

מציאת ערכי קיצוץ: מינימום / מקסימום ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי

הקדמה

מחד גיסא, הדרך המקובלת להתמודדות עם משימות של מציאת מינימום או מקסימום היא שימוש בחשבון דיפרנציאלי בעזרת הנגזרת.

מאידך גיסא, ישנן משימות די-רבות בתחומי המתמטיקה השונים, שאפשר למצוא את ערכי הקיצון – ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

חשוב להדגיש, שגם ללא שליטה או מיומנות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – ניתן באמצעות ידע מקיף בתחומים השונים של המתמטיקה, בתחכום ובחשיבה לא שגרתית – להגיע לפתרונות, ולעתים – בדרך פשוטה או קצרה יותר, אולם ראוי לציין, שדרכי פתרון חלופיות מתאימות רק לחלק מהמקרים, בעוד שבחשבון הדיפרנציאלי ניתן מענה ברוב המקרים.

במאמר זה מוצגות 19 משימות מגוונות של מציאת ערכי הקיצון בליווי פתרונות, שאינם כוללים שימוש בחשבון דיפרנציאלי. בחלק מהמשימות התקבל הפתרון החלופי על-ידי שימוש באי-שוויונים אלגבריים מוכרים.

המשימות מקיפות את התחומים הבאים:

א. בעיות בהנדסת המישור והמרחב.

ב. פונקציות אלגבריות – כולל בעיות ניתוח והצגת התיאור הגרפי שלהן.

ג. פונקציות טריגונומטריות.

למעוניינים בשיטות שונות לפתרון בעיות קיצון ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי – מוצע לעיין במראי מקומות.

המאמר מיועד הן ללומדי מתמטיקה ברמה מוגברת – 5 י"ל, המתמודדים עם משימות, שיש בהן היבטים של שילוב בין תחומי המתמטיקה והן לכלל החפצים בהעשרה ובהרחבת-ידע¹⁻³.

תאריכים: ערכי הקיצון, מינימום ומקסימום, אסטרטגיות לפתרון בעיות

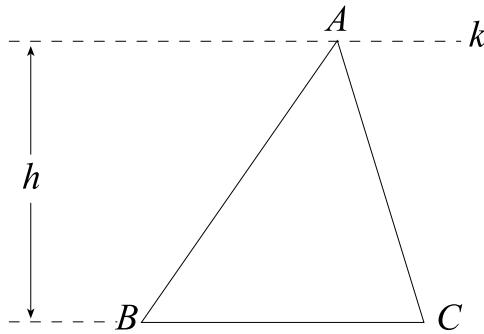
שנתון "π/e" – תשס"ד כרך ט'

א' – בעיות בהנדסת המישור והמרחב

משימה מס' 1

הוכח, שמבין כל המשולשים בעלי בסיס ושטח נתונים, הרי המשולש בעל ההיקף הקטן ביותר הוא משולש ש"ש.

פתרון משימה מס' 1



ציור מס' 1

היות שנתונים הבסיס והשטח, הרי, למעשה, נתון הגובה, והקדקוד השלישי A נמצא על ישר k , המקביל לבסיס ובמרחק h ממנו (גובה המשולש), כנראה בציור מס' 1.

מצא את מיקום הנקודה A באופן שסכום $BA+AC$ יהיה מינימלי.

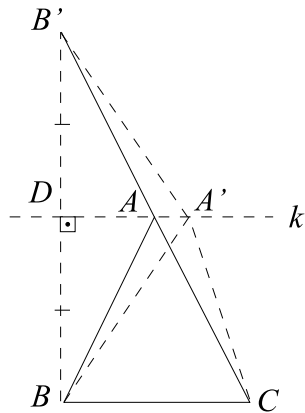
בונים נקודה B' , שיקופית לנקודה B ביחס לישר k . בקלות ניתן לראות, כי לכל נקודה A' , הנמצאת על הישר k , מתקיים השוויון הבא: $BA'+A'C=B'A'+A'C$ (אנך אמצעי לקטע BB').

