לחינוך מיוחד במידה דומה.

א. תרומת ההשתלמות למשתלמים

מתשובות המשתלמים עולות התמות האלה באשר לתרומת ההשתלמות עבורם כמורים:

1. **חשיבות השיתוף בקשיים ובדרכי התערבות:** התמה השכיחה ביותר שעלתה כמענה לשאלה שנשאלה נגעה לחשיבות השיתוף. דבר זה התבטא בשיתוף בקשיים, במגוון דרכי התערבות והתמודדות, בכלים ורעיונות להוראה-למידה והערכה. לדוגמה: "הצפת הקשיים הקיימים ומתן כלים להתמודדות מראש", "דרכים להנגשת משימות", "הרעיונות השונים שהועלו לכל נושא", "קשיים צפויים בהוראה וכלים

להעברת תכנים או נושאים קשים".

2. **הרחבת אופקים:** ההשתלמות הרחיבה את האופקים בכמה דרכים ובהן פתיחות וגמישות המניעים ליצירתיות אצל המורה לשימוש במגוון דרכי פתרון וכן אפשרות לקבל מהתלמיד פתרונות או תוצרים למיניהם. לדוגמה: "להיות פתוח לדרכים וליצירתיות של התלמידים ולא להיות מקובע בדרכך", "יצירתיות בהעברת תכנים מתמטיים...", "התבוננות נוספת במבחני מיצ"ב / מפמ"ר. חשיבה על דרך נוספת לפתרון שאלה מורכבת". הרחבת האופקים התבטאה גם בהיחשפות לאמצעי הוראה-למידה דיגיטליים שיכולים להתאים לאוכלוסייה. לדוגמה: "הכרת אתרים המתאימים לנו", "אתרים מיוחדים של משחקים והבנת המתמטיקה בצורה אחרת".

3. **תובנות בתכנון תהליך ההוראה-למידה:** ההשתלמות העלתה את המודעות לחשיבות תכנון לוח זמנים בתהליך ההוראה מתוך הבהרת המטרות והיעדים. לדוגמה: "הגעתי להשתלמות וגיליתי ששיעור באמת לא חייב להתנהל כמו מערך שיעור שלמדתי לכתוב במכללה. אני חייבת להגיד שעבדתי הרבה יותר קשה, אבל השיעורים עברו בכיף!!", "מיקוד בנושאים החשובים יותר לעומת נושאים שפחות קריטיים", "תכנון ועמידה בלוח זמנים ויעדים בהתאם לצורכי התלמיד ובהדרגה תוך פיתוח תחושת מסוגלות".

4. **תובנות על למידה אצל תלמידים מתקשים:** ההשתלמות קידמה את הבנתו של המורה, שגם אצל תלמיד מתקשה צריכה להתבצע למידה, שיש לאתגר ולמשוך אותו כלפי מעלה. לדוגמה: "חיוזוק העובדה שהתלמיד חייב ללמוד בכל מצב", "אפשרות לאתגר תלמידים מתקשים בחומר 'קשה' על ידי פישוט החומר", "...ולנסות למשוך את החבר'ה שלנו למעלה", "לא לוותר בקלות על נושאי לימוד מסוימים".

5. **חיוזוק תחושת מסוגלותו של המורה:** ההשתלמות חיזקה את תחושת המסוגלות של המורה במילוי תפקידו בהוראת תלמידים מתקשים. לדוגמה: "קילפתם ממני קליפה אחרי קליפה, אני יודעת טוב יותר איך להתמודד עם תלמידים גם בכיתות הרגילות שאני מלמדת", "אני מרגישה שינוי בי, בתפיסה שלי. אני מגיעה ממקום אחר ללמד. אני רואה את התלמידים ואת התוכן הלימודי ממקום הרבה יותר מכיל ונכון", "כיום אני לא חוששת לבחור מגוון חומרים ולהנגישם לרמתם של תלמידיי".

6. **חשיפה לכלים גנריים:** בהשתלמות נחשפו המשתלמים לכלים גנריים המשמשים אותם בתהליך ההוראה-למידה בכיתה, כגון "תכנון וניהול זמן", "שילובים בבניית תוכנית הוראה", "מושג הנגשה של חומרים לתלמידים מתקשים", "אסטרטגיות להתאמת מבחנים למתקשים", "אסטרטגיות למידה", "כלים יצירתיים לעבודה עם תלמידים", "גיוון בדרכי ההוראה".

7. **חשיבות סנכרון בין מועדי ההשתלמות והתכנים שהועברו בהם למועד הוראת הנושאים בכיתה:** לדוגמה: "ההקבלה בין החומרים שנלמדו בהשתלמות מול העבודה המעשית, לעיתים אף ברמה של אחד לאחד", "... זה ממש תרם שחילקנו את השעות בצורה ישימה, ודנו מה המטרות מה חשוב יותר ומה חשוב פחות".

ב. יתרונות להנחיה המשותפת של איש מתמטיקה ואיש חינוך מיוחד

מתשובות המשתלמים עולות התמות האלה באשר ליתרונות ההנחיה המשותפת:

1. **שילוב בין זוויות ראייה:** זוויות ראייה אחרות המעשירות ומשלימות את ההסתכלות על הנושאים המתמטיים לסוגיהם ויוצרות עניין. לדוגמה: "ראיה רחבה יותר של הנושא...", "גיוון, זוויות ראייה שונות", "כל אחד מהמרצים האיר זווית אחרת בחומר הלימוד", "גיוון והשלמה", "ברור מאליו, כי מבט של שני מרצים ממקומות שונים, עושה את ההשתלמות מעניינית יותר", "כל אחד תורם מאישיותו ודרכו המיוחדת וכל משתלם לוקח את הדברים המתאימים לו".

2. **מתן מענה למגוון לומדים על פני הרצף חינוך רגיל – חינוך מיוחד:** שילוב של שני מנחים משתי דיסציפלינות מאפשר לתת מענה טוב יותר לצרכים הלימודיים של כיתה הטרוגנית, כולל הנגשת משימות מאתגרות למתקשים. לדוגמה: "השיתוף של מרצה מהחינוך מיוחד מאוד מאוד חשוב כיוון שגם בחינוך הרגיל לצערנו אנו מתמודדים עם

קשיים, שכלים מהחינוך מיוחד מאוד תורמים", "מאפשרת הלימה בין תוכנית הלימודים להוראתה לתלמידים מתקשים", "איוון בין תוכן מתמטי לבין דרכי ההוראה לחינוך המיוחד תרם רבות".

3. **מתן מגוון רעיונות הוראה ופתרונות לקשיים מתוך ההתנסות בשטח:** לדוגמה: "שיתוף המשתלמים בפתרון בעיות מתוך ניסיון בשטח", "המרצים הציעו מגוון של רעיונות כפתרון לקשיים שהועלו בהוראת נושא בכיתה", "שומעים את המורה בשטח גם בחינוך הרגיל וגם במיוחד".

ג. הצעות המשתלמים לשיפור ההשתלמות

מתשובות המשתלמים עולות התמות האלה באשר להצעות לשיפור ההשתלמות:

1. **עיסוק והתנסות בכלים יישומיים להוראה-למידה הן במפגשי השתלמות והן בעבודת סיכום ההשתלמות:** לדוגמה: "מתן כלים יותר יישומיים ומוחשיים בהוראת הנושאים לתלמידים מתקשים", "יותר התנסות מעשית בחומרי הלימוד", "להתעסק באסטרטגיות למידה", "בניית תוכנית עבודה מסודרת על פי ספר הלימוד של ביה"ס + בניית מאגר דפי עבודה ודפי הערכה מותאמים לתלמידים מתקשים".

2. **שיתוף וסנכרון בין הנושאים במפגשי ההשתלמות לתהליך ההוראה בשטח:** לדוגמה: לתת "יותר דוגמאות של מורים מתוך ההשתלמות (מהשטח)", "יותר מעגלי שיח", "לתת מקום גם לשאלות המציפות ולנסות לראות כיצד מתמודדים", "תזמון ההשתלמות לקראת כל סבב", "התזמון... כמעט כל נושא הוצג מעט אחרי שכבר נלמד בכיתות ועל כן היה כבר קשה ליישם בכיתה".

3. **הרחבת העיסוק בתכנים גם לאוכלוסיות חלשות יותר:** לדוגמה: "הרחבת תחומי הלימוד לאוכלוסייה מתקשה יותר", "יותר התייחסות לחבר'ה הנמוכים".

דיון

לנוכח הקושי של מורים לתת מענה לתלמידים עם צרכים מיוחדים במתמטיקה בחטיבת ביניים ובשל חשיבות תחום הדעת נבנתה תוכנית התערבות לקידום מומחיותם של מורים למתמטיקה ומורים לחינוך מיוחד המלמדים מתמטיקה. ההתערבות מושתתת על חמישה עקרונות. שני עקרונות נוגעים להרחבת מומחיות המורה בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים ושלושה עקרונות אחרים נוגעים לדרכי העברת ההשתלמות בידי המנחים. כדי לבחון את הערך הסגולי של תוכנית ההתערבות, היא הוערכה בקרב 36 מורים שהשתתפו בה. בדיון שלהלן נבחן באיזו מידה אכן הושגו שני היסודות העיקריים של תוכנית ההתערבות: כלומר, באיזו מידה המודל שעל פיו נבנתה תוכנית ההתערבות, תורם לקידום מומחיותם של המורים במתן מענה לתלמידים עם צרכים מיוחדים בהוראת המתמטיקה.

א. עקרונות הנוגעים להרחבת מומחיות המורה בתחום הדעת ובדרכי הוראתו לתלמידים עם צרכים מיוחדים

הרחבת מומחיותם של המורים בתחום הדעת ניכרת בתוכנית ההתערבות בהעמקת ההיכרות עם תוכנית הלימודים, ביצירת בהירות במטרות וביעדים של תוכנית הלימודים, עמידה על קשיים אופייניים הנובעים ממאפייני התוכן המתמטי או ממאפייני התלמיד. העמקה זו מאפשרת למורה לתכנן ולנהל מתוך מחשבה את תהליך ההוראה-למידה בהיבטים של בחירת היעדים להוראה, רצף ההוראה, לוח זמנים, מידת העמקה ועוד. היבט אחר בהרחבת המומחיות הוא הקניית כלים ודרכי הוראה לנושאים ספציפיים וכלים גנריים שאפשר להשתמש בהם גם

המודל המוצע בתוכנית ההתערבות, כחוויה של למידה בעלת משמעות

בשנים האחרונות עלתה הלמידה המשמעותית לקדמת הבמה של השיח החינוכי ומשאבים רבים מושקעים כדי ליישמה בשדה החינוך בתחומי הדעת למיניהם. ניתוח המודל שהתבססה עליו תוכנית ההתערבות שתוארה במאמר זה וכן תגובות המשתתפים בתוכנית מראים כי עקרונות הלמידה המשמעותית ניכרו בתוכנית. מסמך אבני דרך ללמידה משמעותית שפרסם משרד החינוך מגדיר אותה "תהליך אישי של הבניית ידע שבמהלכו הלומד מעורר שאלות, מאתר מקורות מידע, מעבד מידע ויוצר ידע חדש הרלוונטי לו בהקשר של יחסי גומלין". למידה זו מושתתת על שלושה רכיבים עיקריים המתקיימים בו בזמן: "נתפסת כבעלת ערך והיא חיונית לאדם ולחברה"; "מערבת את הלומדים בתהליך הלמידה"; ורלוונטית ללומד" (משרד החינוך, 2014, פרק 2 סעיף ג).

