

מזור חדשות מתמטיות

איך עורמים אבטיחים בסככה ביעילות? מעל 400 שנה של לבטים הסתיימו בהישג מתמטי מדהים בקיץ 2014*

נצה חובשוביץ-הדר

הקדמה: כמה מתפרנס מתמטיקאי?

במרבית המקרים משלמים למתמטיקאי משכורת כדי לחשוב: לחשוב על בעיה חדשה, לחשוב על דרך לפתור בעיה שטרם נמצא לה פתרון, לחשוב על השערה חדשה או לחשוב על שיטה להוכיח השערה שטרם נמצאה לה הוכחה. עוד עיסוק ידוע פחות הוא אימות או חיפוש שגיאות בפתרונות ובהוכחות של מתמטיקאים אחרים. העיתונות המתמטית המקצועית מגייסת את טובי המוחות כדי לאמת תוצאות המוגשות לפרסום על מנת לוודא שאין בהן טעות. זהו שם המשחק במתמטיקה, הוכחה היא קבילה כל עוד לא נמצאה בה שגיאה, שהרי מתמטיקה היא פרי היצירה של המוח האנושי, ומתמטיקאים, ככל אדם, עלולים לטעות.

בחודש אוגוסט 2014 התבררנו על הוכחתה של ההשערה שנודעה בשם "השערת קפלר". את ההשערה הזאת העלה יוהאנס קפלר בשנת 1611, כלומר לפני למעלה מ-400 שנה. רק לאחרונה היא זכתה לאימות באמצעות מחשב וקיבלה הכרה כ"נכונה ללא צל של ספק" מהקהילייה המתמטית.

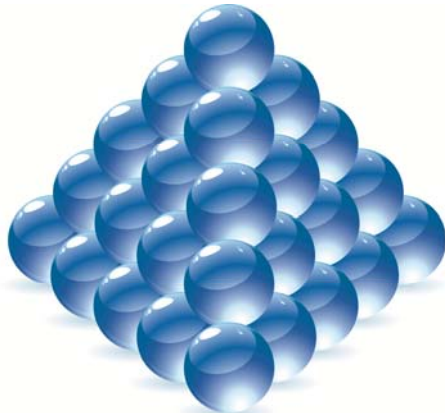
גושפנקה כזאת, של "מאומתת-מחשב", עשויה לסלול את הדרך לעידן חדש במתמטיקה, שבו מכונות עושות את "העבודה השחורה" של בקרה וחיפוש שגיאות, והמתמטיקאים בשר ודם יכולים להתפנות לעסוק ביצירת בעיות חדשות, בפתרונות לבעיות שטרם נפתרו, בחשיבה על השערות חדשות ובהוכחת השערות פתוחות שטרם הוכחו.

מהי השערת קפלר? מה היה הרקע להעלאתה?

אתגר ידוע הניצב לפני הירקנים בכל העולם, הוא למצוא את הדרך הטובה ביותר לערום אוסף של עצמים כדוריים, כמו תפוזים או אבטיחים המוצעים למכירה. בשנת 1611 הציג יוהאנס קפלר (Johannes Kepler, 1571-1630) את הטענה כי כדורים שווים הערוכים שכבה מעל שכבה בערמה, שבה בכל שכבה מונח כדור ברווח הנוצר בין כל שלושה כדורים המונחים בשכבה שמתחתיו ומשיקים זה לזה, היא הדרך החסכונית ביותר לאריזתם מבחינת ניצול המרחב. אך קפלר

* תודה לתמי יהושע על עיצוב האיורים המופיעים במדור זה.

לא הוכיח את השערתו והיא נותרה פתוחה מאות שנים וסיפקה אתגר לדורות של מתמטיקאים שהעמיתו עמו מאז ועד אוגוסט 2014. אריזה זאת זכתה לכינוי "אריזת הירקנים" כי היא רווחת בשוקי הפירות.



כמה 'אבטיחים' יש בערמה פירמידלית כזאת בת חמש שכבות? נתחיל מלמעלה:

$$S_1=1 \quad \text{בשכבה העליונה:}$$

$$S_2=1+2=3 \quad \text{בשכבה השנייה:}$$

$$S_3=1+2+3=6 \quad \text{בשכבה השלישית:}$$

$$S_4=1+2+3+4=10 \quad \text{בשכבה הרביעית:}$$

$$S_5=1+2+3+4+5=15 \quad \text{בשכבה התחתונה:}$$

$$35 \quad \text{בסה"כ:}$$

עדויות מהמאות הראשונות לספירה, בשפת סנסקריט, מצביעות על כך שכבר אז היה ידוע כי מספר האבטיחים בכל שכבה הוא: $S_i=1+2+3+\dots+i$. יש גם עדויות לכך שכבר אז הייתה ידועה הנוסחה לחישוב מספר האבטיחים הכולל ב- n שכבות שבכל אחת מהן יש $S_i=1+2+3+\dots+i$ אבטיחים:

$$\sum_{i=1}^n S_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

$$\frac{(5+1)^3 - (5+1)}{6} = 35 \quad \text{למשל מספר האבטיחים בערמה בת חמש שכבות הוא:}$$

סר וולטר ריילי (Sir Walter Raleigh, 1554-1618), אריסטוקרט בריטי, שהיה אחד מאנשי החצר של אליזבת, מלכת אנגליה, ביקש בשנת 1590 מתומס האריוט (Thomas Harriot, 1560-1621), מתמטיקאי ואתנוגרף בוגר אוקספורד, שהיה ידידו ועוזרו המתמטי, למצוא נוסחה לחישוב מספר הפגזים הכדוריים שנערמו על סיפוני האניות שלו בעת העמסתן בתחמושת, לקראת מסע אל "העולם החדש". האריוט, שניהל את חשבונותיו של ריילי, עסק בתכנון ספינותיו ובהנחיית רבי-החובל בכל הנוגע לניווט באמצעות המכשור המתמטי של אותם ימים. הוא הכין טבלה מפורטת בהתאם לצורה של תחתית הערמה ובהתאם לגובהה. מתוך הביוגרפיה של האריוט עולה כי האריוט הסתמך על חישובים של טורים מתמטיים ולא על ספירה ניסיונית (Shirley, 1983).



תומס האריוט 1560-1621
(Wikipedia, 2015)

לאחר שהגיע לפתרון, שאל האריוט את עצמו, כדרכם של מתמטיקאים: האם יש דרך טובה יותר

לערום את הכדורים? כזאת שהכדורים בה צפופים יותר ותופסים פחות מקום על הסיפון? עם הבעיה הזאת פנה האריוט בשנת 1606 במכתב אל המתמטיקאי-הפיסיקאי-האסטרונום הגדול של אותה תקופה – יוהאנס קפלר. קפלר ודורות של מתמטיקאים בעקבותיו, עסקו בשאלה – מהי הצפיפות המקסימלית של מארז כדורים שווים במרחב? נשאלת השאלה – איך מודדים צפיפות? ואיך קובעים שהיא מקסימלית?

איך קובעים צפיפות מקסימלית של אריזת כדורים שווים?

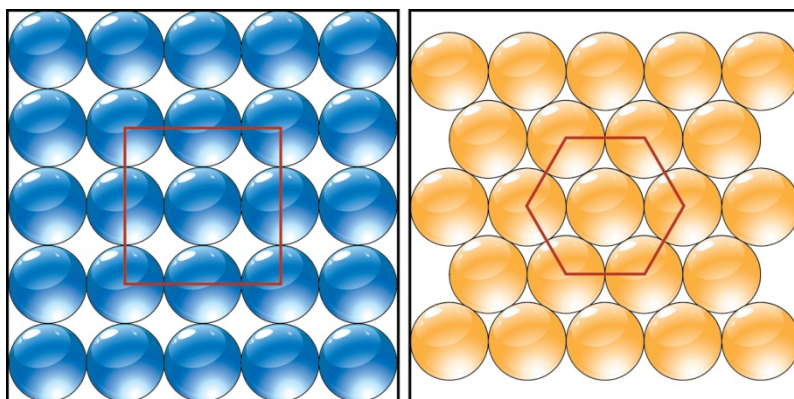


(Jimmy2bellies, 2009)

הדרך הטבעית היא לקחת ארגז ולנסות לארוז בו כמה שיותר כדורים שווים, ואז לבדוק איזה חלק של נפח הארגז תופסים הכדורים. בהינתן ארגז מסוים, שיטת האריזה היא שקובעת את הצפיפות. לעומת זאת הדרך המתמטית היא להגדיר צפיפות כדי להשתחרר מהדיון בצורת הארגז, מתמטיקאים מטפלים במרחב כולו כאילו הוא קובייה בעלת מידות אינסופיות. הצפיפות מוגדרת כתשובה על השאלה: איזה חלק (או אחוז) של המרחב נתפס על-ידי הכדורים בשיטה מסוימת של אריזתם ב"קובייה אינסופית"? כדי להבין את

המושג צפיפות במרחב האינסופי, נתבונן בכל זאת במארזים סופיים. הנה כך – נתבונן בשתי אריזות באיור 1 ונבחן את ההבדלים ביניהן, וגם נבדוק היטב איזו מהן צפופה יותר.

