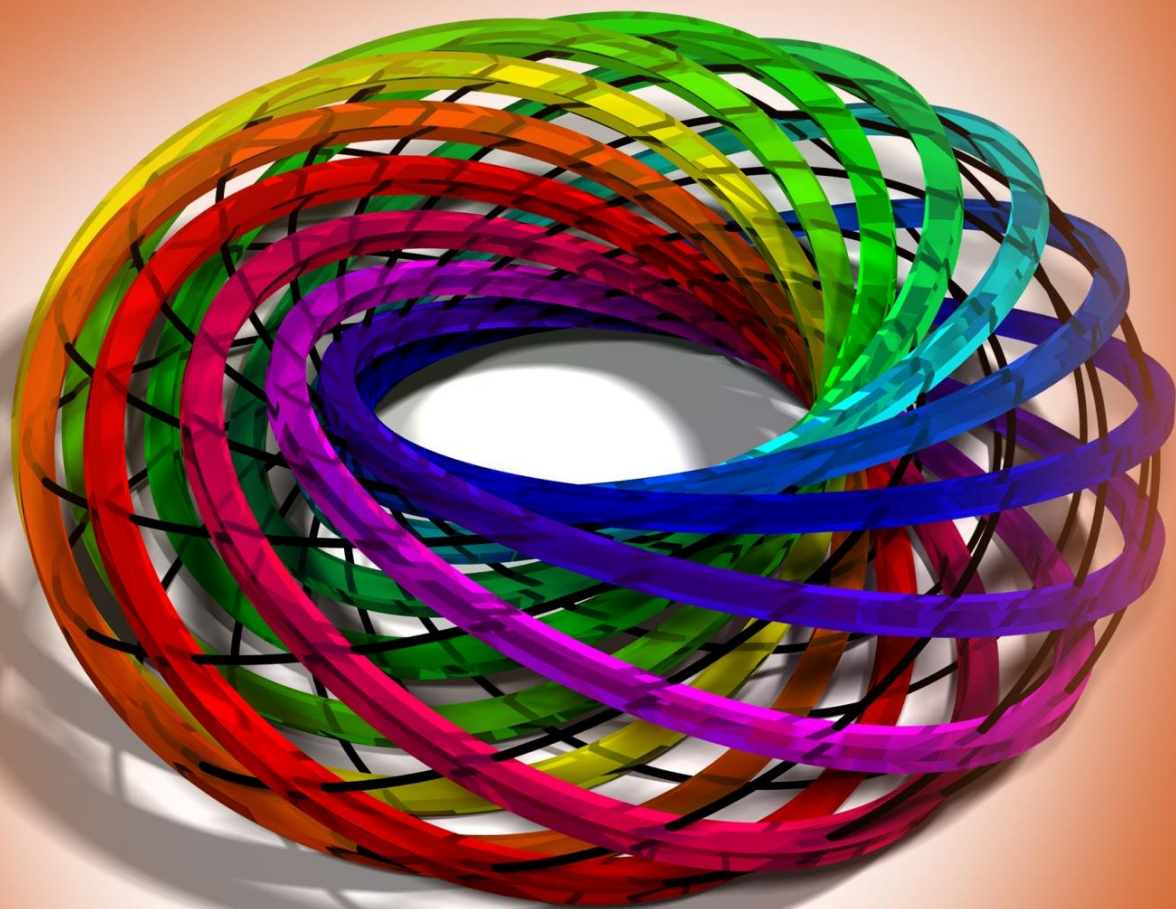




מחקר וסיון החינוך המתמטי

גיליון 2

דצמבר 2014

כתב-עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי

תוכן העניינים

3.....	דבר העורכת – קרני שיר
	מדור חדשות מתמטיות
5.....	משפט ענק An Enormous theorem – נצה מובשוביץ-הדר ודוד צילג
	חינוך לערכים במסגרת דיסציפלינרית – מחקר פעולה בשיעורי מתמטיקה – יעל אדרי
15.....	ונצה מובשוביץ-הדר
	שיתוף בתהליך קבלת החלטות – המקרה של תלמידי כיתות ט' – אילנה לביא
43.....	ואורלי צרפין
	תפיסות של מרצים למתמטיקה במכללות לחינוך בנוגע להוראה וללמידה מקוונת של קורסים
64.....	מתמטיים – עטרה שריקי
	ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל
106.....	התאוריה של המושגים הצורניים – אפרים פישביין, מציגה: טלי נחליאלי
131.....	מדור חוויות מכנס 2014 – שרה הרשקוביץ ויניב ביטון
	מדור המלצה על ספר
134.....	"שימור ושינוי" – דוד בן-חיים
138.....	Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals – רותי שטיינברג

עורכת:

ד"ר קרני שיר

שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

עריכה לשונית:

יפעת פישר, מכללת שאנן

עיצוב, עימוד והבאה לדפוס:

תמי יהושע, מכללת שאנן

חברי ועדת המערכת:

פרופ' דוד בן-חיים

ד"ר מארק אפלכאום

ד"ר הגר גל

ד"ר אילנה לבנברג

ד"ר טלי נחליאלי

פרופ' משה סטופל

ד"ר אלכס פרידלנדר

ד"ר אמאל רסלאן

פרופ' עטרה שריקי

פרופ' דינה תירוש

מל"מ הטכניון, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

מכללת קיי – המכללה האקדמית לחינוך

דוד ילון – המכללה האקדמית לחינוך

גורדון – המכללה האקדמית לחינוך

לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך

שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

מכון ויצמן למדע

המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל

אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

אוניברסיטת תל-אביב

2311-5483

Key title: Ktab-ha-'et « meḥqar w- 'iywn b-hiynwk matematiy »

החברים שניאיתו לכהן בוועדת המערכת אינם מייצגים את מוסדותיהם אלא תחומי מחקר וגישות מחקר שונים ומגוונים.

כתב-העת 'וצא ביוזמת המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" ובחסותה



דבר העורכת



המאמר השלישי,
"תפיסות של מרצים
למתמטיקה מכללות
לחינוך בנוגע
להוראה וללמידה
מקוונת של קורסים
מתמטיים", נכתב

על-ידי פרופ' עטרה שריקי ממכללת אורנים.
במאמר מתואר מחקר, שמטרתו לקבל תמונת
מצב ראשונית בנוגע לקיומם של קורסים
מקוונים במחלקות לחינוך מתמטי במכללות
האקדמיות לחינוך בישראל, וללמוד מקרוב
על תפיסותיהם של המרצים בנוגע למגוון
היבטים הנוגעים להוראה וללמידה בסביבות
מקוונות.

נוסף על שלושת המאמרים הללו, מופיעים
בגיליון הנוכחי גם ארבעה מדורים.

המדור "חדשות מתמטיות", שכותבת פרופ'
נצה מובשוביץ-הדר, פותח את כתב-העת.
בגיליון זה מתארת נצה את השלמת פרויקט
המיון של חברות סופיות פשוטות, וחשיבות
מיון זה. המדור מבוסס על שקפים שהציג
פרופ' דוד צילג ז"ל בהרצאה שנתן במועדון
המתמטי של הטכניון.