להלן יוסבר כיצד יישמו רכיבים אלו בתוכנית ההתערבות:

א. ערך ללומד ולחברה

למידה משמעותית נתפסת כבעלת ערך והיא חיונית לאדם ולחברה כאשר: תהליכי הלמידה והתכנים מספקים חוויה חיובית, נותנים מענים לצרכים הקוגניטיביים, הרגשיים והחברתיים, נותנים ביטוי לסגנונות למידה מגוונים, מזמנים חיזוק והזדהות, מאפשרים בירור תפיסות ביחס לגורמים מקדמים או מעכבים בתהליך הלמידה, מפתחים הבנה, העמקה ויישום של הנלמד תוך שליטה במיומנויות ומניבים תוצאות חיוביות והישגים גבוהים לפרט ולחברה [הדגשות שלי] (משרד החינוך, 2014, שם).

עיקרון זה מתבטא בדרכים אלה:

1. בירור והבהרת משמעות מטרות הנושא במתמטיקה והיעדים המתמטיים הנגזרים מהנושא, כפי שנגזרו מתוכנית הלימודים. שלב זה מהותי לצורך פיתוח הבנה עמוקה יותר של תוכנית הלימודים, מאחר שהרבה פעמים מורה מקבל את הידע שלו על תוכנית הלימודים מספר הלימוד שהוא משתמש בו בכיתתו ופחות מתוך התעסקות עם מסמך תוכנית הלימודים. כמו כן מסמך תוכנית הלימודים מפרט את הנושאים ונותן בהם דגשים ומפרט פירוט חלקי את יעדי הלמידה הספציפיים.
 2. בירור גורמים מקדמים או מעכבים בהקניית יעדי הנושא כפי שהמורים חווים אותם. גורמים אלו יכולים לבוא לידי ביטוי אצל התלמיד, המורה או בחומר הלימוד.
 3. הצעת דרכי התערבות בתהליך הקניית תכנים בידי המורים עצמם או מנחי ההשתלמות. מגוון הדרכים שהוצעו יכול לתת מענה לסגנונות מגוונים של מורים ותלמידים כאחד ולתת בידי המורה כמה דרכים שמהן יוכל לבחור את הדרך, שלדעתו מתאימה להקניית הנושא ברמת הכיתה או בשעות הפרטניות.
- דרכים אלה מעלות את ערך הלמידה בכך שהן מפתחות אצל המורה הבנה והעמקה בתוכנית הלימודים ובהבנת צורכי התלמיד בקשר לתכנים. הבנה זו וקבלת כלים מתאימים מאפשרים לו ליישם את הדברים בכיתתו, לצמצם את השונות בידע המקנה והם יכולים להניב תוצאות חיוביות והישגים גבוהים אצל תלמידיו.

ג. מעורבות הלומד

למידה משמעותית מערבת את הלומדים בתהליך הלמידה הקוגניטיבי, הרגשי והחברתי ומזמנת להם התנסות פעילה במעגלים שונים תוך חיזוק תחושת המסוגלות. המעורבות באה לידי ביטוי בכך שניתנת ללומדים הזדמנות להיות שותפים פעילים בתהליך הלמידה, בהעלאת יוזמות ובביצוע תהליכי למידה, בבחירת דרכי הלמידה, בעבודה בצוות, בהצגת תוצרים, במתן משוב ובקבלתו

בתכנים אחרים. כלים אלו יש בהם כדי לסייע בהוראה-למידה מיטבית של תכנים.

מתגובות המשתלמים עולה כי יש הסכמה אצל מרבית המשתתפים שתוכנית ההתערבות תרמה במידה רבה לשיפור מומחיותם בשני ההיבטים כאחד. היא תרמה להם במידה רבה מאוד לשיפור מומחיותם בתכנון יעיל יותר של ההוראה-למידה וניצול מיטבי של הזמן, בהנגשת תכנים, בשימוש בכלים מגוונים ושיפורה מאוד את תחושת מסוגלותם לתת מענה מקצועי יותר לתלמיד מתקשה בכיתה זו. היא הרחיבה במידה ניכרת את יכולתו של המורה ללמד את המתקשה יותר נושאים מתוכנית הלימודים, מתוך שימוש במגוון כלים להנגשה מיטבית של תכנים, לרבות משימות מאתגרות. עוד תרומה שדיווחו עליה רוב המשתתפים מתבטאת בכך שהם יכולים ליישם את הידע הגנרי שקיבלו, מעבר לתכנים של כיתה זו. ביטוי מובהק לממצאים אלו נמצא בדבריה של אחת המשתתפות שכתבה כי **"קילפתם ממני קליפה אחרי קליפה, אני יודעת טוב יותר איך להתמודד עם תלמידים גם בכיתות הרגילות שאני מלמדת"**.

רוב המשתלמים הביעו שביעות רצון גבוהה מהיחס שבין תחום התוכן המתמטי לדרכי ההוראה, אולם לצד זה, המשתלמים סברו שהיה צורך להעמיק ולהעשיר יותר את תחום הידע המתמטי. ייתכן שדווקא העמקת הידע בתחום הדעת העלתה את הסקרנות ואת מודעות הצורך להעמקה נוספת, בבחינת "אני יודע שאינני יודע".

הערך המוסף של ההתערבות מתבטא בכך שהיא נותנת למורים כיוונים מדויקים ומובנים יותר למיקוד תהליך ההוראה-למידה-הערכה של המורה. הרחבת מומחיותם של המורים בשני עקרונות אלו יכולה להביא לצמצום השונות בידע בקרב התלמידים בכלל ועם צרכים מיוחדים בפרט, לחזק את תחושת מסוגלותם ולהניב הישגים גבוהים יותר. יהיה מעניין לבדוק זאת במחקר המשך.

ב. עקרונות הנוגעים לדרכי העברת השתלמות בידי המנחים

הבסיס המנחה לעקרונות הנוגעים לדרכי העברת ההשתלמות היה יצירת השתלמות בעלת משמעות ורלוונטיות למורה המשתתף וקישור מיידי לתהליך ההוראה בכיתה. העברת ההשתלמות התבססה על שלושה עקרונות: **האחד** – ליווי המורה בתהליך ההוראה שלו בכיתה זו, בהתאמה לסבבי ההוראה על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה של חטיבת הביניים. לפני כל סבב נעשה מפגש הכנה שעסק בתכנים שהמורה אמור ללמד בסבב הלימודים הבא. כמו כן המפגש התקיים ביום חופש כך שהיה אפשר להעביר בו מפגש ארוך של למידה; **השני** – שיתוף המשתלמים בתהליך הלמידה באמצעות רפלקציה שיתופית; **השלישי** – הוראה שיתופית של שני מנחים, האחד מתחום הדיסציפלינה והשני מתחום החינוך המיוחד ובעל ניסיון בהוראת מתמטיקה לשכבות גיל אלו. מבנה זה של ההשתלמות יצר רלוונטיות בין מה שהועבר בהשתלמות ובין מה שהמורה אמור להעביר בכיתתו, כך שהוא יגיע מוכן יותר להוראת הנושא.

רוב משתתפי ההשתלמות הביעו שביעות רצון גבוהה מכך שההשתלמות נערכה במתכונת של מפגשים ארוכים, סמוך לתחילת הוראת התכנים של כל סבב בתוכנית. הם הפיקו תועלת רבה מהרפלקציה השיתופית של קבוצת המשתתפים במהלך ההשתלמות. הם נתרמו מאוד מההוראה המשותפת של מרצים משני תחומי דעת שונים זה מזה: "השיתוף של מרצה מהחינוך מיוחד מאוד חשוב כיוון שגם בחינוך הרגיל לצערנו אנו מתמודדים עם קשיים, שִׁפְלִים מהחינוך המיוחד מאוד תורמים". דברי המשתתפים תומכים בדבריו של דאיי (Day, 1999) שלפיהם לשני מרצים משתי דיסציפלינות שונות זו מזו, יש

– בחינוך הקדם-יסודי והיסודי. באמצעותו אפשר לקדם את מקצועיות המורים במתן מענה לתלמיד עם צרכים מיוחדים בכיתה ובשעות הפרטניות. **בפן היישומי** – הקניית כלים להוראה מיטבית של מתמטיקה לתלמיד עם צרכים מיוחדים בכיתה הרגילה ובכיתת החינוך המיוחד משמשת דוגמה לסינרגיה של שני כוחות בית ספריים שלהם מטרה משותפת לקידום תלמידים בתחום דעת משמעותי וחשוב; אחת ממטרות משרד החינוך בתחום המתמטיקה כיום היא הגדלת מספר התלמידים ברמות הגבוהות של לימודי מתמטיקה ומדעים, וכנגדה הקטנת מספר התלמידים שמתמטיקה הוא המקצוע היחיד החסר להם ומונע מהם קבלת תעודת בגרות בסוף כיתה י"ב (כץ, 2016). תוכנית התערבות המוצגת במודל זה יכולה לסייע בידי המורה לקדם השגת מטרה זו על ידי הוראה מותאמת יותר.

מגבלות עבודה זו ניכרות בשתי נקודות עיקריות:

א. המודל נבחן בתחום המתמטיקה על קבוצה קטנה של משתתפים המלמדים שכבת גיל אחת. מן הראוי לבדוק זאת במספר גדול יותר של משתתפים ובמגוון תכנים של אוכלוסיות גיל, כדי לחזק את יכולת הכללה של תרומת המודל.

ב. המודל נבחן בתחום דעת אחד ומן הראוי לבדוק את מידת התאמתו גם בתחומי דעת אחרים באמצעות פיתוח תוכניות התערבות המבוססות על מודל זה ומותאמות לתחומי הדעת.

רשימת מקורות

אבידב-אונגר, א', רוזנר, מ' ורוזנברג, א' (2013). הפיתוח המקצועי של עובדי הוראה בראי הרפורמות של "אופק חדש" ו"עוז לתמורה" – ממדיניות ליישום. בתוך ש' שמעוני וא' אבידב-אונגר (עורכות), על הרצף: הכשרה, התמחות ופיתוח מקצועי של מורים – מדיניות, תאוריה ומעשה (עמ' 165-196). תל-אביב: מכון מופ"ת.

אהרונ, ר' (2004). חשבון להורים: ספר למבוגרים על מתמטיקה של ילדים. ירושלים: שוקן.

אזולאי, ש' (2015). תשעה עקרונות פדגוגיים להוראה משמעותית. ירושלים: מכון ברנר וייס. אוחר מתוך <http://www.816170.il.org.brancoweiss/htm>

ארכיב-אלישיב, ר' ולדר, ד' (2011). סדנת סטאז': מעורבת או ייעודית? דפים, 52, 46-71.

ברש, א' ומנדל, ר' (2012). מתמטיקה וחינוך מיוחד – הילכו שניהם יחדיו? בתוך א' קליגר וע' הופמן (עורכים), הכול עניין של יוזמה: יוזמות מקדמות פיתוח מקצועי במערכי שותפות מכללה-שדה (עמ' 153-171). תל-אביב: מכון מופ"ת.

וורגן, י' (2007). יישום "חוק השילוב" – מסמך עדכון. ירושלים: מרכז המחקר והמידע של הכנסת. אוחר מתוך <http://www.m01813/pdf/data/mmm/il.gov.knesset.www.pdf>

כץ, נ' (2016, יולי). יעדים לשנת הלימודים תשע"ז בתחום המתמטיקה. הרצאה שהוצגה בהשתלמות מדריכים של החינוך העל יסודי במתמטיקה, בית יציב, באר שבע.