נתחיל מהשכבה התחתונה:



אריזה ריבועית

אריזה משושה

נניח שרדיוס כל כדור הוא יחידה אחת, ומידות הארגז הקובייתי הן $10 \times 10 \times 10$ יח'. באיור 1 נוכל להבחין בקלות, כי באריזה הריבועית הרווחים הנוצרים בין הכדורים גדולים יותר מאשר הרווחים הנוצרים בין הכדורים באריזה המשושה, ואילו בשכבה אחת של ארגז קובייתי נכנסים 25 כדורים באריזה הריבועית ורק 23 באריזה המשושה. איזה חלק משטח הבסיס תופסים הכדורים? או ליתר דיוק, איזה חלק משטח הבסיס תופסים שטחי המעגלים שהם חתכי הרוחב של הכדורים?

$$\text{– באריזה ריבועית } 73\% < \frac{23 \times \pi \times 1^2}{10 \times 10} = \frac{23\pi}{100}$$

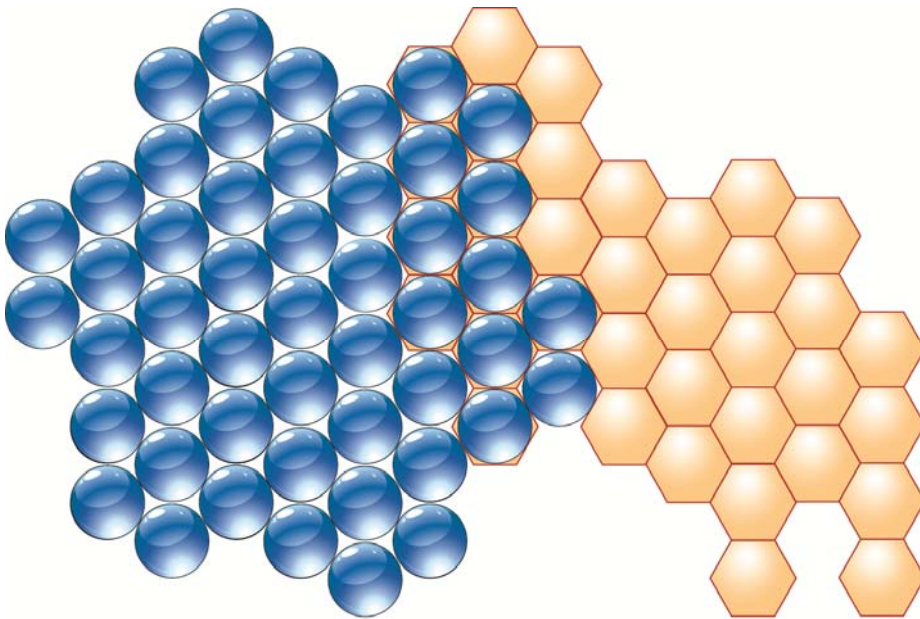
$$\text{– באריזה משושה } 78\% > \frac{25 \times \pi \times 1^2}{10 \times 10} = \frac{25\pi}{100}$$

אריזה משושה של שכבה אחת נראית כאילו היא חסכונית פחות מאריזה ריבועית. האם הרווחים הקטנים יותר בין הכדורים שלה יתנו לה עדיפות כשנעבור למישור האינסופי ומספר הכדורים בשכבה אחת בכל מארז יהיה אינסופי?

בשנת 1611 קפלר טען (אך לא הוכיח) שמערך משושה של כדורים שווים בשכבה אחת, אשר בה כל כדור נוגע בשישה אחרים סביבו, הוא המערך הצפוף ביותר.

בעצם מדובר בחתך ב"קו המשווה" של הכדורים, או בכיסוי של המישור בעיגולים, למשל במטבעות שוות.

אגב, מערך כזה נקרא גם "מערך חלת הדבש". אפשר להבין את מקור השם מהתבוננות באיור 2.

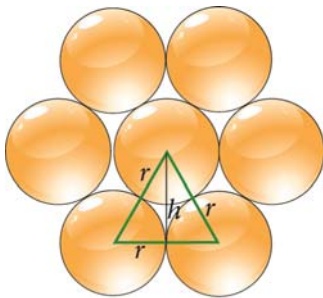


איור 2

בשנת 1890 ניתנה לראשונה הוכחה מתמטית לכך שאי אפשר לכסות בעיגולים שווים חלק גדול יותר של המישור מזה שמכוסה על ידיהם במערך משושה. אבל רק בשנת 1940 נתן לכך המתמטיקאי ההונגרי, לאסלו פייג'ה-טות' (László Fejes Tóth, 1915-2005), הוכחה שעומדת בכל הדרישות הקפדניות של הקהילייה המתמטית. הוכחות יפות של השערת קפלר במישור הדו-ממדי אפשר לראות אצל קסלמן וטו (Casselmann, n.d.; Thue, 2001).

מהי צפיפותו של המערך המיוחד הזה? כלומר מהו החלק היחסי של המישור שהעיגולים הערוכים במערך משושה מכסים אותו?

האריט חישב זאת: המערך המשושה של העיגולים במישור מצטיין בכך שכל עיגול בו מוקף בשישה עיגולים המשיקים לו. המרכז של כל אחד משישה העיגולים נמצא בקדקוד של משושה משוכלל והעיגול השביעי, המוקף, מרכזו במרכז המשושה. במילים אחרות, מרכזי העיגולים נמצאים בקדקודיהם של שישה משולשים שווים צלעות. על המישור כולו אפשר לחשוב כעל אוסף של משולשים שכולם חופפים, שווים-צלעות וצמודים זה לזה. לפיכך כדי לדעת איזה חלק של המישור כולו תופסים העיגולים, מספיק לחשב את החלק שהם תופסים בשטח של כל אחד מהמשולשים (ראה איור 3). בכל משולש יש שישית משלושה עיגולים. שטחו של כל אחד מהעיגולים הוא πr^2 .



איור 3

לפיכך השטח שהעיגולים תופסים בכל משולש הוא: $3 \times \frac{1}{6} \pi r^2 \approx 1.571 r^2$.

נשאר רק לחשב איזה חלק מהווה שטח זה משטחו של המשולש. כל משולש כזה הוא שווה-צלעות ואורכה של כל צלע שלו הוא $2r$. כדי לחשב את שטחו, עלינו למצוא תחילה את גובהו.

$$h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}r$$

לפיכך שטח המשולש הוא:

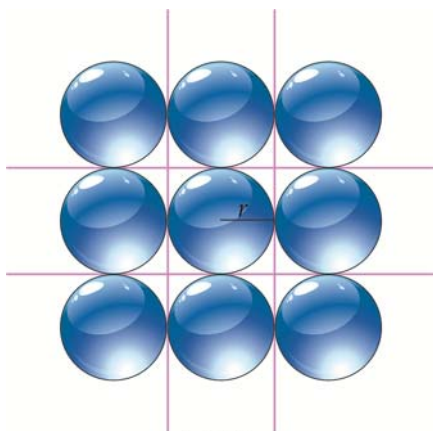
$$\frac{2r \times \sqrt{3}r}{2} = \sqrt{3}r^2 \approx 1.732r^2$$

ובכן, הצפיפות של אריזה משושה של עיגולים שווים

במישור היא $\frac{1.571}{1.732} \approx 0.907$, כלומר מעל 90%.

לעומת זאת מהי הצפיפות של האריזה הריבועית של עיגולים שווים במישור?

על המישור כולו אפשר לחשוב כעל אוסף של ריבועים

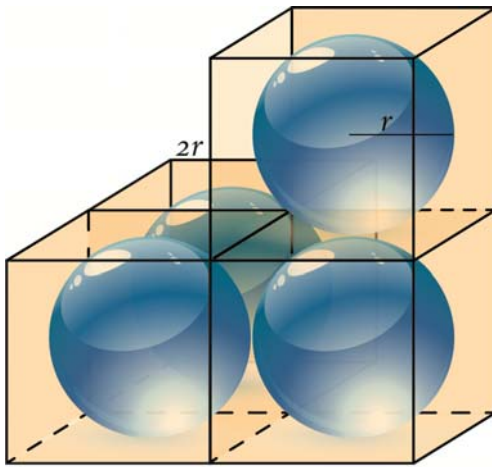


איור 4

חופפים צמודים זה לזה, שכל אחד מהם כולא עיגול אחד (ראה איור 4). הצפיפות במישור כולו היא על-כן היחס בין שטחו של כל עיגול (πr^2) לבין שטחו של כל ריבוע כזה (שכל אחת מצלעותיו

$$\text{אורכה } 2r): \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

כלומר עיגולים במערך ריבועי מכסים פחות מ-80% משטח המישור. כאמור, מערך המשושה, שהוכח כ"מנצח" מבין כל המערכים האפשריים במישור, צפיפותו מעל 90%. תוצאה זו מעידה שבחישוב הצפיפות של עיגולים, המעבר מחלק סופי מוגבל של המישור (ראה איור 1) למישור האינסופי יכול לשנות את תוצאת החישוב.



איור 5

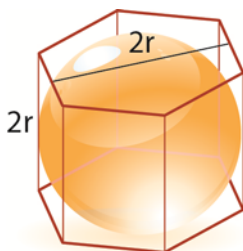
נחזור למרחב ונשים מעל לשכבה הראשונה את השכבות הבאות זו על זו. באריזה הריבועית אפשר למשל לשים את השכבה השנייה של הכדורים ממש מעל השכבה הראשונה וכך הלאה שכבה מעל שכבה. במארו האינסופי המתקבל בדרך זו, כל כדור נוגע בשישה שכנים, ארבעה בשכבתו, אחד מעליו ואחד מתחתיו. זאת ועוד, את המרחב אפשר למלא ב-100% בקוביות שוות (שש פאות) שכל אחת מהן כולאת כדור אחד (ראה איור 5), כך שאת הצפיפות של האריזה הזאת, אפשר לחשב על-ידי חישוב היחס בין נפחו של כדור

אחד לנפחה של קובייה שהוא כלוא בה. נפח הכדור הוא: $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3$. נפח הקובייה הכוללת

אותו הוא: $2r \times 2r \times 2r = 8r^3$, לפיכך הצפיפות של האריזה הזאת היא: ≈ 0.52 , כלומר את מחצית

המרחב תופסים הכדורים באריזה מסוג זה.

האם אפשר לשפר?



איור 6

במקום לשים שכבות של האריזה הריבועית אחת על השנייה נעשה זאת עם אריזה משושה, שכבר במישור היא "מנצחת". בכמה כדורים נוגע כעת כל כדור? – בשמונה שכנים, שישה באותה שכבה ועוד אחד מעליו ואחד מתחתיו. זאת ועוד, אפשר לכלוא כל כדור במנסרה משושה משוכללת שהיא גוף בעל שמונה פאות הממלא את המרחב ב-100% (ראה איור 6). לפיכך אפשר לחשב את הצפיפות של

האריזה הזאת על-ידי חישוב היחס בין נפחו של כדור אחד לנפחה של מנסרה משושה שהוא כלוא בה.

$$\text{נפח הכדור הוא: } \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 4.2r^3$$

נפח המנסרה:

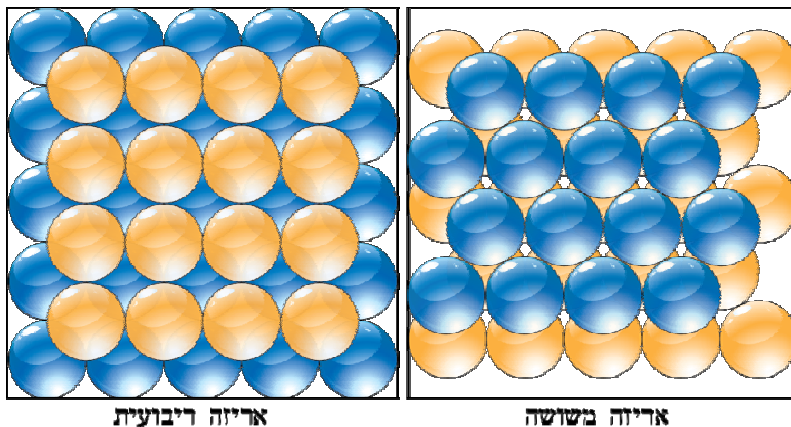
$$2\sqrt{3}r^2 \times 2r = 4\sqrt{3}r^3 \approx 6.9r^3$$

$$\text{לכן הצפיפות של האריזה הזאת היא: } \frac{4.2}{6.9} \approx 0.61 \text{ כ-} 60\%$$

כמצופה אריזה זאת צפופה יותר מהקודמת.