מחברים את הנקודות B' ו- C , ומסמנים ב- A את נקודות החיתוך של הישרים $B'C$ ו- k , כנראה בציור מס' 2.

במשולש ABC , $BA+AC=B'C$

היות ש- $B'C < B'A'+A'C$ (היא צלע במשולש $B'A'C$), ולכן היא קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות), הרי שהיקף המשולש ABC הוא מינימלי. נותר להוכיח, כי המשולש BAC הוא ש"ש. בקלות ניתן להראות, שהקטע DA הוא קטע אמצעים במשולש $BB'C$, ולכן $AC=AB'=AB$, כלומר המשולש BAC ש"ש.

מ.ש.ל.



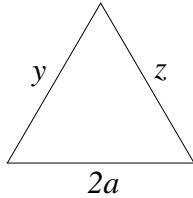
ציור מס' 2

משימה מס' 2

הוכח, ששטחו הגדול ביותר של משולש, שהיקפו $2p$ ובסיסו $2a$, מתקבל עבור משולש ש"ש.

פתרון משימה מס' 2

צלעות המשולש תהיינה $2a$, y ו- z כנראה בציור מס' 3.



ציור מס' 3

$$S = \sqrt{p(p-2a)(p-y)(p-z)}$$

לפי נוסחת הרון לשטח משולש $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ מקיימים את הקשר האלגברי הבא (אי-שוויון ממוצעים):

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} (*)$$

על-ידי שימוש בקשר זה מקבלים

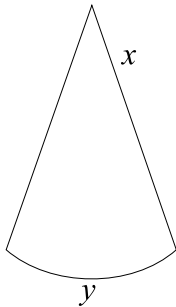
$$\sqrt[2]{(p-y)(p-z)} \leq \frac{(p-y) + (p-z)}{2} = \frac{2p - (y+z)}{2} = a$$

על-ידי העלאה בריבוע מקבלים $(p-y)(p-z) \leq a^2$

ומכאן,

$$S = \sqrt{p(p-2a)(p-y)(p-z)} \leq \sqrt{p(p-2a)a^2} = a\sqrt{p(p-2a)}$$

שוויון מתקבל בקשר האלגברי (*), רק אם $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. לכן גם שטח מקסימלי יתקבל, כאשר $y=z$, והוא $S_{\max} = a\sqrt{p(p-2a)}$. שטח מקסימלי זה התקבל עבור משולש ש"ש.



ציור מס' 4

משימה מס' 3

מצא את הרדיוס של גזרה בעלת היקף נתון ושטח מקסימלי.

פתרון משימה מס' 3

נסמן ב- x את רדיוס הגזרה וב- y את אורך קשת הגזרה, כנראה בציור מס' 4.

נסמן ב- ℓ את ההיקף הנתון של הגזרה, וב- S את השטח.

שנתון "Kel" – תשס"ד כרך ט'

רחל מוגילבסקי ומשה סטופל

$$\ell = 2x + y \Rightarrow y = 2x - \ell$$

$$S = \frac{xy}{2}$$

(הוכחת נוסחת שטח הגזרה נשארת לקורא).

$$S = \frac{x(\ell - 2x)}{2} = \frac{2x(\ell - 2x)}{4} \quad \text{נציב את } y \text{ בנוסחת השטח ונקבל:}$$

$$\text{לפי אי-השוויון שבין הממוצעים (חשבוני והנדסי), } \sqrt{2x(\ell - 2x)} \leq \frac{2x + (\ell - 2x)}{2} = \frac{\ell}{2}, \text{ שוויון}$$

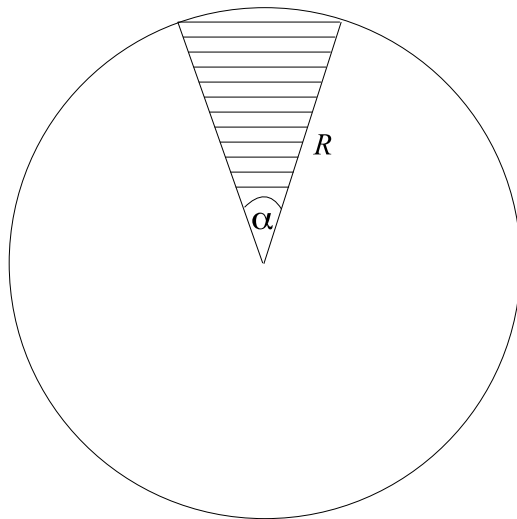
יתקיים, רק אם $\ell - 2x = 2x$, כלומר כאשר $x = \frac{\ell}{4}$ יהיה שטח הגזרה מקסימלי.