מאי, נ', ריינגולד, ר', גריסר, ג' ולוי, צ' (2011). מעגל ידע פרופסיונאלי בקרב מורים בחנ"מ על פי משנתו של פאולו פריירה – הבנייתו של כלי קוגניטיבי להגדרת פתרונות חינוכיים. סוגיות בחינוך מיוחד ובשילוב, 26(2), 35-56.

כפי שמוזכר לעיל, המשתתפים ביטאו את מעורבותם בהשתלמות באמצעות רפלקציה שיתופית, בשיתוף המנחים. תוארו קשיים בהוראת יעד או נושא מתמטי, נערך סיעור מוחין במליאה להעלאת מגוון הצעות לדרכי התמודדות. כל מורה בחר לעצמו את דרך ההתמודדות המתאימה לו ולכיתתו, וניתנה להם ההזדמנות לשותף בתוצאות התנסותם בהוראת הנושאים בכיתה. ראוי לציין כי בתהליך זה השתתפו מורים למתמטיקה ומורים לחינוך מיוחד, כשוויים בין שווים, וכל אחד ביטא את קולו וייחודו. לאורך כל המפגשים הובלטה התרומה הייחודית של שיתוף פעולה בין המשתתפים הבאים מדיסציפלינות למיניהן, במתן מענה הולם לתלמידים עם צרכים מיוחדים במתמטיקה במסגרת הבית ספרית. כמו כן עבודת הצוות של שני מנחי ההשתלמות שבאו מדיסציפלינות שונות זו מזו, שימשו דוגמה ליישום השיתופיות במהלך המפגשים.

ג. רלוונטיות ללומד

למידה משמעותית מזמנת עיסוק בתכנים, במסרים וברעיונות מאתגרים, מסקרנים, מעוררי עניין המותאמים ללומד. היא קושרת את הנלמד לניסיון ולידע קודמים, לצורכי הלומד, לעולם הרגשי, לכישוריו, לתחביביו ולעיסוקיו ולצרכיו כפרט וכחלק מחברה [הדגשה שלי] (משרד החינוך, 2014, שם).

יצירת הרלוונטיות של ההשתלמות ניכרת בנקודות האלה:

1. המשתתפים בתוכנית מלמדים את התכנים של כיתה ז' על פי תוכנית הלימודים כמתחייב.
2. סמוך לתחילת הוראת התכנים של כל סבב בכיתה, נעשה למורים מפגש מורים שבו דנו בתכנים של הסבב.
3. יצירת מעט מפגשים ארוכים המאפשרים יצירת אינטראקטיב למידה.
4. המטרה בכל אחד מהמפגשים הייתה שבתום המפגש מורה ידע להנגיש היטב לתלמיד המתקשה את התכנים שנדונו.
5. ההשתתפות בהשתלמות מקנה נקודות זכות למשתתף בה לצורך קידומו המקצועי.

ראוי לומר כי יישום עקרונות מודל ההתערבות בעבודה זו נתן מענה לצורך של המורים, שלא קיבל מענה מלא בהשתלמויות שנעשו עד כה, ולאורך כל ההשתלמות הזו עמד במרכז הבמה קידום מומחיותם של המורים בהוראת מתמטיקה לתלמידים עם צרכים מיוחדים בכיתה הרגילה ובכיתות החינוך המיוחד בחטיבת הביניים. מעבר לקידום זה, המורים נחשפו ללמידה משמעותית וחוו אותה בתהליך הלמידה של עצמם. ליווי המורה בתהליך ההוראה לאורך השנה היה בעל ערך ורלוונטי למשתתפים ושיתופם הפעיל של המשתתפים גרם להם להיות מעורבים.

התרומה הייחודית של מודל ההתערבות נובעת מצירוף שלושה מאפיינים של התוכנית: (א) מתן מענה משמעותי, רלוונטי ופרקטי למורים שהעשיר את תחום הדעת וכלים להוראתו, כלומר שילוב של תחום הדעת עם כלים להוראתו בהשתלמות אחת היה חדש לשתי האוכלוסיות כאחד, ולכן שביעות הרצון של שתי האוכלוסיות הייתה דומה; (ב) מנחים שבאים מהשדה; (ג) שותפות של המשתתפים בהשתלמות (משתלמים ומנחים) ושיתופיות של שתי דיסציפלינות שכל אחת תורמת את תרומתה הייחודית הן בהסתכלות על תחום הדעת והן בקידום הלומד.

לעבודה הזו תרומה תאורטית ויישומית כאחד. **בפן התאורטי** – בניית מודל שעקרונותיו מתאימים לבניית תוכנית התערבות למורים המלמדים מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. אפשר ליישם מודל זה גם בתחומי דעת שונים וגם בשכבות גיל שונות

- Hatton, N., & Smith, D. (1995). [Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. Teaching and Teacher Education, 11](#)(1), 33-49. doi: 10.1016/0742-051X(94)00012-U
- James, K. L. (2015). *The impact of co-teaching on general education students in seventh grade math* (Doctoral Dissertations). Liberty University. Retrieved from <http://digitalcommons.liberty.edu/doctoral/1008>
- Lovin, L. A., Kyger, M., & Allsopp, D. (2004). Differentiation for special needs learners. *Teaching Children Mathematics, 11*(3), 158-168.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). [Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel](#). Washington, DC: U.S. Department of Education.
- NAEP (National Assessment of Education Programs). (2005). *The Nation's report card: Mathematics 2005*. Washington, D.C.: Author. Retrieved from <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/pdf/main2005/2006453.pdf>
- NAEP (National Assessment of Education Programs). (2007). *The Nation's report card: Mathematics 2007*. Washington, D.C.: Author. Retrieved from <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/pdf/main2007/2007494.pdf>
- NCTM (National Council of teachers of mathematics). (2007). *Research briefs and clips*. What are the characteristics of students with learning difficulties in mathematics? What instructional strategies are effective in helping students with difficulties in mathematics? Retrieved from <http://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/research-brief-and-clips/Learning-Difficulties-in-Mathematics/>
- Perlshtein, T. (2017). The bright side is the help surrounding me in coping with problems: A reflective workshop in induction for dance teachers. *Research in Dance Education, 18*(1), 48-69. doi: 10.1080/14647893.2017.1290060
- Rosas, C., & Campbell, L. (2010). Who's teaching math to our most needy students? A descriptive study. *Teacher Education and Special Education, 33*(2), 102-113. doi: 10.1177/0888406409357537
- Treahy, D. L., & Gurganus, S. P. (2010). Models for special needs students. *Teaching Children Mathematics, 16*(8), 484-490.
- משרד החינוך. (2006). [החלטת המועצה להשכלה גבוהה בנושא "מתווים מנחים להכשרה להוראה במוסדות להשכלה גבוהה בישראל" – דו"ח ועדת אריאב: החלטה מיום 21.11.2006](#). אוחר מתוך <http://education.cms.il.gov/Units/EducationCMS/il.gov/Hozrim/HachsharatOvdeyHoraa.htm.MitveTudatHhoraa>
- משרד החינוך. (2014). [משהו טוב קורה עכשיו: אבני דרך בלמידה משמעותית](#). ירושלים: המחבר. אוחר מתוך <http://files.il.gov.education.meyda/html.index/chozer/lemidaMashmautit>
- משרד החינוך. (2017). [לקראת התמחות](#). אוחר מתוך <http://Units/EducationCMS/il.gov.education.cms/LIkratHitmahut/Mitmahim/Staj.htm.etmahotTsaad>
- משרד החינוך. (2012). [אודות האגף](#). אוחר מתוך http://Units/EducationCMS/il.gov.education.cms/haagaf_al/odot/PituachMiktzoie
- נאסר-אבו אלהיג'א, פ', פרסקו, ב' ורייכנברג, ר' (2011). תהליך ההתמחות בהוראה – מבט כולל. בתוך א' שץ-אופנהיימר, ד' משכית וש' זילברשטרום (עורכות), [להיות מורה: בנתיב הכניסה להוראה](#) (עמ' 55-87). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- נגר, ג' (2013). חזון הרצף בהכשרת עובדי הוראה, בכניסתם לתפקיד ובפיתוחם המקצועי. בתוך ש' שמעוני וא' אבידב-אונגר (עורכות), [על הרצף: הכשרה, התמחות ופיתוח מקצועי של מורים – מדיניות, תאוריה ומעשה](#) (עמ' 17-24). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- קרסנטי, ר' והרכבי, א' (2003). [אפיוני למידה וחשיבה של תלמידים "חלשים" במתמטיקה](#) [CD-ROM]. רחובות: מכון ויצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים.
- תנעמי, י' (2001). [בדיקת הקשר בין קשב חזותי ושמיעתי לבין ביצוע פרוצדורות לפתרון משוואות אלגבריות בנעלם אחד במתמטיקה \(עבודת מוסמך\)](#). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
- תנעמי, י' (2007). [השפעת התערבות לשיפור פונקציות של קשב על תהליכי ביצוע פרוצדורות של פתרון משוואות אלגבריות בנעלם אחד \(עבודת דוקטור\)](#). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
- Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. New York: Teachers College Press.
- Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning*. London: Falmer Press.
- Friend, M., Reising, M., & Cook, L. (1993). Co-teaching: An overview of the past, a glimpse at the present, and considerations for the future. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 37*(4), 6-10. doi: 10.1080/1045988X.1993.9944611
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of learning disabilities, 37*(1), 4-15. doi:

"אפסילון"

סדרת סרטונים עכשווית וקלילה שחושפת את התלמידים לעולם המרתק של המתמטיקה והפיזיקה

בכל סרטון המנחות מציגות ניסוי מדעי מפתיע שבמרכזו שאלת חקר מסקרנת.

הניסוי מלווה בהסברים של התופעה המדעית המוצגת, ובסופו מגיעות המנחות אל התשובה או אל שאלת המשך מפתיעה.

מנחות: אורלי שגב, סתיו אידיסיס, רונה נבון

בשיתוף הטלוויזיה החינוכית



מגדלי הנוי וגידול מעריכי

כמה פעמים צריך לקפל נייר כדי להגיע לירח?

כמה זמן לוקח להעביר 9 דיסקיות בין מוטות?

חבורת כדורסלנים מנסה לעשות זאת ברבע

שעה ומדגימה מהו גידול מעריכי.

חידת פאי

כיצד אפשר למצוא קירוב לערך של פאי בעזרת רובה ולוח מטרה?

מסע למספר שמשגע את העולם ומסתתר כמעט בכל מקום.



פינה מתמטית - מקומות גאומטריים

מציאת מיקום הצירים נקודות הקודקוד והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה בעזרת סרגל ומחוגה

שולה וייסמן
עידן טל



שולה וייסמן

בוגרת תואר ראשון במתמטיקה בטכניון, תעודת הוראה במתמטיקה ותואר שני בחינוך מתמטי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. דוקטורנטית באוניברסיטת חיפה בחוג לחינוך מתמטי. מרצה לחינוך מתמטי ומדריכה פדגוגית במכללה האקדמית גורדון, מדריכה מורים ומשמשת כמורה מאמנת למורים בשנת עבודתם הראשונה במערכת החינוך. לימדה מתמטיקה בתיכון אליאנס חיפה בכל רמות הלימוד.

תחומי מחקר עיקריים: התפתחות מקצועית של מורים ומורי מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

במאמר זה מוצגות בניות הנדסיות בעזרת סרגל ומחוגה למציאת מיקום הצירים, נקודות הקודקוד והמוקדים של היפרבולה, אליפסה והיפרבולה על פי האיורים שלהם. ביצוע הבניות מסתמך על הכרת משפטים ותכונות מיוחדות המאפיינים את המקומות הגאומטריים הנזכרים לעיל ועל כן הם משמשים להטמעה ויישום של ידע שנרכש במהלך לימודי הנדסה אנליטית.

