

בניות הנדסיות שונות

הקדמה

בניות הנדסיות מהוות חלק חשוב בפיתוח החשיבה, ובעיקר – החשיבה המתמטית. אמנם נכון, שכבר לפני שנים הוצא הנושא של בעיות בנייה מתכנית-הלימודים המחייבת בהנדסת-המישור, אך אין בכך כדי לפגום בחשיבותן לחינוך המתמטי. בעקיפין: כל תלמיד נאלץ להמשיך ולבצע בניות הנדסיות (אמנם פשוטות), כאשר הוא משרטט ציור גאומטרי לבעיה מסוימת, שהוא מתמודד אתה במסגרת לימודי-ההנדסה, ואף בתחומים אחרים, כגון: אלגברה, חשבון דיפרנציאלי והנדסת-המרחב.

העיסוק בבניות הנדסיות שונות מהווה אתגר מרתק, המאפשר מציאת דרכים חלופיות ופתרונות בלתי-קונבנציונליים.

ברור, שמיומנות בתחום הבניות ההנדסיות (המבוססת על ידע ועל יכולת יישום משפטים) מהווה יתרון למתמודדים עם משימות בתחומים האחרים של המתמטיקה.

בעיות-בנייה מופיעות במקורות רבים, ובהם ספרי-לימוד ומאמרים (1-3). מעניין להכיר למורים, לפרחי-הוראה ולתלמידים – בעיות-בנייה מיוחדות ובעיות, שבהן אמצעי הבנייה מוגבלים, כגון: שימוש בסרגל חסר שנתות בלבד (ללא מחוגה) או שימוש במחוגה בלבד ללא סרגל (4,5).

במאמר תוצגנה מספר בניות ייחודיות, וביניהן חלוקת-זוויות מסוימת לחלקים שווים, חלוקת-קטע לחלקים שווים, וזאת – באופנים ובאמצעים לא מוכרים.

תאריכים ומילות מפתח: בניות הנדסיות, חלוקת זווית וקטע.

א. חלוקת זווית על-ידי סרגל ומחוגה למספר חלקים שווי-זווית כמספר המעלות שלה

חלוקת זווית לשתי זוויות שוות (חציית-זווית) היא בנייה פשוטה, הנכללת בקבוצת בניית הנקראת "בניות-יסוד". לקבוצה זו שייכות הבניות: בניית אנך אמצעי לקטע, חציית קטע, הורדת אנך מנקודה לקטע, העתקת זווית.

חלוקת זווית למספר מסוים של חלקים שווים – איננה ניתנת לביצוע על-ידי סרגל ומחוגה עבור כל זווית.

זווית כלשהי ניתן לחלק ל-2, 4, 8, 16 וכו' חלקים – על-ידי חציית הזווית והמשך חציית החלקים שהתקבלו. ניתן לבצע חלוקת זווית של 90° לשלושה חלקים שווים (של 30°), מכיוון שאפשר לחסר ממנה זווית של 60° (הנמצאת במשולש שווה-צלעות). כך גם לגבי זווית של 45° , שניתן לחסר ממנה זווית של 30° (הנמצאת במשולש ישר-זווית, שניצבו הוא מחצית היתר).

מצד אחד, ידוע, שחלוקת זווית כלשהי לשלושה חלקים היא בלתי-אפשרית.

מצד שני, חלוקת זווית של 90° ל-5 חלקים שווים היא אפשרית, אך מותנית בכך שנתונה אחת מהזוויות הבאות: $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ$, או בצורה כללית: כשנתונה זווית של $3^\circ \cdot n$, כאשר n מספר טבעי שאינו כפולה של 5 (למה? – השאלה מופנית לקורא).

חלוקה מעניינת במיוחד היא חלוקת זווית למספר חלקים שווי-זווית – כמספר המעלות שלה (בתנאי שהוא מספר שלם), הניתנת לביצוע עבור מספר גדול של זוויות, שערכיהן – מספרים ראשוניים. בחלוקה כזאת מתקבלת זווית של 1° , שניתן בעזרתה לבנות כל זווית בעלת מספר שלם של מעלות ולחלקה למספר חלקים שווים, בתנאי שכל חלק הוא בעל זווית של מספר שלם של מעלות.

