

ועוד על מספרי סדרת פיבונצ'י

תקציר

סדרת מספרי פיבונצ'י היא רבת פנים ויופי ומופיעה במגוון רחב של מקומות: בהתרבות בעלי-חיים, בצמחים ובעצים, באומנות ובארכיטקטורה.

פרט לכך, ישנם בסדרה יחסי מספרים מרתקים, שמעוררים עניין בקרב המתמטיקאים.

מתברר, שמספר האפשרויות לרדת קבוצה של מדרגות ע"י ירידה של מדרגה אחר מדרגה, או שתי מדרגות בבת-אחת, ואף שלוש מדרגות בבת-אחת הוא שמהווה את סדרת פיבונצ'י.

חישוב האפשרויות לרדת קבוצה מסוימת של מדרגות – הוצג בעזרת חישובים קומבינטוריים, והובאה הכללה למקרה של n מדרגות.

הקדמה

סדרת המספרים $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ נקראת על שמו של פיבונצ'י.

פיבונצ'י, מתמטיקאי בעל שיעור קומה, נולד בפיזה שבאיטליה, וחי בתקופת ימי הביניים (1170-1250). עיקר עיסוקו היה בתחום תורת המספרים, ובפעילותו במדינות המערב הוא קידם את שיטות האריתמטיקה והאלגברה של העולם המוסלמי. חשוב לציין את תרומתו לחדירת הספרות המקובלת כיום, הספרות ההודיות-ערביות, שהחליפו את הספרות הרומיות.

בעת התמודדותו עם חידת התכבנות הארנבים, כפי שמתוארת בספרו "ספר האבקוס" (Liber Abaci שפורסם ב-1202), גילה פיבונצ'י את הסדרה, הנקראת על שמו.

בשנות ה-70 של המאה ה-19, מאות שנים אחר תקופתו של פיבונצ'י, התגלו בטבע דוגמאות רבות לסדרה פיבונצ'י (1-3):

בוטניקאים גילו, שתבנית ניצני העלים על גבעולים מסוימים – זהה לסדרה של פיבונצ'י. הספירלות של הגרעינים שבראש החמנייה מציגים מספרים אלו, וכן – עלי-הכותרת של הארטישוק והקליפות של האננס, האיציטרובלים של עצי האורן.

תאריכים: סדרת פיבונצ'י, סדרות מספרים.

מילות מפתח: סדרת פיבונצ'י, סדרות מספרים.

את מספרי פיבונצ'י אפשר לראות על קלידי הפסנתר: אוקטבה מורכבת מ-5 קלידים שחורים (בקבוצות של 2 ו-3) ו-8 קלידים לבנים, סה"כ 13. כל המספרים הללו הם מספרי פיבונצ'י. בתלמוד, שקדם מאות שנים לתקופתו של פיבונצ'י, מופיעה במסכת בבא בתרא, דף פ' עמוד א', סוגיה, הקשורה לפירון השנתי של היונים:

"הלוקח פירות שובך מחברו – מפריח בריכה ראשונה". ביאור המקור: אדם, הקונה מחברו את הגוזלות שיוולדו (פירות השובך) במשך השנה מהשובך – "מפריח בריכה ראשונה", כלומר, הלוקח משאיר למוכר את הזוג הראשון, שנולד לאחר המכירה, כדי שהזוג הראשון שנולד יהיה צוות להורים (התור והיונה), שאם לא כן תברח האם עם בן-זוגה, ואז אין קיום לשובך כלל וכלל.

בהסתמך על פירוש הרשב"ם ובעלי-התוספות וכן ממידע מקצועי, שהתקבל ממגדל יוני דואר – מתברר, שמספרי פיבונצ'י מתקבלים בכל ענפי עץ הרבייה של היונים לפי חודשים (דור ההורים, דור הבנים, דור הנכדים וכו') (4), כלומר, סדרת פיבונצ'י איננה רק סדרה תיאורטית, אלא, סדרה יישומית בפירון היונים כתלות בחודשים. למעשה, בעיית פירון היונים דומה במידה רבה לבעיית התרבות הארנבות, שבה עסק פיבונצ'י.

