

שילוב שיטות שונות להוכחת תכונות המקשרות מרובע בר-חסימה עם משולש המוגדר בעזרתו ועם מעגל אוילר של המשולש

תקציר

במאמר זה נציג שלוש תכונות המקשרות מרובע בר-חסימה, עם משולש ששני קדקודיו הם נקודות החיתוך של המשכי צלעות נגדיות של המרובע והקדקוד השלישי הוא המרכז של המעגל החוסם את המרובע ועם מעגל אוילר של משולש זה. נראה שנקודת החיתוך של אלכסוני המרובע היא גם נקודת החיתוך של הגבהים במשולש.

נראה שנקודת החיתוך של קטעי האמצעים של במרובע שייכת למעגל אוילר של המשולש שהגדרנו בעזרת המרובע.

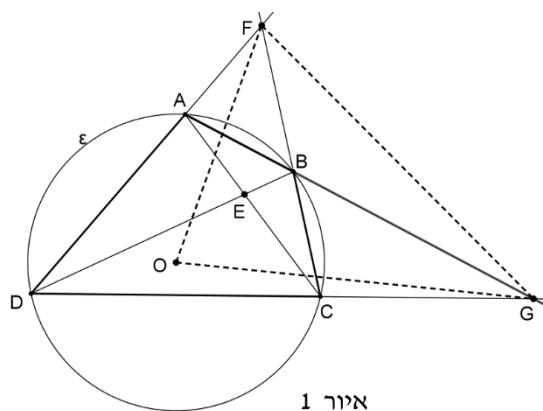
נראה שזווית שבין קטעי האמצעים במרובע שווה לזווית של המשולש שקדקודה במרכז המעגל.

בתהליך ההוכחה של התכונות נדגים שימוש משולב בשיטות הוכחה שונות, ובפרט שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור; שימוש בתכונות של קוטב ופולרה שלו כאשר קוטב ופולרה מוגדרות בעזרת העתקת אינוורסיה; שימוש בתכונות של המרובע השלם.

המאמר מיועד למתעניינים בתכונות חדשות בגאומטריה אוקלידית וכן למורי מתמטיקה בפועל ולסטודנטים בשלבי ההכשרה להוראת המקצוע המעוניינים להכיר שיטות חדשות ופחות מוכרות להוכחת תכונות גאומטריות.

מילות מפתח: מעגל בר-חסימה; מעגל תשע הנקודות (מעגל אוילר); שיטת מספרים מרוכבים בהנדסת המישור; קוטב ופולרה שלו ביחס למעגל; העתקת אינוורסיה; המרובע השלם.

הקדמה

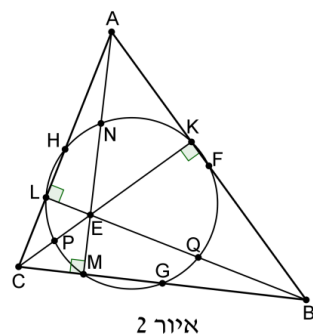


איור 1

במאמר נדבר על מרובע בר-חסימה (מרובע ציקלי) מהצורה הכללית ביותר, כלומר מרובע שצלעותיו אינן מקבילות (ראה מרובע $ABCD$ באיור 1). במרובע כזה המשכי הצלעות הנגדיות נחתכים בשתי נקודות (בנקודות F ו- G באיור 1). הנקודות האלה עם מרכז המעגל החוסם את המרובע מגדירים משולש (המשולש OFG באיור 1).

כל משולש (ובפרט המשולש שתיארנו) מגדיר מעגל העובר דרך תשע הנקודות

האלה: שלושה אמצעי הצלעות (הנקודות F, G, H באיור 2), שלושה עקבי הגבהים (הנקודות K, L, M באיור 2) ושלושה אמצעי הקטעים שבין קדקודי המשולש ובין נקודת מפגש הגבהים (הנקודות N, P, Q באיור 2). מעגל זה נקרא "מעגל אוילר" על שמו של מתמטיקאי דגול לאונרד אוילר שגילה את המעגל בשנת 1765.



איור 2

אפשר להגדיר כל מעגל אוילר באמצעות כל שלוש נקודות מתוך תשע הנקודות שפירטנו לעיל. למעגל אוילר יש הרבה תכונות מעניינות, למשל הוא משיק לארבעת המעגלים המשיקים למשולש, כאשר מעגל אחד חסום במשולש ושלושה מעגלים משיקים למשולש בדרך חיצונית (Excircles), כלומר משיקים לצלע אחת של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות האחרות. תכונה זו ידועה בשם "משפט פיירבך". כמו כן קיימות תכונות המתארות שייכות של נקודות מיוחדות למעגל אוילר (למשל ראה בעיה 374 בתוך Hadamard, 2008).

במאמר זה נוכיח שלוש תכונות המקשרות בין מרובע בר-

חסימה למשולש ולמעגל שתיארנו, כאשר התכונה השנייה מציגה נקודה מיוחדת חדשה השייכת למעגל אוילר.

בהוכחת שלוש התכונות שנציג במאמר נשלב שיטות הוכחה למיניהן, ובפרט נשתמש בשיטות הוכחה נדירות יחסית: שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור, תכונות של קוטב ופולרה שלו ביחס למעגל והעתקת אינוורסיה.

השימוש בשיטות הללו להוכחת תכונות גאומטריות פחות נפוץ ומוכר, ולכן לנוחות הקורא הוספנו נספח בסוף המאמר שבו מובאות ההגדרות והתכונות העיקריות של העתקת אינוורסיה, קוטב ופולרה שלו ביחס למעגל, המרובע השלם. כמו כן בנספח נסביר את שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור, שכן שיטה זו לא מוסברת כלל בספרות מקצועית בעברית.

הנספח מכיל כמה נוסחאות שניתמש בהן בהוכחת התכונות של המאמר והסבר קצר על קבלת הנוסחאות הללו.

שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור מתבססת על העקרונות האלה:

1. בוחרים מערכת צירים קרטזית במישור. כל נקודה M השייכת למישור מקבלת זוג קואורדינטות ממשיות (x, y) או קואורדינטה מרוכבת $m = x + yi$. המספר $\bar{m} = x - yi$ הוא המספר הצמוד ל- m , והוא גם הקואורדינטה המרוכבת של הנקודה M' הסימטרית לנקודה M יחסית לציר הממשי ה- x .