מילות מפתח: בניות גאומטריות; פתרונות שונים לאותה משימה; גאומטריה דינמית; פרבולה; אליפסה; היפרבולה.

הקדמה

הבניות ההנדסיות הן עולם מרתק ומפתיע מאוד שהחלו לעסוק בו המתמטיקאים הקדמונים. מאז ימיהם ואף בימינו, כשחלק גדול מהבניות מתבצע בעזרת טכנולוגיה ממוחשבת, הנושא של הבניות ההנדסיות בכלי השרטוט הקלסיים ממשיך להעסיק את המתמטיקאים ואת אנשי החינוך המתמטי הרואים בהתמודדות עם בעיות הבנייה הן אתגר מחשבתי והן כלי המאפשר לתלמידים ליישם ולתרגל ידע על תכונות ומשפטים בהתאם לתוכנית הלימודים, ולבדוק את מידת הטמעתם.

ברבות השנים נמצאו דרכים חדשות לביצוע בניות אחרות שהתבססו על גילוי תכונות גאומטריות ורעיונות מקוריים שהתבססו עליהן ואפשרו את ביצוען. בין שאר הדברים המפתיעים שנמצאו הם אפשרויות בנייה בהגבלת כלי השרטוט, כגון בניות בעזרת סרגל (חסר שנתות) בלבד או בעזרת מחוגה בלבד.

תלמידים יודעים בדרך כלל לבצע בניות יסודיות, כגון העתקת קטע, העתקת זווית, חציית קטע, חציית זווית, בניית אנך לקטע בנקודה מסוימת, הורדת אנך לקטע מנקודה מסוימת, בניית קו מקביל לישר, בניית משולשים לפי נתונים ועוד. חוץ מהבנייה של העתקת קטע, כל שאר הבניות היסודיות הנזכרות לעיל מתבססות על הכרת משפטים בגאומטריה שכל אחד מהם מאפיין תכונה גאומטרית.



עידן טל

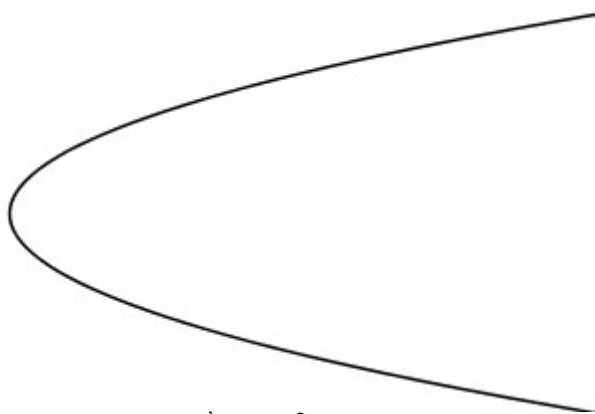
בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על יסודי) - סמינר הקיבוצים. סטודנט לתואר שני בטכנולוגיות בחינוך בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

אתגר מעניין הוא למצוא את מיקום הצירים והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה שכאן הבנייה מורכבת יותר ומחייבת הכרה ויכולת יישום של תכונות גאומטריות לכל שלב של בנייה שבו משתמשים בתכונה גאומטרית מסוימת המאפיינת את המקום הגאומטרי. מצורפים קישורים ליישומונים ב-Geogebra המדגימים את הבניות ומאפשרים לקורא חקר דינמי של התכונות השונות.

משימה א':

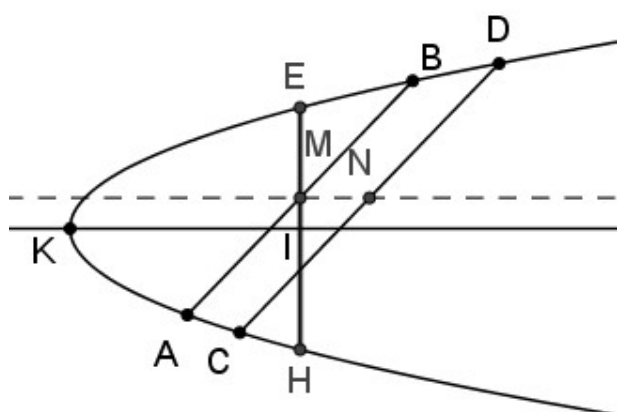
1א: מציאת ציר הסימטריה וקודקודה של פרבולה

באיור 2 מתוארת עקומה של פרבולה ללא סימון ציר הסימטריה שלה וללא סימון קודקודה.



איור 2א: פרבולה

איור 2ב מתאר את הפרבולה אחרי הבניות הבאות.



איור 2ב: מציאת ציר הסימטריה והקודקוד של פרבולה

תיאור הבנייה

בונים בפרבולה שני מיתרים כלשהם AB ו-CD המקבילים זה לזה. נקודות האמצע שלהם M ו-N בהתאמה. כידוע, נקודות האמצע של מיתרים מקבילים בפרבולה נמצאים על קו ישר המקביל לציר הפרבולה. כלומר, הישר העובר בנקודות M ו-N מקביל לציר הפרבולה. בנקודה M בונים אנך לישר MN החותך את הפרבולה בנקודות E ו-H. בונים ישר I שהוא אנך אמצעי לקטע EH. הישר I הוא ציר הסימטריה של הפרבולה ונקודת החיתוך שלו עם הפרבולה K היא קודקודה הפרבולה.

יישומון מס' 1 שאפשר להגיע אליו בקישור 1 מדגים את התכונה שישר העובר בנקודות האמצע של זוג מיתרים מקבילים, מקביל לציר הפרבולה. בגרירת הנקודה A או B על עקום הפרבולה אפשר לשנות את זווית ההטיה של המיתרים המקבילים. גרירת הנקודה C משנה את המרחק בין המיתרים המקבילים. אפשר לשנות את ערכו

מסיבה זו, היכולת לבצע בניות גאומטריות היא למעשה יכולת הטמעה ויישום של משפטים בגאומטריה. לכן אפשר לראות בבניות הגאומטריות תחום שבו אפשר לתרגל ידע ומשפטים בגאומטריה ולבדוק את מידת הטמעתם.

ההתמודדות עם בניות גאומטריות מאפשרת לתלמיד למצוא כמה דרכי בנייה לאותה משימה או מציאת דרכי בנייה לא קונבנציונליות ובכך להבליט לפניו את יופייה של המתמטיקה עד כדי התפעמות.

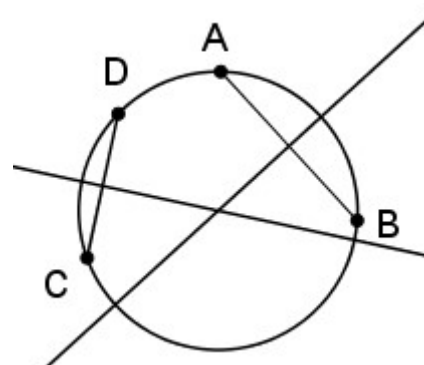
מקורות המידע לנושא הם רבים. כמקורות עיקריים אפשר להביא ספרים מקיפים עם מגוון רחב של נושאים בצירוף הדגמות רבות של בניות הנדסיות (סטופל, זיסקין ובן-חיים, 2015). כמו כן במקורות יש רשימה מגוונת של מאמרים מכתבי עת בארץ ובחו"ל שכל המתעניין בנושא ימצא בהם עניין רב (מן, 1987; סטופל ואוקסמן, 1996, 1998; סטופל וחריר, 2006; Stupel & Ben-Chaim, 2013a; Yiu, 2014).

הנושא של פרבולה, אליפסה והיפרבולה נלמד בגילים 16-17 בעת לימוד גאומטריה אנליטית. בשלב הראשון ההגדרה ניתנת לכל אחד מהמקומות הגאומטריים ובהמשך מפתחים את המשוואה המתמטית של כל אחת מהצורות. לאחר תרגול בסיסי מכוונים את התלמידים לגלות תכונות גאומטריות נסתרות שמקצתן משותפות לשתי צורות או יותר, כגון "אמצעי כל המיתרים בהיפרבולה המקבילים לישר נתון נמצאים על ישר שני", או "סכום ריבועי הערכים ההופכיים של אורכי שני מיתרים מאונכים זה לזה באליפסה ואשר עוברים דרך מרכזה, הוא גודל קבוע".

למקומות הגאומטריים הנזכרים לעיל יש תכונות גאומטריות מיוחדות רבות. אפשר ליישם חלק מן התכונות הללו לצורך בניות הנדסיות וכך להשיג הן הטמעת ידע והן שילוב בין תחומי המתמטיקה המגוונים. מקורות לתכונות הגאומטריות שבהן השתמשו אפשר למצוא בספרי הלימוד בארץ ובחו"ל וכן במאמרים (גבע, 1996; גורן, 2005; Riddle, 1996).

בקורס של בניות גאומטריות שניתן לפרחי הוראה למתמטיקה בעת לימודי ההכשרה, נעשתה פעילות של בניות כאשר נתונים על דף נייר העקומים של המקומות הגאומטריים האלה: מעגל, פרבולה, אליפסה והיפרבולה, שנלמדו בקורס בהנדסה אנליטית ויש למצוא בבנייה את מיקום נקודות מיוחדות שלהם, כגון מוקדים, קודקודים וכן את הפרמטרים שלהם.

לפני שיוצגו כאן הבניות ההנדסיות הייחודיות, תוצג תחילה בנייה פשוטה שבה יש למצוא בעזרת כלי שרטוט (סרגל ומחוגה) את מרכזו של מעגל.



איור 1: מציאת מרכז מעגל בעזרת סרגל ומחוגה

בעזרת סרגל מסמנים במעגל שני מיתרים כלשהם AB ו-CD ובונים לכל אחד מהם אנך אמצעי (ראה איור 1).

בהסתמך על המשפט: "על האנך האמצעי למיתר מונח קוטר המעגל", הרי שנקודות החיתוך של שני האנכים האמצעיים היא מרכז המעגל.

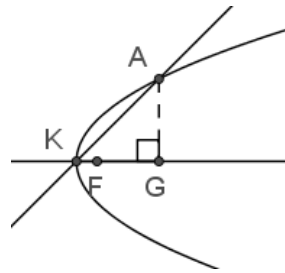
של פרמטר הפרבולה p בעזרת סרגל הפרמטר.

השווה לפרמטר של הפרבולה, כאשר גוררים את הנקודה E על גבי הפרבולה.

קישור 1: ישר המחבר אמצעי מיתרים מקבילים בפרבולה

Link 1: <https://www.geogebra.org/m/csdNrzt>

2א: מציאת מיקום מוקד הפרבולה



דרך א': מציאת מיקום המוקד בעזרת קו ישר. בקודקוד K מעבירים קו ישר שהמשוואה שלו $y = x$. ישר זה חותך

את הפרבולה $y^2 = 2px$

איור 3: מציאת המוקד של פרבולה

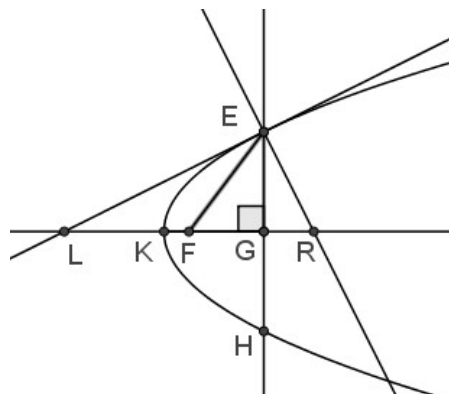
בנקודה $A(2p, 2p)$, כמתואר

באיור 3.