דוגמאות לשימוש באי-השוויון ניתן למצוא במקור¹.

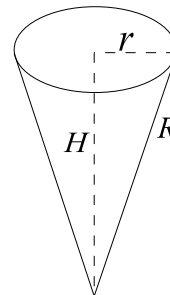
משימה מס' 4

חתוך גזרה מעיגול פח, ומהחלק הנותר יצור משפך חרוטי. בת כמה מעלות צריכה להיות הגזרה על-מנת לקבל משפך בעל נפח מקסימלי (ציור מס' 5 א'-ב)?

לפתרון המשימה נביא משפט עזר.



ציור מס' 5 א'



ציור מס' 5 ב'

שנתון "μe" – תשס"ד כרך ט'

משפט עזר

נתון, כי $x+y=a$ (x ו- y משתנים ו- a קבוע) ו- p, q מספרים שלמים. הוכח, כי המכפלה $x^p \cdot y^q$ מקבלת את הערך הגדול ביותר, כאשר מתקיים השוויון $x:y=p:q$

הוכחת משפט העזר

המכפלה $x^p \cdot y^q$ מקבלת את ערכה המקסימלי יחד עם הביטוי $\frac{x^p \cdot y^q}{p^p \cdot q^q}$.

$$\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \dots + \frac{x}{p}}_{p \text{ פעמים}} + \underbrace{\frac{y}{q} + \frac{y}{q} + \dots + \frac{y}{q}}_{q \text{ פעמים}} = x + y = a \quad \text{קל להראות ש-}$$

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \dots \cdot \frac{x}{p}}_{p \text{ פעמים}} \cdot \underbrace{\frac{y}{q} \cdot \dots \cdot \frac{y}{q}}_{q \text{ פעמים}} = \frac{x^p \cdot y^q}{p^p \cdot q^q}$$

מאי-השוויון של הממוצעים נובע, שהמכפלה

מקבלת ערך מקסימלי, כאשר $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, כלומר $x:y=p:q$

מ.ש.ל.

פתרון משימה מס' 4

נסמן ב- x את אורך קשת המעגל שמתקפלת לחרוט, זאת אומרת היקף בסיס החרוט. הקו היוצר של החרוט הוא הרדיוס R של העיגול מהפח. r – רדיוס בסיס החרוט, ו- H – גובה החרוט (ציור מס' 5 ב').

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \quad \text{ומכאן} \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

לפי נוסחת היקף מעגל:

שנתון "μke" – תשס"ד כרך ט'

$$V = \frac{\pi r^2 H}{3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \quad \text{נפח החרוט:}$$

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \cdot \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right] \quad \text{הביטוי של הנפח מקבל ערך מקסימלי יחד עם הביטוי}$$

$$\text{אבל (**)} \quad R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right] = R^2 \quad \text{סכום קבוע. אז לפי משפט העזר, המכפלה (**)}$$

$$\text{מקבלת ערך מקסימלי, כאשר } 2:1 = \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right] \quad \text{ומכאן } x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \quad \text{לכן } \beta -$$

$$\text{זווית של הגזרה הנותרת להכנת החרוט } (360^\circ - \alpha) \quad \text{תהא } \beta = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 294^\circ$$

$$\text{כלומר } \alpha \approx 66^\circ.$$

ב' – פונקציות אלגבריות

משימה מס' 1

מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה הפרבולית $y = ax^2 + bx + c$, זאת אומרת מציאת שיעורי הקדקוד שלה.