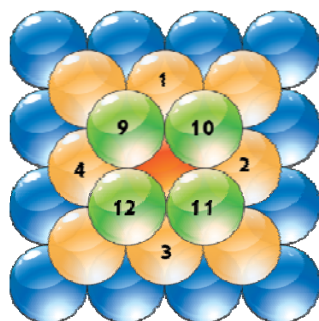
האם יש עוד דרכים למלא שכבה מעל שכבה?

כמובן. אפשר ליצור שכבה שנייה לא רק בהצבת הכדורים מעל לכדורים בשכבה התחתונה, אלא גם בהצבת הכדורים ברווחים הנוצרים בין הכדורים (ראה איור 7).

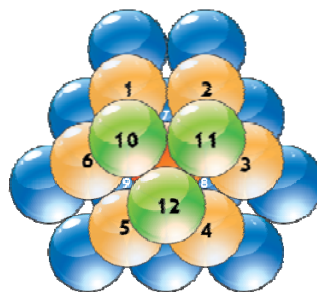


איור 7

למרבה ההפתעה בשני המקרים, באריזה הריבועית ובאריזה המשושה, מספר הכדורים, אשר בהם נוגע כל כדור שנמצא ממש בתוך חלל האריזה אחרי שממלאים בדרך זו את השכבות זו על גבי זו, הוא 12. כיוון שבאריזה הריבועית כל כדור נוגע בארבעה אחרים בשכבה שלו, בארבעה מהשכבה התחתונה ובארבעה בשכבה שמעליו, ובאריזה המשושה כל כדור נוגע בשישה כדורים בשכבה שלו, בשלושה בשכבה שמתחתיו ובשלושה אחרים בשכבה שמעליו (ראה איור 8).



אריזה ריבועית



אריזה משושה

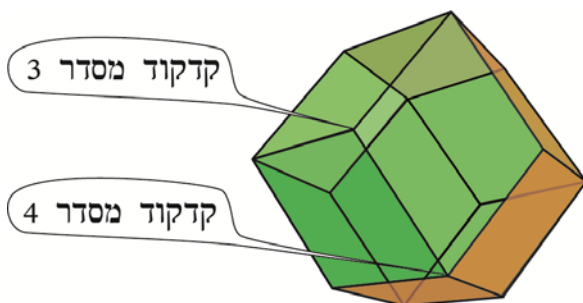
איור 8

באיזו משתי האריזות האלו מנוצל חלק יותר גדול של נפח הארגז? ומה קורה אם ה"ארגז" הוא אינסופי, כלומר במרחב כולו?

קפלו עשה את החשבון והופתע לגלות שלשתיהן יש אותה צפיפות בדיוק.

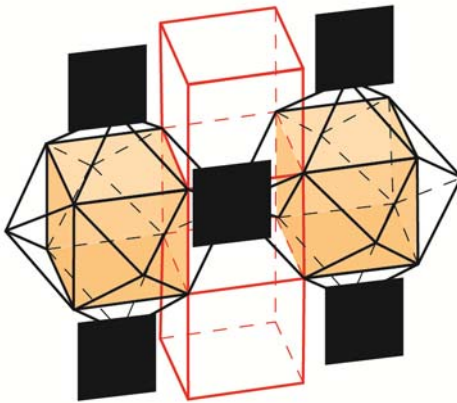
בשתי האריזות הכדורים תופסים כ-74% (כ-3/4) מהמרחב! כדי לאמת זאת יש לנקוט בשיטה דומה לזו שכבר נקטנו בה: לחלק את המרחב כולו לתאים שווים בכל המרחב, לבדוק מהו נפח הכדורים בכל תא, לחשב את היחס בינו לבין נפח התא ובכך לחשב את הצפיפות, ולוודא שהתוצאות המתקבלות בשתי האריזות אכן שוות. אבל מתברר שכבר הצעד הראשון אינו פשוט. הקושי נעוץ בסידור המרחבי של הכדורים: כאמור, בכל אחת משתי האריזות האלו כל כדור מוקף ב-12 כדורים המשיקים לו. נוסף על כך, ה"שקע" בין כל רביעיית כדורים באריזה הריבועית "עמוק" יותר מהשקע בין כל שלושה כדורים באריזה המשושה. האם אפשר לחלק את המרחב כולו לתאים שווים המתאימים לכל אחת מהאריזות האלו?

מתברר שאפשר!

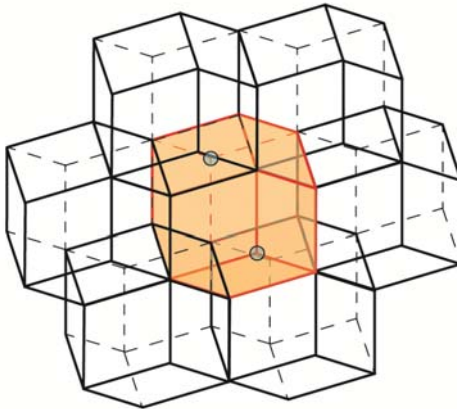


איור 9

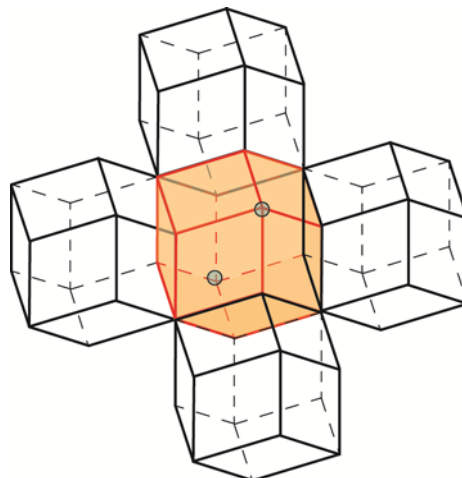
התריסרון המעויני הוא גוף בעל 12 פאות חופפות, אשר כולן בצורת מעוין. הוא יסייע לנו בחישוב הצפיפות של שתי האריזות (!) כי יש לו שני סוגים של קדקודים – מסדר 3 ומסדר 4 (ראה איור 9): בכל קדקוד מסדר 3 נפגשות שלוש פאות (יש שמונה קדקודים כאלה), ובכל קדקוד מסדר 4 נפגשות ארבע פאות (יש שישה קדקודים כאלה).



איור 10



איור 11



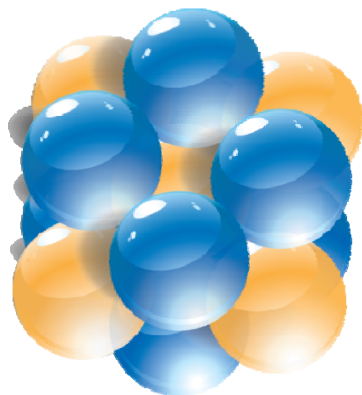
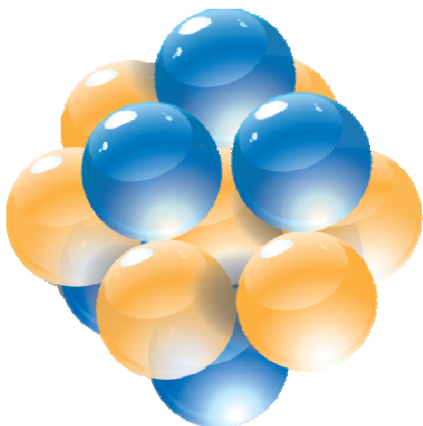
איור 12

קל לבנות תריסרון מעויני: לוקחים קובייה שצלעה a , ובונים על כל אחת משש הפאות שלה פירמידה ריבועית ישרה שגובהה $a/2$.

כדי להוכיח שהתריסרון המעויני הוא גוף שממלא את המרחב בלי רווחים, נמלא את המרחב בקוביות שמידתן $a \times a \times a$, נצבע אותן לסירוגין בשחור-לבן, כך שכל קובייה שחורה מוקפת בשש קוביות לבנות ולהפך. נוציא את הקוביות השחורות ונבנה על הפאות של הקוביות הלבנות פירמידות ישרות בגובה $a/2$. החללים שנוצרו יתמלאו לגמרי, כי במקום כל קובייה שחורה

יש עכשיו שש פירמידות, והמרחב "ארוז" בתריסרונים מעוינים (ראה איור 10).

התריסרון המעויני ממלא לגמרי את המרחב, בלי רווחים. באריזה המרחבית של התריסרונים המעוינים כל אחד מהם חולק פאה משותפת עם 12 תריסרונים מעוינים שכנים. אפשר לראות זאת כך: שש פאות מסביבו ועוד שלוש מלפנים ושלוש מאחור (ראה איור 11), או ארבע מסביבו ועוד ארבע מלפנים וארבע מאחור (ראה איור 12).



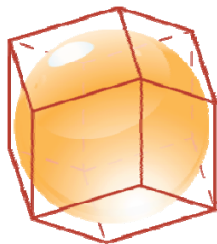
איור 13

על כן אם נמלא את כל המרחב בתריסרונים מעוינים שווים ונכניס לכל אחד מהתריסרונים כדור שנושק ל-12 הפאות, נקבל אריזה משושה של כדורים שווים במרחב או את האריזה הריבועית. לאמתו של דבר, שתיהן הן אותה אריזה (!) מזוויות ראייה אחרות (ראה איור 13). זוהי אריזת הירקנים (ראה איור 14).



איור 14

ומהי הצפיפות שלה (אם תשתרע מהדוכן לכל המרחב)?