2. שימוש בו בזמן בקואורדינטה m ובמספר הצמוד $\bar{m}$ מאפשר לתאר תכונות של הנקודה M . למשל, המכפלה $m \cdot \bar{m}$ מבטאת את ריבוע המרחק של הנקודה M מראשית הצירים; השוויון $m = \bar{m}$ אומר שהמספר m הוא מספר ממשי.

3. קיימות נוסחאות שמקשרות בין נקודות הנמצאות על צורות גאומטריות או מתארות תכונות של הצורות הללו. הנוסחאות האלה מכילות קואורדינטות של נקודות (בצורה לא מפורטת של אותיות בודדות) ומספרים הצמודים לקואורדינטות (גם כן בצורה של אותיות בודדות).

4. במקרה שהנקודות השייכות למעגל היחידה (מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו שווה ל-1), רוב הנוסחאות יהיו פשוטות יותר.

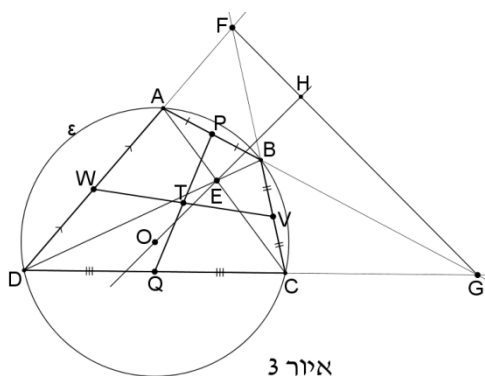
הייחוד של שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור הוא בעובדה שהיא מאפשרת לפתור בעיות גאומטריות בדרך אלגברית בשימוש בנוסחאות מוגדרות וחישובים טכניים של רבי-איברים. הנתונים והדרישות של הבעיה מגדירות באילו נוסחאות של השיטה אפשר להשתמש בפתרון בעיה זו. במקרה של בעיה גאומטרית לא סטנדרטית, מציאת דרך המובילה לפתרון דרושים יצירתיות וחיפוש ממושך. לעומת זאת, שימוש בשיטת המספרים המרוכבים מאפשר לעבור מבעיה גאומטרית לבעיה אלגברית סטנדרטית. החיסרון העיקרי של שיטת המספרים המרוכבים הוא שבתהליך הפתרון מגיעים לשלב שבו נדרש "לפשט את הביטויים שהתקבלו", לפעמים הביטויים הללו ענקיים וקשים לפישוט.

אולם בשלב זה אפשר להיעזר בתוכנות מחשב ייעודיות (למשל Mathematica או MATLAB) ולבצע בעזרתן פישוטים של ביטויים ענקיים. במהלך הוכחת התכונות של המאמר, נשתמש פעמיים בשיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור: בפעם הראשונה נקבל ביטויים פשוטים ולכן נפשט אותם ידנית, ואילו בפעם השנייה ניעזר בתוכנת Mathematica.

שלוש תכונות המקשרות מרובע בר-חסימה עם משולש המוגדר בעזרתו ועם מעגל אוילר של המשולש

משפט

יהי $ABCD$ מרובע החסום במעגל ε (מרכז O של ε), שבו E נקודת חיתוך האלכסונים F ; נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו- AD ; G ; נקודת חיתוך המשכי הצלעות AB ו- CD ; T ; נקודת החיתוך של קטעי האמצעים PQ ו- VW ; H ; נקודת החיתוך של הישרים OE ו- FG (ראה איור 3). אזי:



איור 3

(1) נקודת חיתוך האלכסונים E היא נקודת החיתוך של הגבהים במשולש OFG .

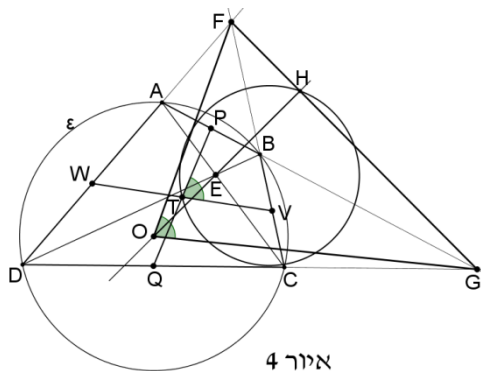
(2) הנקודה T שייכת למעגל אוילר (מעגל תשע הנקודות) של המשולש OFG (ראה איור 4).

(3) הזווית שבין קטעי האמצעים של המרובע $ABCD$ שווה לזווית המשולש OFG שקדקודה היא מרכז המעגל ε , כלומר

$$\angle PTV = \angle FOG$$

הוכחה של תכונה 1

אפשר להוכיח את התכונה (1) בעזרת משפט ברוקד (Brocard's Theorem). עבור הנתון של המשפט שלנו, לפי משפט ברוקד מתקיים:



איור 4

המרכז O של המעגל ε החוסם את המרובע $ABCD$ הוא נקודת החיתוך של המשכי הגבהים (orthocenter) של המשולש EFG .

את משפט ברוקד מוכיחים בעזרת תכונות של קוטב ופולרה שלו ביחס למעגל ובעזרת תכונות של רביעית נקודות הרמונית (למשל (Remorov, 2010)). ממשפט ברוקד נובע כי הישרים GO ו- EF , FO ו- GE , FG ו- OH מאונכים זה לזה בהתאמה, ולכן הנקודה E היא נקודת החיתוך של הגבהים (orthocenter) במשולש OFG .