נציג בהמשך את חלוקת הזוויות 37° ו- 19° למספר חלקים שווים – כמספר המעלות של כל אחת מהן, וכמבוא לכך, נביא דוגמאות לבניית זוויות מסוימות בעזרת זוויות נתונות ופעולות חשבון פשוטות.

אם נחלק זווית של 17^0 ל-17 חלקים שווים, שכל אחד מהם הוא בעל זווית של 1^0 , ניתן לקבל את כל אחת מהזוויות מ- 1^0 , 2^0 וכו' עד (כולל) 17^0 . לאחר מכן, נשכפל את כל אחת מהזוויות – כמספר הפעמים הדרוש, ונצטרף לשכפול את הזווית הדרושה להשלמה. הפעולה דומה לבעיית חשבון, המוכרת לתלמידים, השולטים בארבע פעולות חשבון. נציג את הבעיה כדלקמן:

נתון מספר בלתי-מוגבל של כל אחת מהספרות הבאות: 2, 5 ו-6.

יש להגיע למספר 21 בעזרת פעולות של כפל, חיבור, חיסור, חלוקה ל-2, ואף ניתן להשתמש בסוגריים.

להלן כמה מהאפשרויות הרבות:

$$3 \times (5+6), 3 \times (6+5) - (2), 8 \times (2) + 5, ((6:2) \times ((5+2)))$$

$$3 \times ((5+2)), 3 \times ((2+6) - ((5)-(2))), 4 \times (6 - ((5)-(2)))$$

ניתן, למשל, לקבל זווית של 53^0 – במספר רב של דרכים, אם, למשל, נתונות הזוויות: $5^0, 7^0, 12^0, 17^0$.

להלן אפשרויות אחדות:

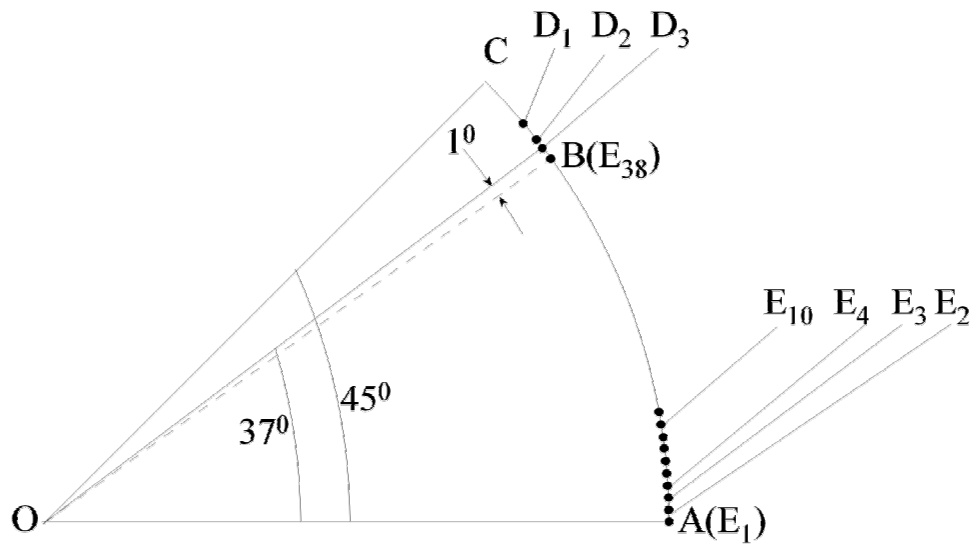
$$3 \times 17^0 + 7^0 - 5^0, 4 \times 12^0 + 5^0, 9 \times 7^0 - 2 \times 5^0$$

1. תיאור חלוקת זווית של 37^0 ל-37 חלקים בני 1^0 .

ביצוע החלוקה מבוסס על כך שפרט לזווית הנתונה של 37^0 , זמינות לצורכי החלוקה גם זוויות של $30^0, 45^0, 60^0$ ו- 90^0 (שהרי על-ידי בניות פשוטות – ניתן לקבל זוויות אלו).

עקרון הבנייה: בניית זווית בת 8^0 (על-ידי החסרת זווית של 37^0 מזווית של 45^0) וחצייתה לשתיים-שלוש פעמים.