פתרון משימה מס' 1

נזכיר, כי כאשר מבצעים השלמה לריבוע

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

הביטוי $\frac{4ac - b^2}{4a}$ הוא גודל קבוע, ועל כן הערך המקסימלי או המינימלי של הפונקציה (תלוי

בסימן של a) מתקבל, כאשר הביטוי $x + \frac{b}{2a} = 0$. מכאן,

$$x_m = -\frac{b}{2a}, \quad y_m = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

התוספת m לשיעור נקודת הקיצון מסמנת max או min .

משימה מס' 2

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{2x^2 - 4x + 8} \quad \text{מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה}$$

פתרון משימה מס' 2

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{2x^2 - 4x + 8} = \frac{(2x^2 - 4x + 8) + 1}{2x^2 - 4x + 8} = 1 + \frac{1}{2(x^2 - 2x + 4)} = 1 + \frac{1}{2[(x-1)^2 + 3]}$$

הערך המקסימלי של הפונקציה מתקבל, כאשר המכנה מקבל את ערכו המינימלי, דהיינו כאשר

$$x_{\max} = 1, \quad y_{\max} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \quad \text{כלומר } x=1$$

מובן, שהשימוש בטכניקה הנ"ל מתאימה לפונקציות מנה, שניתן לפרק אותן לחלק קבוע ולחלק אחר, שמציאת ערך הקיצון שלו מתקבלת בקלות.

משימה מס' 3

$$y = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6) + 9 \quad \text{מצא את הערך המינימלי של הפונקציה}$$

פתרון משימה מס' 3

על-ידי שימוש בחוקי החילוף והקיבוץ מקבלים:

$$\begin{aligned} y &= [(x-1)(x-6)] \cdot [(x-2)(x-5)] + 9 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) + 9 \\ &= (x^2 - 7x)^2 + 16(x^2 - 7x) + 69 \end{aligned}$$

$$y = (x^2 - 7x + 8)^2 + 5 \quad \text{על-ידי השלמה לריבוע מקבלים:}$$

ערך מינימלי של הפונקציה יתקבל, כאשר הביטוי בסוגריים יתאפס, כלומר $x^2 - 7x + 8 = 0$. מכאן,

$$x_{\min} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad y_{\min} = 5$$

משימה מס' 4

מצא את הערך המינימלי של הפונקציה $y = \frac{(x+1)(x+4)}{x}$ עבור $x > 0$.

פתרון משימה מס' 4

$$y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = x + \frac{4}{x} + 5$$

יש למצוא את הערך המינימלי של $x + \frac{4}{x}$. על-ידי שימוש באי-השוויון של הממוצעים

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{כאשר } a \text{ ו- } b \text{ חיוביים})$$

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$$

מקבלים:

כלומר $x + \frac{4}{x} \geq 4$. מכאן הערך של הפונקציה $y \geq 9$.

שוויון מתקיים, כאשר $x = \frac{4}{x}$, דהיינו $x = \pm 2$ (התשובה השלילית נפסלת – נתון $x > 0$).

$$x_{\min} = 2, \quad y_{\min} = 9$$

לכן

משימה מס' 5

מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = x^4(16 - x^4)$

פתרון משימה מס' 5

כאשר $|x| < 2$, שני הגורמים x^4 ו- $16 - x^4$ חיוביים. בעזרת אי-השוויון האלגברי, שהוזכר במשימה מס' 2 של בעיות בהנדסת המישור – מקבלים $\sqrt{x^4(16 - x^4)} \leq \frac{x^4 + (16 - x^4)}{2} = 8$. שוויון מתקבל, כאשר $x^4 = 16 - x^4$, כלומר $x^4 = 8$ ו- $x = \pm\sqrt[4]{8}$. לפיכך הערך המקסימלי יהיה $y_{\max} = 8(16 - 8) = 64$. בתחום $|x| > 2$ ערכה של הפונקציה שלילי.