נוכיח את התכונה (1) בדרך אחרת המתבססת על שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור,

ובכך נדגים את השימוש בשיטה. נבחר מערכת צירים כך שהמעגל ε יהיה מעגל היחידה. נסמן ב- a, b, c ו- d את הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות A, B, C ו- D בהתאמה. הנקודות הללו נמצאות על מעגל היחידה שמשוואתו היא $z \cdot \bar{z} = 1$ (ראה נוסחה (ii) בסעיף 4.2 של הנספח). לכן בין הקואורדינטות של הנקודות למספרים הצמודים להן מתקיים הקשר הבא: $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}$. אפשר לבטא את הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות E, F, G ו- H (והמספרים הצמודים להן) באמצעות הקואורדינטות של הנקודות A, B, C ו- D בדרך הזו (ראה נוסחאות (i) ו-(ii) בסעיף 4.7 של הנספח):

$$\bar{e} = \frac{a+c-b-d}{ac-bd} \text{ וגם } e = \frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} ; \bar{f} = \frac{a+d-b-c}{ad-bc} \text{ וגם } f = \frac{bcd+abc-acd-abd}{bc-ad} ; \\ g = \frac{abd+abc-bcd-acd}{ab-cd} \text{ וגם } \bar{g} = \frac{c+d-a-b}{cd-ab}$$

לפי נוסחה (ii) שבסעיף 4.5 של הנספח, בקואורדינטות מרוכבות התנאי ש- $\vec{FE} \perp \vec{GO}$ שקול לקיום השוויון $(\bar{f} - \bar{e}) \cdot (g - o) + (f - e) \cdot (\bar{g} - \bar{o}) = 0$ (*), והתנאי ש- $\vec{GE} \perp \vec{FO}$ שקול לקיום השוויון $(\bar{g} - \bar{e}) \cdot (f - o) + (g - e) \cdot (\bar{f} - \bar{o}) = 0$ (**).

נציב את הביטויים של האותיות $e, \bar{e}, f, \bar{f}, g, \bar{g}$, באגף השמאלי של השוויון (*) ונקבל:

$$\left(\frac{bcd+abc-acd-abd}{bc-ad} - \frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} \right) \cdot \left(\frac{c+d-a-b}{cd-ab} - 0 \right) + \\ + \left(\frac{a+d-b-c}{ad-bc} - \frac{a+c-b-d}{ac-bd} \right) \cdot \left(\frac{abd+abc-bcd-acd}{ab-cd} - 0 \right)$$

לאחר פישוט הביטויים שבתוך הסוגריים הראשונים של כל אחד משני המחוברים נקבל:

$$\frac{(b-a)(d-c)(acd+bcd-abc)(c+d-a-b)}{(bc-ad)(bd-ac)(cd-ab)} + \\ + \frac{(b-a)(d-c)(a+b-c-d)(abd+abc-bcd-acd)}{(ad-bc)(ac-bd)(ab-cd)}$$

בביטוי שקיבלנו שני המחוברים שונים זה מזה רק בסימן, ולכן סכומם שווה ל-0 והשוויון (*) מתקיים, ולכן הגובה לצלע GO במשולש OFG עובר דרך הנקודה E .

בדומה מוכיחים את קיומו של השוויון (**), ומכאן נובע שגם הגובה לצלע FO עובר דרך הנקודה E . לסיכום, קיבלנו שבמשולש OFG הגבהים לצלעות OG ו- OF נחתכים בנקודה E .

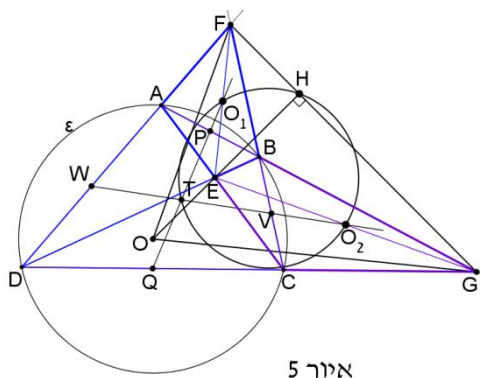
לכן הקטע OH (שגם כן עובר דרך הנקודה E) הוא הגובה לצלע השלישית FG של המשולש OFG .

מש"ל

הוכחה של תכונה 2

נוכיח שהעתקת האינורסיה ביחס למעגל $\mathcal{E}$ מעבירה את הנקודות E ו- H זו לזו (ראה הגדרה ומספר תכונות של אינורסיה בסעיף 1 בנספח).

ביחס למעגל $\mathcal{E}$, הישר EF הוא הפולרה של הנקודה G והישר EG הוא הפולרה של הנקודה F , (ראה תכונה 2 בסעיף 2 של הנספח). לכן לפי תכונות של קוטב ופולרה ביחס למעגל (ראה תכונה 3 בסעיף 2 של הנספח), נקודה החיתוך E של הפולרות EF ו- EG היא קוטב שהפולרה שלו ביחס למעגל $\mathcal{E}$ עוברת דרך הנקודות F ו- G , כלומר פולרה של הנקודה E היא הישר FG . בהוכחה של תכונה 1 הראינו שהישר OE מאונך לישר FG וחותך אותו בנקודה H . לכן לפי ההגדרה של קוטב ופולרה ביחס למעגל (ראה סעיף 2 בנספח), באינוורסיה ביחס למעגל $\mathcal{E}$ הנקודות E ו- H מתחלפות זו עם זו.



נסמן ב- O_1 ו- O_2 את אמצעי הקטעים EG ו- EF בהתאמה, ונזכיר כי הנקודות O_1 ו- O_2 שייכות לשרים PQ ו- VW בהתאמה (ראה איור 5). נשתמש בתכונה הבאה של המרובע השלם (ראה הגדרה של המרובע השלם בסעיף 3 של הנספח): "מרובע השלם אמצעי האלכסונים נמצאים על אותו קו ישר".

במקרה שלנו במרובע השלם $AFBECD$ (ראה איור 5) הנקודות Q, P ו- O_1 הן אמצעי האלכסונים AB, CD ו- EF בהתאמה, ולכן הן נמצאות על אותו קו ישר.

בדומה במרובע השלם $BGCEDA$ הנקודות W, V ו- O_2 הן אמצעי האלכסונים AD, BC ו- EG .
בהתאמה, ולכן הן נמצאות על אותו קו ישר.