מהנקודה A מורידים אנך AG לציר הפרבולה. אורך הקטע $KG = 2p$. את הקטע KG מחלקים לארבעה קטעים שווים בעלי אורך $KF = \frac{p}{2}$, הנקודה F היא מיקום המוקד.

דרך ב': מציאת מיקום המוקד בעזרת משיק ונורמל.

ידועה התכונה שהמשיק לפרבולה בנקודה E שעליה חותך את ציר הפרבולה בנקודה L באופן ש- $KG = KL$ כמתואר באיור 4.



איור 4: מציאת מוקד הפרבולה בעזרת משיק ונורמל

מהנקודה K חגים מעגל ברדיוס KG ומתקבלת הנקודה L . מעבירים את המשיק EL . בנקודה E בונים את הנורמל למשיק הפרבולה שחותך את ציר הפרבולה בנקודה R . הקטע GR – היטל הנורמל על ציר הסימטריה, הוא כידוע האורך של פרמטר

הפרבולה p . מהנקודה K חגים קשת ברדיוס $r = \frac{GR}{2} = \frac{p}{2}$ והיא חותכת את ציר הסימטריה בנקודה F שהיא מוקד הפרבולה.

הערה: מאחר שהמשולש $\triangle EFL$ הוא שווה שוקיים, מספיק לבנות אנך אמצעי לקטע LE , שחותך את ציר הסימטריה בנקודת המוקד.

יישומון מספר 2 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 2, מדגים את תכונת שימור אורכי הקטעים $LK = KG$ כאשר הנקודה E נעה על גבי הפרבולה. בעזרת סרגל הפרמטר אפשר לשנות את הפרמטר של הפרבולה.

קישור 2: שוויון קטעים על ציר הפרבולה

Link 2: <https://www.geogebra.org/m/MUdTrapS>

יישומון מספר 3 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 3, מדגים את התכונה שאורך היטל הנורמל על ציר הפרבולה הוא גודל קבוע

קישור 3: אורך קבוע של היטל נורמל הפרבולה

Link 3: <https://www.geogebra.org/m/E9VFPCkQ>

דרך ג': מציאת מיקום המוקד בעזרת אנך אמצעי למיתר.

מעבירים מיתר כלשהו AB ובונים לו אנך אמצעי בנקודה M שעליו כמוצג באיור 5. האנך האמצעי חותך את ציר הפרבולה בנקודה R . מהנקודה M מורידים אנך MG לציר הפרבולה. על פי תכונה ידועה,

האורך של הקטע GR הוא p – הפרמטר של הפרבולה. למציאת המוקד, חגים קשת ברדיוס $\frac{GR}{2}$ מהנקודה K .

יישומון מספר 4 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 4, מדגים את התכונה שההיטל GR של הקטע MR על ציר הפרבולה, הוא גודל קבוע כאשר גוררים את הנקודה B על גבי הפרבולה ובתנאי שהמיתר AB אינו ניצב לציר הפרבולה. ניתן לשנות בסרגל את הפרמטר של הפרבולה ובכל שלב מופיעים ערכי p ו- GR על המסך.

איור 5: מציאת מוקד הפרבולה בעזרת אנך אמצעי למיתר

קישור 4: אורך קבוע של היטל אנך אמצעי למיתר בפרבולה

Link 4: <https://www.geogebra.org/m/Y7RREbJU>

דרכים אחרות (ללא תיאור בניה ואיורים)

1. מעבירים בפרבולה שני מיתרים מאונכים זה לזה. תהייה M נקודת נקודות האמצע של המיתרים, אזי $y_M \cdot y_N = -p^2 \Rightarrow p = \sqrt{-y_M \cdot y_N}$ והבנייה מתבצעת על פי ערכי הגדלים y_M ו- y_N ובניית הממוצע ההנדסי שלהם.

2. תהא A נקודה כלשהי על הפרבולה. האנך מ- A לציר ה- y חותך את ציר y בנקודה B . האנך מהנקודה B לישר AO – ראשית הצירים) חותך את ציר ה- x בנקודה C ששיעורה $C(2p, 0)$.

3. תהא A נקודה כלשהי על הפרבולה. ידועה התכונה שאם המשיק לפרבולה בנקודה A חותך את ציר ה- y בנקודה B , אזי $\angle ABF = 90^\circ$ (מוקד הפרבולה). בונים אנך לקטע AB דרך הנקודה B . אנך זה חותך את ציר הסימטריה בנקודת המוקד.

הערה: דרכי הבנייה המגוונות שהוצגו למשימה המוזכרת לעיל, וכן אלו שנשתמש בהן בשתי המשימות להלן, מציגות את יופייה של המתמטיקה ויש בהן השלמה למאמרים שהוצגו בהם דרכי הוכחה מגוונות לאותה משימה מתמטית, אם בשימוש בכלים מאותו התחום אם בשילוב של כלים מתחומים אחרים. בכך מודגמת התפיסה כי המתמטיקה היא כעץ ענף שענפיו משתלבים זה בזה (סטופל וחריר, 2008; סטופל ומוגילבסקי, 2004; Henkin & Loonard, 1978; Leikin, 2009; Stupel & Ben-Chaim, 2013b).

משימה ב': מציאת צירי הסימטריה וערכי הפרמטרים של אליפסה

באיור 6 נתונה אליפסה ללא סימון צירי הסימטריה שלה.

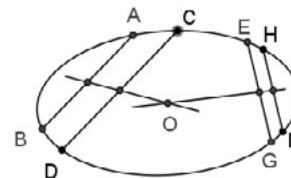
תיאור הבנייה

בונים באליפסה זוג מיתרים מקבילים (AB ו-CD) ונקודות האמצע שלהם.

בונים זוג מיתרים מקבילים נוסף (EG ו-HI) ונקודות האמצע שלהם.

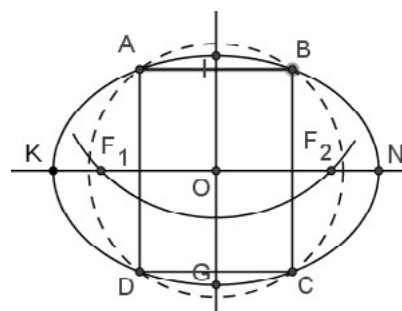
מיתרים אלו אינם מקבילים לזוג המיתרים הראשון.

על פי תכונה ידועה של אליפסה: "אמצעי מיתרים מקבילים נמצאים על קו ישר העובר דרך מרכז האליפסה", מעבירים את שני הישרים המחברים את אמצעי המיתרים והם נחתכים בנקודה O שהיא מרכז האליפסה (ראה איור 6).



איור 6: מציאת מרכז האליפסה

מהנקודה O – מרכז האליפסה, חגים מעגל עם רדיוס כזה שיחתוך את האליפסה בארבע נקודות A, B, C, D, E, G, H, I. נקודות אלו (בשל הסימטריה של האליפסה ביחס לציריה) הם הקודקודים של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירי האליפסה.



איור 7: מציאת המוקדים של אליפסה

מחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות של המלבן ומתקבלים צירי הסימטריה של האליפסה. צירים אלו חותכים את האליפסה בנקודות K, I, N, G שהן נקודות הקצה של צירי האליפסה.

לכן, $a = ON$ – פרמטר של הציר הגדול של האליפסה; $b = OI$ – פרמטר של הציר הקטן של האליפסה.

לפי הגדרת האליפסה $n_1 + n_2 = 2a$ כאשר n_1 ו- n_2 הם הרדיוסים היוצאים מהמוקדים. עבור הנקודה I מתקיים ש- $n_1 = n_2 = a$. לכן מנקודה זו חגים קשת ברדיוס a החותכת את הציר הגדול של האליפסה בשתי נקודות שהם המוקדים שלה (F_1 ו- F_2 באיור 7).

יישומן 5 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 5, מדגים את התכונה שאמצעי מיתרים מקבילים באליפסה נמצאים על ישר אחד שעובר דרך מרכז האליפסה. באמצעות גרירה הנקודה A או הנקודה E על האליפסה אפשר לשנות את הזוויות של המיתרים. בגרירת הנקודות C או H אפשר לשנות את המרחק בין המיתרים המקבילים.

קישור 5: ישרים המחברים אמצעי מיתרים מקבילים באליפסה

Link 5: <https://www.geogebra.org/m/y4NjzNuB>

משימה ג':

1a: מציאת אורך הציר הממשי של היפרבולה - ערך הפרמטר a

גם במקרה זה נתונה היפרבולה ללא סימון צירי הסימטריה. מציאת נקודת מרכז ההיפרבולה (נקודת מפגש הצירים) ושרטוט הצירים עצמם, נעשית באותה הדרך ובהתבסס על אותן התכונות שבעזרתן נמצאו צירי האליפסה (משימה ב'). באשר למציאת שאר הפרמטרים (b ו- c), קיים קושי שלא היה במקרה של אליפסה.

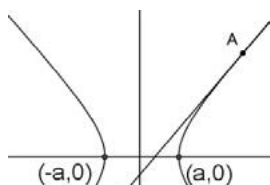
את הפרמטר a מקבלים מנקודת החיתוך של ההיפרבולה עם הציר הממשי (ציר ה- x), כמתואר באיור 8.

את הפרמטר b אי אפשר למצוא כי ההיפרבולה לא חותכת את הציר המדומה (ציר ה- y).

למציאת הפרמטרים b ו- c יש לבנות משיק להיפרבולה.

תיאור בניית משיק להיפרבולה בנקודה כלשהי עליה:

תהא הנקודה $A(x_A, y_A)$ נקודה על ההיפרבולה ובנקודה זו רוצים לבנות משיק להיפרבולה (ראה איור 8).



משוואת המשיק היא $\frac{x_A \cdot x}{a^2} - \frac{y_A \cdot y}{b^2} = 1$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה $B(x_B, 0)$.

איור 8: מציאת הציר הממשי של היפרבולה

על פי משוואת המשיק מקבלים

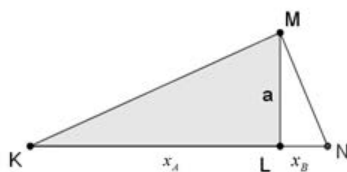
$$x_B \cdot x_A = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{x_B \cdot x_A}$$

תיאור הבנייה של הקטע x_B :

מעתיקים את הקטע x_A

ומסמנים את קצותיו K, L (ראה איור 9).

בנקודה L בונים אנך שאורכו a . מתקבל משולש ישר זווית $\triangle KLM$.



איור 9: מציאת אורך הציר הממשי של היפרבולה

בנקודה M בונים אנך לישר KM החותך את המשך KL בנקודה N. אורך הקטע LN הוא x_B ומאחר שהמשולש $\triangle KLM$ הוא ישר זווית אזי a הוא הממוצע הגאומטרי של x_B ו- x_A .

על סמך אורכי הקטעים x_A ו- x_B אפשר לבנות את המשיק.

2a: מציאת ערכי הפרמטרים b ו- c של היפרבולה על סמך משיק ונורמל

בוחרים על ההיפרבולה נקודה כלשהי A ובנקודה זו בונים משיק ונורמל והם חותכים את צירה הממשי בנקודות Q ו-R בהתאמה כמתואר באיור 10.