הנקודות A, B ו-C נמצאות על קשת מעגל, שמרכזו O, וממילא- $\angle BOA = 37^0$ ו- $\angle COA = 45^0$, כנראה בציור מס' 1.



ציור מס' 1

הזווית $\angle COB$ היא ההפרש בין שתי הזוויות, וערכה 8° .
נחצה, את הזווית הזאת ל-2. את אחד החלקים (זווית של 4°) שוב נחצה ל-2. את אחד החלקים שהתקבלו, שוב נחצה, ואז מתקבלת זווית של 2° , אשר חוצים אותה, ואז מתקבלת זווית של 1° .

נקודות חלוקת הזווית סומנו ב- D_1, D_2 ו- D_3 (לפי סדר קבלתן).
הזווית $\angle D_3OB$ היא בת 1° . את הקשת המתאימה לזווית $\widehat{D_3B}$ נעתיק 37 פעם החל מהנקודה A בכיוון הפוך לתנועת מחוגי השעון. מתקבלות 38 נקודות מסומנות ב- E_1 (הנקודה A), E_2, E_3 וכו' – עד לנקודה E_{38} (הנקודה B) בהתאמה: $\angle E_2OE_1 = 1^\circ$, $\angle E_3OE_1 = 2^\circ$, $\angle E_9OE_1 = 8^\circ$, וכו'.

הערות:

1. בלי לחלק את הזווית ל-37 חלקים שווים – נוכל להחסיר ממנה זווית של 30° ולקבל זווית של 7° . מכאן ניתן לקבל כל זווית, שהיא כפולה של 7° ($14^\circ, 21^\circ, 28^\circ$ וכו').

2. שכפול חמש פעמים של הזווית 37^0 יוצר זווית של 185^0 , והחסרת זווית של 180^0 ממנה – נותנת זווית של 5^0 . בעזרת זווית זו ניתן לקבל כל זווית, שהיא כפולה שלמה שלה ($10^0, 15^0, 20^0$ וכו').

3. צירוף כלשהו של כפולות 5^0 ו- 7^0 נותן זווית נוספות, כגון: $3 \times 5^0 + 4 \times 7^0 = 43^0$

2. תיאור חלוקת-זווית של 19^0 ל-19 חלקים בני 1^0 .

תיאור א':

עקרון הבנייה: בניית זווית.

נבנה זווית 19^0 , 19 פעמים, ונקבל זווית " 361^0 ".

נתונה הזווית $\angle BOA = 19^0$, ויש לחלק אותה ל-19 חלקים שווים.

נפתח את המחוגה ברדיוס כלשהו R (ככל שהרדיוס גדול יותר – כן ניתן להגיע לדיוק רב יותר בבנייה).

נחוג מעגל, שמרכזו O – כנראה בציר מס' 2.

המעגל חותך את שוקי הזווית בנקודות D_1 ו- D_2 .



– 252 –

על הקשת $\widehat{D_1 D_2}$ החל מהנקודה D_1 (בכיוון המנוגד למחוגי השעון) – נסמן 20 נקודות $E_1, E_2, \dots, E_{20}$ וכו', שהמרחק ביניהן $D_1 D_{20}$ (הנקודה E_1 מתלכדת עם הנקודה D_1 , D_{20} עם E_{20} ו- E_2 עם הנקודה D_2).

את הנקודות E_2, E_3 וכו' עד E_{19} נחבר בקווים ישרים עם מרכז המעגל O (קדקוד הזווית הנתונה), וכך נחלק את הזווית ל-19 חלקים שווים, שכל אחד הוא בגודל של 1° .