סדרת פיבונצ'י מוגדרת בעזרת כלל-נסיגה, אשר לפיו כל איבר בסדרה הוא סכום שני איברים שקדמו לו, דהיינו:

$$(a_0 = 0 \text{ השלמת ראשית הסדרה נעשית על-ידי הרישום}) \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

הנוסחה המפורשת לאיבר הכללי של הסדרה היא,

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

לעומת זאת, הנוסחה לסיכום של איברי הסדרה היא:

$$S_n = a_{n+2} - 1$$

בסדרת מספרי פיבונצ'י ישנם יחסי מספרים מרתקים:

1. סכום הריבועים של כל שני מספרי פיבונצ'י עוקבים הוא תמיד מספר פיבונצ'י אחר.
2. ריבועו של כל איבר בסדרת פיבונצ'י נבדל ב-1 ממכפלת האיברים שממנו צדדיו, כלומר מתקיים הקשר הבא:

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n$$

3. הסכום של כל עשרת מספרי פיבונצ'י עוקבים הוא תמיד מספר המתחלק ב-11.
4. כל מספר שלישי מתחילת הסדרה הוא מספר זוגי, וכך כל מספר רביעי הוא כפולה של 3, וכל מספר חמישי הוא כפולה של 5.

שנתון "מל"ה – תשס"ז – כרך י"ב

5. ספרת האֶחָדוֹת של איבר בסדרה – חוזרת על עצמה במחזור של 60 איברים :
- אם $f(n)$ הוא מספר פיבונצ'י במקום ה- n י בסדרה והוא בעל ספרת אֶחָדוֹת a , אז גם למספר $f(n+60k)$, כאשר k הוא מספר טבעי, תהיה אותה ספרת אחדות a .
- שתי הספרות האחרונות חוזרות על עצמן במחזוריות של 300 איברים. שלוש הספרות האחרונות חוזרות על עצמן במחזוריות של 1500 איברים.
6. סכום מספר אי-זוגי של מכפלות זוגות פיבונצ'י עוקבים מתחילת הסדרה – שווה לריבוע מספר פיבונצ'י האחרון בסדרה, כפי שנראה בדוגמה הבאה :
- $$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 13 + 13 \cdot 21 = 21^2$$
7. המכפלה של שני מספרי פיבונצ'י עוקבים, שווה לסכום הריבועים של כל מספרי פיבונצ'י עד כולל המספר הקטן של בני הזוג. התכונה נראת בסכמה הבאה
- $$1^2 = 1 \cdot 1$$
- $$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$$
- $$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$$
- $$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$$
- $$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8$$
8. בסדרה של כל ארבעה מספרי פיבונצ'י עוקבים a, b, c, d , שלושת המספרים $ad, (2 \cdot b \cdot c), (c^2 + d^2)$ הם שְׁלִשָּׁה פיתגורית :
- $$8, 13, 21, 34 \Rightarrow (8 \cdot 34)^2 + (2 \cdot 13 \cdot 21)^2 = (13 + 21^2)^2$$
- לדוגמה : את התכונה הבאה גילה המתמטיקאי המפורסם, צ'רלס כִּיין.

אפשר למצוא בסדרה מספר תכונות נוספות :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.618$$

הגבול של המנה הוא מספר, שערכו בקרוב 1.618.

ערך זה קרוב מאוד לערך של $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, המוגדר כמספר הזהב, (או יחס – הזהב), שהוא הפתרון החיובי של המשוואה הריבועית $X^2 - X - 1 = 0$.

נוהגים לסמן את מספר הזהב – באות יוונית Φ – פי (פי רפה). ממספר הזהב נגזר גם מלבן הזהב, ר"ל המלבן, אשר בזמן, שחותכים ממנו ריבוע, נותר מלבן, אשר בו היחס בין אורכו לרוחבו שווה ליחס שבין האורך לרוחב של המלבן המקורי. מלבן הזהב, הוא הצורה המלבנית הפופולרית ביותר באומנות ובארכיטקטורה (5-6).

מחקרים הראו, שאנשים מתרבויות שונות מעדיפים אותו על פני מלבנים בעלי יחס צלעות שונות.