מדור נוסף, שהנו מדור חדש בכתב-העת,
נקרא "ממורשתם של מייסדי המחקר
בחינוך מתמטי בישראל". כדי להנגיש
מאמרים מרכזיים, אשר כתבו אבות החינוך
המתמטי בישראל, נציג בכל גיליון מאמר
מתורגם של אחד מהחוקרים המרכזיים בתחום
החינוך המתמטי בישראל. בגיליון זה תציג

בשעה טובה, פחות משנה מאז צאתו לאור של
הגיליון הראשון, אנו מוציאים לאור את
הגיליון השני של כתב-העת למחקר ועיון
בחינוך המתמטי.

על שער הגיליון הנוכחי מוצגת עבודת אמנות
של הצלם Seb Przd, המציגה תמונה צבעונית
של טאורוס (Torus) – צורה תלת-ממדית
הבנויה מטבעות המשתלבות זו בתוך זו.
לפרטים נוספים ראו:

<https://www.flickr.com/photos/sbprzd/1620462431/>

הגיליון השני של כתב-העת כולל שלושה
מאמרים. סדר המאמרים בגיליון נקבע על פי
סדר אלפביתי של הכותבים.

המאמר הראשון הנו מאמרן של ד"ר יעל אדרי
ופרופ' נצה מובשוביץ-הדר מהטכניון "חינוך
לערכים במסגרת דיסציפלינרית – מחקר
פעולה בשיעורי מתמטיקה". המאמר מדווח
על מחקר פעולה ממושך, שהוקדש לבדיקת
שאלת היתכנות של שילוב החינוך לערכים
בהוראת מקצוע מרכזי, כמו מתמטיקה.

המאמר השני, "שיתוף בתהליך קבלת
החלטות – המקרה של תלמידי כיתות ט",
נכתב על-ידי פרופ' אילנה לביא מהמכללה
האקדמית עמק יזרעאל, וגב' אורלי צרפין
ממכללת אורנים. במאמר מתארות המחברות
מחקר, אשר מטרתו לבחון את ההשפעות של
מתן האפשרות לתלמידי מתמטיקה בכיתה ט'
להשתתף בתהליך קבלת החלטות בנוגע לרמת
הלימוד, שבה ישובצו במתמטיקה בכיתה י'.

וכל שאר חברי הצוות, נרתמו יחדיו לעזרה בהוצאת כתב-העת, ועל כך נתונה תודה והוקרה.

אנשים אנונימיים, שבלא תרומתם כתב-העת לא היה יוצא לאור, הם השופטים שלנו – חברי הקהיליה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי – שנרתמו למשימת השיפוט, והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון ובשדרוג המאמרים המופיעים בגיליון. תודה גדולה לקבוצה זו – כיף לעבוד בקהיליה נפלאה שכזו.

לסיום, ברצוני לציין כי הוצאת כתב-העת דורשת תמיכה מוסדית ומימון. אני רוצה לנצל את ההזדמנות ולהודות להנהלת מכללת שאנן ולעומד בראשה, פרופ' יחיאל פריש, על תמיכתם הבלתי מסויגת בהפקת כתב-העת, ולפרופ' דוד בן-חיים – שתרם מזמנו ומניסיונו העשיר כדי שנוכל כולנו ליהנות מקריאת גיליון זה.

קריאה נעימה ואושר!

ד"ר קרני שיר

עורכת כתב-העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי
ktav.et.rme@gmail.com

ד"ר טלי נחליאלי ממכללת לוינסקי את המאמר "התאוריה של המושגים הצורניים", שכתב פרופ' אפרים פישביין ז"ל. אף שבגיליון מוצגת גרסה מתורגמת של המאמר, אני ממליצה בחום לקוראים לקרוא את המאמר גם בשפת המקור.

במסגרת המדור "חוויותי מכנס" יספרו לנו בגיליון זה ד"ר שרה הרשקוביץ וד"ר יניב ביטון (מכללת שאנן ומט"ח) על חוויותיהם מהכנסים STEM וה-PME בוונקובר, קנדה, על רעיונות מעניינים שהוצגו שם, ואפילו גם על הקהיליה היהודית החמה במקום.

המדור "המלצה על ספר" חותם את כתב-העת. בגיליון זה ימליץ לנו פרופ' דוד בן-חיים (מל"מ טכניון ומכללת שאנן) על ספרם של פרופ' איליה סיניצקי (מכללת גורדון ומכללת שאנן) וד"ר בת-שבע אילני (בית ברל) "שימור ושינוי". בנוסף, תמליץ לנו ד"ר רותי שטיינברג מסמינר הקיבוצים על הספר "Extending Children's Mathematics Fractions and Decimals", שכתבו Susan Linda Levi-1 Empson.

על הפקת כתב-העת ועל הבאתו לדפוס אחראיות תמי יהושע, מנהלת ההוצאה לאור "שאנן", ויפעת פישר, העורכת הלשונית. הן,

השופטים של המאמרים בכתב-העת (בסדר אלפביתי) הם:

ד"ר בת-שבע אילני	–	בית ברל – המכללה האקדמית
ד"ר מריטה ברבש	–	המכללה האקדמית אחוזה
ד"ר הגר גל	–	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך
גב' ברטה טסלר	–	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר ניצה כהן	–	דוד ילין – המכללה האקדמית לחינוך
פרופ' ניצה מובשוביץ-הדר	–	הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר ילנה נפתלייב	–	לוינסקי – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר רותי סגל	–	שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר נעמי רובינזון	–	מכון ויצמן למדע
ד"ר גילה רון	–	אוהל – המכללה האקדמית לחינוך
ד"ר טילה שגב	–	מכללת ליפשיץ – המכללה האקדמית לחינוך

מדור חדשות מתמטיות

משפט ענק An Enormous theorem

נצה מובשוביץ-הדר ודוד צילג



פרופ' דוד צילג ז"ל
(1946-2012)

היה פרופסור מן המניין בפקולטה למתמטיקה בטכניון שנים רבות. סיים תואר ראשון ושני במתמטיקה באוניברסיטת תל אביב ודוקטורט באוניברסיטת אילינוי באורבנה-שמפיין. עבודת הדוקטורט שלו הייתה בתורת החבורות הסופיות, נושא חשוב ומרכזי באלגברה. התקבל לסגל הפקולטה למתמטיקה בשנת 1975. מעבר למחקריו הוא היה מרצה פופולרי ומוערך - מאז הנהגת סקר המרצים בטכניון, זכה באופן קבוע בתואר "מרצה מצטיין". למחקריו במתמטיקה יצאו מוניטין בארץ ובעולם כולו. הוא נפטר לאחר מאבק ממושך וקשה במחלת הלימפומה.

פתח דבר

הכתבה הזאת נכתבה כשנתיים לאחר פטירתו בטרם עת של המרצה המהולל ואיש תורת החבורות פרופ' דוד צילג ז"ל והיא מוקדשת להנצחת זכרו. שקפים ובהם תמצית המתמטיקה, שהציג בהרצאתו על המשפט הענק במסגרת המועדון המתמטי של הטכניון בשנת 2011, הופקדו בידי כדי לעבד על פיהם מאמר למורים ולמורי-מורים בנושא. למרבה הצער לא הספקנו לעשות זאת יחד. חשתי חובה לסיים את המתוכנן.