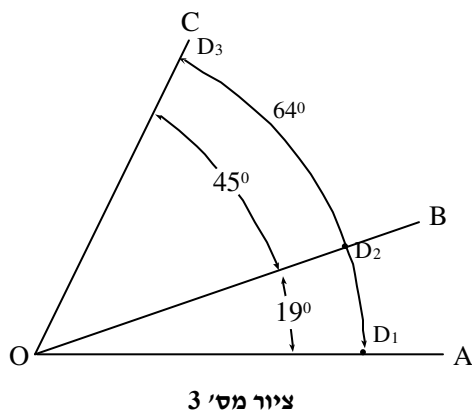
תוצרי-לוואי:

התקבלו זווית של 3° ($60^\circ - 3 \times 19^\circ$) וזווית של 5° ($90^\circ - 5 \times 19^\circ$) – כנראה בציור מס' 2. כמו-כן ניתן לקבל, באופן דומה, את הזווית של 13° באופנים הבאים:

$$7 \times 19^\circ - 120^\circ, \quad 2 \times 5^\circ + 3^\circ$$

תיאור ב':

עקרון הבנייה:



הוספת 45° לזווית הנתונה וחלוקת זווית הסכום.

בדרך דומה לזו, שהוצגה בתיאור א' – נוכל להוסיף לזווית $\angle BOA = 19^\circ$ את הזווית $\angle COB = 45^\circ$. הזווית שהתקבלה $\angle COA$ היא 64° (כנראה בציור מס' 3).

את הזווית הזאת נחצה מספר פעמים $16^\circ, \dots$, עד שתתקבל זווית של 1° , שבאמצעות

הקשת שלה – ניתן לחלק את הזווית הנתונה ל-19 חלקים שווים.

הערות:

1. מזווית של 45° ניתן להחסיר זווית של 19° (הזווית הנתונה) ולקבל זווית של 26° , שעל-ידי חצייתה מקבלים זווית של 13° .
2. מזווית של 45° ניתן להחסיר פעמיים זווית של 19° ולקבל זווית של 7° .
3. מזווית של 13° ו- 7° ניתן לקבל על-ידי החיסור שלהן – זווית של 6° , שעל-ידי חצייתה מקבלים זווית של 3° .
4. בשיטה הנ"ל ניתן להשתמש לחלוקת כל זווית, שערכה מספר ראשוני החל מ- 7° .

3. בניית זווית של 18° וחלוקתה ל-6 חלקים שווים**ניתוח הבנייה**

נתון משולש $\triangle ABC$, שזווית הראש שלו 36° , ואורך בסיסו a , כנראה בציור מס' 4.

כשנעביר את BD – חוצה זווית הבסיס – נקבל שני משולשים ש"ש; $(BD = BC)\triangle BDC$ ו- $(DB = DA)\triangle DAB$, ולפיכך, $CB = BD = DA = a$.

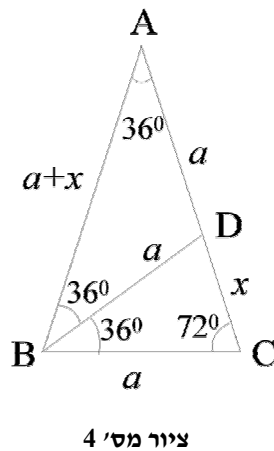
נסמן $CD = x$, ולפי משפט חוצה הזווית מקבלים:

$$\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$$

$$AB = a + x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) \quad \text{מכאן – אורך שוק המשולש:}$$

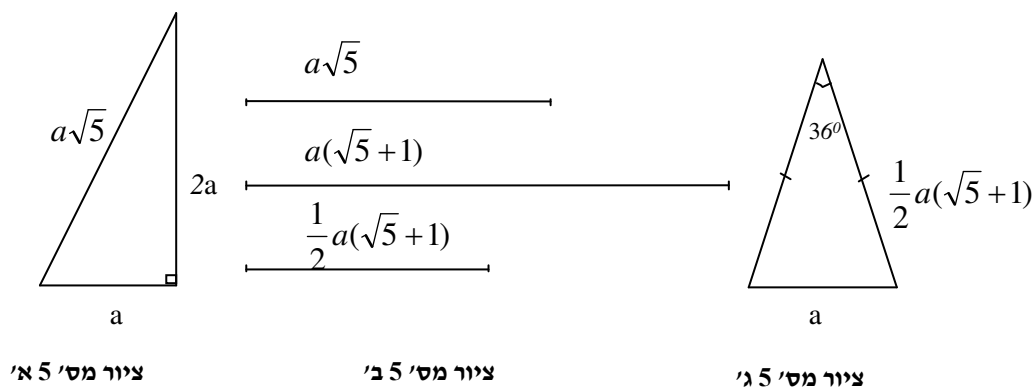
תיאור הבנייה

שלב א': נבנה משולש ישר זווית, שאורכי – ניצביו a ו- $2a$, כנראה בציור מס' 5 א'. אורך יתר המשולש $a\sqrt{5}$.