משימה מס' 6

$$y = \frac{x^2}{x^4 + 1} \quad \text{מצא את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה}$$

פתרון משימה מס' 6

הפונקציה מוגדרת, והיא אי-שלילית לכל x .

$$yx^4 - x^2 + y = 0 \quad \text{נמצא את טווח ערכי הפונקציה על-ידי פתרון המשוואה}$$

מחפשים לאילו ערכי y קיים מקור x , זאת אומרת לאילו ערכי y שהדיסקרימיננטה של המשוואה $\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0$. הפתרון של אי-שוויון זה הוא $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. כפי שצוין $y \geq 0$. לכן

$$\text{התחום הסופי של ערכי } y \text{ הוא } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

מכאן, נקודות הקיצון של הפונקציה הן:

$$x_{\min} = 0, \quad y_{\min} = 0, \quad x_{\max} = \pm 1, \quad y_{\max} = \frac{1}{2}$$

משימה מס' 7

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad \text{מצא את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה}$$

פתרון משימה מס' 7

הפונקציה מוגדרת לכל x . למציאת הטווח של הפונקציה – דורשים, שלמשוואה $yx^2 - (1-y)x + y - 1 = 0$ יהיו פתרונות, דהיינו $\Delta = (1-y)^2 + 4y(1-y) \geq 0$

פתרון אי-השוויון נותן, שטווח הפונקציה הוא $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1$.

לפיכך $x_{\min} = -2$, $y_{\min} = -\frac{1}{3}$, $x_{\max} = 0$, $y_{\max} = 1$

משימה מס' 8

מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = \sqrt{2x+1} - x$

פתרון משימה מס' 8

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \geq -\frac{1}{2}$

מסמנים $\sqrt{2x+1} = t$. מכאן $t \geq 0$ ו- $x = \frac{t^2-1}{2}$.

נציב בפונקציה $y = \sqrt{2x+1} - x = t - \frac{t^2-1}{2} = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$

מבצעים השלמה לריבוע ומקבלים $y = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1$

הפונקציה מקבלת את ערכה המקסימלי עבור $t=1$, כלומר נקודת המקסימום היא $x_{\max} = 0$, $y_{\max} = 1$. אפשר לראות בקלות, שעבור כל $x > 0$ הפונקציה יורדת, ולכן אין לה ערך מינימלי.

משימה מס' 9

חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

שנתון "μee" – תשס"ד כרך ט'

פתרון משימה מס' 9

מדובר בפונקציה זוגית $(f(x) = f(-x))$, ועל כן הגרף שלה סימטרי ביחס לציר y .

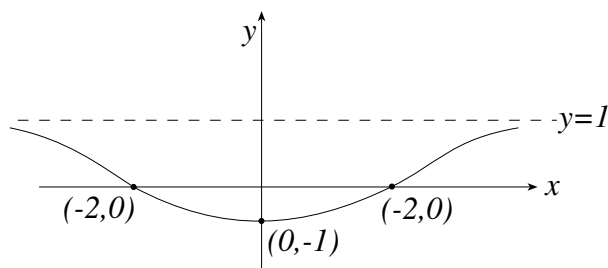
רושמים את הפונקציה בצורה $y = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}$. עבור $x \rightarrow \pm\infty$ ערך השבר $\frac{8}{x^2 + 4}$ שואף ל-0. לכן האסימפטוטה האופקית היא $y=1$.

נקודות החיתוך עם הצירים הן:

$$(0, -1), (-2, 0), (2, 0)$$

התיאור הגרפי של הפונקציה נראה בציר מס' 6. הפונקציה מקבלת ערך מינימלי, כאשר

$$x_{\min} = 0, \quad y_{\min} = -1$$



ציר מס' 6

משימה מס' 10

חקור את הפונקציה

$$y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

פתרון משימה מס' 10

רושמים את הפונקציה

$$y = 1 + \frac{8}{x^2 - 4}$$

גם כאן מדובר בפונקציה זוגית, ולכן מספיק לחקור אותה עבור $x > 0$.