החישוב מראה שנפחו של התריסרון המעויני הכולא כדור שרדיוסו r הוא: $4\sqrt{2}r^3 \approx 5.66r^3$ ונפח הכדור הוא: $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3$. לפיכך הצפיפות של כל אחת מהאריזות האלו היא: $\frac{4.2}{5.66} \approx 0.74$, כלומר כ-75% (3/4) מהמרחב האינסופי (ראה איור 15).



איור 16

בשנת 1611 האסטרונום המתמטיקאי יוהנס קפלר, בן הארבעים, פרסם ספרון קליל בשם "על פתותי שלג משושים", שהקדיש כשי לשנה החדשה לאחד מידידיו. בספרון זה הוא ניתח בין השאר את המבנה של כוורת הדבורים וגם את המבנה של גרעיני הרימון (ראה איור 16), וטען שעם הבשלת הפרי, הגרעינים העגולים נדחסים ומקבלים כל אחד צורה של תריסרון מעויני. באיור 16 רואים את האריזה של גרעיני הרימון בתוכו.

קפלר הוסיף וטען בלי לנמק, כאילו זה מובן מאליה, שני דברים:

1. האריזה הריבועית של כדורים שווים והאריזה המשושה של כדורים כאלה הן שקולות.
2. במרחב התלת-ממדי אין אריזה של כדורים שווים, בעלת צפיפות גדולה יותר. זאת האריזה הכי יעילה.

הטענה הראשונה נבדקה על-ידי קפלר עצמו. הוא חישב את הצפיפות של כל אחת מהאריזות האלו וקיבל 74% בערך. כדי להוכיח את הטענה השנייה נדרשו ארבע מאות שנה!

יוהאנס קפלר



יוהאנס קפלר (1571-1630)

(Stern~commonswiki, 2005)

קפלר נולד בעיר קטנה בגרמניה למשפחה קשת יום, אב נוח לרגוז ואם מחרחרת ריב. בהיותו בן שלוש, ברח אביו מהבית, התגייס לצבא ונעלם. בבית-הספר הצטיין יוהאנס בלימודים, ולמד בהמשך גם לטינית (שפת המדע באותה עת), אך היה מתקוטט עם חבריו, מתווכח עם המורים ורוכש לו בקלות אויבים. בגיל 18 החליט להכשיר את עצמו כאיש-דת. לקראת סיום ההכשרה חיפש עבודה ככומר, אולם למורת רוחו, נשלח בהמלצת מוריו לעבוד כמורה למתמטיקה ואסטרונומיה בבית-הספר של הכנסייה הפרוטסטנטית בעיר גראץ. בניגוד למצופה ממנו, התאהב שם בנערה וביקש את ידה, אך משפחתה דרשה שיוכיח שהוא בא ממשפחה טובה. זה לא היה קל, אך בסופו של דבר, הם נישאו בשנת 1597. קפלר החל אז להתעניין בלוח השנה, באסטרונומיה ובאסטרונומיה.

בשנת 1599 אחרי שהסתכסך ועזב את העיר גראץ, קיבל מינוי בפראג, כעוזרו של טיכו בראהה – אסטרונום נודע ששירת כמתמטיקאי החצר של הקיסר רודולף. עם מותו של טיכו בראהה, ירש קפלר את המשרה המכובדת. בשנת 1612 אשתו ואחד מילדיו נפטרו והוא עזב מדוכא את פראג, עבר לעיר לינץ באוסטריה וכעבור שנה נישא שנית. בשנת 1615 ניתנה עליו צרה חדשה עם האשמתה של אמו כמכשפה, אשמה הגוררת אחריה עונש מוות. אף שידע על אופייה התככני של אמו, נחלץ הבן להגנתה ונלחם על זיכויה במשך שש שנים, עד שהצליח לשחרר אותה ב-1621. קפלר נחשב לנסיך האסטרונומיה. בזכות יכולותיו המתמטיות למדנו כי כוכבי הלכת נעים במסלולים אליפטיים סביב השמש, הנמצאת באחד המוקדים; כי הם נעים במהירויות לא אחידות, וכי מחזורי ההקפה פרופורציוניים למרחקיהם מהשמש. הוא היה גם סופר בתחום המדע הבדיוני. בעשור האחרון לחייו כתב קפלר פנטזיה בשם סֶמְפְּיוֹנִים (בלטינית – החלום). הסיפור הוא על מסע אל הירח בעת ליקוי חמה באמצעות כוחות אפלים. יש בו תיאור מפורט למדי על מראה כדור-הארץ מהירח. מקצתו דמיוני ומקצתו אוטוביוגרפי. הסיפור נחשב לחיבור המדעי הרציני הראשון

על אסטרונומיה ירחית. בשנת 1630 בגיל 59, חלה קפלר ונפטר כשהוא עטור תהילה.

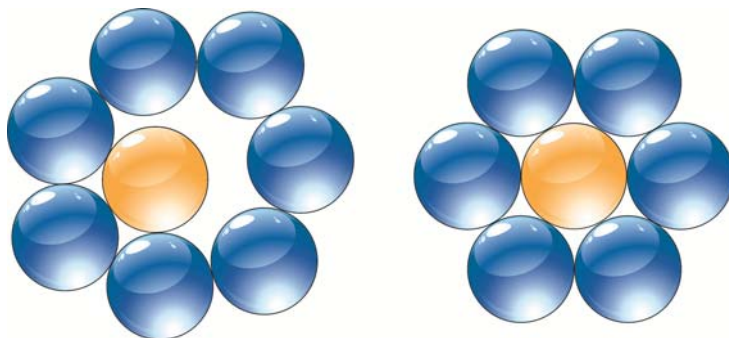
אריזת הכדורים

כאמור, העלה קפלר את ההשערה שהאריזה הכי צפופה של כדורים שווים במרחב היא "אריזת הירקנים" התופסת בערך $3/4$ מהמרחב. כדי לבחון את ההשערה לעומקה נבדקה שאלה אחרת: מהו המספר המקסימלי של כדורים שווים שמשיקים לכדור אחד? קל להבין שבממד אחד, כלומר לאורך קו ישר, התשובה היא 2 (ראה איור 17).



איור 17

בשני ממדים, כלומר במישור, התשובה היא 6, כי אין רווחים ואין מקום לכדור שביעי (ראה איור 18).

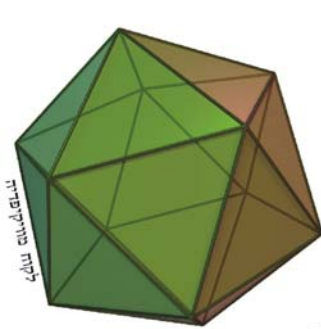


איור 18

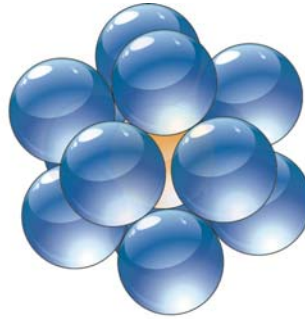
בשלושה ממדים זה פחות ברור.

כזכור, הצביע קפלר על שתי דרכים (שהן אחת), אשר אפשר לארגן בהן 12 כדורים שווים כך שישיקו לכדור אחד השווה להם גם הוא, בלי רווחים ביניהם, אבל האם אין דרך אחרת לכך? מתברר שיש! ויותר מאחת! אפשר למשל, בין 13 כדורים שווים, לסדר 12 כדורים סביב כדור אחד שמרכזו במרכז של עשרימון (איקוסהדרון) משוכלל ומרכזי ושאר הכדורים נמצאים ב-12 קדקודי העשרימון.¹ בסידור כזה יש רווחים ביניהם (ראה איור 19) ומתעוררת השאלה: האם בסידור כזה אין מקום לעוד כדור אחד ביניהם? השאלה עוררה מחלוקת.

1. עשרימון הוא אחד מחמשת הגופים המשוכללים. הוא עשוי מ-20 פאות שכולן משולשים חופפים שווים-צלעות ויש לו 12 קדקודים.

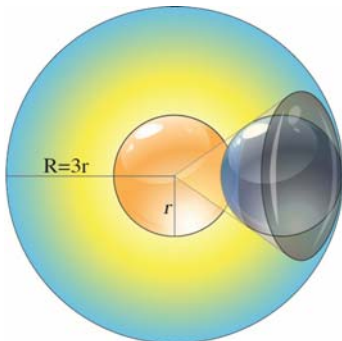


איור 19



בשנת 1694, ניטש ויכוח נוקב בין אייזק ניוטון (Isaac Newton, 1642-1727), איש קיימברידג', לבין דייויד גרגורי (David Gregory, 1659-1708), איש אוקספורד, על השאלה שזכתה בשם "בעיית הנשיקה":

מהו המספר המקסימלי של כדורים שווים שמשיקים במרחב לכדור אחד, השווה להם? שני האסטרונומים דנו במיקום של גרמי השמיים סביב השמש וכך הגיעו לשאלה הזאת. כאן נחלקו הדעות – גרגורי היה לא רק הצעיר בין השניים, אלא גם מדען פחות ידוע ובדרך כלל נטה לקבל את דברו של ניוטון כבר-סמכא. בכל זאת, גרגורי טען שצריך להיות אפשרי לארגן 13 כדורים שווים, כך שישיקו לכדור אחד, ואילו ניוטון טען ש-12 הוא המספר הכי גדול. הנימוק של גרגורי היה משכנע למדי: נשים את כל הכדורים השווים ($r=1$) הנושקים לכדור מרכזי אחד בעל אותו רדיוס, בתוך כדור-על שרדיוסו גדול פי שלושה ($R=3$). נדמיין פנס במרכז הכדור הגדול שמאיר על הכדורים. נוצרת צללית של כל כדור על הדופן הפנימית של הכדור הגדול (ראה איור 20).



איור 20

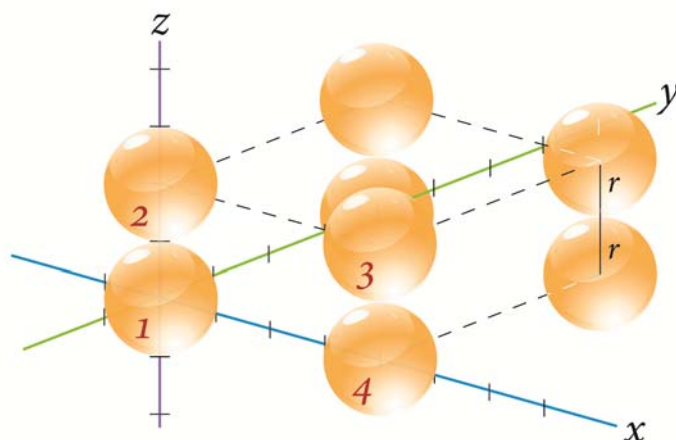
החישוב מראה שהצללית תופסת קצת יותר מ- $1/15$ משטח הדופן. לפיכך טען גרגורי, יש מקום אפילו ל-14 כדורים ובוודאי ל-13 סביב הכדור המרכזי. צריך רק למצוא דרך נכונה לסדר אותם סביבו. ניוטון דבק באריזות של קפלר שאין בהן רווחים בין כדורים המשיקים לכדור אחד וטען שאי אפשר למצוא סידור של 13 כדורים שווים שישיקו לכדור מרכזי אחד השווה להם. רק בשנת 1953, 259 שנה לאחר מכן, התברר והוכח שניוטון צדק!