שלב ב': לקטע $a\sqrt{5}$ נוסיף את הקטע a , ואת הקטע שמתקבל נחצה – כנראה בציור מס' 5 ב'.

שלב ג': נבנה משולש ש"ש, שאורך בסיסו a ואורך שוקיו $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$, כנראה בציור מס' 5 ג'. למשולש שהתקבל יש זווית ראש של 36° , כפי שתואר בניתוח הבנייה.



תיאור חלוקת זווית של 18° ל-6 חלקים שווים

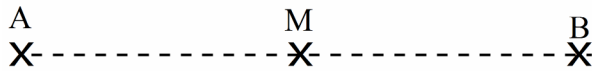
נחצה את זווית ראשו של המשולש שהתקבל (בת 36°), ואז נתקבל זווית של 18° . נבצע פעולת חיבור וחיסור של זוויות ידועות $45^\circ - (18^\circ + 30^\circ)$, ונתקבל זווית של 3° , שבעזרתה נחלק את הזווית של 18° ל-6 חלקים שווים.

הערה: קבלת זווית של 36° מאפשרת לקבל זווית של 108° (על-ידי שכפול הזווית), שבעזרתה ניתן לבנות מחומש משוכלל, שזוהי הזווית הפנימית שלו.

ב. מציאת נקודת האמצע של קטע ישר, המחבר שתי נקודות נתונות:

1. בעזרת מחוגה וסרגל 2. בעזרת מחוגה בלבד

נתונות הנקודות A ו-B. מצא את הנקודה M, המחלקת את הישר, המחבר את שתי הנקודות לשני קטעים שווים, בלי שנתון הישר AB.

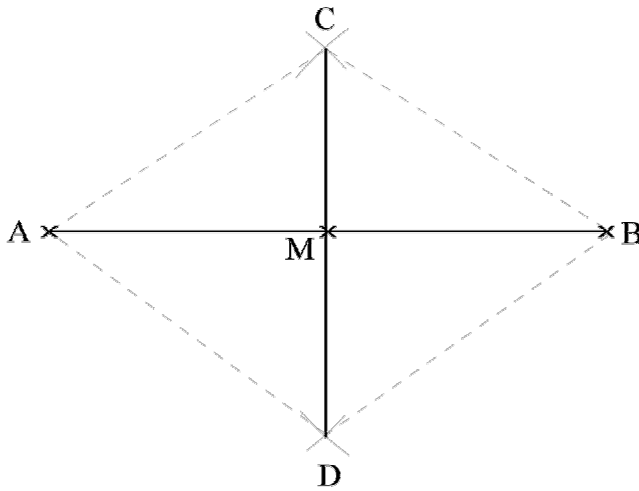


1. בעזרת מחוגה וסרגל

דרך א' –

הבנייה באמצעות כלים אלו – נחשבת כבנייה יסודית, המהווה בסיס לבניות רבות, שביניהן בניות מורכבות וקשות.

שלב ביצוע:



ציור מס' 6

* בעזרת עיפרון וסרגל נשרטט את הישר, המחבר את נקודות A ו-B (ציור מס' 6).

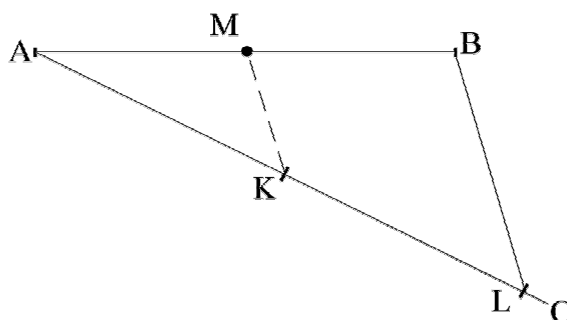
* מהנקודות A ו-B נחוג קשתות שוות ברדיוס, הגדול ממחצית המרחק AB. הקשתות נחתכות בנקודות C ו-D.