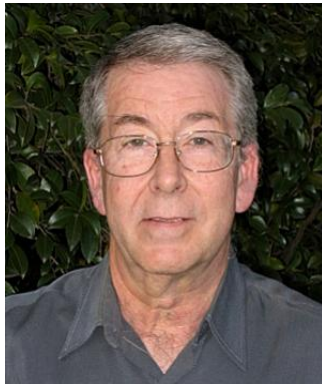
אני מודה לאלה מעמיתינו אשר סייעו לי בכך,¹ ועם זאת, לוקחת על עצמי, כמובן, את כל האחריות לדברים שנותרו לא לגמרי ברורים או אולי אף שגויים.

נצה מובשוביץ-הדר

1. תודתי נתונה לעמיתים שקראו מהדורות קודמות של המאמר וסייעו בהעמדת המהדורה הנוכחית, בראש ובראשונה לפרופ' יואב בנימיני ולד"ר אלה שמוקלר, ועמהם גם (בסדר א"ב של שם המשפחה) לד"ר חמוטל דוד, לפרופ' איליה סיניצקי ולפרופ' אלן פינקוס. התמונה – באדיבותה של נלה צילג תבדל"א.

הקדמה

ההגדרה של חבורה היא פשוטה למדי: קבוצה עם פעולה בינרית אחת בעלת תכונות די טבעיות ומוכרות. מעצם פשטותה וטבעיותה של ההגדרה נובע קיומו של עושר גדול מאוד של חבורות שונות זו מזו בהרכבן ובגודלן, גדול עד כדי כך שאין כל סיכוי למיין אפילו את הסופיות שביניהן.

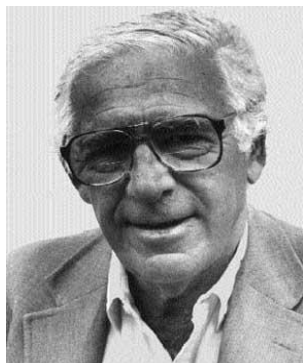


Michael Aschbacher

(born 1944)

<https://alumni2013.caltech.edu/system/datas/255/original/Aschbacher.jpg?1317401415>

עם זאת, מתברר שיש בין החבורות הסופיות משפחה של חבורות שנקראות חבורות פשוטות, שכן ניתנות למיון. לחבורות הפשוטות יש חשיבות רבה מכיוון שבמובן מסוים אפשר לבנות בעזרתן את כל החבורות הסופיות, באופן שמזכיר במידת מה את העובדה שבעזרת המספרים הראשוניים החיוביים אפשר לבנות את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-1. "המשפט הענק", נשוא כתבה זאת, נותן מיון שלם של כל החבורות הסופיות הפשוטות! באופן כזה נותן המשפט כלים לניתוח המבנה והתכונות של כל החבורות הסופיות.



Daniel Gorenstein

1923-1992

http://appendre-math.info/history/photos/Gorenstein_2.jpeg

ב-2 בנובמבר 2011, בטקס שהתקיים בשטוקהולם, שוודיה, הוענק פרס רולף שוק² בתחום המתמטיקה לפרופ' מייקל אֶשְׁבַּכֶר מהמכון הטכנולוגי של קליפורניה CalTech, "על תרומותיו הבסיסיות לאחד הפרויקטים המתמטיים הגדולים ביותר בכל הזמנים, פרויקט המיון של חבורות סופיות פשוטות", ובלשון המקור:

"...for his fundamental contributions to one of the largest mathematical projects ever, the classification of finite simple groups, notably his contribution to the quasi-thin case."³

את התכנית לפרויקט המיון של חבורות סופיות פשוטות, שהוא אחד הגדולים והמורכבים שהמתמטיקה הטהורה ידעה מאז ומעולם, יזם והתניע בשנת 1972 המתמטיקאי האמריקאי פרופ' דניאל גורנשטיין מאוניברסיטת רטגרס (Rutgers). מטרת הפרויקט הייתה לקשור את הקצוות בין מחקרים אלגבריים רבים שפורסמו מאמצע המאה העשרים ואילך על רקע עבודה שהחלה

2. פרסי רולף שוק (Rolf Schock Prizes) מחולקים אחת לשלוש שנים בתחומים: לוגיקה ופילוסופיה, מתמטיקה, האמנות החזותית ואמנויות המוסיקה. כל פרס עומד על סך של 400,000 כתר שוודי (כ-60,000 דולר). הפרסים מוענקים על-ידי האקדמיה המלכותית השוודית למדעים, האקדמיה המלכותית השוודית לאמנויות יפות והאקדמיה המלכותית השוודית למוסיקה. באוקטובר 2014 הוענק הפרס למתמטיקאי היפני האמריקאי Yitang Zhang בעבור פריצת הדרך לקראת הוכחת השערת התאומים (ראו מדור החדשות המתמטיות בגיליון מס' 1).

3. לפירוט נוסף: <http://www.kva.se/en/Prizes/Prize-winner-page/?laureateId=755>

עוד במאה התשע-עשרה.

כעבור תשע שנים, בשנת 1981, מצא רוברט גרייס (Robert Greiss) את "חבורת המפלצת" (Monster group), שהיא חבורה פשוטה עם $8 \cdot 10^{53}$ אברים. לאחר גילוי זה יצא גורנשטיין בהכרזה חגיגית: "בחודש פברואר 1981 הושלם המיון של חבורות סופיות פשוטות".

ההכרזה על השלמת המיון, הנחשבת כיום לציון דרך במתמטיקה בת זמננו, נתקלה מלכתחילה בספקנות בקרב המומחים ולא זכתה לתהודה ציבורית מיוחדת. וכל כך למה? – בגלל הטבע השנוי במחלוקת של ההוכחה של משפט המיון, שהשתרעה על פני למעלה מ-10,000 עמודים, והתפזרה בין כ-500 מאמרים שפורסמו בכתבי-עת שונים ונכתבו על-ידי למעלה מ-100 מחברים שונים מכל רחבי העולם. זהו מקרה חסר תקדים בהיסטוריה של המתמטיקה.

במידת מה צדקו הספקנים – אכן התברר שההוכחה טעונה תיקונים פה ושם, דבר שנעשה בעיקר בין השנים 1995-2004.

תרומתו הגדולה של מייקל אשכר הייתה תולדה של שבע שנות עבודה, שבהן הוציא יחד עם עמיתו, סטיבן סמית, שני ספרים נוספים בני 1300 עמודים בערך על פתרון הסוגיה, עד שבשנת 2004, כתב אשכר: "למיטב ידיעתי המשפט העיקרי [של עבודתנו] סוגר את הפער האחרון בהוכחה המקורית, ולכן (נכון לרגע זה) טענת המיון יכולה להיחשב למשפט".

מהו בדיוק המשפט המדהים שדורש הוכחה באורך עצום שכזה ומורכבות כה גדולה? מה הן בכלל "חבורות סופיות פשוטות"? מה זה אומר "למיין" אותן? ומהי החשיבות של מיון כזה?