כעת נוכיח כי ארבעת הנקודות O_1, T, O_2 ו- H נמצאות על מעגל אחד. נשתמש בשיטת המספרים המרוכבים. נבטא את הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות O_1, T, O_2 ו- H (המספרים הצמודים להן) באמצעות הקואורדינטות של הנקודות A, B, C ו- D :

הנקודה T היא אמצע הקטע PQ . לכן נקבל עבורה (ראה נוסחה (ii) בסעיף 4.3 של הנספח):

$$t = \frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(c + d)) = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

$$\bar{t} = \frac{1}{4}(a + b + c + d) = \frac{bcd+acd+abd+abc}{4abcd} \quad \square$$

עבור הנקודות O_1 ו- O_2 (שהן אמצעי הקטעים EF ו- EG) נקבל:

$$o_1 = \frac{1}{2}(f + e) = \frac{1}{2}(\frac{bcd+abc-acd-abd}{bc-ad} + \frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac})$$

שילוב שיטות שונות לדוכות חכמות המקשרות מרובע בר-חסימה עם משולש המוגדר בעזרתו ועם מעגל אוילר של המשולש

$$\begin{aligned}\bar{o}_1 &= \frac{1}{2}(\bar{f} + \bar{e}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a+d-b-c}{ad-bc} + \frac{a+c-b-d}{ac-bd}\right) \text{ וגם} \\ o_2 &= \frac{1}{2}(g + e) = \frac{1}{2}\left(\frac{abd+abc-bcd-acd}{ab-cd} + \frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac}\right) \\ \bar{o}_2 &= \frac{1}{2}(\bar{g} + \bar{e}) = \frac{1}{2}\left(\frac{c+d-a-b}{cd-ab} + \frac{a+c-b-d}{ac-bd}\right) \text{ וגם}\end{aligned}$$

בין הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות E ו- H והמספרים הצמודים להן מתקיים הקשר

$$h = \frac{ac-bd}{a+c-b-d} \text{ ולכן } \bar{h} = \frac{1}{e} \text{ וגם } h = \frac{1}{e} : \text{ (ראה סעיף 4.9 בנספח)} \\ \bar{h} = \frac{bd-ac}{bcd+abd-acd-abc} \text{ וגם}$$

התנאי שהנקודות O_2, T, O_1 נמצאות על מעגל אחד שקול לקיום הנוסח

$$(***) \frac{o_1-t}{o_2-t} : \frac{o_1-h}{o_2-h} = \frac{\bar{o}_1-\bar{t}}{\bar{o}_2-\bar{t}} : \frac{\bar{o}_1-\bar{h}}{\bar{o}_2-\bar{h}} \text{ (ראה סעיף 4.8 בנספח)}.$$

נציב בשוויון (***) את הביטויים של האותיות $t, \bar{t}, o_1, \bar{o}_1, o_2, \bar{o}_2, h$ ו- $\bar{h}$ שקיבלנו לעיל ונקבל:

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\left(\frac{bcd+abc-acd-abd}{bc-ad} \right) + \left(\frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} \right) - \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)}{\left(\frac{abd+abc-bcd-acd}{ab-cd} \right) + \left(\frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} \right) - \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)} \right) \times \\& \times \left(\frac{\left(\frac{abd+abc-bcd-acd}{ab-cd} \right) + \left(\frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} \right) - \left(\frac{ac-bd}{a+c-b-d} \right)}{\left(\frac{bcd+abc-acd-abd}{bc-ad} \right) + \left(\frac{bcd+abd-acd-abc}{bd-ac} \right) - \left(\frac{ac-bd}{a+c-b-d} \right)} \right) = \\& = \left(\frac{\left(\frac{a+d-b-c}{ad-bc} \right) + \left(\frac{a+c-b-d}{ac-bd} \right) - \left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{4abcd} \right)}{\left(\frac{c+d-a-b}{cd-ab} \right) + \left(\frac{a+c-b-d}{ac-bd} \right) - \left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{4abcd} \right)} \right) \times \\& \times \left(\frac{\left(\frac{c+d-a-b}{cd-ab} \right) + \left(\frac{a+c-b-d}{ac-bd} \right) - \left(\frac{bd-ac}{bcd+abd-acd-abc} \right)}{\left(\frac{a+d-b-c}{ad-bc} \right) + \left(\frac{a+c-b-d}{ac-bd} \right) - \left(\frac{bd-ac}{bcd+abd-acd-abc} \right)} \right)\end{aligned}$$

לאחר פישוט של שני אגפי השוויון (בביצוע הפישוט נעזרנו בתוכנת Mathematica) מקבלים בכל

$$-\frac{(b-c)(a-d)(a^2cd+b^2cd+ab(c^2-4cd+d^2))}{(a-b)(c-d)(a^2bc+a(b^2-4bc+c^2)d+bcd^2)} : \text{אחד מהאגפים את אותו הביטוי}$$

לכן השוויון (***) מתקיים, והנקודות O_2, T, O_1 ו- H נמצאות על מעגל אחד.

נוכיח כי המעגל העובר דרך הנקודות O_2, O_1 ו- H הוא מעגל "תשעת נקודות" (מעגל אוילר) במשולש OFG .

הקטע OH הוא גובה במשולש OFG , ולכן בסיס הגובה (הנקודה H) שייך למעגל אוילר.

הנקודות O_1 ו- O_2 הן אמצעי הקטעים המחברים את קדקודי המשולש F ו- G עם נקודת מפגש הגבהים E . קיבלנו שהנקודות O_1, H ו- O_2 הן שלוש נקודות מתוך תשע הנקודות השייכות ל"מעגל אוילר" במשולש OFG . מכאן נובע שהנקודות האלה מגדירות את המעגל, ולכן הנקודה T שייכת למעגל זה.

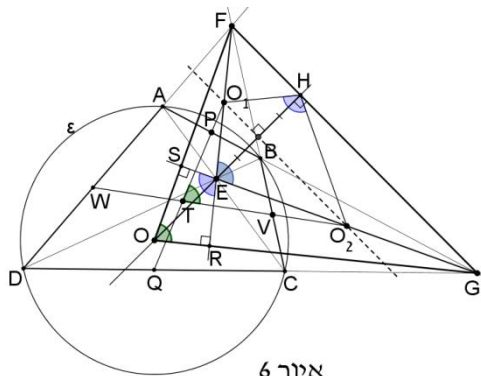
מש"ל

הוכחה של תכונה 3

נוכיח את שני השוויונות :

$$(I) \quad \angle FOG + \angle FEG = 180^\circ \quad \text{ו-} \quad (II) \quad \angle PTV + \angle FEG = 180^\circ$$

שוויון הזוויות $\angle FOG$ ו- $\angle PTV$.