* בעזרת עיפרון וסרגל נשרטט את הישר CD, החותך את הישר AB בנקודה M. הנקודה M היא נקודת האמצע של הישר AB.

הוכחה:

המרובע ACBD הוא מעוין, וכידוע, אלכסוני-המעוין חוצים זה את זה.

דרך ב' –



ציור מס' 7

(שימוש במשפט תלס).

מנקודה A נבנה קרן AC, השונה מהקרן AB. על הקרן AC נחוג ברדיוס שרירותי (כלשהו) 2 קשתות שוות מרחק – החל מהנקודה A; $AK=KL$, כנראה בציור מס' 7.

בעזרת סרגל נחבר את הנקודות B ו-L.

בעזרת סרגל ומחוגה נעביר דרך הנקודה K ישר, המקביל ל-BL (בנייה בפני עצמה). הישר המקביל חותך את הקטע AB בנקודה M, שהיא הנקודה המבוקשת (ההוכחה היא, למעשה, משפט תלס).

הערה: באותה דרך אפשר לחלק קטע נתון ל-n חלקים שווים (n – מספר טבעי).

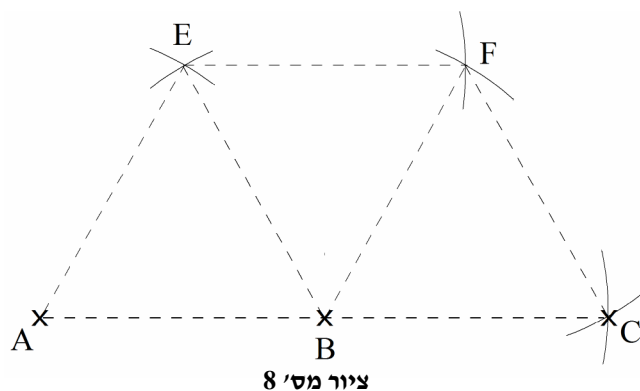
2. בעזרת מחוגה בלבד

ביצוע הבנייה מורכב משני

שלבים:

שלב א' – הכפלת הקטע AB

ביצוע



ציור מס' 8

* מהנקודות A ו-B נחוג קשתות ברדיוס AB. הקשתות נחתכות בנקודה E (ציור מס' 8).

* מהנקודות B ו-E נחוג קשתות ברדיוס AB. הקשתות נחתכות בנקודה F.

* מהנקודות B ו-F נחוג קשתות, הנחתכות בנקודה C. הנקודה C נמצאת על המשך AB באופן ש- $AB=BC$.

הוכחת הבנייה בשלב א'

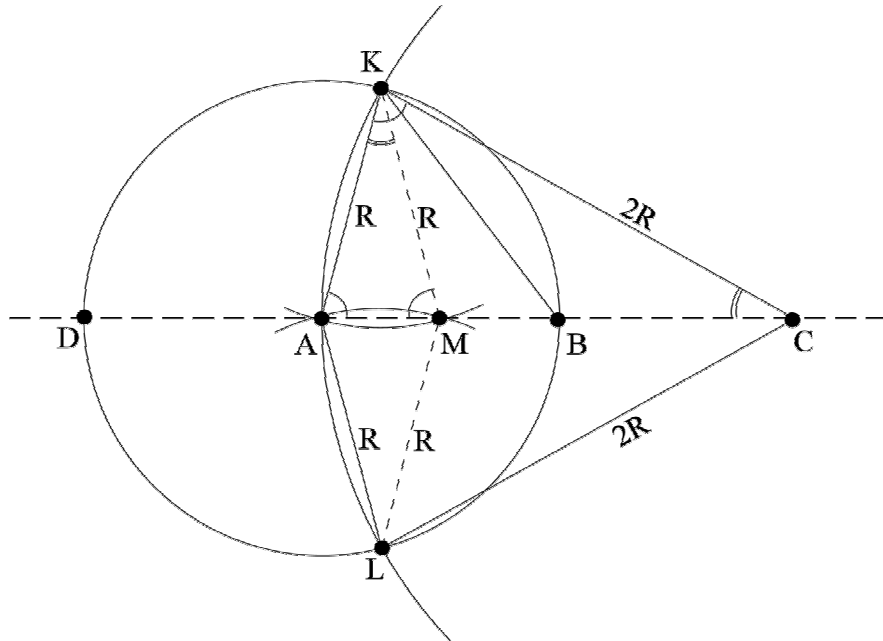
שלושת המשולשים; AEB , BEF ו- BFC הם ש"צ, משום שנבנו על-ידי קשתות ברדיוס $R=AB$. לכן $\angle ABC = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$.