ננסה לשפוך מעט אור על השאלות האלו.

1. מה הן "חבורות סופיות פשוטות"?

נפרק את השאלה לשלושת מרכיביה: תחילה נזכיר מהי חבורה, אחר כך – מהי חבורה סופית, ולבסוף נעשה היכרות עם חבורה סופית פשוטה.

כידוע, חבורה היא קבוצה לא ריקה G , שבין כל שניים מאיבריה מוגדרת היטב פעולה בינרית, שאותה נסמן על-ידי $*$, ומתקיימות ארבע הדרישות הבאות:

סגירות: $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$.

אסוציאטיביות: $a, b, c \in G \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$.

קיום איבר נייטרלי: קיים ב- G איבר $e \in G$ המקיים $a * e = e * a = a$ לכל $a \in G$.

קיום איבר הפכי: לכל $a \in G$ קיים ב- G איבר הפכי $a^{-1} \in G$, המקיים $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

הערה לתשומת-לב: הגדרת החבורה איננה כוללת דרישה לקיומו של חוק החילוף וכל ההמשך נכון לחבורות שהפעולה בין איבריהן היא לאו דווקא חילופית.

בשל פשטות הדרישות לקיומן של חבורות, הן מופיעות בענפי מתמטיקה רבים כמו גם בענפי מדע שונים: פיסיקה, כימיה, מדעי-המחשב ועוד רבים אחרים. המושג חבורה הוא מושג בסיסי המשמש

גם בבניית מושגים מתקדמים כמו חוג ושדה, ומושגים מתקדמים אחרים באלגברה מופשטת כגון מרחב וקטורי.⁴

הנה דוגמה פשוטה לכך שחבורות מופיעות באופן טבעי בשטחים שלכאורה אין קשר בינם לבין תורת החבורות.

נחשוב על קבוצת כל ההעתקות האיזומטריות של המישור על עצמו, אלו הן ההעתקות השומרות על מרחק (מכאן גם שמן הלוועזי – איזו-מטריות) וכך הן שומרות על הצורה ומשנות רק את מקומה במישור. קבוצה זו מהווה חבורה ביחס לפעולת ההרכבה של שתי העתקות, כלומר ביחס לביצוע של העתקה בזו אחר זו (כדאי לבדוק!). נסמן אותה ב-G. דרך אחרת לומר ששני משולשים הם חופפים (כלומר בעלי שלוש צלעות חופפות בהתאמה ושלוש זוויות חופפות בהתאמה) היא שיש העתקה ב-G המעתיקה משולש אחד על השני. מתקבל על הדעת שהבנת המבנה האלגברי של G תתרום גם להבנת החפיפה של משולשים – ולמעשה של כל שתי צורות במישור. ואכן מתברר שיש אינפורמציה מלאה על המבנה הזה: כל אחד מאיברי G מתקבל על-ידי הרכבה של העתקות פשוטות משלושה סוגים בלבד: הזזות, שיקופים וסיבובים. המבנה של חבורת ההעתקות האיזומטריות במרחב התלת-ממדי ובמרחבים מממד גבוה יותר, מסובך יותר ותכונותיה הן נושא שנחקר באופן אינטנסיבי גם כיום. מבנים מתמטיים הנשמרים על-ידי חבורת העתקות מתאימה, מופיעים בשטחים רבים במתמטיקה ובשימושיה (למשל בפיסיקה). הזיהוי והחקירה של חבורות כאלו תורמים לחקירת המבנים עצמם. זו הייתה נקודת הראות של פליקס קליין (1849-1925) כשפרסם ב-1872 את "תכנית ארלנגן" (Erlangen Program) שבה הציע למיין ולחקור את הגאומטריות השונות על-ידי "חבורות הסימטריות" שלהן, כלומר על-ידי חבורות ההעתקות השומרות על המבנים של הגאומטריות השונות.

חלק מהחבורות הן אינסופיות, כמו למשל קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיבור (שבה 0 הוא האיבר הניטרלי), או קבוצת המספרים הממשיים השונים מאפס עם פעולת הכפל (שבה 1 הוא האיבר הניטרלי); חלק אחר של החבורות הן סופיות, כלומר כאלו שבהן הקבוצה G מכילה מספר סופי של איברים, כמו למשל "קבוצת השעון" $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ עם פעולת החיבור-מודולו-12 (שבה 12 הוא האיבר הניטרלי).

במאמר זה נדון רק בחבורות סופיות ונסמן ב- $|G|$ את הסדר של החבורה, כלומר את מספר האברים בקבוצה G.⁵ לדוגמה, לחבורת הסימטריות של הריבוע, שהן ההעתקות המעתיקות ריבוע על עצמו יש סדר 8: ארבעה סיבובים סביב נקודת החיתוך של שני האלכסונים (ב-90 מעלות, ב-180 מעלות וב-270 מעלות וב-360 מעלות) וארבעה שיקופים בכל אחד משני האלכסונים ומשני קווי האמצעים. פעולת החבורה היא פעולת ההרכבה – ביצוע בזו אחר זו של שתי העתקות

4. הגדרה של המושגים האלה אפשר למצוא בויקיפדיה בעברית בערכים "חוג" (מבנה אלגברי), "שדה" (מבנה אלגברי) ו"מרחב וקטורי".

5. הסימון ההולם של חבורה הוא $(G, *)$, כאשר G היא קבוצת איבריה ו-* היא הפעולה הבינרית המוגדרת ביניהם. למען הקיצור מקובל לסמן גם את החבורה ב-G ואת מספר איברי החבורה ב- $|G|$.

כאלו – והאיבר הניטרלי, העתקת הזהות, הוא הסיבוב ב-360 מעלות.⁶

לפני שנשיב לשאלה מהי חבורה "פשוטה" – נדון בתת-חבורות. תת-קבוצה H של חבורה סופית G מהווה תת-חבורה אם היא סגורה ביחס לפעולת החבורה. כך למשל בדוגמה האחרונה ארבעת הסיבובים מהווים תת-חבורה מסדר 4. תת-חבורה מסדר 2, למשל, מורכבת מהעתקת הזהות ומאחד השיקופים. העובדה שהסדרים של תת-החבורות האלו הם מחלקים של 8 אינה מקרית. משפט לגראנז' קובע שהסדר של כל תת-חבורה מחלק את הסדר של החבורה.⁷ ראוי לציין כי לכל חבורה יש שתי תת-חבורות "טריוויאליות": החבורה כולה ותת-החבורה המכילה רק את האיבר הניטרלי.

לצורך ההגדרה של חבורה פשוטה נצטרך להגדיר תחילה תת-חבורות מסוג מיוחד, הנקראות תת-חבורות נורמליות: תת-חבורה H של G נקראת נורמלית אם לכל איבר h ב- H ולכל איבר g ב- G גם האיבר $g \cdot h \cdot g^{-1}$ נמצא ב- H .⁸ שתי תת-החבורות הטריוויאליות של כל חבורה הן כמובן נורמליות, לכן לכל חבורה יש לפחות שתי תת-חבורות נורמליות. מובן מאילו כי בחבורה חילופית כל תת-חבורה היא נורמלית. וכעת, אנחנו מוכנים להגדרה: חבורה G נקראת "פשוטה" אם אין לה תת-חבורה נורמלית פרט לשתי הטריוויאליות.