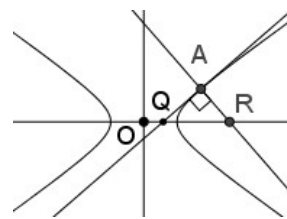
לפי תכונה ידועה $OQ \cdot OR = c^2$ כאשר O – נקודת מפגש הצירים.

$$c = \sqrt{OQ \cdot OR}$$

על-פי אורכי הקטעים Q ו-OR בונים את הממוצע הגאומטרי שלהם

שהוא הפרמטר c .

כעת בונים משולש ישר זווית שניצב אחד שלו a , היתר שלו c ומקבלים את אורך הניצב השני שהוא b - הפרמטר של הציר המדומה.



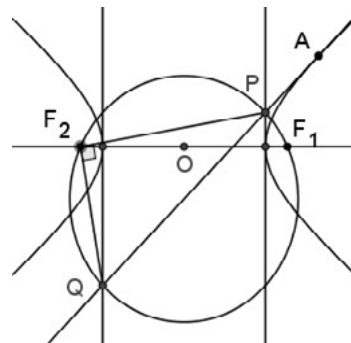
יישומון 6 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 6, מציג את התכונה שמכפלת מרחקי נקודות החיתוך של המשיק ושל הנורמל (עם הציר הממשי) מראשית הצירים, הוא גודל קבוע השווה לריבוע מרחק המוקד (c^2) כשנקודת ההשקה A נעה על ההיפרבולה. כשגוררים את הנקודה Q ערך מכפלת המרחקים נשאר קבוע.

איור 10: מציאת ערכי הפרמטרים b ו- c של היפרבולה

קישור 6: מכפלה קבועה של קטעים על ציר ההיפרבולה

Link 6: <https://www.geogebra.org/m/jB24sajs>

3א: מציאת ערכי הפרמטרים b ו- c של היפרבולה על סמך שלושה משיקים



איור 11: מציאת ערכי הפרמטרים b ו- c של היפרבולה על סמך שלושה משיקים

בונים משיק בנקודה כלשהי A , וכן את שני המשיקים בקודקדי ההיפרבולה כמתואר באיור 11. המשיק בנקודה A חותך את המשיקים שעוברים בקודקדים בנקודות P ו- Q . על פי תכונה ידועה ממוקדי ההיפרבולה רואים את הקטע PQ בזווית ישרה. על הקטע PQ כקוטר בונים מעגל החותך את הציר הממשי בנקודות F_1 ו- F_2 שהם מוקדי ההיפרבולה.

כעת בונים משולש ישר-זווית שניצב אחד שלו a והיתר c (אורך הקטע $F_2O = c$).

הניצב האחר הוא הפרמטר b .

יישומון 7 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 7, מדגים את התכונה כי ממוקדי ההיפרבולה רואים את הקטע הנחתך ממשיק בידי שני משיקים להיפרבולה בקודקדיה. כשגוררים את הנקודה A על גבי ההיפרבולה, $\angle PF_2Q$ נשארת קבועה 90° .

קישור 7: מבט ממוקדי ההיפרבולה על קטע הנחתך ממשיק להיפרבולה

Link 7: <https://www.geogebra.org/m/PsJ3bsZu>

4א: מציאת ערכי הפרמטרים b ו- c של היפרבולה ללא משיקים

לאחר מציאת הערך של a מוצאים את ערך y של נקודה A שעל ההיפרבולה שערך ה- x שלה הוא $2a$ כמתואר באיור 12.

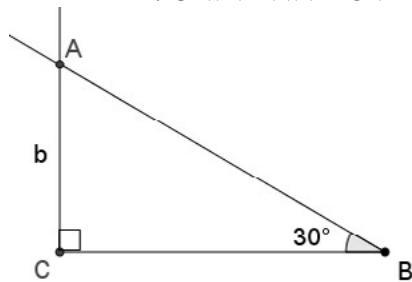
כשמציבים את ערכי הנקודה A במשוואת ההיפרבולה מקבלים:

$$\left(\frac{2a}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_A}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{y_A^2}{b^2} = 3 \Rightarrow \frac{y_A}{b} = \sqrt{3}$$

למציאת הערך b של משתמשים בתכונה גאומטרית ידועה שבמשולש

ישר זווית $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ יחס הניצבים הוא $\sqrt{3}$. מעתיקים את הקטע

y_A שקצותיו הם הנקודות B ו-C כמתואר באיור 13.



בקודקד C מעלים אנך ובקודקד B בונים זווית של 30° . קרן הזווית מהנקודה B חותכת את האנך שבנקודה C בנקודה A. האורך של הניצב

איור 13: מציאת ערכי הפרמטר של היפרבולה

AC הוא הגודל של הפרמטר b . את האורך של הפרמטר c (מיקום המוקדים) מוצאים באותה הדרך שזה נעשה בסעיף ג2.

הערה מתודית

ביצוע הבניות התאפשר בעזרת התכונות המיוחדות של המקומות הגאומטריים. גם לנו כמי שעוסקים בחינוך מתמטי לא כולן היו ידועות מלכתחילה. רק כאשר עמדנו לפני מבוי סתום להמשך הבניות, פנינו לספרי הלימוד ומצאנו בהם תכונות לא מוכרות שרק בעזרתן הצלחנו להתמודד עם האתגר של הבניות. אין לנו ספק שיש עוד תכונות המאפשרות לבצע את הבניות בדרכים אחרות. מכל מקום ראוי לבקש מהתלמידים לנסות לאתר תכונות אחרות בספרי הלימוד ובמאמרים בנושא או בהעלאת השערות ובדיקתן לשם אישור באמצעות תוכנה גאומטרית דינמית. אך כמקובל, אין להסתפק בתוכנה הגאומטרית ויש להוכיח כל תכונה ותכונה בדרך הפורמלית כמקובל במתמטיקה.

סיכום

הוצגו דרכים מגוונות לביצוע בניות הנדסיות בשלושה מקומות גאומטריים שמופיעים בתוכניות הלימוד של החינוך העל-יסודי. ביצוע הבניות הסתמך על התכונות המיוחדות שלהם וכדי להבליט אותן, שולבו קישורים ליישומנים המאפשרים לקורא לבצע חקר דינמי שלהן.

רשימת מקורות

גבע י' (1996). מתמטיקה ל-5 יחידות (כרך ג). תל-אביב: המחבר. גורן, ב' (2005). גיאומטריה אנליטית (5 יחידות לימוד). תל-אביב: המחבר.

מן, א' (1987). **סרגל ומחוגה**. על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 3, 15-11.

סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (1996). **בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות**. שאנן, ב, 108-95.

סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (1998). **עוד על בניות הנדסיות ייחודיות**. שאנן, ד, 264-249.

סטופל, מ' וחריר, ש' (2008). **"יפה היא הגאומטריה" – חיזוק ההיגד ע"י הצגת דרכי פתרון לאותה משימה**. שאנן, יג, 271-255.

סטופל, מ' ומוגילבסקי, ר' (2004). **הדגמת דרכי-פתרון שונות לארבע משימות הנדסיות**. שאנן, ט, עמ' 384-367.

סטופל, מ', זיסקין, ק' ובן-חיים, ד' (עורכים). (2015). בניות גיאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות. חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

Henkin, L., & Leonard, W. A. (1978). **A Euclidean construction?** *Mathe-*

matics Magazine, 51(5), 294-298.

Liekin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hana & M. De Villiers (Eds.), *The proceeding of the 19th ICMI Study conference: Proofs and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 31-36). National Taipei University, Taiwan.

Martin, G. E. (1998). *Geometric constructions*. New York: Springer

Riddle, D. R. (1996). *Analytic geometry* (6 ed.). Australia: Brooks/cole cengage learning.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013a). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezoids: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal (ASMJ)*, 27(2), 6-24.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013b). **One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics**. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(2), 129-161.

Yiu, P. (2014). **Three constructions of Archimedean circles in an arbelos**. *Forum Geometricorum*, 14, 255-260.

המלצה על ספר:

"האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי"

קרני שיר



ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
חוקרת בפרוייקט "הבזקים" - הפקולטה למתמטיקה, טכניון, חיפה.

שמחתי מאוד להכיר את הספר "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי" שכתבה פרופ' שרה הרשקוביץ משתי סיבות: הראשונה קשורה לתפקידי כמרצה, ואילו השנייה קשורה למהותי כאימא לשלושה ילדים הנמצאים במערכת החינוך.

באשר לסיבה הראשונה, התבקשתי השנה ללמד את הקורס "בעיות מילוליות באריתמטיקה". זו הפעם הראשונה שאלמד קורס זה, וכאשר גיליתי את הספר שכתבה פרופ' שרה הרשקוביץ, הרגשתי ממש כאילו מצאתי אוצר. נוסף על כך, אין ספק שספר זה יוכל להוות את השלד לבניית הקורס, היות שהוא מרכז בשפה העברית את הידע הקיים במחקרים רבים (שרובם אינם בשפה העברית); הוא מנגיש ידע זה לסטודנטיות ומאפשר להן ללמוד לעומק על סוגים שונים של בעיות מילוליות וסוגי הקשיים הנובעים מהמבנים השונים של בעיות אלו.

כמו כן, אני האימא (המאוד גאה) של אורי – תלמידת כיתה ט' בחטיבת הביניים של הכפר הירוק, פלג ויובל – תלמידים בבית הספר היסודי של הכפר הירוק. ההיכרות עם הספר מאפשרת לי, כהורה, להבין יותר לעומק את הבעיות המילוליות שנחשפים אליהן הילדים שלי בבית הספר ולזהות ביתר קלות קשיים הנובעים ממרכיבים קוגניטיביים המופיעים אצלם בעת שהם עוסקים בפתרון בעיות מילוליות, מה שיוכל לאפשר לי בעת הצורך לעזור להם בדרך טובה יותר.

על הספר

הספר "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי" יצא לאור בשנת הלימודים תשע"ד, 2014. בספר יש 150 עמודים והוא מיועד למורים, מדריכי מורים, סטודנטים להוראה, הורים ושאר מתעניינים.

את הספר כתבה פרופ' שרה הרשקוביץ. לשרה יש תואר ראשון

ושני מאוניברסיטת תל-אביב ותואר שלישי מאוניברסיטת חיפה. היא משמשת ראש מנהלת מדידה והערכה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח) וראש התמחות מתמטיקה במסלול לבית הספר היסודי בשאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך. תחום מחקרה העיקרי הוא ניתוח בעיות מילוליות המתאימות לבית הספר היסודי ודרכי הפתרון שלהן.

הספר יצא לאור בשיתוף מט"ח ושאנן והוא מופיע גם במתכונת מקוונת באתר כותר:

<http://www.kotar.co.il/KotarApp/Viewer.aspx?nBookID=100596887#7.789.6.default>

תמצית הספר

הפרקים הראשונים של הספר מתעמקים במאפיינים של הבעיות המילוליות שהתלמידים עוסקים בהן, ומציגים סכמות לניתוחן. הפרקים שלאחריהם עוסקים בבעיות חד-שלביות, שלצורך פתרונן אפשר ליצור תרגיל שיש בו פעולה אחת בלבד מתוך ארבע פעולות החשבון הבסיסיות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק). בעיות אלו הן הבעיות המילוליות הבסיסיות ביותר והן מספקות את אבני הבניין היסודיות לבעיות מילוליות במתמטיקה. לאחר מכן מוצג המעבר מבעיה חד-שלבית אל בעיות מורכבות יותר, ולבסוף פתרון בעיות שאינן מבוססות על ארבע פעולות החשבון, אלא על אסטרטגיות פתרון אחרות (היוריסטיות) שאף הן בתחום יכולתם של ילדים צעירים.