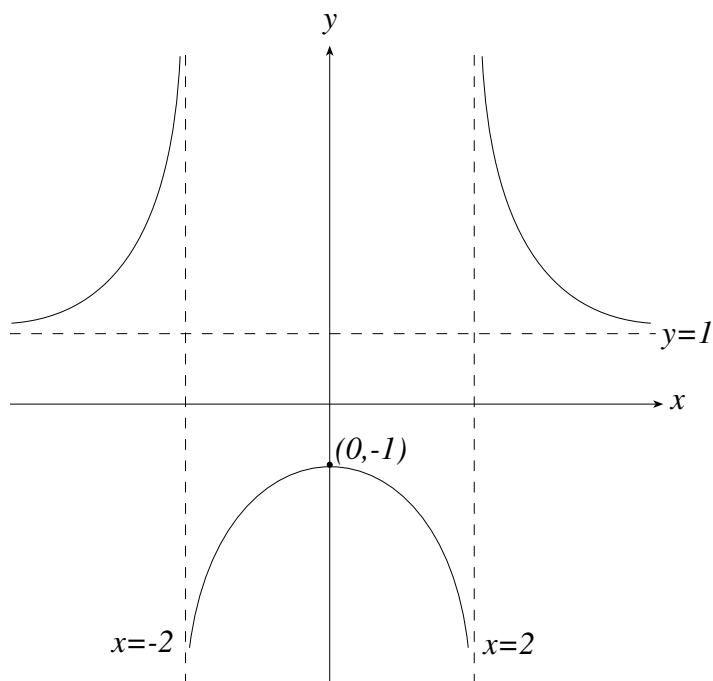
עבור $x \rightarrow \pm\infty$ ערך

הפונקציה שואף ל-1.

כלומר, האסימפטוטה

האופקית היא $y=1$.

כאשר $x \rightarrow 2$ מלמעלה



ציר מס' 7

$y \rightarrow +\infty$, וכאשר $x \rightarrow 2$ מלמטה $y \rightarrow -\infty$, כלומר $x=2$ ו- $x=-2$ הן אסימפטוטות אנכיות. נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא $(0, -1)$, ואין נקודות חיתוך עם ציר ה- x . התיאור הגרפי של הפונקציה נראה בציור מס' 7.

משימה מס' 11

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \quad \text{מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה}$$

עבור $a, b > 0$

פתרון משימה מס' 11

קל להראות, כי הפונקציה מקבלת את ערכה המקסימלי עבור $x > 0$. לפי אי-השוויון בין הממוצע החשבוני לבין הממוצע ההנדסי – ניתן לרשום,

$$\frac{ax^2 + b}{2} \geq \sqrt{ax^2 b} = x\sqrt{ab}$$

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \leq \frac{x}{2x\sqrt{ab}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \quad x > 0 \quad \text{לכן לכל } x > 0$$

השוויון מתקיים רק אם $ax^2 = b$, כלומר $x_{\max} = \sqrt{\frac{b}{a}}$, וערכה המקסימלי של הפונקציה הוא

$$y_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

ג' – פונקציות טריגונומטריות

משימה מס' 1

מצא את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

פתרון משימה מס' 1

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

$$\begin{aligned} y &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \\ &= \cos^2 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

הערך הקטן ביותר של $\sin^2 2x$ הוא 0, והערך הגדול ביותר הוא 1.

$$y_{\min} = \frac{1}{4}, \quad y_{\max} = 1,$$

מכאן, ערכי הקיצון של הפונקציה,

$$(K - \text{כל מספר שלם}) \quad x_{\min} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad x_{\max} = \frac{\pi}{2}k$$

משימה מס' 2

מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

פתרון משימה מס' 2

היות ו- $\sin^2 x \leq 1$ וגם $\cos^2 x \leq 1$, אז $\sin^4 x \leq \sin^2 x$ וגם $\cos^4 x \leq \cos^2 x$.

$$\sin^4 x + \cos^4 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ומכאן

הערך המקסימלי של הפונקציה הוא $y_{\max} = 1$, והוא מתקבל עבור $x_{\max} = \frac{\pi}{2}k$ (K – כל מספר שלם).