מתברר שהחבורות הסופיות הפשוטות הן אבני הבניין של כל החבורות הסופיות באורח דומה (אם כי מסובך בהרבה) לאופן שבו המספרים הטבעיים הראשוניים הם אבני הבניין (הכיפלי) של כל המספרים הטבעיים.

כדי להסביר זאת יש צורך במושג נוסף: "חבורת מנה". לא נוכל להיכנס לפרטי ההגדרה של מושג זה במסגרת המאמר הנוכחי, אך נציין כי לכל חבורה G ולכל תת-חבורה נורמלית שלה H אפשר להגדיר חבורה חדשה – חבורת המנה G/H . מהכרת המבנה של תת-החבורה H ושל חבורת המנה G/H מקבלים אינפורמציה רבה על המבנה של החבורה G .⁹ משפט בסיסי בתורת החבורות שהוכח בסוף המאה התשע-עשרה הוא משפט ג'ורדן-הלדר (Jordan-Hölder), המהווה הכללה מרחיקת לכת של המשפט היסודי של האריתמטיקה (משפט הפריקות החד-ערכית של המספרים הטבעיים לגורמים ראשוניים), וקובע כי בכל חבורה סופית יש סדרה עולה של תת-חבורות: $H_1, H_2, \dots, H_n$ המוכלות זו בזו כך ש- H_i היא תת-חבורה נורמלית של H_{i+1} וכך שחבורות המנה $K_i = H_{i+1}/H_i$ הן כולן חבורות פשוטות. יתר על כן, הסדרה $\{K_i\}$ היא יחידה במובן שאם קיימת

6. הדוגמה האחרונה היא דוגמה לחבורה שאינה חילופית. דוגמאות נוספות של חבורות הן: קבוצת התמורות של n איברים, ביחס לפעולת ההרכבה (זוהי חבורה לא חילופית לכל $n > 2$). קבוצת שורשי היחידה מסדר n , כלומר השורשים המרוכבים של המשוואה $z^n = 1$ עם פעולת הכפל של מספרים מרוכבים. קבוצת 7 הטיפוסים של קישוטי-פס עם פעולת ההרכבה (ראו: מובשוביץ-הדר, נ' (2005). טרנספורמציות, חבורות וסימטריה או מהו סוד הסדרה: 7, 17, 230, 4783, ע"ה, 35, 56-68).
7. את הוכחת משפט לגראנז' אפשר למצוא בויקיפדיה תחת הערך "משפט לגראנז' (תורת החבורות)".
8. לא נוכל להתייחס כאן ביתר פירוט לתכונות ולחשיבות של תת-חבורות נורמליות. הקוראים המעוניינים יוכלו למצוא על כך בין היתר בערך "תת-חבורה נורמלית" בויקיפדיה העברית.
9. הקוראים המעוניינים בהרחבה ובהעמקה על הקשר בין חבורת המנה לתת-חבורה נורמלית יוכלו למצוא על כך בין היתר בערך "חבורת מנה" בויקיפדיה העברית.

סדרה אחרת של חבורות מנה $\{L_i\}$, שהתקבלה באותה דרך, וכולן פשוטות, אז כל אחת מהן איזומורפית¹⁰ לאחת ורק אחת מחבורות המנה בסדרה $\{K_i\}$, במילים אחרות, הסדרות אינן שונות זו מזו למעט אולי הסדר בין איבריהן. משפט ג'ורדן-הלדר מצביע על קשר הדוק בין חבורות סופיות לחבורות סופיות פשוטות.

הסקרנות של המתמטיקאים המתמחים בתורת החבורות למפות ולמיין את החבורות הסופיות הפשוטות נבעה מהרצון לעמוד על תכונותיהן של החבורות הסופיות כולן, בדומה לסקרנות של המתמטיקאים המתמחים בתורת המספרים לגבי המספרים הטבעיים הראשוניים שנבעה מהמגמה לעמוד על תכונותיהם של המספרים הטבעיים כולם.

2. מה זה אומר "למיין" את החבורות הסופיות הפשוטות?

הטיפול במיון של משולשים בעזרת החפיפה של שני משולשים זה לזה במישור, הוא דוגמה לטיפול בבעיית "מיון": כששני משולשים מתקבלים זה מזה על-ידי העתקה איזומטרית, הם לא נחשבים לשונים לצורך ניתוח תכונותיהם. כשמדובר במיון של חבורות, לא נבחין בין שתי חבורות אם הן איזומורפיות זו לזו.

משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות, שהוכחתו הושלמה לא מזמן, כאמור, מציג רשימה של כל החבורות הסופיות הפשוטות השונות זו מזו ורק הן. כלומר אין ברשימה שתיים שהן איזומורפיות זו לזו וכל חבורה פשוטה איזומורפית לאחת החבורות ברשימה.

נכיר דוגמאות אחדות מהרשימה.

כידוע, כל חבורה סופית G שמספר איבריה $|G|=p$ הוא ראשוני, איזומורפית לחבורה $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ עם פעולת החיבור-מודולו- p (כמו, למשל, החבורה של שבעה ימי השבוע). היות ו- p ראשוני אין לו מחלקים לא טריוויאליים, לכן על פי משפט לגראנז', אין ל- Z_p תת-חבורות לא טריוויאליות. במיוחד אין לחבורה זו תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות – ולכן היא פשוטה! היות ויש אינסוף מספרים ראשוניים, לפנינו בעצם משפחה אינסופית של חבורות סופיות פשוטות. ברשימה לא נפרט, כמובן, את (אינסוף) החבורות האלו – אלא נשתמש בהגדרתן הכללית באמצעות הפרמטר p . זוהי משפחה שלמה (אינסופית) של חבורות, המשפחה הראשונה ברשימת החבורות הסופיות הפשוטות. ייחודה של משפחה זו הוא בכך שחבורות אלו הן החבורות הפשוטות החילופיות היחידות.

הצעד הבא הוא ניסיון לאתר חבורות סופיות פשוטות נוספות שאינן איזומורפיות ל- Z_p . האם קיימות חבורות נוספות כאלו?

10. אומרים על שתי חבורות שהן איזומורפיות זו לזו אם ורק אם קיימת בין איבריהן העתקה חד-חד ערכית g אשר שומרת על הפעולה, כלומר, התוצאה של הפעולה x בין כל שני איברים a, b בחבורה אחת, מועתקת על-ידי g לתוצאה של הפעולה $*$ בין תמונותיהם $g(a)$ ו- $g(b)$ בחבורה השנייה, או בקיצור: $g(axb) = g(a)*g(b)$. שתי חבורות כאלו "מתנהגות" באותו אופן ואף שהן לא זהות, הן אינן נחשבות לשונות כשבאים למיין את החבורות הסופיות הפשוטות למיניהן.

התשובה היא חיובית.

סך הכול התגלו 18 משפחות אינסופיות שונות (לא איזומורפיות) של חבורות סופיות פשוטות. חבורות אלו נתגלו בין השנים 1800 ל-1960 על-ידי מתמטיקאים שונים ביניהם: גלואה (Galois), ג'ורדן (Jordan), דיקסון (Dickson), שבליי (Chevalley), טיטס (Tits) וסוזוקי (Suzuki).