להלן תמצית כל אחד מהפרקים, כפי שהמחברת מציגה אותם:

הפרק הראשון "בעיות מילוליות במתמטיקה" מציג בראשיתו את העיסוק של הספרות המחקרית בשאלה מהי בעיה מילולית במתמטיקה. הפרק דן בהבחנה בין טקסט סיפורי לטקסט המתאר בעיות

מילוליות מתמטיות שנדרש בהן תהליך עיבוד מידע שונה מזה הנדרש בטקסט סיפורי. השלב הראשון בתהליך הוא הבנת "בסיס הטקסט" – הליך המצריך שחזור הסיפור המתואר בטקסט הנתון והבנתו. השלב השני הוא "מודל המצב" – שלב שבו על התלמיד להבין את המצב המתואר בסיפור ולזהות את הקשרים בין מרכיביו השונים של הטקסט. רק לאחר שני שלבים אלו יוכל התלמיד לבנות מודל מתמטי, כלומר תרגיל, משוואה או סכמה (לפי מורכבות הבעיה הנתונה) שאפשר לפתור באמצעותה את הבעיה הנתונה. במחקרים נמצא הבדל בין יכולת התלמיד לחזור על טקסט הסיפור ובין יכולתו להשתמש במידע הנתון בסיפור כבסיס לפעילות או לחישוב – כל אחד מהשלבים והקשר ביניהם משפיעים על יכולת התלמיד לפתור את הבעיה הנתונה.

בפרק מבחינים בין סוגי הבעיות המילוליות המגוונות (מעולם בית הספר ופתרון באמצעות מספרים טבעיים): בעיות חד-שלביות שלצורך פתרונן משתמשים באחת מפעולות החשבון הבסיסיות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק; בעיות רב-שלביות שלצורך פתרונן

משתמשים בצירוף של כמה פעולות בסיסיות; ובעיות לא שגרתיות שלצורך פתרונן משתמשים באמצעים היוריסטיים מגוונים. כל אחד מהסוגים האלו מתואר בהרחבה בשאר הפרקים. חשיבות העיסוק בפתרון בעיות מוצג על בסיס עבודתם של חוקרים רבים, החל מהצורך להציג לפני התלמידים את חשיבותה של המתמטיקה לחיי היום-יום וככלי לתיאור תופעות מדעיות, החל מהיכולת לפתח באמצעות הבעיות מוטיבציה, יצירה והנאה בקרב התלמידים וכלה בפיתוח מיומנויות מתמטיות, ידע, הבנה, יישום של רעיונות שנלמדו קודם לזמן לקראת פיתוח רעיונות חדשים ויכולת להתבונן בדרך ביקורתית. לעניין תהליכי העבודה הנדרשים לפתרון בעיות מילוליות מוצגת עבודתם של חוקרים מתחום החינוך המתמטי ומתחום הפסיכולוגיה הקוגניטיבית. מדובר בתהליכים שיש בהם הבנת הטקסט, תכנון ובנייה של ייצוג המתאר את הנתונים (ולעיתים ייצוגים גרפיים, סכמתיים או מתמטיים) כדי להביא לידי שימוש בכלים מתמטיים לחישוב הפתרון. העבודה אינה מסתיימת בפתרון, אלא נדרש מבט ביקורתי אם הפתרון מתאים כמענה לבעיה הנתונה, וכאשר הפתרון אינו מתאים, התהליך חוזר לניתוח נוסף.

הפרק השני "סכמות ופתרון בעיות מילוליות" מציג את תפיסתם של פסיכולוגים קוגניטיביים באשר למושג 'סכמה' כרשת סמנטית המייצגת יחסים, תרחישים והתנהגויות. סכמה נוצרת בתהליך של

הטמעה בעת התמודדות קוגניטיבית עם מושגים והתנהגויות חדשות והתאמה כאשר נוצרת הפרה פנימית או קונפליקט פנימי בין הרעיונות וההתנהגויות החדשות כנגד אלו הקיימות. בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה אנו מוצאים סכמות בשני היבטים: סכמות של בעיות – הסכמה מציגה מבנה כללי המתאים לאוסף של בעיות שלכולן אותה רשת סמנטית. בעזרת הסכמה אפשר להבחין בין סוגי בעיות המתאימות לסכמות מגוונות, כמו ניתוח מבחר בעיות המתאימות לאותה סכמה והבחנה בהבדלים שביניהן; סכמות של תהליך פתרון – בסכמות אלה יש שלבים למיניהם במהלך הפתרון: ניתוח הבעיה, בניית הייצוג שיעזור

להבין אותה ולפתור אותה, הפתרון והבדיקה. הסכמה מאפשרת לפותר לקלוט אינפורמציה ולבנות תהליך המבוסס עליה, להגיב באופן משמעותי ויעיל על הגירויים הנתונים ולהתאים את התנהגותו למצב הנתון או לפתח אסטרטגיות פתרון חדשות. כמו כן, סכמת הבעיה יכולה לשמש כלי עבודה לתלמיד ולאפשר לו לנתח את מרכיבי הבעיה, לזהות איך המרכיבים לסוגיהם קשורים זה לזה ואילו מרכיבים חסרים, ועליו לחפש זאת (בטקסט הנתון) או לחשב.

החל מהפרק השלישי מתמקדים בסוגי הבעיות וניתוחם בהצגת דוגמאות וממצאי מחקר לכל קטגוריה.

הפרק השלישי עוסק ב"בעיות מילוליות חד-שלביות". בפרק זה שני סעיפים: "בעיות בעלות מבנה חיבורי" ו"בעיות בעלות מבנה כפלי". "בעיות בעלות מבנה חיבורי" הן בעיות שלצורך פתרונן משתמשים בתרגיל חיבור או בתרגיל חיסור. הסכמה הכללית המייצגת אותן היא מבנה תלת-מקומי שבו שלם ושני חלקים (זרים זה לזה). לכל מצב נתון המתואר בסכמה של שלם וחלקים אפשר להציג גם בעיית חיבור (כאשר החלקים נתונים ויש לחשב את השלם) וגם בעיית



וכל אלה מובילים לסדר פתרון אחר ולדירוג קושי שונה. כל אלה מתוארים בפירוט רב בפרק. ההבחנה בין הבעיות לסוגיהן, השווה והשונה שביניהן ודירוג הקושי שלהן מאפשר למורה לקבל החלטות מבוססות מחקר על שלבי ההוראה-למידה.

הפרק הדין ב"בעיות לא שגרתיות" מופיע בספר זה משלוש סיבות: א. הוא שייך לתחום של בעיות בתחום המספרים הטבעיים; ב. הוא חושף הן את התלמידים והן את המורים לעובדה שלא את כל הבעיות המתמטיות פותרים באמצעות תרגילי חשבון, אלא יש שיקולים מתמטיים ודרכי פתרון אחרות; ג. מצאנו במחקר שפתרון בעיות לא שגרתיות המאפשרות מבחר פתרונות ומבחר דרכי פתרון, יכולות לשמש כלי אחר לפיתוח דרכים ואסטרטגיות לפתרון, לפיתוח חשיבה ביקורתית ולפיתוח חשיבה יצירתית בקרב התלמידים. בבעיות לא שגרתיות נדרש התלמיד לזהות את המודלים שיסייעו לו לפתור את הבעיות, להשתמש בגישות היוריסטיות, כמו ניסוי ובדיקה, חשיבה על בעיות דומות, חקירה שיטתית, מיצוי אפשרויות, בדיקת מקרי קיצון, הכללה ועוד. הפרק מציג מבחר של סוגי בעיות המתאימות לגילאים צעירים, כמו בכל הספר – עם דוגמאות מפורטות של בעיות ועם מבחר דרכי פתרון, בייחוד כאלה שמצאנו במחקר אצל תלמידים ועם המלצות למורים כיצד למנף פתרון בעיה נתונה למרחב בעיות גדול יותר.

לסיים

לדעת, ספר זה הוא ספר שיכול לתרום הרבה מאוד לידע וההבנה של סטודנטים, מורים ומורי מורים המעוניינים לעמוד לעומק על מרכיבים של בעיות מילוליות הנדונות בבתי הספר היסודי מצד אחד, ומצד אחר להבין טוב יותר את הקשיים שיכולים להיות לתלמידים ולדעת כיצד להתמודד טוב יותר עם קשיים אלו. הספר מבוסס על המחקרים הנרחבים מאוד שנעשו במשך שנים רבות על הנושא של בעיות מילוליות באריתמטיקה, אך הוא גם מפרש מחקרים אלו וממליץ המלצות מעשיות המבוססות עליהם. אני נהניתי מאוד מקריאת הספר כי נחשפתי לתובנות רבות העולות מתוך הקריאה בו, ואני בטוחה שגם אתם תרגישו כמוני אחרי שתקראו אותו.

חיסור (כאשר השלם ואחד החלקים נתונים ויש לחשב את החלק האחר). הפרק מציג את המבנה הלוגי של הבעיות, את ההבחנה בין בעיות המתאימות להקשרים שונים (דינמי, סטטי והשוואה), וכן את ממצאי המחקר בדבר ההבדלים ביניהן והקשר שבין רמות הקושי של הבעיות למבנה הבעיות ולהקשר שהן עוסקות בו. בפרק הבעיות מובחנות גם לפי סוגי התיאורים המילוליים, סוגי יחידות המידה שהבעיות עוסקות בהן ומשתנים אחרים המשפיעים על מגוון הבעיות מצד אחד ועל רמת הקושי שלהן מצד אחר. הבחנות אחרות ודקויות רבות מוצגות במהלך הפרק. נוסף על כך, מוצגים מאפיינים המשפיעים על רמת ההצלחה של תלמידים בפתרון, כמו למשל סוג המספרים המופיעים בבעיה, סדר האירועים המתואר, מקום הופעת משפט השאלה ועוד. משתנים אלה משפיעים גם על סוגי הבעיות האחרות שיוצגו בהמשך. על בסיס ממצאי המחקר האמפירי, המורה יכול להתאים את סוגי הבעיות שייתן לתלמידיו בשלבי למידה מגוונים לפי רמת התפתחותם ויכולתם. גם בפרק זה מוצגים הרעיונות בעת שימוש בדוגמאות רבות, מנותחות ומסבירות, כך שיקל למורה הקורא להשתמש בהן ואף ליצור כמותן.

"בעיות בעלות מבנה כפלי" הן בעיות שלצורך פתרונן משתמשים בתרגיל כפל או בתרגיל חילוק. הסכמה הכללית המייצגת אותן היא מבנה תלת-מקומי שבו יש מכפלה ושני גורמים. לכל מצב נתון המתואר בסכמה של מכפלה וגורמים אפשר להציג גם בעיית כפל (כאשר הגורמים נתונים ויש לחשב את מכפלה) וגם בעיית חילוק (כאשר המכפלה ואחד הגורמים נתונים ויש לחשב את הגורם האחר). גם בפרק זה מוצג המבנה הלוגי של בעיות הכפל וההקשרים למיניהם שבהם מתקיים מבנה כפלי: התאמה, השוואה, צירופים (קומבינטוריקה), בעיות יחס וחשובי מידות. בכל אחד מהסוגים מוצג ניתוח של הסוג ובמה כל סוג שונה מהסוגים האחרים. כמו כן מוצגות דוגמאות המפרטות ומבהירות את הייחודיות של כל סוג ואת הקשיים הקיימים בהם, כפי שנמצאו במחקרים. בכל הדוגמאות שבספר מופיע גם חישוב הכינויים. נמצא שנושא זה אינו בהיר דיו, ובכך החשיבות להדגשה מיוחדת בכלל ובבעיות המילוליות המתאימות למבנה הכפלי בפרט.