שלב ב' – מציאת נקודת האמצע של הקטע AB

- * מהנקודה A נחוג מעגל ברדיוס $R=AB$ (ציור מס' 9).
 - * מהנקודה C נחוג מעגל ברדיוס $2R=2AB$. המעגלים נחתכים בנקודות K ו- L .
 - * מהנקודות K ו- L נחוג קשתות ברדיוס $R=AB$. שתי הקשתות נחתכות בנקודות A ו- M .
- הנקודה M היא אמצע הקטע AB .

הוכחת הבנייה בשלב ב'

משולש KAM הוא ש"ש ($KA=KM = R=AB$).



ציור מס' 9

משולש CKA הוא ש"ש (CK=CA=2R=2AB).

זווית KAM היא זווית- הבסיס בכל אחד משני המשולשים ש"ש הנ"ל.

$$\Delta CKA \approx \Delta KAM, \text{ מכאן,}$$

יחס הצלעות (השוק לבסיס) במשולש CKA הוא 2. לכן גם יחס הצלעות המתאימות

במשולש KAM הוא 2.

היות ו- $KA=R=AB$, לכן $AM = \frac{R}{2}$, כלומר הנקודה M היא אמצע הקטע AB שאורכו R.

הערה: באותו אופן ניתן למצוא נקודת חלוקת קטע ל- $\frac{1}{3}$ ול- $\frac{2}{3}$, וזאת – על-ידי כך

שבתחילה נמצא את הנקודה E, הנמצאת מימין לנקודה C על המשך הקטע AB באופן ש –
 $R=3AB=AE$ (המרחק מ-E ל-A). מעגל זה חותך את המעגל שבמרכזו B-A (כנראה בציור מס' 9) בנקודות K' ו-L' חדשות. מהנקודות החדשות נחוג קשתות ברדיוס $R=AB$, ואז

מתקבלת הנקודה החדשה M' באופן ש- $AM' = \frac{1}{3} AB$.

סיכום

הוצגה שיטה פשוטה לחלוקת זווית למספר חלקים שווי-זווית כמספר המעלות שלה, וזאת – על-ידי שימוש בסרגל ובמחוגה.

השיטה מתאימה לזוויות, שערכיהן מספרים ראשוניים החל מ- 7^0 . מובן, שגם זוויות, שהן כפולה של 2^n בזוויות הנ"ל – ניתן לחלק לחלקים שווים.

פרט לזווית הנתונה שיש לחלק, עומדות לסיוע זוויות המתקבלות בקלות: $15^0, 30^0, 45^0, 60^0$ ועוד.

חלוקת הזווית מאפשרת לבנות כל זווית אחרת.

לסיום, הוצגה בנייה לחציית קטע, שרק קצותיו נתונים, על-ידי שימוש במחוגה בלבד – בשינוי מהבנייה המקובלת, המחייבת שימוש במחוגה ובסרגל.

מראי מקומות

1. גורן, ב' (1988). **גיאומטריה של המישור**, פרקים 7 ו-12, תל-אביב, מישלב.
2. A.S. Samogorhuriskii (1961). *The Ruler in Geometrical Constructions*. Oxford, Pergamon Press.
3. אוקסמן ל', סטופל, מ' (תשנ"ח). עוד על בניות הנדסיות ייחודיות, **שאנן, ד', שנתון המכללה הדתית לחינוך**. חיפה.
4. סטופל מ', אוקסמן, ו' (1996). בניות גיאומטריות על-ידי סרגל בלבד, **על"ה, 18**.
5. סטופל מ', אוקסמן, ו' (תשנ"ו). בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות, **שאנן, ב', שנתון המכללה הדתית לחינוך**, חיפה.