מאז 1960 לא נתגלו משפחות חדשות.

נוסף למשפחות האינסופיות נמצאו מספר חבורות שלא היו שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות. כדי להדגים זאת נתבונן בשתי מטריצות ריבועיות מסדר 11×11 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

באמצע המאה התשע-עשרה, גילה מתמטיקאי צרפתי בשם אמיל מתיו¹¹ (Émile Mathieu, 1835-) כי אם מבצעים את כל המכפלות האפשריות של A ו- B (עם חזרות, למשל $AB^3A^7BABA^8$) מקבלים קבוצה של מטריצות המונה $7920 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ וקבוצה זו היא חבורה פשוטה (וכמובן לא חילופית). לימים התברר כי היא אינה שייכת לאף אחת מ-18 המשפחות ברשימה שהתגלתה וניתן לה השם M_{11} על שם המגלה שלה.



Zvonimir Janko, 1936

באופן דומה גילה אמיל מתיו עוד ארבע חבורות פשוטות, והוכיח שאינן שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות. אף הן נקראו על שמו: M_{12} , M_{22} , M_{23} , M_{24} . כיוון שאינן שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות הנזכרות, הן נקראות ספורדיות (sporadic) – לא סדיר). חבורות אלו ניתנות להצגה כחבורות של פרמוטציות על 11, 12, 22, 23, 24 עצמים בהתאמה.

עשרות שנים עברו מאז שמתיו נפטר ואיש לא גילה חבורות פשוטות סופיות חדשות, עד שבשנת 1966 גילה מתמטיקאי יליד

11. עוד פרטים על אמיל מתיו אפשר למצוא כאן:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Mathieu_Emile.html

קרואטיה בשם זְבוֹנִימִיר יַנְקוֹ¹² חבורה ספורדית חדשה. חבורה זו היא קבוצת כל המטריצות של 7×7 שהן מכפלה כלשהי (כגון $A^3 B A^5 B^6$) של שתי המטריצות הבאות מעל השדה F_{11} שבו 11 איברים:

זוהי חבורה פשוטה מסדר 175560 והיא נקראת על שם המגלה שלה: J_1 .

במשך 10 השנים הבאות נתגלו עוד 20 חבורות סופיות פשוטות ספורדיות שנקראו על שם מגליהן. לא היה ברור כמה חבורות כאלו עוד יתגלו והאם מספרן סופי או אולי אינסופי. מכל מקום, בסוף שנות השבעים של המאה העשרים פסקה "מפולת הגילוי" של החבורות הספורדיות. אחרי ש"חבורת המפלצת" נתגלתה בשנת 1981, העלה דניאל גורנשטיין את הטענה שהרשימה של החבורות הסופיות הפשוטות מלאה וכי המשפט על מיון החבורות הסופיות הפשוטות אומר:

משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות

- I. הנה הרשימה המלאה של כל החבורות הסופיות הפשוטות:
 - א. 18 משפחות אינסופיות (בנות מנייה) של חבורות [תיאור פרמטרי מדויק של כל אחת מהמשפחות]
 - ב. 26 חבורות ספורדיות [תיאור מפורש של כל אחת מהחבורות]
- II. כל חבורה סופית פשוטה איזומורפית לחבורה השייכת לאחת מ-18 המשפחות, או לאחת מ-26 החבורות הספורדיות.

בשל מגבלות המקום אי אפשר לנסח במסגרת זו את משפט המיון על כל פרטיו, ובוודאי שאי אפשר להציג את הוכחתו המשתרעת כאמור על מאות עמודים.¹³

לסיום, מהי החשיבות של מיון שכזה?

לאפשרות למיין יש חשיבות בהרבה נושאים מדעיים כמו למשל בכימיה (הטבלה המחזורית) – וגם במתמטיקה. מוכר, למשל, המיון של כל הפאונים המשוכללים. משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות מספק רשימה מלאה של כל החבורות הסופיות הפשוטות. יש הבדלים מהותיים בין מיון החבורות הסופיות הפשוטות לבין מיון הפאונים. העיקרי שבהם הוא שרשימת הפאונים המשוכללים היא סופית: הארבעון, הקובייה, התמנון, התריסרון והעשרימון, ואילו רשימת החבורות הסופיות הפשוטות היא אינסופית. עוד, למשל, לא ברור אם הכרת הפאונים המשוכללים עוזרת בהבנת המבנה של פיאונים כלליים. לעומת זאת, החבורות הסופיות הפשוטות הן אבני

12. עוד על קורות חייו ועבודתו הפורייה של המתמטיקאי בן זמננו, זְבוֹנִימִיר יַנְקוֹ, יליד 1936, אפשר למצוא באינטרנט: <http://www.croatianhistory.net/etf/janko/#biography>

התמונה מתוך: http://www.irb.hr/var/ezflow_site/storage/images/dogadanja/ciklusi-predavanja/eminentni-znanstvenici-na-irb-u/prof.-dr.-sc.-zvonimir-janko/4612-1-cro-HR/Prof.-dr.-sc.-Zvonimir-Janko.jpg

13. יותר פרטים על רשימת המשפחות של החבורות הסופיות הפשוטות אפשר לראות בויקיפדיה באנגלית בערך: List of finite group.

הבניין של כל החבורות הסופיות, ולהכרתן יש חשיבות בניתוח המבנה של כל החבורות הסופיות.

למרות מספרן האינסופי של חבורות סופיות פשוטות, אנו מבינים היטב את מהותן, כי קיימים תיאורים מדויקים של 18 משפחות אינסופיות (כולן בנות מנייה) של חבורות סופיות פשוטות ומעבר ל-18 המשפחות האלו, יש עוד תיאור מדויק של 26 בודדות, וזהו זה! – אלה הן כל החבורות הסופיות הפשוטות והן "אבני הבניין" של כל החבורות הסופיות. אגב, מספר איבריה של חבורת המפלצת (*Monster group*), שהיא כאמור הגדולה שבין החבורות הספורדיות, מגיע לכ- $8 \cdot 10^{53}$ וליתר דיוק ל-808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000.

האם בכך תם עידן תורת החבורות? האם המחקר בתחום זה הסתיים? – נהפוך הוא. במתמטיקה כל סיום הוא כידוע התחלה חדשה. גם כיום, מתמטיקאים רבים עובדים בתחום תורת החבורות ומשפט המיון הוא מכשיר חשוב בעבודתם.

אחד הכיוונים הוא, כמובן, ניסיון לפשט את ההוכחה של המשפט על מיון חבורות סופיות פשוטות. לפישוט כזה יש חשיבות לא רק בגלל האורך והסיבוכ של ההוכחה הקיימת. יחד עם בדיקת האמיתות של טענה מתמטית, להוכחה מתמטית יש תפקיד נוסף: לפרש ולהבין את הקשרים בין הרכיבים השונים של הטענה המתמטית. כל הוכחה נוספת מהווה נדבך נוסף להבנה זו, והוכחה פשוטה יותר למשפט המיון תשפוך אור נוסף על משפט חשוב זה.