הפרק הרביעי עוסק ב"בעיות מילוליות מורכבות". פרק זה מבוסס ברובו על המחקר של כותבת ספר זה שהתפתח במהלך עשרים השנים האחרונות. גם בפרק זה יש שני סעיפים: "בעיות מילוליות דו-שלביות" ו"בעיות לא שגרתיות". הפרק הדין ב"בעיות מילוליות דו-שלביות" מציג את המעבר מבעיה חד-שלבית לבעיה דו-שלבית, את הקושי הנובע ממעבר זה ואת מכלול הבעיות לסוגיהן המתקבל כאשר בונים בעיה דו-שלבית משתי בעיות חד-שלביות. הפרק מתאר בפירוט רב את אחת ההרכבות האפשריות – הרכבה של מבנה כפלי עם מבנה חיבורי, כדוגמה לכל שאר ההרכבות האפשריות וכדוגמה להרכבות רב-שלביות. המעבר מבעיה חד-שלבית לבעיה דו-שלבית מפתיע ביותר כיוון שבטקסט המתאר בעיה חד-שלבית כל המרכיבים הדרושים לפתרון מופיעים בטקסט, ואילו בבעיה דו-שלבית חסרים בטקסט מרכיבים הכרחיים לפתרון ועל הפותר לזהות את המרכיבים החסרים, להשליםם (בעזרת חישובי ביניים) ורק אז יוכל לפתור את הבעיה המקורית. ככל שבבעיה יש יותר שלבי פתרון, כן חסרים בטקסט יותר מרכיבים. בבעיות דו-שלביות יש שלושה סוגי הרכבה המובילים לשלושה מבנים מסוימים הניתנים לייצוג בשלוש סכמות אלה: סכמה היררכית (שבה שלם או מכפלה המתלכדים עם גורם או חלק, בהתאמה); סכמת שלם משותף (שבה המכפלה והשלם מתלכדים); סכמת חלק משותף (שבה חלק מתלכד עם גורם). שלושה סוגי הרכבה אלה מניבים אוסף גדול של בעיות השונות זו מזו במבנה (סכמה), בפעולות המתמטיות ובסוגי הכינויים,

מדור חוויות מכנס 2017 PME-41

רותי סגל תקוה עובדיה



ד"ר רותי סגל

בוגרת תואר ראשון ותואר ראשון במתמטיקה ובמדעי מחשב באוניברסיטת חיפה, תואר שני בחינוך מתמטי באוניברסיטה העברית בגבעת רם ותואר שלישי בפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון. מרצה במכללת שאנן ובמכללת אורנים. תחומי מחקר עיקריים: התפתחות מקצועית של מורים ומורי מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה ותהליך התפתחותן של קהילות מורים למתמטיקה.



ד"ר תקוה עובדיה

בוגרת תואר ראשון ממכללת אורנים, תואר שני בחינוך מתמטי מאוניברסיטת חיפה ותואר שלישי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. מרצה במכללת אורנים ובמכללה ירושלים. עוסקת במחקר ויישום של פיתוח חשיבה מתמטית לפתרון בעיות בקרב תלמידים (תיכון ומטה) מתקשים במתמטיקה, בעקרונות לשילוב טכנולוגיה בהוראה בחינוך גבוה וכלמידה מנתונים ונתוני עתק בחינוך מתמטי ומדעי.

במהלך חודש יולי 2017 נסענו לסינגפור, כדי להשתתף באחד מהכנסים המרכזיים בחינוך מתמטי "PME-41 International (Group for the Psychology of Mathematics Education). הכנס מתקיים בכל שנה ושנה במדינה אחרת ברחבי העולם, והפעם היעד היה מרוחק מאוד מישראל. על אף המרחק הגאוגרפי שתורגם לשעות טיסה לא מבוטלות, לא התלבטנו לרגע האם לנסוע לכנס. המניע העיקרי שלנו היה להשתתף בכנס של חוקרים מובילים בתחום החינוך המתמטי וליהנות מהשיתוף ההדדי במחקרים רבים ומגוונים מרחבי העולם, אך לא נכחיש שקסם לנו גם להכיר את אחד מהיעדים המרתקים של המזרח הרחוק – סינגפור, שבין השאר נודעה בהצלחתה במבחנים הבין-לאומיים במתמטיקה.



הכנס התקיים במתחם המחלקה להוראת המדעים באוניברסיטת הלאומית (National Institute of Education) NIE, מוסד אקדמי המצוי בלב ליבו של פארק רחב ידיים המשמש אחת מהריאות הירוקות של סינגפור.



משותפת של רותי סגל, עטרה שריקי ונצה מובשוביץ-הדר בנושא "חונכות וכתובה שיתופית של מערכי שיעור כמנוף להכשרת מורים למתמטיקה להוראה ברמת 5 יח"ל".

המחקר המשותף הראשון (עובדיה וסגל) שהצגנו במהלך הכנס, החל לקרום עור וגידים לפני כשנתיים במהלך הנחיית סטודנטים בנושא שילוב הכלי הטכנולוגי בהוראת מתמטיקה בשתי מכללות להוראה. שילוב הטכנולוגיה בהוראת מתמטיקה מעסיק את קהיליית החוקרים בתחום החינוך המתמטי שנים רבות. במהלך עיצוב משימות מתמטיות לסביבה טכנולוגית, חקר תהליך ההטמעה של המשימות בקרב הסטודנטים (לתואר ראשון ושני) ותהליך הלמידה שלהם, בנינו מסגרת תאורטית לעיצוב משימות בגיאומטריה בשילוב טכנולוגיה להוראת מורים, המבוססת על קישור בין חלקים מתוך שלוש תאוריות נפרדות של שלושה חוקרים מובילים (Zaslavsky, 2008; Sweller, 2015; Mayer, 2014). המסגרת מאחדת בין



הנסיעה בכל בוקר לאוניברסיטה הייתה חוויה ייחודית וכללה בין השאר נסיעה ברכבות תחתיות ממוחשבות בלי כל מעורבות (נראית, לפחות) של בני אדם. יעילותה של רשת הרכבות התחתיות היא רק אחד מהסמנים המעידים על ההתפתחות הטכנולוגית המרשימה של המדינה הצעירה. סינגפור החלה את דרכה כמדינה עצמאית בשנת 1965, ובמהלך הכנס זכינו לחגוג עם הסינגפורים את חג עצמאות בסיסמה "one nation together". חגיגות יום העצמאות הן המאורע הלאומי הבולט בסינגפור. תהלוכות, מצעד צבאי ומגוון הופעות משמשים מוקד עניין לעשרות אלפי אנשים, ומתווספים אליהם מיליונים שצופים במופע מן הבית, ואנחנו האורחים שצפינו מעל גשרי המרינה ביי. משהותנו הקצרה בסינגפור התרשמו מאוד מהעם הסינגפורי המאופק, מהניקיון המוקפד מאוד ברחובות, מהאיסור לדבר על פוליטיקה ומסגנון חיים צנוע לפחות למראית עין.

בכנס השתתפו 513 אנשי אקדמיה מ-51 מדינות בעולם. מישראל השתתפו 18 אנשי אקדמיה מאוניברסיטאות ומכללות שונות ברחבי הארץ. הכנס כלל הרצאות מליאה, סדנאות מגוונות, קבוצות מחקר ועוד. **מארבע הרצאות מליאה שהוצגו במהלך הכנס**, מצאנו עניין מיוחד בשניים מהן. הרצאה אחת בנושא "Mathematics teaching", שהרצתה אוליב צ'פמן (Olive Chapman), חוקרת מובילה מקנדה. הרצאה זו הייתה קשורה לעשייה שלנו בהוראה וההנחיה של סטודנטים במכללות להוראה. ההרצאה השנייה הייתה בנושא "Problem solving through heuristic strategies as a way to make all pupils engaged", שהרצתה ג'רמילה נובוטנה (Jarmila Novotna), חוקרת מובילה מצ'כיה. גם הרצאה זו התקשרה לעשייה שלנו בהוראת הקורסים המגוונים במכללות להוראה וכן בקידום תהליכי חקר, ובעיקר היא חידשה לנו את תחום המחקר על פתרון בעיות במבט מעט שונה מן המוכר לנו מספרות המחקר בנושא.

נוסף על כך, השתתפנו במגוון סדנאות מעניינות שהתמקדו בהיבטים מגוונים של השפעת התרבות על תהליכי הלמידה, שהתקשרו במישרין או בעקיפין להרצאת המליאה של דויד קלארק (David Clarke) האוסטרלי בנושא "Using cross-cultural comparison to interrogate the logic classroom research in mathematics education". שהוצגה בתחילת הכנס. סדנאות אחרות שהשתתפנו בהן עסקו באסטרטגיות להערכה של פרויקטים מחקריים, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה ובפרט שימוש בצילומי וידאו ככלי להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה, היבטים שונים של פתרון בעיות מתמטיות ועוד.

מה הייתה תרומתנו לכנס?

בכנס הצגנו ממצאים ראשוניים מעבודת מחקר משותפת שלנו (עובדיה וסגל) בנושא: "עקרונות לעיצוב משימות בגיאומטריה בשילוב טכנולוגיה להוראת מורים", וכן ממצאים מעבודת מחקר



בתוכנת "רמזור למורה!" שפיתח צוות של מרכז מו"פ "קשר חם" בטכניון עם חברת אומניסול.

היה מעניין לפגוש חוקרים אחרים העוסקים בשילוב טכנולוגיה ולזהות את השונה, המבדיל והמשלים בין המחקרים שלנו, ובתוך כך אף נוצרה תשתית לשיתוף פעולה בין-לאומי בינינו ובין חוקרים ממדינות שונות העוסקים בתחומים דומים.

לסיום, השתתפותנו בכנס תרמה רבות לחשיפה שלנו למחקרים המשיקים יותר או פחות לתחומי העניין שלנו. הצלחנו לפגוש חברים בקהילה היהודית של סינגפור בבית חב"ד, השתתפנו בטוילים נהדרים שהכינו מראש צוות הכנס ברחבי סינגפור... כמעט הצלחנו להסתגל לחיים הלחים בסמוך לקו המשווה.

עקרונות לעיצוב משימות למורים ובין עקרונות לעיצוב משימות טכנולוגיות בהתאם למבנה הקוגניציה האנושית.

המחקר המשותף השני (סגל, שריקי ומובשוביץ-הדר), מבוסס על פרויקט "רמזור לצפון" שהחל לפעול בספטמבר 2014 במחוז צפון והסתיים בקיץ 2017, במטרה להכשיר מורים למתמטיקה בחטיבה עליונה להוראה ברמת 5 יח"ל. המחקר מציג את התפקיד העיקרי של שני מרכיבים בתהליך הכשרת מורים למתמטיקה להוראה ברמות הגבוהות: האחד הוא חונכות שבה מורה ותיק להוראת 5 יח"ל חונך מורה עמית מבית ספרו שטרם התנסה בהוראה ברמה זו, והשני הוא כתיבה שיתופית של חומרי הוראה (תוכניות הוראה, פריטי הערכה ועוד) ובפרט של מערכי שיעור מפורטים המתאימים לרמת 5 יח"ל. הכתיבה השיתופית של מערכי השיעור מתבצעת