אפשר לסדר 13 כדורים שווים משיקים לכדור מרכזי השווה להם, רק אם מגדילים את רדיוסו r במעט, ל- $1.04557r$ (Schutte & van der Waerden).

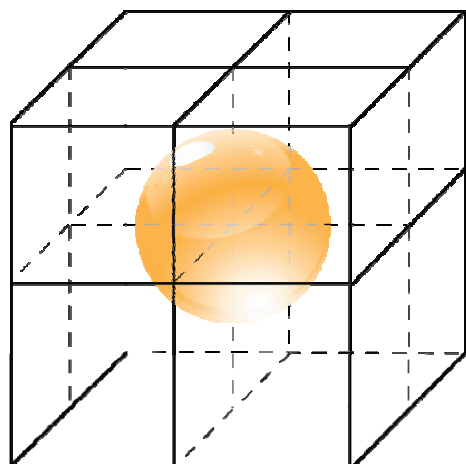
פריצת דרך ראשונה

המיפוי של הנקודות במרחב התלת-ממדי, שבהן מוצבים מרכזי הכדורים מתאפשר כמקובל במערכת צירים מאונכים זה לזה: x, y, z הנחתכים בנקודה אחת – ראשית הצירים. לכל נקודה במרחב יש מקום משלה המתאפיין על-ידי מרחקיה משלושת המישורים $x-y$; $y-z$; $z-x$. שלישיית המספרים (הסדורה!) הזאת היא "השם המזהה" של הנקודה. גם למרכז של כל כדור בכל אריזה במרחב יש "שם מזהה תלת-ספרתי". המתמטיקאי האגדי של המאה התשע-עשרה, קארל

פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), בחן את האפשרויות הרבות לארוז כדורים שמרכזיהם נמצאים בנקודות בעלות "זהות" מיוחדת במרחב – נקודות השריג. נקודות אלו הן הנקודות בעלות שלושה שיעורים שלמים, כלומר נקודות השריג הן הקדקודים של תיבות, אשר פאותיהן מקבילות למישורים $x-y$; $y-z$; $z-x$ ומידות האורך, הרוחב והגובה שלהן ניכרות במספרים שלמים של יחידות שנקבעו על הצירים. ברור שכל מידות התיבה חייבות להיות לפחות כפליים מהרדיוס של הכדור הכלוא בתוכה (ראה איור 21).



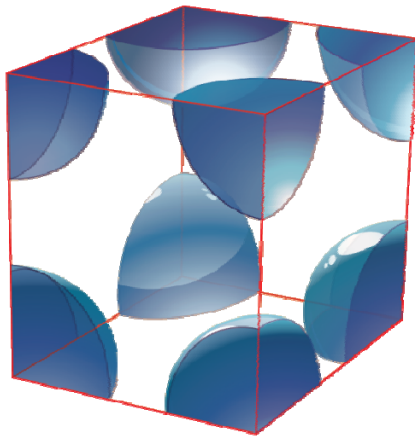
איור 21



איור 22

גאוס ידע ששלושת הצירים לא מוכרחים להיות ניצבים זה לזה, ואז נקודות השריג יוצרות "תיבות" נטויות והכדורים בתוכן מסתדרים אחרת בהתאם. עם הידע הזה ניגש גאוס לבחון בחינה מתמטית את השערתו של קפלר באשר לאריזה המרחבית של כדורים שווים בעלת הצפיפות המקסימלית. הוא שם לב לכך שבמערכות צירים אחרות, נקודות השריג יוצרות "תאים" בעלי צורות ונפחים אחרים. אבל המשותף לכולן הוא שכל נקודת שריג משותפת לשמונה תאים, והיא המרכז של כדור אחד (ראה איור 22).

לכן כל כדור מתחלק בין שמונה תאים ובכל תא יש שמונה שמיניות של כדורים. במילים אחרות, חלקי הכדורים המוכלים בתא אחד הם בנפח של כדור שלם (ראה איור 23).



איור 23

בשריג "הרגיל" (שבו הזוויות בין כל שני צירים הן בנות 90°) התיבה הקטנה ביותר שאפשר לחשוב על שמונה קדקודיה כמרכזי שמונה כדורים שווים ברדיוס r , היא קובייה שמידותיה $2r \times 2r \times 2r$. נפחה $8r^3$. כזכור, נפח הכדור הוא $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.2r^3$, כ-50% מנפח הקובייה.

גאוס הצליח להוכיח שעל-ידי עיוות מערכת הצירים אפשר להקטין את הנפח של התא המינימלי לכל היותר ב-29.3% כך שנפחו $\sim 5.66r^3$. הצפיפות המקסימלית שאפשר להשיג היא אפוא $\frac{4.2}{5.66} \approx 0.74$ בדיוק כפי ששיער קפלר.

זאת הייתה פריצת דרך משמעותית, אך עדיין לא הוכחה מלאה להשערת קפלר. גאוס הוכיח בכך את השערת קפלר לאריזה מרחבית "מסודרת", אריזה בנקודות של שריג. מבין כל האריזות האלה, האריזה הריבועית היא זו שנמצאה כבעלת הצפיפות הגדולה ביותר. אבל אולי יש אריזה "מבולגנת" יותר שצפיפותה עולה על זאת?

אנחנו בראשית המאה התשע-עשרה והשערת קפלר משנת 1611 עשתה רק צעד ראשון לקראת הוכחתה. השאלה הקשה של האריזה המרחבית הצפופה ביותר של כדורים שווים שאיננה קשורה לנקודות של שריג, עדיין פתוחה. והיא תחכה להוכחה או להפרכה עוד שנים רבות.

קארל פרידריך גאוס

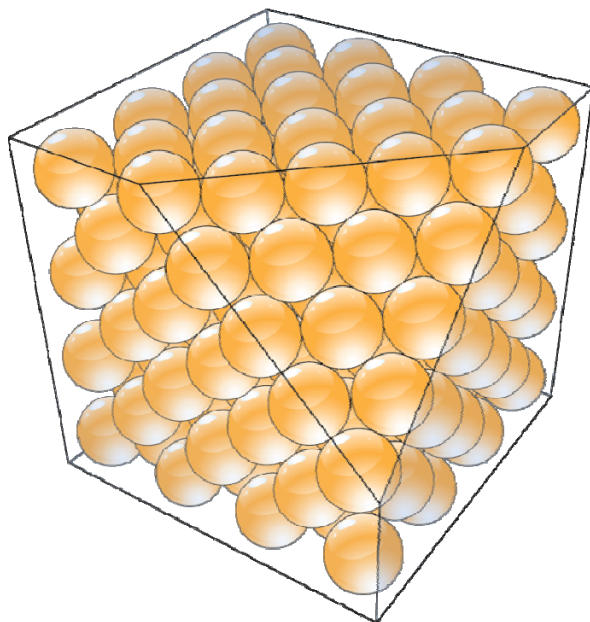


קארל פרידריך גאוס
(1855-1777)
(Biermann, 1887)

גאוס, יליד גרמניה, היה בן לאב שתלטן ומחוספס שפרנסתו הייתה דלה ולאם שלא ידעה קרוא וכתוב. הוא גילה יכולות יוצאות דופן מגיל צעיר. בהיותו בן שלוש, כך אומרים, תיקן טעויות בניהול החשבונות של אביו; בכיתה ג הפתיע את המורה לחשבון שהטיל על הכיתה משימה קשה ומייגעת – לחבר את כל המספרים מ-1 עד 100 – המורה קיווה שזה ייתן לו שקט לזמן מה. גאוס בן השבע קפץ מיד עם התשובה 5,050, וגם הסביר: יש 50 זוגות מסכומם 101. ייאמר לזכותו של המורה ושל עוזרו (לימים פרופסור למתמטיקה) שהם לא נזפו בילד, אלא טיפחו את הכישרון הצעיר שהתגלה. בגיל 11 גאוס התקבל לגימנזיום והמשיך ללמוד, בניגוד לרצון אביו שהעדיף שבנו יצא לעבוד וירוויח למחייתו. בגיל 14 הוא סיים את התיכון וזכה במלגת קיום מכובדת המתחדשת מדי שנה

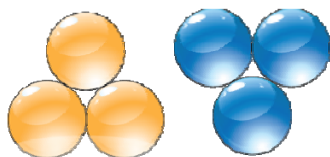
בשנה עד גיל 30. בגיל 15 התחיל בלימודים אקדמיים וראה את עבודותיהם של מתמטיקאים דגולים מהמאות השבע-עשרה והשמונה-עשרה: ניוטון, אוילר ולגרנז'. לפני שסיים את הלימודים עבר לגטינגן, שהייתה מרכז מדעי ראשון במעלה והמשיך להצטיין לא רק במתמטיקה, אלא גם באסטרונומיה ובשפות. כחלק מעבודת הדוקטורט, בגיל 22, הוא הוכיח את המשפט היסודי של האלגברה (קיום n שורשים מרוכבים לפולינום ממעלה n). בהיותו בן 30 קיבל את ניהול מצפה הכוכבים בגטינגן והתמסר לאסטרונומיה. כאן התוודע לעבודתו של קפלר והודות לאחת ההברקות הרבות שהיו לו, הוא אישש במידת מה את השערתו.

סוף המאה התשע-עשרה: סיוע מכיוון בלתי צפוי



איור 24

הקריסטלוגרף ויליאם בארלו (William Barlow, 1845-1934) התעניין בסידור של אטומים ובמבנה החומר ולא בכדורי התותח. בשנת 1883 הוא הוכיח את מה שקפלר ואפילו האריוט אמרו מזמן – שהאריזה הריבועית והאריזה המשושה הן אותה אריזה משתי נקודות תצפית שונות (ראה איור 24). עשרים וארבע שנים לאחר מכן הפתיע שוב בארלו, אשר הוכיח שהאריזה הזאת אינה היחידה בעלת הצפיפות של 74% בערך – שהיא הצפיפות המקסימלית לפי השערת קפלר. יתרה מזו, הוא הראה שיש אינסוף אריזות מגוונות שצפיפותן שווה לצפיפות הזאת. הא כיצד?