כיום מתנהלים מספר פרויקטים בשאיפה לפשט את כל החלקים של ההוכחה ולהביא אותה לפרסום במקום אחד. האיגוד האמריקאי למתמטיקה (*American Mathematical Society*), מוציא את התוצאות בסדרת ספרים. יש אומרים שעם השלמתה תמנה הסדרה 12 כרכים...

מקורות

- צילג, ד' (2011). *ההוכחה הארוכה ביותר*. הרצאה שהוצגה במסגרת המועדון המתמטי של הטכניון, חיפה.
- Classification of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups
- Daniel Gorenstein. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Gorenstein
- Elwes, R. (2006, December 7). An enormous theorem: The classification of finite simple groups. *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/issue41/features/elwes/index.html>
- Janko group J1 (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Janko_group_J1
- List of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups
- List of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups
- Mathieu group (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Mathieu_group
- Michael Aschbacher, Shaler Arthur Hanisch Professor of Mathematics. (2014, July-November). Retrieved from <http://www.math.caltech.edu/people/asch.html>
- Michael Aschbacher. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Aschbacher

- Monster group (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Monster_group
- Rolf Schock Prize. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Schock_Prize
- Roney-Dougal, C. (2006, May 6). The power of groups. *+plus magazine*. Retrieved from <http://plus.maths.org/content/power-groups?src=aop>
- Sporadic simple groups (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Sporadic_simple_groups



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית מסתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב.

חינוך לערכים במסגרת דיסציפלינרית - מחקר פעולה בשיעורי מתמטיקה*

יעל אדרי ונצה מובשוביץ-הדר

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, חיפה

תקציר

קיים פער בין החזון החינוכי של מדינת ישראל כפי שהוא מופיע בחוק החינוך ובמסמכים הרשמיים של משרד החינוך, לבין המציאות הבית-ספרית שבה מוקדש החלק הארי של הזמן להוראה הדיסציפלינרית בכלל ולהכנה לבחינות הבגרות בכיתות העליונות בפרט. פער זה מעורר צורך למצוא דרך לשלב את החינוך לערכים במהלך ההוראה של המקצועות השונים. המאמר מדווח על מחקר פעולה ממושך, שהוקדש לבדיקת שאלת היתכנות של שילוב החינוך לערכים בהוראת מקצוע מרכזי, כמו מתמטיקה. תוצאות המחקר מצביעות על כך שאפשר לשלב בהוראת המתמטיקה חינוך לערכים אישיים וחברתיים מבלי לפגוע בהישגי התלמידים ומבלי לפגור בהוראת תכנית הלימודים המחייבת. המסקנה היא שהפיכת השילוב שהוכח כאפשרי לישים בכל המערכת, מחייבת הכנת חומרי הוראה מתאימים והכשרת המורים ופרחי הוראה לשימוש בהם.

מילות מפתח: חינוך לערכים; חינוך מתמטי; מחקר פעולה.

הבעיה

החזון החינוכי המוצהר של מדינת-ישראל מופיע בחוק החינוך הממלכתי (כנסת ישראל, 1953) ותיקונו (כנסת ישראל, 2000), בחוזרי מנכ"ל משרד החינוך (משרד החינוך, 1996, 2008), בדו"ח דוברת (דוברת, 2005) ובמסמכי-עמדה רבים אחרים. כולם מצביעים על החינוך לערכים כאחד מעמודי התווך במערכת החינוך.

החוק מגדיר אחת-עשרה מטרות לחינוך, כל אחת מהן מכילה מרכיב של חינוך לערכים. שמונה מתוכן עוסקות בחינוך לערכים חברתיים ושלוש האחרות בחינוך לערכים אישיים. כך למשל, שתי המטרות הראשונות הן במישור החברתי: המטרה הראשונה היא "לחנך אדם להיות אוהב אדם, אוהב עמו ואוהב ארצו, אזרח נאמן למדינת-ישראל, המכבד את הוריו ואת משפחתו, את מורשתו, את זהותו התרבותית ואת לשונו". המטרה השנייה בחוק זה היא: "לפתח יחס של כבוד לזכויות האדם, לחירויות היסוד, לערכים דמוקרטיים, לשמירת החוק, לתרבותו ולהשקפותיו של הזולת, וכן לחנך לחתירה לשלום ולסובלנות ביחסים בין בני אדם ובין עמים". המטרה החמישית מתייחסת לצרכיו של היחיד: "לפתח

* המחקר התבצע בתמיכה חלקית של הקרן הלאומית למדע (מס' 1180/08), קרן לוי אשכול – משרד המדע, משרד החינוך והקרן לעידוד המחקר בטכניון.

את אישיות הילד והילדה, את יצירתיותם ואת כישרונותיהם השונים, למיצוי מלוא יכולתם כבני אדם החיים חיים של איכות ושל משמעות". ככלל, מלשון החוק ביחס למטרות החינוך, נובע שהמחוקק בישראל מייחס חשיבות עליונה לחינוך לערכים חברתיים ולערכים אישיים.

על מטרות החינוך המפורטות בחוק החינוך מוסיף דו"ח ועדת דוברת – הוועדה הציבורית שמונתה בשנת 2004 על-ידי ממשלת ישראל כדי לבצע בחינה מקיפה של מערכת החינוך במדינת-ישראל ולהמליץ על תכנית שינוי כוללת: "יש לעודד כל תלמיד ולסייע לו לממש את מלוא יכולותיו ולהגיע להישגים גבוהים בתחומים מגוונים, עד כדי מצוינות בתחום הייחודי לו, לחזק את ביטחונו העצמי ולהנחותו בגיבוש זהותו הערכית ותפיסתו המוסרית" (דוברת, 2005).

בחזר מנכ"ל מיוחד (משרד החינוך, 1996), נמצא דגש בערכיו של הבוגר הרצוי של מערכת החינוך. הבוגר הרצוי, לפי מסמך זה, הוא "...אדם המסוגל לאתר בכוחות עצמו את המידע ואת הכלים לסיפוק הסקרנות והעניין שלו. אדם העוסק בתחומי העניין האמתיים שלו, על פי בחירתו. אדם בעל השקפת עולם ערכית, הניזונה מערכי חברתו ומערכי החברה הכלל אנושית. אדם המעורב בחיי-החברה הישראלית והנכון לקבל עליו תפקידים, ולמלאם מתוך אחריות ומסירות. אדם המכיר את שורשיו ואת זהותו ומודע להם והמכיר ומכבד את זהות זולתו." מוסיף על כך חוזר מנכ"ל (משרד החינוך, 2008) שהבוגרים העתידיים "...צריכים להיות בעלי שיקול דעת מוסרי, יכולת לחשוב באופן ביקורתי ויכולת לגבש עמדות מנומקות. כל אלה מצביעים על חשיבות החינוך לחשיבה הן בפן הלימודי של מערכת החינוך והן בפן הערכי שלה".