אפשר להבחין בכוחו של יחס הזהב ביצירות-מופת כמו הפירמידות המצריות והפרתנון באתונה ובחפצים יומיומיים. מדהים לגלות, עד כמה שולט יחס-הזהב בעולמנו:

כשעורכים מדידות בין חלקי הפנים שלנו, בין חלקים שונים בגופנו ואפילו במדידת האצבעות, נמצא קרבה ליחס-הזהב.

עיוות ביחס-הזהב משמש קריקטוריסטים: בעזרת העיוות הם מדגישים תווי-הפנים ואופי, שהם מעוניינים להדגיש בקריקטורות שהם מציירים (7).

יחס-הזהב הוא היחס שבין אורך השוק לאורך הבסיס במשולש ש"ש, שזווית-הראש שלו היא 360 (8).

גם בפרדוקס של לואיס קרול (9), אשר בו, מתקבל לכאורה ש- $64=65$ על-ידי חלוקת שטח ריבוע 8×8 סמ"ר לשני טרפזים ולשני משולשים, "מככבים" מספרי סדרת פיבונצ'י 3,5,8,13. בעזרת תכונה מספר 2 שהוזכרה – אפשר להרחיב את הפרדוקס של לואיס קרול לכל בחירה של שלושה איברים עוקבים מסדרת פיבונצ'י.

כשמצמידים זה לזה לפי הגודל ריבועים, שצלעותיהם מהווים מספרי פיבונצ'י – מתקבלת ספירלה, המורכבת מכעין מלבנים בעלי צלעות של יחס זהב (10-11).

ראוי לציין, שהחזקות של מספר הזהב Φ^2 יכולות להירשם כולן כתבניות לינאריות ב- Φ , כאשר המקדמים של Φ מהווים סדרת פיבונצ'י, והמקדמים החופשיים מהווים גם הם סדרת פיבונצ'י (10-11).

קיימת אגודת פיבונצ'י, שמטרתה – לגלות תכונות חדשות בסדרה. כל שלושה חודשים יוצא לאור כתב-עת מתמטי, המוקדש אך ורק לחידושים האחרונים שמצאו בסדרה זו (לדוגמה מראי המקומות 1-3). מקורות נוספים לידע על נפלאותיה של סדרת פיבונצ'י – ניתן למצוא ב-(12-16).

במסגרת מאמר זה תוצג ירידה במדרגות – כסדרת פיבונצ'י כשהפרמטרים יהיו: מספר המדרגות וסוג הצעדים – ירידה של מדרגה אחת, ירידה של שתי מדרגות בבת-אחת, ירידה של שלוש מדרגות בבת-אחת ושילוב בין שלושת סוגי הירידות.

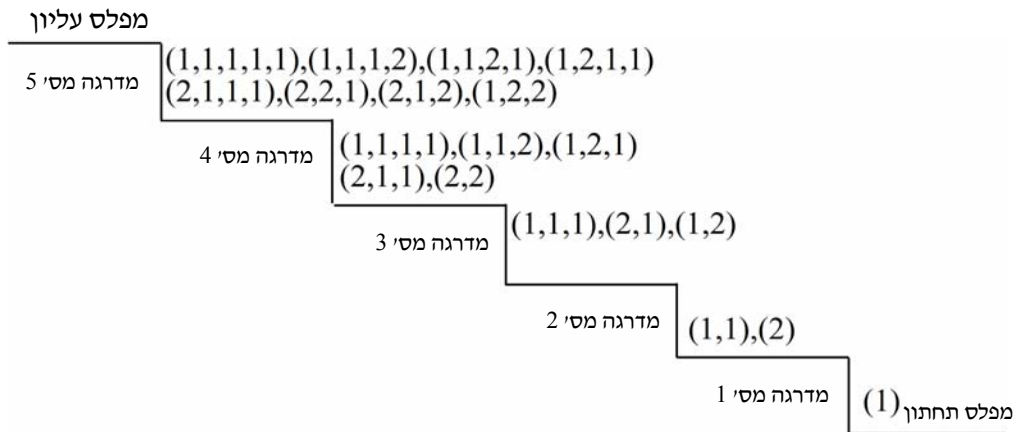
תחילה תובא המשימה למספר קטן של מדרגות, ובהמשך היא תורחב לפתרון כללי.