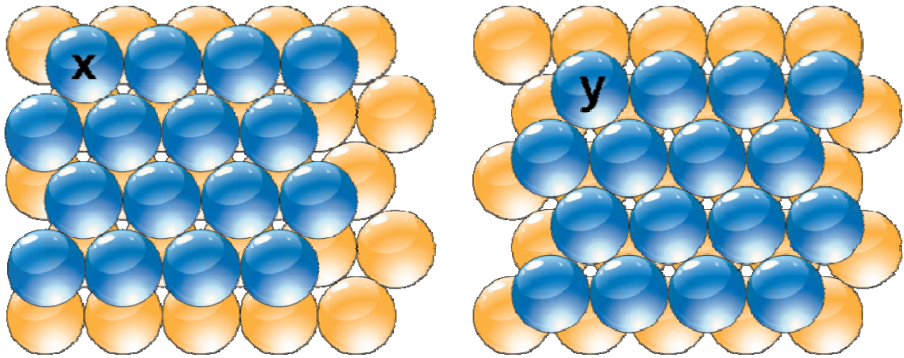


איור 25

במאמר שפרסם בארלו בעיתון יוקרתי של החברה המלכותית לכימיה עם כימאי ממנצ'סטר בשם ג'קסון פופ, הם מסבירים זאת כך:

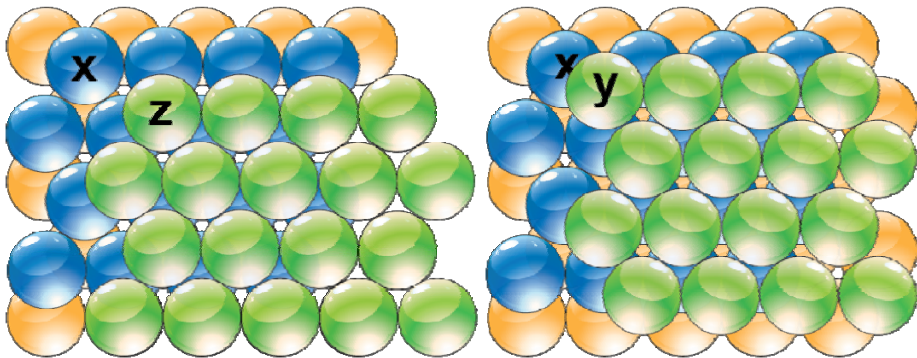
נתבונן בשכבה אחת של אריזה משושה. הרווחים בין כל שלושה כדורים סמוכים בה – הם משני סוגים (ראה איור 25).

לכן את הכדורים בשכבה שמעליה אפשר להניח בשתי צורות, X או Y, ברווחים מסוג א או מסוג ב בהתאמה (ראה איור 26).



איור 26

נבחר באחת מהשתיים, למשל ב-X. גם בשכבה הזאת יש כמובן שני סוגי רווחים כמו בקודמת. סוג א נמצא בדיוק מעל למרכזי הכדורים של השכבה התחתונה וסוג ב נמצא בדיוק מעל לרווחים שעליהם מונחת אפשרות Y. השכבה השלישית יכולה אפוא להסתדר באחת משתי דרכים: Y או Z (ראה איור 27).



איור 27

גם בכל אחת מהשכבות הבאות יש שתי אפשרויות והמסקנה היא שסידור השכבות יכול להיות $XZYXYZ...$ או $XYXYZY...$ או $XZXZY...$ או כל סדרה אחרת מבין אינסוף האפשרויות ליצור שרשרת (אינסופית) של X, Y, Z (בלי חזרות). המשותף לכל אינסוף האריות המגוונות הללו הוא, שכל כדור נושק ל-12 כדורים אחרים ולכולן אותה צפיפות. זו הצפיפות שקפלר שיער במאה השבע-עשרה שהיא הגדולה ביותר ושרק במאה התשע-עשרה גאוס הוכיח זאת לראשונה לכל אריות השריג. חשוב לציין כי אין להסיק מכאן שכל אריזה, שבה כל כדור נושק ל-12 אחרים, היא בעלת אותה הצפיפות.

העבודות של גאוס המתמטיקאי והמדען המהולל ושל בארלו הקריסטלוגרף עם פופ הכימאי, הביאו לידי הבנה מעמיקה יותר של השערת קפלר, אבל לא להוכחה ולא להפרכתה. המאה העשרים בפתח והשערת קפלר ממשיכה להטריד את הקהיליה המתמטית.

מה עלה בגורלה של השערת קפלר במאה העשרים?

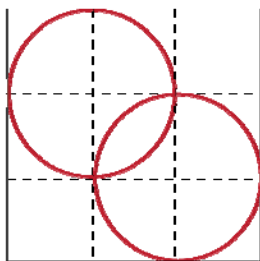
המתמטיקאים פתחו את המאה העשרים בכנס בינלאומי שהתקיים בפאריס בשנת 1900. בהרצאת הפתיחה התכבד דיוויד הילברט (David Hilbert, 1862-1943), מתמטיקאי מהשורה הראשונה, שהאמין בלהט כי בזכות ההתמדה והודות לכושר ההנמקה האנושי, כל בעיה מתמטית ניתנת לפתרון (אגב, כיום, בעקבות משפט גידל, אנחנו יודעים שהילברט טעה באמונתו. גידל הראה כי יש השערות הנקראות "בלתי כריעות", שאותן אי אפשר להוכיח ועם זאת גם אי אפשר להפריך). בפתיחת הכנס הציג הילברט 23 בעיות פתוחות במתמטיקה, סקר אותן והעמיד אותן כאתגר לקהילייה המתמטית בפרוס המאה העשרים. עד היום רוב הבעיות נפתרו, אך לא כולן. השערת קפלר הופיעה ב"רשימת הילברט" כחלק ג של בעיה 18.

כאמור, קפלר שיער וגאוס הביא תימוכין לכך שהצפיפות המרבית של כדורים שווים במרחב היא הצפיפות של אריזה משושה (74.05%~), המשמשת חסם תחתון לצפיפות המרבית. הצפיפות המרבית לא יכולה להיות קטנה יותר. כדי להוכיח שקפלר צדק, צריך להוכיח שזהו גם החסם העליון לצפיפות המרבית. כלומר שהיא לא יכולה להיות גדולה יותר מ-74.05%~. כיוון שמובן מאליו שאי אפשר למלא את המרחב יותר מ-100%, חייב להימצא בין 100% לבין 74.05%~ הפתרון לצפיפות המרבית. המרוץ להקטנת החסם העליון העסיק את המתמטיקאים במהלך המאה העשרים כולה. ההצלחה הראשונה הייתה של הנס בליכפלדט (Hans Frederick Blichfeldt, 1873-1945), מתמטיקאי אמריקאי, בן למהגרים מדנמרק, אשר פילס את דרכו והפך לדיקן הפקולטה למתמטיקה של אוניברסיטת סטנפורד הידועה. במאמרו משנת 1919 הוא הוכיח שצפיפות הכדורים לא יכולה לעלות על 88.3% ובשנת 1929 שיפר ל-84.3%. אילו היה מצליח למצוא אריזה שזו צפיפותה, זו הייתה מכת-מוות להשערת קפלר, אבל השערת קפלר נשארה בלי הכרעה בינתיים. בשנת 1947 נכנס לתמונה רוברט רנקין (Robert Alexander Rankin, 1915-2001), מתמטיקאי סקוטי, שהשתחרר באותו זמן משירות צבאי בעת מלחמת העולם השנייה. הוא שיפר את התוצאה של בליכפלדט ל-82.7%. המתמטיקאי ההונגרי, לאסלו פייז'ה-ט'וט (László Fejes-Tóth, 1915-2005), בנה תאי חלוקה של המרחב, תא לכל כדור, על-ידי חלוקת החללים הריקים שבין שני כדורים שכנים שווה בשווה בין שני התאים השכנים. היה ברור שככל שהתאים קטנים יותר, כן הכדורים צפופים יותר. פייז'ה-ט'וט העלה את ההשערה שהתא הכי קטן הוא התריסרון המשוכלל, אבל הבעיה הייתה שהתריסרון איננו ממלא את המרחב ב-100% ולכן החישוב של היחס בין נפח כדור הכלוא בתריסרון ובין נפח התריסרון, לא הביא לתוצאה המקווה. בשנת 1953 הוא הצליח להראות שכדי להוכיח את השערת קפלר, מספיק לחשב את הצפיפות במספר סופי (אבל גדול מאוד...) של מקרים אחרים. הוא הציע תכנית עבודה שהייתה "יריית הפתיחה" לטיפול בהשערת קפלר באמצעות מחשב, בהנחה שכוח המחשוב ילך וישתפר בעתיד.

והנה זה קורה...

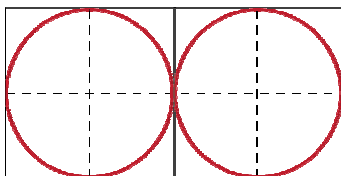
בין המתמטיקאים שעבדו לפי התכנית שהתווה פיז'ה-טוט' היה מתמטיקאי יליד סין בשם וו-יי שְׁיָאָנְג (Wu-Yi Hsiang, 1938-), שהתחנך בטיוואן וקיבל את הדוקטורט בפרינסטון בשנת 1964. הוא קיבל מינוי בפקולטה למתמטיקה באוניברסיטה היוקרתית של קליפורניה בברקלי, ובשנת 1990, כשהיה פרופסור מן המניין, שלח לאחדים מעמיתיו המתמטיקאים הודעה קצרה וברורה: "מצ"ב הוכחת השערת קפלר, להערותיכם...". כעבור זמן מה, בשנת 1991, הוא הגיש את ההוכחה שלו לפרסום בעיתון מתמטי שיצא לאור בברקלי.