כדי להוכיח את השוויון (I), נמשיך את הקטעים FE ו- GE כך שיתקבלו הגבהים FR ו- GS לצלעות OG ו- OF בהתאמה (ראה איור 6). במרובע בר-חסימה $EROS$, סכום הזוויות הנגדיות $\angle SER$ ו- $\angle SOR$ שווה ל- 180° ומכאן, מכיוון ש- $\angle SOR = \angle FOG$ ו- $\angle SER = \angle FEG$ (ראה איור 6), מקבלים את השוויון (I).

כדי להוכיח את השוויון (II), נבצע את בניית העזר האלה (ראה איור 6): (1) הישר O_1O_2 ; (2) הקטעים O_1H ו- O_2H .

הקטע O_1O_2 הוא קטע האמצעים במשולש EFG , ולכן הוא חוצה את הקטע EH ומאונך אליו (כי FG מאונך ל- EH). מכאן נובע כי יחסית לישר O_1O_2 , הזוויות $\angle O_1EO_2$ ו- $\angle O_1HO_2$ סימטריות זו לזו, ולכן $\angle O_1EO_2 = \angle O_1HO_2$ ומכיוון ש- $\angle O_1EO_2 = \angle FEG$, מתקיים $\angle FEG = \angle O_1HO_2$.

מהתכונה 2 שהוכחנו נובע כי המרובע O_1TO_2H הוא בר-חסימה, ולכן מתקיים השוויון $\angle O_1TO_2 + \angle O_1HO_2 = 180^\circ$ (III)

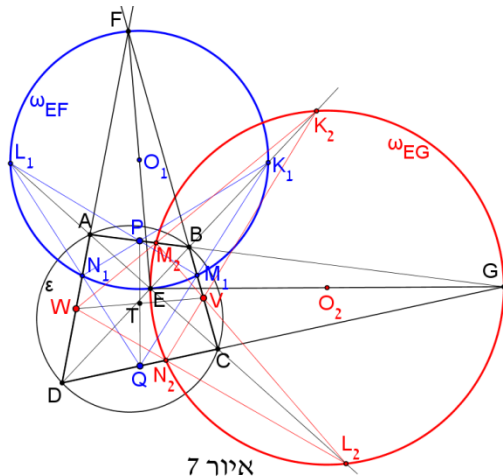
בעזרת סדרת השוויונות שקיבלנו לעיל, אפשר להמיר את השוויון (III) לשוויון (II).

לסיכום, הוכחנו שהשוויונות (I) ו-(II) מתקיימים, ומכאן נובע שמתקיים $\angle PTV = \angle FOG$.
מש"ל

הערה

בתאוריה של "מרובע קמור ומעגל היוצר נקודות פסקל על צלעות המרובע" (פרייברט, 2014 ; Fraivert, 2016a), מוכיחים שבמרובע בר-חסימה, האמצעים של זוג צלעות נגדיות הם "נקודות פסקל" הנוצרות בעזרת המעגל שקוטרו הוא הקטע המחבר את נקודת חיתוך האלכסונים של מרובע ואת נקודת החיתוך של הזוג השני של צלעות נגדיות. (Fraivert, 2016b)

למשל הנקודות P ו- Q הן "נקודות פסקל" הנוצרות על הצלעות AB ו- CD בעזרת המעגל שקוטרו הוא הקטע EF (ראה איור



איור 7

7), והנקודות V ו- W הן "נקודות פסקל" הנוצרות על הצלעות BC ו- AD בעזרת המעגל שקוטרו הוא הקטע EG . לכן אפשר לנסח את התכונות (2) ו-(3) לעיל בדרך זו:

יהי $ABCD$ מרובע החסום במעגל ε (O מרכז של ε) שבו E נקודת חיתוך האלכסונים; F נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו- AD ; G נקודת חיתוך המשכי הצלעות AB ו- CD ; P ו- Q נקודות פסקל על הצלעות AB ו- CD הנוצרות בעזרת המעגל שקוטרו הוא הקטע EF ; V ו- W נקודות פסקל על הצלעות BC ו- AD הנוצרות בעזרת המעגל שקוטרו הוא הקטע EG .

אז (i) נקודת חיתוך הישרים PQ ו- VW שייכת למעגל תשע הנקודות של המשולש OFG ; (ii) הזווית החדה שבין הישרים PQ ו- VW שווה לזווית המשולש OFG שקדוקדה היא מרכז המעגל ε .

רשימת מקורות

- פרייברט, ד' (2014). חקירה של תמונות מצב גאומטריות בתהליך ספירלי של אינדוקציה ודדוקציה. **שאנן, כ**, 406-397.
- Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Fraivert, D. (2016a). The theory of a convex quadrilateral and a circle that forms "pascal points" – The properties of "pascal points" on the sides of a convex quadrilateral. *Journal of Mathematical Sciences*, 40, 1-34. doi:10.18642/jmsaa_7100121666
- Fraivert, D. (2016b). The theory of an inscribable quadrilateral and a circle that forms pascal points. *Journal of Mathematical Sciences*, 42, 81-107. doi: 10.18642/jmsaa_7100121742
- Fraivert, D. (2017). Properties of the tangents to a circle that forms Pascal points on the sides of a convex quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 17, 223-243.
- Hadamard, J. (2008). *Lessons in geometry* (Vol 1. Plane Geometry). Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- Remorov, A. (2010). Projective geometry. *Canadian IMO Training, Summer*. Retrieved from <https://sites.google.com/site/imocanada/2010-summer-camp>
- Skopets, Z. (1990). Geometrical miniature (G. D. Gleizer, Ed.). Moscow: Prosveshenie. (In Russian)
- Yaglom, I. M. (1968). *Complex numbers in geometry*. New York: Academic Press.