פיבונצ'י במורד המדרגות

הצגת המשימה:

רד 5 מדרגות, כאשר הירידה אפשרית מדרגה- מדרגה או 2 מדרגות בבת אחת.

מהו המספר הכולל של האפשרויות לרדת את המדרגות?



ממדרגה מס' 1 אפשר לרדת באפשרות אחת- כמתואר במפלס המדרגה, וכך מוצגים סוגי הירידות האפשריות גם לגבי שאר המדרגות.

ממדרגה מס' 2 אפשר לרדת ב-2 אפשרויות.

ממדרגה מס' 3 אפשר לרדת ב-3 אפשרויות.

ממדרגה מס' 4 אפשר לרדת ב-5 אפשרויות.

ממדרגה מס' 5 אפשר לרדת ב-8 אפשרויות.

מספר האפשרויות לרדת מכל מדרגה מתואר על-ידי הסדרה: $0, 1, 2, 3, 5, 8$ (המספר 0 מתאר את המפלס התחתון). השוני היחידי מסדרת פיבונצ'י מתבטא בכך שסדרת האפשרויות לרדת את המדרגות מתחילה ב- $0, 1, 2$, ואילו סדרת פיבונצ'י מתחילה ב- $0, 1, 1, 2$. לעומת זאת, ההמשך הוא זהה.

נטפל במקרה, שגרם המגדרות מכיל 10 מדרגות, ויחשב מתמטית את מספר האפשרויות לרדת ממדרגה זו בלבד – למפלס התחתון.

מספר האפשרויות נקבע לפי הרכב הדילוגים (מדרגה אחת או שתיים בבת אחת).

הרכב הדילוגים הוא כדלקמן :

- | | | |
|---|--|---------------------|
| – | 5 דילוגים של 2 מדרגות. | (2,2,2,2,2) |
| – | 4 דילוגים של 2 מדרגות, ו-2 דילוגים של מדרגה אחת. | (2,2,2,2,1,1) |
| – | 3 דילוגים של 2 מדרגות, ו-4 דילוגים של מדרגה אחת. | (2,2,2,1,1,1,1) |
| – | 2 דילוגים של 2 מדרגות, ו-6 דילוגים של מדרגה אחת. | (2,2,1,1,1,1,1,1) |
| – | דילוג אחד של 2 מדרגות, ו-8 דילוגים של מדרגה אחת. | (2,1,1,1,1,1,1,1,1) |

10 דיילוגים של מדרגה אחת. $(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

חישוב האפשרויות לרדת ממדרגה זו למפלס התחתון מתבצע בעזרת הנוסחה לתמורות עם אלמנטים זהים – בהתאם להרכב הדיילוגים.

$$P(5,0) + P(4,2) + P(3,4) + P(2,6) + P(1,8) + P(0,10) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} + \frac{6!}{4! \cdot 2!} + \frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 6!} + \frac{9!}{1! \cdot 8!} + \frac{10!}{0! \cdot 10!} = 1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89$$

יש לשים לב, שסדרת המספרים שבמונה, שהעצרת מופעלת עליהם, סדרה חשבונית $(0,2,4,6,8,10)$ ו- $(5,4,3,2,1,0)$ חשבוניות $(5,4,3,2,1,0)$.

בסימון מתמטי מקובל – מספר האפשרויות לרדת ממדרגה 10 למפלס התחתון הוא $C_5^0 + C_6^2 + C_7^4 + C_8^6 + C_9^8 + C_{10}^{10}$

באותו אופן, מספר האפשרויות לרדת ממדרגה מס' 9 למפלס התחתון הוא

$$C_5^1 + C_6^3 + C_7^5 + C_8^7 + C_9^9$$

באופן כללי מספר האפשרויות לרדת משלוש מדרגות רצופות, שמספרן הסידורי הוא $2n+2$, $2n+1$ ו- $2n$, הוא כדלקמן:

	C_{n+1}^0	$+ C_{n+2}^2$	$+ C_{n+3}^4$	$+ C_{n+4}^6 + \dots + C_{2n+1}^{2n}$	$+ C_{2n+2}^{2n+2}$	מהמדרגה שמספרה $2n+2$,
		C_{n+1}^1	$+ C_{n+2}^3$	$+ C_{n+3}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$	$+ C_{2n+1}^{2n+1}$	מהמדרגה שמספרה $2n+1$
+	C_n^0	$+ C_{n+1}^2$	$+ C_{n+2}^4$	$+ C_{n+3}^6 + \dots + C_{2n}^{2n}$		מהמדרגה שמספרה $2n$

אנו רואים, שמספר האפשרויות לרדת מהמדרגה, שמספרה הסידורי $2n+2$, הוא סכום האפשרויות לרדת משתי המדרגות שמתחתיה, שמספריהן הסידוריים $2n+1$ ו- $2n$, וזאת – לפי הקשרים בין הקבועים הקומבינטוריים:

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

תכונה זו מאפיינת את תכונת סדרת פיבונצ'י.

המסקנה היא, שמספר האפשרויות לרדת מהמדרגה ה- n היא a_n – האיבר הכללי בסדרת פיבונצ'י. כדי לחשב את ערכו של a_n עבור ערכים גדולים של n , נוהגים להשתמש בנוסחה, אשר בה a_n מבוטא באמצעות יחס הזהב Φ

$$a_n = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{\sqrt{5}}$$

ערכו של הביטוי $(1 - \Phi)^n / \sqrt{5}$ עבור ערכים גדולים של n שואף לאפס, ולכן נוכל לחשב את a_n ביתר קלות – כערך המעוגל לשלמים של הביטוי $\Phi^n / \sqrt{5}$. לדוגמה:

מספר האפשרויות לרדת מהמהדרגה ה-36 (קומה ב' או ג' של בית) היא $a_{36} = \Phi^{36} / \sqrt{5} = 14,930,352$.

לרדת גם שלוש מדרגות בבת-אחת.

מספר האפשרויות לרדת במורד של 7 מדרגות בשילוב של ירידת מדרגה אחת של שתי מדרגות ושל שלוש מדרגות בבת - אחת (לארוך רגליים) מוצגות מדרגה – מדרגה להלן:

מספר האפשרויות לרדת מכל אחת מהמדרגות

ממדרגה מס' 1	–	אפשרות אחת:	(1)
ממדרגה מס' 2	–	2 אפשרויות:	(1,1),(2)
ממדרגה מס' 3	–	4 אפשרויות:	(1,1,1),(1,2),(2,1),(3)
ממדרגה מס' 4	–	7 אפשרויות:	(1,1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(2,2),(1,3),(3,1)
ממדרגה מס' 5	–	13 אפשרויות:	(1,1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,2,1), (1,2,1,1),(2,1,1,1),(1,2,2),(2,1,2), (2,2,1),(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(2,3),(3,2)
ממדרגה מס' 6	–	24 אפשרויות (החישוב בעזרת הנוסחה לתמורות עם אלמנטים זהים).	
ממדרגה מס' 7	–	44 אפשרויות.	

מכאן שסדרת האפשרויות לרדת מכל אחת מ-7 המדרגות היא: 1,2,4,7,13,24,44

מספר האפשרויות לרדת ממדרגה מסוימת היא סכום האפשרויות לרדת מכל אחת משלוש המדרגות שמתחתיה. כלומר, מתקבלת סדרת נסיגה, אשר בה

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 2, & a_3 = 4 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

חישוב מספר האפשרויות לרדת ממדרגה מס' 10 על-ידי שילוב של ירידת מדרגה אחת, שתיים ושלוש מדרגות בבת אחת הוא כדלקמן:

מספר האפשרויות	הרכב הדילוגים
$P(0,10) = \frac{10!}{0!!10!} = 1$	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)
$P(1,8) = \frac{9!}{1!8!} = 9$	(2,1,1,1,1,1,1,1,1)
$P(2,6) = \frac{8!}{2!6!} = 28$	(2,2,1,1,1,1,1,1)
$P(3,4) = \frac{7!}{3!4!} = 35$	(2,2,2,1,1,1,1)
$P(4,2) = \frac{6!}{4!2!} = 15$	(2,2,2,2,1,1)
$P(5,0) = \frac{5!}{5!0!} = 1$	(2,2,2,2,2)
$P(1,7) = \frac{8!}{1!7!} = 8$	(3,1,1,1,1,1,1,1)
$P(2,4) = \frac{6!}{2!4!} = 15$	(3,3,1,1,1,1)
$P(3,1) = \frac{4!}{3!1!} = 4$	(3,3,3,1)
$P(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$	(3,3,2,2)
$P(2,1,2) = \frac{5!}{2!!1!2!} = 30$	(3,3,2,1,1)
$P(1,3,1) = \frac{5!}{1!3!!1!} = 20$	(3,2,2,2,1)
$P(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$	(3,2,2,1,1,1)
$P(1,1,5) = \frac{7!}{1!!1!5!} = 42$	(3,2,1,1,1,1,1)

סה"כ האפשרויות 274, וזה המשך טבעי לסדרה בהתאם לכלל הנסיגה שצוין.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	מספר המדרגה
1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	מספר האפשרויות

הכללה

מצד אחד, השימוש בידע קומבינטורי לחישוב מספר האפשרויות לרדת למפלס התחתון מהקומה ה-nית, מצביע על חשיבותו של ענף הקומבינטוריקה בהתמודדות עם משימות מתמטיות שונות, אך מצד שני, ניתן היה לאורך כל המשימה לוותר עליו. הא כיצד? לפנינו הדגמת יופיה ועושרה של המתמטיקה.

מהמדרגה ה-nית (כאשר $n > 2$) אפשר לרדת בשתי צורות: לרדת מדרגה אחת אל המדרגה שמספרה $n-1$, וממנה – לרדת למפלס התחתון, או לרדת את המדרגה שמספרה $n-2$, וממנה – להמשיך לרדת למפלס התחתון, כלומר, מספר האפשרויות לרדת מהמדרגה ה-nית, שווה למספר האפשרויות לרדת במדרגה שמספרה $n-2$ ועוד מספר האפשרויות לרדת מהמדרגה שמספרה $n-1$, כלומר, קיימת כאן סדרת פיבונצ'י, אשר בה כל איבר הוא סכום שני באיברים הקודמים לו. אותו הסבר קיים לגבי ירידה, הכוללת אפשרות של דילוג של 3 מדרגות בבת-אחת.

ביבליוגרפיה

- Basim, S.L. in *Fibonacci Quarterly*, Vol. 1 (1963), pp. 53-57.
- Brousseau, A, Fibonacci statistics, in *Conifers, The Fibonacci Quarterly*, Vol. 7, pp. 525-532.
- Onderdonk, P.B., Pineapples and Fibonacci Numbers, *Fibonacci Quarterly*, Vol. 8, pp. 507-508.
- חריר, שי (1997). **שילוב בעיות תלמודיות מתמטיות בהוראה**, עבודת דוקטורט, המחלקה להוראת המדעים והטכנולוגיה, חיפה, הטכניון.
- בלס, ג' (1990). חתך הזהב האומנות, **מחשבות**, 59, עמ' 36-45.
- ברגמיני, ד' (1970). **מתמטיקה**, הספרייה המדעית של לייף, עמ' 90-97.
- אוברמן, ג'. **ההיסטוריה של המתמטיקה**. באתר האינטרנט "תופסים גלים" <http://math.galim.org.il>
- חריר, שי, סטופל, מ' (2006). **בניות הנדסיות שונות, "שאנן" כתב עת רב תחומי לעיון ומחקר**, חיפה.
- בירנבוים, ע' (1997). **מספר חזק**, עמ' 71, תל-אביב, תמר.
- Runion, G., *The Golden Section Date Seymour*, 1990.
- ליבה, ע' (1997). חתך הזהב, **על"ה**, 18, עמ' 51-57.
- שישא, א' (1977), **מתמטיקה ומתמטיקאים**. תל-אביב, מסדה.
- דוורצ'ב, י' (1995). **תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה**. חיפה, הטכניון, קשר חם המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים.
- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history>
- ארבל, ב' (תשס"ה 2005). **קיצור תולדות המתמטיקה**. תל-אביב, מופ"ת.