ספר השנה של אנציקלופדיית בריטניקה לשנת 1992 מציין כהישג הגדול של שנת 1991 את הוכחתו של שְׁיָאָנְג להשערת קפלר. בינואר 1993 הוא הוזמן לשאת את הרצאת הפתיחה בנושא 'הוכחת השערת קפלר' בכנס השנתי המשותף של שני האיגודים המתמטיים הגדולים של ארה"ב: MAA-AMS. התגובות של עמיתיו, שהיו מטובי המתמטיקאים של המאה העשרים, לא איחרו לבוא (ג'ון קונוויי, איאן סטוארט, ניל סלואן ואחרים). בהוכחה של וו-יי שְׁיָאָנְג משנת 1990 נמצאו הרבה "נפנופי ידיים" ("קל לראות ש...", "באופן דומה מוכיחים...") ונימוקים לא מלאים. הוא מתקן אך הביקורת נמשכת. הוא מגיב בבוטות ("חובבים", "לא מבינים") ועם זאת, הוא חוזר ומפרסם מאמרי תיקון זה אחר זה. באמצע שנת 1993 וו-יי שְׁיָאָנְג מתחיל לחזור בו מדעתו ומפרסם תכנית עבודה בת 88 עמודים, שתביא לידי השלמת ההוכחה שלו. בשנת 1994 פרסם מתמטיקאי אמריקאי אחר בשם תומאס היילס (Thomas C. Hales), שהיה אז בן 36 ופרופסור-חבר באוניברסיטת מישִׁיגן, מאמר מקיף ומעמיק על מצבה העדכני של השערת קפלר. במאמרו הוא קובע קביעה חד-משמעית שלהשערה עדיין אין הוכחה. עוד הוא מוסיף שבשנת 1993 דאגלס מוֹדֶר (Douglas J. Muder) השיג את החסם העליון הכי נמוך שידוע – 77.31%. לדברי היילס, התכנית של וו-יי שְׁיָאָנְג נראתה מבטיחה, אך כל עוד לא בוצעה – הטענה של קפלר היא בחזקת השערה. היילס גם מותח ביקורת חריפה ומנומקת היטב על ה"הוכחה" שפירסם וו-יי שְׁיָאָנְג ומביא שגיאות רבות שנמצאו בה. בין השאר כותב היילס כך:



הנה ציטוט מהטיעון של וו-יי שְׁיָאָנְג: "אם לתא מסוים אי אפשר להכניס מספר כדורים, אז אי אפשר להכניס אותם לתא קטן יותר".

היילס ממשיך וממחיש באיור (ראה איור 28) שזה לא נכון אפילו לשני כדורים בשכבה אחת. שני כדורים שרדיוס כל אחד מהם שווה ל-1 לא נכנסים לשטח של 3×3 , אבל הם כן נכנסים לשטח קטן יותר של 2×4 . עוד מוסיף היילס במאמרו:



איור 28

במאמר הראשון של וו-יי שְׁיָאָנְג הטיעון נשען על ההנחה שבכל משולש מרכז המעגל החוסם נמצא בתוך המשולש. הנחה כזאת מגבילה את המשך הטיעון למשולשים שכל זוויותיהם חדות. במשולשים קהי-זווית מרכז המעגל החוסם נמצא

מחוץ למשולש.

שגיאות אחרות שנמצאו בפרסומים של וו-י ו־יֵי שִׁיאָנג הן בעלות אופי פחות אלמנטרי, אבל "השורה התחתונה" היא כדברי ג'ון קונוויי, אחד המוחות היצירתיים ביותר במתמטיקה בת זמננו:

...nobody who has read Hsiang's proof has any doubts about its validity: It is nonsense...

וו-י ו־יֵי שִׁיאָנג עזב את ברקלי בשנת 1997 וחזר לארץ מוצאו, הונג קונג. הוא ממשיך לעסוק במתמטיקה ולפרסם את ממצאיו. תומאס היילס לא הרפה מעיסוקו בהשערת קפלר.

עבודתו הדרמטית, רווית התסכול והעקשנות של תומאס היילס 1994-2014



תומאס היילס (1958-) (Hirling, 2015)

תומאס היילס הוא מתמטיקאי אמריקאי יליד 1958, אשר קיבל את הדוקטורט בגיל 26 באוניברסיטת פרינסטון המהוללת, לאחר שני תארים קודמים בסטנפורד ושנת מלגה בקיימברידג'. כיום הוא פרופסור מן המניין באוניברסיטת פיטסבורג.

הביקורת הנוקבת של היילס על ה"הוכחה" של וו-י ו־יֵי שִׁיאָנג נשענה על התמצאות מעמיקה בכל קורותיה של השערת קפלר ובפרט ברעיונות של פיז'ה טוט' משנת 1953, המבטיחים שאפשר להוכיח אותה רק אם יהיה כוח חישוב חזק די הצורך למיצוי מספר סופי גדול למדי של אפשרויות לאריות הכדורים.

בשנת 1994 התווה היילס אסטרטגיה בת חמישה שלבים, אשר תוביל אותו ל"ניצחון" על השערת קפלר. בשנת 1996 הוא יצא למסע הרצאות באוניברסיטאות אחדות, הסביר את הרעיונות המרכזיים בתכניתו, תיאר את התקדמותו וציין בגילוי לב שהוא מצפה לסיים את ההליך בתוך שנתיים. ואכן, ב-9 באוגוסט 1998, יחד עם תלמידו סמואל פֶּרְגֶסון, הוא שלח מייל לרשימת תפוצה גדולה של מתמטיקאים-עמיתים והודיע בחגיגות:

אחרי 6 שנות עבודה, התכנית הושלמה והוכתרה בהצלחה! כל הפרטים –
באתר האינטרנט שלי <http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/>.

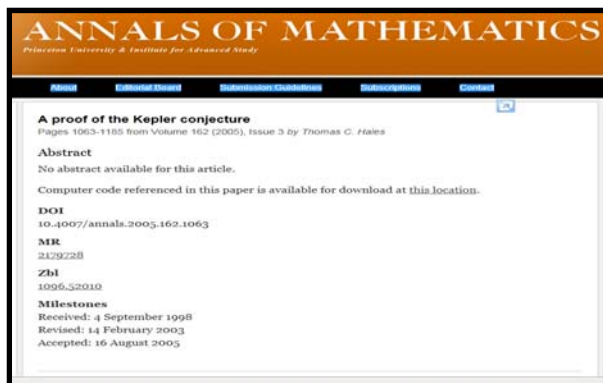
היילס הראה שאף כי יש מספר אינסופי של אפשרויות לערום כדורים שווים, אפשר להפריד את כולן למספר סופי (אלפים רבים) של תצורות המייצגות את אינסוף האפשרויות. הוא השתמש בתכנת מחשב כדי לבדוק את כל התצורות הללו.

הפרסום של כל הפרטים באינטרנט הציב אתגר לא קל לפני הקהילייה המתמטית. ההוכחה משתרעת על פני סדרת מאמרים בת 250 עמודים וכוללת עוד שלושה ג'יגה בייט של תכניות מחשב ונתונים. כדי לעקוב אחר פרטיה, צריך להבין את הטקסט, להוריד את תכניות המחשב, להריץ אותן ולוודא שאין בהן טעויות.²

2. מצב דומה קרה ב-1976, כאשר אָפֶל והייקן הכריזו על הוכחתם בסיוע מחשב של ההשערה על כך שארבעה צבעים מספיקים לצביעת כל מפה מדינית. גם הם, כמו תומאס היילס, הצליחו להראות שאפשר לצמצם את הבעיה למספר סופי (גדול...) של

את ההרצאה הראשונה לאחר השלמת ההוכחה נשא היילס בספטמבר 1998 בכנס בינלאומי על סימטרייה שהתקיים בטכניון והתקבל בתשואות רמות. הקהל המגוון של באי כנס ISIS היה אוהד ולא הציג שאלות קשות. המבחן האמיתי היה כעבור שישה חודשים במכון ללימודים מתקדמים בפרינסטון. במשך ארבעה ימים נשאלו שאלות נוקבות והיילס השיב על כולן ונטע במשתתפים הרגשה שההוכחה שלו מבוססת היטב. לכן הוזמן היילס להגיש את ההוכחה לפרסום בכתב-העת היוקרתי *Annals of Mathematics*. העורך הזהיר אותו כי שנים-עשר מומחים יבדקו את ההוכחה, ולכן הבדיקה עלולה לקחת זמן. היילס לא נרתע, הוא רצה שההוכחה שלו תיבחן כיאות וקיווה שתקבל גושפנקה שהיא נכונה מעל לכל צל של ספק. יו"ר ועדת השופטים היה גאבור פייז'ה-טות', בנו של לאסלו. גם הוא מתמטיקאי הונגרי בעל שם. התהליך היה ארוך ומייגע ובשנת 2003, לאחר חמש שנים שבמהלכן צוות של שנים-עשר מטובי המתמטיקאים בחן את ההוכחה, כתב גאבור לעורך:

הצוות משוכנע ב-99% שההוכחה נכונה אבל לא נוכל להמשיך לעסוק בכך – אנחנו מותשים...



איור 29

פייג'ה-טות' נאלץ ליצור תקדים היסטורי, הוא מכריז שהוא מוותר! אבל היילס לא מוותר. הוא הכין מהדורה מקוצרת של ההוכחה, שהייתה בת 120 עמודים, וכעבור עוד שנתיים, בנובמבר 2005, זכתה המהדורה המקוצרת לפרסום ב-*Annals* (ראה איור 29). היילס הקדיש את המאמר ללאסלו פייז'ה-טות', אשר נפטר באותה שנה.

היילס לא ויתר גם על רצונו להגיע לידי הכרה במהדורה המורחבת, הכוללת חישובים גיאומטריים ובדיקות ממוחשבות. הוא חתר לאישורה מעל לכל צל של ספק ופתח בהליך חדש.

בשנת 2003 הוא השיק פרויקט בינלאומי שיתופי מתמשך ופתוח להצטרפות לכל המעוניין: F.P.K: Formal – FLYSPECK. <http://code.google.com/p/flyspeck/>. לפרויקט הוא קרא בשם 'FLYSPECK: Formal Proof Kepler' (בתרגום מאנגלית: 'פלייפק' פירושו 'טלאי' ויש המכנים אותו 'המעופף').

מטרתו להביא לידי כך שהוכחות באמצעות מחשב יהפכו להוכחות קבילות בהיותן בדוקות ומאושרות מעל כל צל של ספק על-ידי הקהילה המתמטית. הצוות, בהנהגתו של היילס, השתמש בשתי תכנות שהן עוזרי בדיקה של הוכחות פורמליות הנקראות Isabelle ו-HOL Light. שתיהן

מקרים ובחנו אותם אחד אחד. כך הפכה השערת ארבעת הצבעים בן-לילה למשפט, אף כי האשרור של ההוכחה של אפל והייקן התעכב חודשים רבים. אבל ב-1998, כשרשת התקשורת באינטרנט כבר הפכה לכלי זמין ומוכר לכל מתמטיקאי בכל העולם, הציפייה הייתה שהאשרור של ההוכחה של היילס יקרה הרבה יותר מהר.