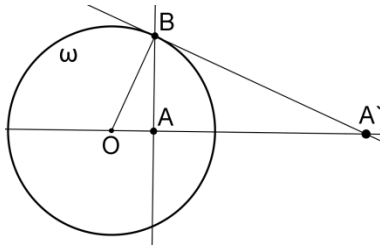
נספח

סעיף 1 – אינוורסיה¹

הגדרה

יהיו: ω – מעגל בעל רדיוס r , שמרכזו בנקודה O .

אינוורסיה עם מרכז O ורדיוס r היא העתקה המעבירה כל נקודה A , השונה מהנקודה O , לנקודה A' המקיימת את התנאים האלה:



(i) A' שייכת לקרן OA .

(ii) המרחקים מהנקודה O לנקודות A ו- A' מקיימים

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad (*)$$

המעגל ω נקרא "מעגל האינוורסיה".

התכונות הנובעות ישר מההגדרה

- אינוורסיה המעבירה את הנקודה A לנקודה A' מעבירה גם את הנקודה A' לנקודה A .
- אינוורסיה המעבירה כל נקודה הנמצאת על המעגל ω לעצמה.
- כל נקודה הפנימית למעגל ω (השונה מהנקודה O), עוברת באינוורסיה לנקודה החיצונית ל- ω . וכן להפך, כל נקודה החיצונית למעגל ω , עוברת באינוורסיה לנקודה הפנימית ל- ω .
- בהינתן נקודה A' החיצונית למעגל ω , נעביר משיק $A'B$ מהנקודה A' למעגל ω , אז הקטע בין נקודת ההשקה B לנקודה A הוא הגובה ליתר במשולש ישר זווית $A'BO$ (ראה איור).

1. ראה קוסטר (Coxeter, 1967), פרק 5 פסקה 3.

סעיף 2 – קוטב ופולרה ביחס למעגל נתון²

הגדרה

יהיו:

ω – מעגל בעל רדיוס r , שמרכזו בנקודה O .

A – נקודה השונה מ- O .

A' – תמונה של A המתקבלת בעזרת אינוורסיה ביחס למעגל ω .

a – ישר העובר דרך הנקודה A' ומאונך לישר OA (ראה

איורים (a) ו-(b)).

הנקודה A והישר a נקראים הקוטב (pole) והפולרה (polar)

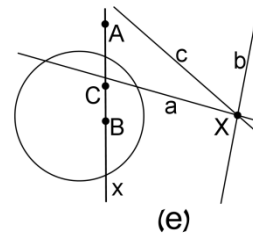
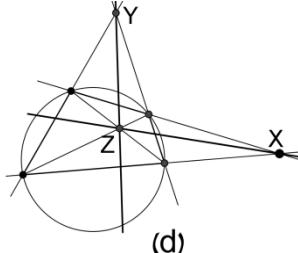
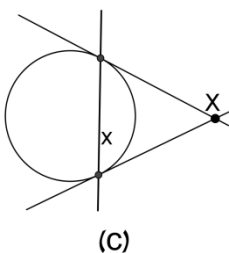
ביחס למעגל ω .

תכונות של קוטב ופולרה

(1) עבור קוטב X נתון הנמצא מחוץ למעגל, הפולרה x היא הישר העובר דרך שתי נקודות ההשקה של המשיקים למעגל ω , היוצאים מהנקודה X (ראה איור (c)).

(2) עבור מרובע החסום במעגל שבו והאלכסונים נחתכים בנקודה Z והמשכי הצלעות הנגדיות נחתכות בנקודות X ו- Y (ראה איור (d)), מתקיים: הישר ZY הוא הפולרה של הנקודה X והישר ZX הוא הפולרה של הנקודה Y .

(3) אם הישרים a, b, c עוברים דרך הנקודה X , אז הקטבים שלהם A, B, C (ביחס למעגל הנבחר) שייכים לישר x , שהוא הפולרה של הקוטב X (ראה איור (e)).



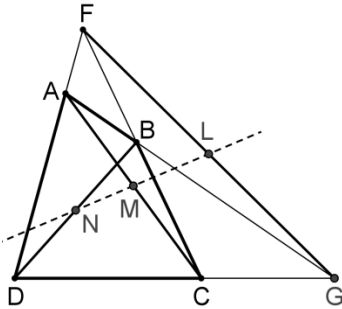
2. קוסטר (שם), פרק 6 פסקה 1 וכן הדמרד (Hadamard, 2008), סעיפים 204, 205.

סעיף 3 – המרובע השלם³

הגדרה

המרובע השלם הוא צורה המתקבלת ממרובע רגיל כלשהו שבו המשיכו את הצלעות הנגדיות עד לנקודת חיתוך. המרובע השלם מכיל שישה קדקודים הנגדיים זה לזה בזוגות. שני זוגות נגדיים הם אותם שני זוגות קדקודים שהיו נגדיים במרובע ההתחלתי, הזוג הנגדי השלישי הוא שתי נקודות החיתוך של המשיכי הצלעות.

הישר שעובר דרך זוג קדקודים נגדיים נקרא אלכסון של המרובע השלם.



לדוגמה, באיור בצד שמאל מופיע המרובע השלם $ABCD$ המתקבל מהמרובע $ABCD$ על ידי המשכת הצלעות הנגדיות עד לחיתוכן בנקודות F ו- G . הישרים AC , BD ו- FG הם אלכסוני המרובע השלם.

תכונת אמצעי האלכסונים במרובע השלם:

במרובע השלם, אמצעי האלכסונים נמצאים על קו ישר.

הוכחת התכונה הזו מתבססת על משפט מנלאוס (ראה למשל הדמרד (Hadamard, 2008), סעיף 194).

במרובע השלם $ABCD$ שבאיור הנקודות L, M, N הן אמצעי האלכסונים FG, AC, BD בהתאמה. לכן הן נמצאות על אותו קו ישר, כנראה באיור.

סעיף 4 – שיטת המספרים המרוכבים בהנדסת המישור⁴

4.1. מרחק בין שתי נקודות

היהו A ו- B שתי נקודות במישור עם מערכת צירים קרטזית, המספרים המרוכבים a ו- b הם הקואורדינטות של A ו- B בהתאמה.