משימה מס' 3

מצא את ערכי המינימום והמקסימום של הפונקציה $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x$

פתרון משימה מס' 3

נרשום את הפונקציה בצורה הבאה:

$$y = 5 \left(\sin 2x \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \cos 2x \right)$$

נבחר זווית α באופן ש- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

$$y = 5(\sin 2x \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2x) = 5 \sin(2x + \alpha), \text{ מכאן,}$$

$$y_{\min} = -5, \quad y_{\max} = 5 \text{ נובע: } -1 \leq \sin(2x + \alpha) \leq 1$$

משימה מס' 4

מצא את ערכי המקסימום של הפונקציה $y = \sqrt{\cos^2 x + a \sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + a \cos^2 x}$ עבור $a > 0$.

פתרון משימה מס' 4

$$y^2 = 1 + a^2 + 2\sqrt{(\cos^2 x + a \sin^2 x)(\sin^2 x + a \cos^2 x)}$$

נעלה את הפונקציה בריבוע, ונקבל על סמך אי-השוויון בין הממוצע החשבוני וההנדסי – נקבל,

$$y^2 \leq 1 + a + (\cos^2 x + \sin^2 x + a \sin^2 x + a \cos^2 x) = 1 + a + 1 + a = 2(1 + a)$$

$$\text{כלומר } y^2 \leq 2(1 + a)$$

$$\cos^2 x + a \sin^2 x = \sin^2 x + a \cos^2 x \text{ כאשר, שוויון מתקיים,}$$

על-ידי איסוף איברים ושימוש בזהות טריגונומטרית – מקבלים,

$$y_{\max} = \sqrt{2(1 + a)} \text{ , כלומר הערך המקסימלי של הפונקציה } \cos 2x = a \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$\text{מתקבל עבור } x_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \text{ (כל מספר שלם).}$$

אחרית דבר

אכן החשבון הדיפרנציאלי הוא הכלי המרכזי למציאת ערכי מינימום ומקסימום של משימות בתחומי המתמטיקה השונים. במאמר הובא לקט מגוון של משימות, שערכי הקיצון שלהם נמצאו בשיטות אחרות; מרביתן מבוססות על שימוש באי-השוויון שבין הממוצעים (החשבוני וההנדסי). בהצגת הפתרונות, תוך שימוש בטכניקות שונות. לא הייתה כוונה, ולו הקטנה ביותר, לפגוע במעמדו של החשבון הדיפרנציאלי.

דרכים רגילות משרישות פתרונות טכניים המתקבלים באוטומטיות. לעומתן, דרכים לא שגרתיות מאפשרות יזמות חדשות ומפתחות מיומנויות נוספות. במידה רבה דומה הדבר להבדל שבין דרך אלגברית לבין פתרון על-ידי ניסוי וטעייה של בעיות מילוליות. השימוש בדרכים חלופיות מצביע על המתמטיקה – כשטח קסום עם פתרונות מפתיעים.

מניסיון רב-שנתי בהוראת מתמטיקה בחטיבה העליונה, בקורסים אקדמיים ומתהליך ההדרכה וההכשרה של הסטודנטיות במכללה – הובחנה החשיבות הרבה של שליטה מקיפה בכלים מתמטיים שונים, המאפשרת התמודדות עם בעיות מורכבות ואתגרים, המחייבים שימוש באסטרטגיות פתרון מגוונות.

צורך זה הביא לכך שבמסגרת ההכשרה של סטודנטיות בחוג למתמטיקה של מכללת "שאנן" – ניתן קורס, העוסק בשילוב תחומי מתמטיקה לפתרון בעיות ומשימות שונות.

מראי מקומות

1. ארבל, ב' (1990). **אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיות**. תל-אביב, האוניברסיטה הפתוחה.
2. גרשוביץ, ו' (1987). התרת בעיות ערך קיצון בעזרת אי שוויונים, **על"ה**, 3, עמ' 52-56.
3. סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (תשנ"ח). "שיטות שונות להוכחת אי-שוויונים", **שנתון אמי"ת, רשת מוסדות חינוך**, תל-אביב.
4. קרייזמן, מ' (1994). שימוש בווקטורים להתרת בעיות חלק ב': בעיות ערך קיצון ופתרון משוואות, **על"ה**, 14, עמ' 64-68.