בנויות סביב גרעין מוצק ואמין של לוגיקה ומסוגלות לבדוק בקפידה כל שרשרת של טענות לוגיות כדי לאתר בהן שגיאות או לאשר שהן טענות אמת.

כעבור אחת-עשרה שנה, באוגוסט 2014 התברר כי המאמצים של היילס ומתמטיקאים רבים שהצטרפו אליו נשאו פרי. הספקות של המתמטיקאים באשר להוכחה הנשענת על בדיקה של מאות מקרים באמצעות מחשב, נובעים מהיעדר היכולת לוודא בידי אדם, שאין טעויות בעבודת המחשב. המתמטיקאים של פרויקט פלייספק והיילס בראשם, הצליחו לפתח תכנות מחשב שעושה את הליך האימות הזה. לאחר שהושלמה המשימה אמר היילס:

אני מרגיש כעת צעיר בעשר שנים. מעתה מתמטיקאים לא צריכים כבר לבזבז את זמנם בבדיקת הוכחות לפני פרסומן. התכנות שלנו עושה את זה, והמתמטיקאים יכולים להתפנות ליצירה של הוכחות חדשות!

לאחר פרסום ההוכחה אמר היילס:

יש לי קופסא מלאה ברעיונות שדחיתי את העבודה עליהם כל עוד לא הושלמה העבודה על הוכחת השערת קפלר. נקווה שהפרויקט הבא לא יארך 20 שנה!

המתמטיקאים, עמיתיו של היילס, מאמינים שבעקבות ההישג הזה יגדל מספר המתמטיקאים הסומכים על המחשב לצורך אימות הוכחות. בסוף המאה העשרים גרמו הוכחות באמצעות מחשב לסערה. במאה העשרים ואחת, אימותן באמצעות מחשב הוא הבשורה הגדולה.

רשימה מוערת של מקורות והמלצות לקריאה נוספת

Conway, J. H., & Sloane, N. J. A. (1999). *Sphere packings, lattices and groups* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.

Coxeter, H. S. M. (1961). *Introduction to geometry*. New York: Wiley.

Joyce, H. (2003, April 30). Kepler's conjecture [Review of the book *Kepler's conjecture*, by G. G. Szpiro]. *plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue25/reviews/book4>

Szpiro, G. G. (2003). *Kepler's conjecture: How some of the greatest minds in history helped solve one of the oldest math problems in the world*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons.

על תומאס היילס:

Hirling, B. (2015). *Mathematik raetsel Thomas Hales* [Image]. Retrieved from http://www.zeit.de/wissen/2015-07/mathematik-raetsel-thomas-hales/wide__250x141

מאמרים של תומאס היילס על הוכחת השערת קפלר:

Hales, T. C. (1994). The status of the Kepler conjecture. *The Mathematical Intelligencer*, 16(3), 47-58.

Hales, T. C. (2002). *An overview of the Kepler conjecture*. Retrieved from <http://arxiv.org/pdf/math/9811071v2.pdf>

Hales, T. C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162(3), 1065-1185. Retrieved from <http://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>

ההוכחה של היילס בראשי פרקים:

Hales, T. C. (2001). *Cannonballs and honeycomb*. Retrieved from <http://www.math.pitt.edu/articles/cannonOverview.html>

על פרויקט פלייספק וההודעה על ההישג של שנת 2014:

Flyspeck. (2014). Retrieved from <https://code.google.com/p/flyspeck/wiki/AnnouncingCompletion>

The Flyspeck Project. (2014). Retrieved from <http://code.google.com/p/flyspeck/>

Proof confirmed of 400-year-old fruit-stacking problem. (2014, August). *New Scientist*. Retrieved from <http://www.newscientist.com/article/dn26041-proof-confirmed-of-400yearold-fruitstacking-problem.html#.VEqH-iKUeky>

על יוהאנס קפלר:

Stern~commonswiki. (2005). *Johannes Kepler* [Image]. Retrieved from https://he.wikipedia.org/wiki/קפלר_גאוס#/media/File:Johannes_Kepler.jpg

על קארל פרידריך גאוס:

Biermann, G. (1887). *The mathematician and philosopher Carl Friedrich Gauss* [Oil painting]. (Submitted by Bcrowell~commonswiki). Retrieved from https://he.wikipedia.org/wiki/קארל_פרידריך_גאוס#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

על החוברת הקטנה של קפלר בנושא "פתותי השלג המשושים" שבה העלה את ההשערה המפורסמת:

Ball, P. (2011, December 22). 400 years of snowflakes [Web log post]. Retrieved from <http://philipball.blogspot.com/2011/12/400-years-of-snowflakes.html>

ועוד מקורות אחדים:

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. New York: H. H. & Co.

Hales, T. (2005). *Computer resources for Kepler's conjecture*. Retrieved from <http://annals.math.princeton.edu/supplemental/2005/162-3/p01/>

Mathematical mysteries: Kepler's conjecture (1997, August 31). *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue3/xfile>

Pinch, R. (1997, August 31). Coding theory: The first 50 years. *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue3/codes/index.html>

Rogers, C. (1964). *Packing and covering*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weisstein, E. W. (n.d.). Kepler conjecture. *Wolfram Mathworld*. Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/KeplerConjecture.html>

Zong, C. (1999). *Sphere packings*. New York: Springer.

על תומאס האריוט:

Shirley, J. W. (1983). *Thomas Harriot: A biography*. Oxford: Clarendon Press.

Wikipedia. (2015). *Thomas Harriot* [Image]. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Harriot

Jimmy2bellies (2009). *Cannon* [Image]. Retrieved from <https://pixabay.com/en/cannon-old-military-history-war-887345/>

Faherty, A. (2009, March 1). Thomas Harriot: A lost pioneer. *+plus magazine* <http://plus.maths.org/content/thomas-harriot-lost-pioneer?src=aop>

ההוכחה של THUE משנת 1890 שאריזה משושה במישור היא מינימלית (השערת קפלר ב-2 ממדים):

Casselman, B. (n.d.). *Packing pennies on an infinite table top: An illustrated proof of Kepler's conjecture in 2D*. Retrieved from <http://www.math.sunysb.edu/~tony/whatsnew/dec00/paper.html>

Thue (2001). *Cannonballs and honeycomb*. Retrieved from <http://www.math.pitt.edu/articles/thue.xml>

על התריסרון המעויני:

Newbold, M. (n.d.). *Mark Newbold's Rhombic Dodecahedron Page*. Retrieved from <http://dogfeathers.com/mark/rhdodec.html>

Umer, K. (n.d.). *The synergetics hierarchy of concentric polyhedral* (Part 1 of 2). Retrieved from <http://www.grunch.net/synergetics/volumes.html>

על בעיות אריזה של כדורים:

Schütte, K., & van der Waerden, B. L. (1953). Das Problem der dreizehn Kugeln. *Mathematische Annalen*, 125(1), 325-334.

Wikipedia (2015). *Sphere packing*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing

Wikipedia (2015). *Kissing number problem*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Kissing_number_problem

על בעיית הנשיקה (גם בספרו של Szpiro הנ"ל):

Szpiro, G. (2003, January 1). Newton and the kissing problem. *plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/content/newton-and-kissing-problem>

על הקריסטלוגרף – וויליאם ברלו:

Barlow, K. (1935). *William Barlow: Crystallography*. Retrieved from <http://www.barlowgenealogy.com/england/famous/williamcrystal.htm>

על ההרצאה הכי מפורסמת בהיסטוריה של המתמטיקה: הילברט 1900, פאריס:

Weisstein, E. W. (n.d.). Hilbert's Problems. *Wolfram Mathworld*. Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html>

על הכללה של משפט קפלר לממדים גבוהים יותר:

Courier, C. (2006, December 6). Untidy packing can have its advantages. *International Journal of High-Energy Physics*. Retrieved from <http://cerncourier.com/cws/article/cern/29771>

Torquato, S., & Stillinger, F. H. (2006). New conjectural lower bounds on the optimal density of sphere packings. *Experimental Mathematics*, 15, 307-331.

חדשות משנת 2009 ומשנת 2011 על מילוי המרחב בפיאונים:

Conway, J. H., Jiao Y., & Torquato, S. (2011). New family of tilings of three-dimensional Euclidean space by tetrahedra and octahedra *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(27), 11009-11012. doi: 10.1073/pnas.1105594108

Mathematical association of America. (2009). *Packing of Tetrahedra illuminates nature of matter*. Retrieved from <http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=mathNews&sa=view&newsId=650>

Mathematical association of America. (2011). *Tiling 3-D Space by Tetrahedra and Octahedra*. Retrieved from <http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=mathNews&sa=view&newsId=1151>

Torquato, S., & Jiao, Y. (2009). Dense packings of the platonic and Archimedean solids. *Nature* 460, 876-879. doi:10.1038/nature08239

המחשה עם אנימציה של פיאונים הממלאים את המרחב:

miscellaneous examples of curious polyhedra. (2008). Retrieved from http://www.ac-noumea.nc/math/polyhedr/misc_poly_.htm

במאמר הבא כלולות גם פריסות הניתנות לבנייה:

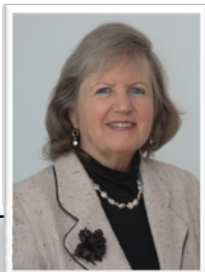
Inchbald, G. (1996). *Five space-filling polyhedra*. Retrieved from http://www.steelpillow.com/polyhedra/five_sf/five.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedral-octahedral_honeycomb

במדור החדשות המתמטיות של גיליון מס' 1 הופיעה כתבה קצרה על בעיית ABC (בעברית). באוקטובר האחרון הופיעה בעיתון NATURE כתבה מקיפה ומעניינת מאוד על הבעיה הזאת. המעוניינים ימצאו אותה כאן (באנגלית).

ראו גם בנושא זה: Kennell, J. (2015, December 30). Mathematician solved a nearly impossible maths problem. *The Science Explorer*. retrieved from

<http://thescienceexplorer.com/universe/mathematician-solved-nearly-impossible-maths-problem>



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקיימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החוזרים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית מחתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.