המרחק $|AB|$ שבין הנקודות מחושב בעזרת הנוסחה: $|AB| = |\overline{AB}| = |b - a|$, כאשר המספר הממשי $|b - a|$ הוא הערך המוחלט של המספר המרוכב $b - a$.

עבור מספר מרוכב z , הנוסחה לחישוב הריבוע של הערך המוחלט היא $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, ולכן אפשר להציג את ריבוע המרחק שבין הנקודות A ו- B בדרך זו:

$$|AB|^2 = (b - a)(\bar{b} - \bar{a}) \quad (\text{כאשר } \bar{b} - \bar{a}) \text{ הוא המספר הצמוד למספר } (b - a).$$

3. ראה הדמרד (שם), סעיף 194.

4. ראה סקופטס (Skopets, 1990), עמ' 154-181, וכן יגלום (Yaglom, 1968), פסקה 13.

4.2. משוואות מעגל

מנוסחת המרחק בין שתי נקודות שהבאנו בסעיף הקודם נקבל את משוואת המעגל בעל רדיוס ממשי r , שמרכזו בראשית הצירים (בנקודה $O(0)$): $(i) \ z \cdot \bar{z} = r^2$ (במקרה זה $A = O$ ו- $B = Z$ היא נקודה כלשהי הנמצאת במרחק r מהנקודה O).

עבור מעגל היחידה (מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו שווה ליחידת האורך) משוואת המעגל היא $(ii) \ z \cdot \bar{z} = 1$. מהנוסחה הזו מתקבלת נוסחה חשובה המקשרת בין הקואורדינטה z של נקודה Z הנמצאת על מעגל היחידה ובין המספר הצמוד $\bar{z}$: $(iii) \ \bar{z} = \frac{1}{z}$.

עבור מעגל בעל רדיוס r שמרכזו בנקודה $A(a)$, משוואת המעגל תהיה:

$$(iv) \ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

4.3. יחס בחלוקת קטע ותנאי לקולינאריות של שלוש נקודות

את היחס $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ ($\lambda \neq -1$) שבו הנקודה C מחלקת את הקטע AB נבטא בעזרת הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות A, B ו- C בדרך זו: $(i) \ \lambda = \frac{c-a}{b-c}$ כאשר $\bar{\lambda} = \lambda$ מספר ממשי.

התנאי שהמספר λ ממשי, הכרחי ומספיק כדי להבטיח שהנקודות A, B ו- C יהיו קולינאריות, כלומר ימצאו על אותו קו ישר.

במקרה $\lambda = 1$, מתקיים שהנקודה C היא אמצע הקטע AB , ולכן:

$$(ii) \ c = \frac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow c - a = b - c \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-c} = 1$$

במקרה שהנקודה C נמצאת בראשית הצירים, כלומר $c = 0$, התנאי לקולינאריות של הנקודות

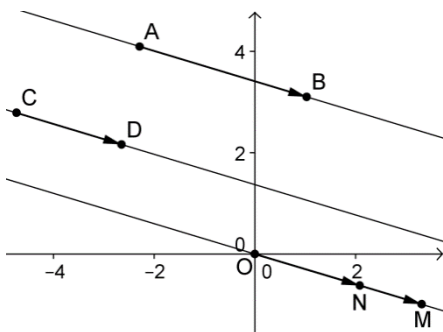
$$A(a) \text{ ו- } B(b) \text{ עם נקודת ראשית הצירים } O(0) \text{ יהיה: } \frac{-a}{b} = \lambda = \bar{\lambda} = \frac{-\bar{a}}{b}$$

ומכאן: $(iii) \ a\bar{b} = \bar{a}b$.

4.4. מקבילות של ישרים (קטעים)

יהיו AB ו- CD שני קטעים מקבילים. נעתיק את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ לנקודת ראשית הצירים O ונקבלוקטור $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

לכן עבור קואורדינטות המרוכבות של הנקודות A, B ו- M מתקיים: $b - a = m$.



בדומה נעתיק את הווקטור $\overrightarrow{CD}$ לנקודה O ונקבל וקטור $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$, ולכן בקואורדינטות מרוכבות מתקיים: $d - c = n$.

הנקודות M ו- N קולינאריות עם הנקודה O , ולכן לפי תכונה (iii) מהסעיף הקודם, מתקיים: $m\bar{n} = \bar{m}n$. נציב את הביטויים של m ו- n ונקבל:

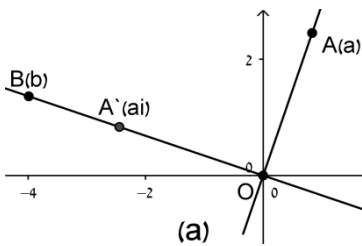
$$(i) (b - a)(\bar{d} - \bar{c}) = (\bar{b} - \bar{a})(d - c)$$

במקרה שהנקודות A, B, C ו- D שייכות למעגל היחידה (ולכן מתקיים: $\bar{c} = \frac{1}{c}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{a} = \frac{1}{a}$) ו- $\bar{d} = \frac{1}{d}$, המיתרים AB ו- CD של המעגל מקבילים זה לזה, ובין הקואורדינטות של הנקודות מתקיים הקשר:

$$(ii) ab = cd \text{ או } (b - a)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)(d - c)$$

במקרה שהנקודות A, B, C ו- D קולינאריות, מתקיים $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, ולפי נוסחה (i) נקבל תנאי נוסף לקולינאריות של שלוש נקודות: $(iii) (b - a)(\bar{c} - \bar{a}) = (\bar{b} - \bar{a})(c - a)$.

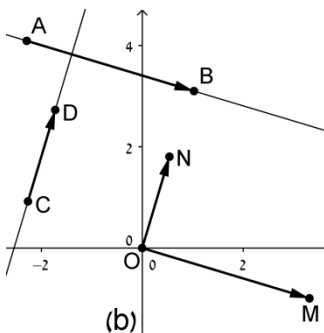
4.5. ניצבות של ישרים (קטעים)



יהיו OA ו- OB שני ישרים מאונכים הנחתכים בראשית הצירים, כאשר הנקודות $A(a)$ ו- $B(b)$ הן נקודות אקראיות על הישרים. אם נכפיל את המספר המרוכב a במספר המדומה i , יתקבל המספר ai שהוא הקואורדינטה המרוכבת של הנקודה A' המתקבלת מהנקודה A על ידי סיבוב הנקודה O בזווית של 90° כנגד כיוון השעון. הנקודה

A' שייכת לישר OB , ולכן הנקודות A' ו- B קולינאריות עם ראשית הצירים O (ראה איור (a)).

לפי נוסחה (ii) בסעיף 4.4 מתקיים: $b \cdot \bar{a}i = \bar{b} \cdot a$, ומכאן: $b \cdot \bar{a} \cdot (-i) = \bar{b} \cdot a \cdot i$ ולבסוף: $(i) a\bar{b} + \bar{a}b = 0$.



יהיו AB ו- CD שני קטעים המאונכים זה לזה. נעתיק את הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CD}$ לנקודת ראשית הצירים O ונקבל: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON}$ ו- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

לכן עבור קואורדינטות המרוכבות של הנקודות M, B, A ו- N מתקיים: $d - c = n$ ו- $b - a = m$.

מכיוון ש- $OM \perp ON$, לפי הנוסחה (i) מתקיים:

$$m\bar{n} + \bar{m}n = 0$$

שילוב שיטות שונות לדוכחות חכמות המקשרות מרובע בר-חסימה עם משולש המוגדר בעזרתו ועם מעגל אוילר של המשולש

$$(ii) (b-a)(\bar{d}-\bar{c}) + (\bar{b}-\bar{a})(d-c) = 0$$

הנוסחה (ii) היא תנאי לכך שהישרים (הקטעים) AB ו- CD יהיו מאונכים.

4.6. משוואה של ישר

אם נחליף בנוסחה (iii) של סעיף 4.4 את הקואורדינטה c של הנקודה C בקואורדינטה z של נקודה אקראית Z הקולינארית עם הנקודות A ו- B , נקבל את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $A(a)$ ו- $B(b)$: $(\bar{z}-\bar{a})(b-a) = (z-a)(\bar{b}-\bar{a})$.

$$(i) \bar{z} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b}z + \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{a-b}$$

מקרים פרטיים של משוואת הישר:

(א) במקרה שהנקודות A ו- B נמצאות על מעגל היחידה (שמשוואתו $z \cdot \bar{z} = 1$), נמיר את

הנוסחה (i) לצורה זו: $\bar{z} = -\frac{1}{ab}z + \frac{a+b}{ab}$, ולבסוף לקבל את משוואת הישר העובר דרך

המיתר AB של מעגל היחידה: $(ii) z + ab\bar{z} = a + b$.

(ב) במקרה שהנקודה B מתלכדת עם מרכז $O(0)$ של המעגל היחידה, משוואת הישר OA

תהיה: $(iii) a\bar{z} = \bar{a}z$ או $\bar{z} = \frac{\bar{a}-0}{a-0}z + \frac{a\bar{0}-\bar{a}0}{a-0}$.

4.7. נקודת החיתוך של שני ישרים

יהיו AB ו- CD שני מיתרים של מעגל היחידה הנחתכים בנקודה $P(p)$. נבטא את הקואורדינטה המרוכבת p בעזרת הקואורדינטות המרוכבות של הנקודות A, B, C ו- D . נתבונן במערכת המשוואות של הישרים AB ו- CD :

$$\begin{cases} z + ab\bar{z} = a + b \\ z + cd\bar{z} = c + d \end{cases} \quad (ii) \text{ בסעיף 4.6. (ראה נוסחה)}$$

$$\bar{z} = \frac{a+b-c-d}{ab-cd}$$

$$p = \frac{\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}}{ab-cd} \quad \text{וגם} \quad (i) \bar{z}_P = \bar{p} = \frac{a+b-c-d}{ab-cd}$$

מכיוון שבמעגל היחידה מתקיים: $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$ ו- $\bar{d} = \frac{1}{d}$, לכן נקבל

$$(ii) p = \frac{bcd+acd-abd-abc}{cd-ab}$$

במקרה הכללי שבו הנקודות A, B, C ו- D לא שייכות למעגל היחידה, נצטרך לפתור את

המערכת:
$$\begin{cases} \bar{z} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{b-a}z + \frac{b\bar{a}-\bar{b}a}{b-a} \\ \bar{z} = \frac{\bar{d}-\bar{c}}{d-c}z + \frac{d\bar{c}-\bar{d}c}{d-c} \end{cases}$$
 (ראה נוסחה (i) בסעיף 4.6), פתרון המערכת הוא:

$$(iii) z_p = p = \frac{\frac{\bar{c}d-\bar{c}\bar{d}}{d-c} - \frac{\bar{a}b-\bar{a}\bar{b}}{b-a}}{\frac{\bar{b}-\bar{a}}{b-a} - \frac{\bar{d}-\bar{c}}{d-c}} = \frac{(b-a)(\bar{c}d-\bar{c}\bar{d}) - (d-c)(\bar{a}b-\bar{a}\bar{b})}{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}$$

4.8. התנאי לשייכות של ארבע נקודות למעגל אחד

אם $A(a), B(b), C(c), D(d)$ הן ארבע נקודות השייכות לאותו מעגל, אז היחס הכפול שלהן הוא מספר ממשי. כלומר מתקיים: $(a, b; c, d) = (\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$ או

$$(i) \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} : \frac{\bar{a}-\bar{d}}{\bar{b}-\bar{d}}$$

4.9. הקואורדינאטות של שתי נקודות העוברות זו לזו באינורסיה ביחס למעגל היחידה

יהי ישר m – פולרה של הנקודה $E(e)$ ביחס למעגל היחידה O , ויהי $H(h)$ – נקודות חיתוך הישרים OE ו- m , אז האינורסיה ביחס למעגל היחידה מעבירה את הנקודה E לנקודה H . הנוסחאות המקשרות בין הקואורדינאטות המרוכבות (והמספרים הצמודים להן) של הנקודות

$$E \text{ ו- } H: h = \frac{1}{e} \text{ ו- } \bar{h} = \frac{1}{\bar{e}}$$