במציאות, קיים פער גדול בין הציפיות שהעמידו המחוקק והנהגת משרד-החינוך לפני מערכת-החינוך לבין ההישגים של החברה בישראל בתחום הערכי. מערכת-החינוך לא השכילה לשלב את החינוך לערכים בהקניית ההשכלה הרחבה והבסיסית שהחינוך היסודי והעל-יסודי אמורים להקנות לאזרחי-העתיד של המדינה (יזהר, 1990). הנהירה להצלחה בבחינות-הבגרות דחקה לקרן-זווית את החינוך לערכים (גורדון, 1997). ברוב בתי-הספר העל-יסודיים קיימת הפרדה כמעט מוחלטת בין הקניית-ידע לבין הקניית-ערכים. בחינוך לערכים עוסקים בעיקר במסגרות חוץ-דיסציפלינריות כגון בשיעורי-המחנך בפגישות עם היועצים החינוכיים והרכזים החברתיים, בפעילויות בהפסקות ובטיולים. דו"ח דוברת הנזכר לעיל הצביע על צורך להטמיע את החינוך לערכים באופן שגרתי בהוראה הדיסציפלינרית, ולא להשאיר אותו רק בידי מחנכי הכיתות ורכזים החברתיים. יתרה מזו, לאור החשיבות ששר החינוך רואה בחינוך הערכי, מינה מנכ"ל משרד החינוך בראשית שנה"ל תש"ע ועדה משרדית בין-מנהלית לקידום החינוך הערכי בבתי-הספר העל-יסודיים על-ידי: 1. פיתוח תכנית אינטגרטיבית רב-שנתית לחינוך ערכי, המשלבת בין הוראת תחומי הדעת לבין החינוך החברתי בבית-הספר. 2. גיבוש מדדים להערכת התכנית.

המחקר שהוא נשוא מאמר זה עשוי לתרום למימוש החזון של הוועדה. הוא מתמקד בבדיקת היתכנות של שילוב החינוך לערכים בהוראה הדיסציפלינרית תוך התייחסות לדיסציפלינה מיוחדת הנחשבת לקשה – מתמטיקה.

רקע תאורטי מהותו של חינוך מתמטי

וינר (1999) וגוטשטיין ופטרסון (Gutstein & Peterson, 2006) טוענים כי בהיות המתמטיקה דיסציפלינה המטפחת את השכל הישר, יש בה פוטנציאל לחינוך לערכים.

וינר (Vinner, 2009) מציע שלושה מובנים לחינוך מתמטי: א. חינוך מתמטי כפעילות שבה מעורבים המורים והתלמידים במהלך שיעורי המתמטיקה; ב. חינוך מתמטי כתחום מחקר בכל ההיבטים הכרוכים בלמידה ובהוראה של מתמטיקה (במיוחד היבטים מתמטיים, קוגניטיביים, רגשיים, חברתיים ופוליטיים); ג. חינוך מתמטי כתחום שבו אנשים מציעים דרכים לשיפור ולהעשרת פעילות ההוראה בהתבסס על רפלקציה או על התנסות אישית שלהם. במילים אחרות, לחינוך המתמטי יש שלושה מובנים: למידה והוראה של המתמטיקה, מחקר על היבטיה השונים של המתמטיקה ופיתוח שיטות וחומרים לשיפור ההוראה והלמידה במתמטיקה. בהמשך וינר קושר את שלושת המובנים לתזה של ארנסט (Ernest, 2009), ממובילי הקהילה של החינוך המתמטי, המצטט את הפילוסוף היהודי לוינס, באומרו:

In the simple words of Paul, Levinas' thesis of ethics means that traditional philosophical pursuit of knowledge is but secondary feature of more ethical duty to the other. Isn't this equivalent to the claim that acting ethically is more important than anything else? Isn't this equivalent to Levinas' claim, formulated by Paul, that "our responsibility for the other is not a derivative feature of our subjectivity; instead, this obligation provides the foundation for our subjective being-in-the-world by giving it meaningful direction and orientation"? And what does it mean to act ethically? Paul recommends us the Golden Rule as a key principle: "Do unto others as you would have them do unto you".

(Vinner, 2009, pp. 1-45, quoting Ernest, 2009, pp. 1-38)

המחקר הנוכחי משלב את שלושת המובנים של החינוך המתמטי שוינר עומד עליהם (פירוט נוסף מופיע להלן בסעיף "מסגרת המחקר").

מהו ערך?

טבעי להתחיל את הדיון בחינוך לערכים ושילובו בחינוך הדיסציפלינרי בשאלת היסוד – מהו ערך? שאלה זו מעסיקה פילוסופים בכלל, פילוסופים של החינוך בפרט וגם אנשי רוח אחרים.

לפי רוטנשטרייך (1964):

ערכים הם עקרונות הפעולה או הנורמות של התנהגותנו. הם סיני' תוכן המביאים אותנו להעדיף מעשה אחד על פני מעשה אחר, או סהלך פעולה אחד על פני סהלך אחר (שם, עמ' 115).

לדעת אדר (1976) :

ערכים הם עקרונות או אידאליים כלליים המנחים את שיפוטו ואת התנהגותו של האדם בתחום המוסרי והחברתי. אידאליים ועקרונות מסוג זה הם למשל: שוויון, צדק, נאמנות, דעת, שמירת מסורת, ליכוד משפחה, קיום האומה, שיתוף פעולה, צניעות, גבורה (שם, עמ' 32).

הסופר ס' יזהר בדעה שערכים הם אמות מידה לבחירה שבוחר לו האדם: "כסרגלים לבדיקת הישר" (יזהר, 1990, עמ' 18).

רוקיץ' (Rokeach, 1973) בנה רשימה של 36 ערכים, והתייחס בתוכה לשתי מערכות: ערכים אינסטרומנטליים, המתארים אופני התנהגות (למשל, אחריות), וערכים טרמינליים, המתארים מטרות סופיות (למשל, הגשמה עצמית). הערכים האינסטרומנטליים פועלים להשגת הערכים הטרמינליים. כמו כן טבע רוקיץ' הבחנה בין ערכים אישיים (למשל, דיוק) לבין ערכים חברתיים (למשל, צדק חברתי), וטען כי במערכת הערכים של האדם קיים סדר מדורג על פי חשיבותם הסובייקטיבית לאדם. מסלובטי התאימה את רשימת-הערכים של רוקיץ' למחקר בתחום הערכים בהוראה (מסלובטי, 1987).

לצורך המחקר הנוכחי קיבלנו את ההגדרה של רוטנשטרייך בשל היותה אופרטיבית יותר מהאחרות. לדוגמה, הערך "צדק" הוא עקרון כללי אשר מביא אותנו להעדיף מהלכים של שוויון-הזדמנויות על פני הפלייה.

ערכים ומתמטיקה

בתחום המתמטיקה והחינוך המתמטי, לקטוש (Lakatos, 1976) ופוליה (Polya, 1954) הגדירו ערכים שמאפיינים מתמטיקאים (יושר, צניעות, ספקנות וביקורתיות). בן-יהודה (1962), ארנסט (Ernest, 2004) ובישופ (Bishop, 1988, 2008) הגדירו ערכים בהוראת המתמטיקה. בן-יהודה, מאבות החינוך המתמטי בישראל, קבע כי המטרות הערכיות של הוראת המתמטיקה הן אמון הלומד בתורת ההיגיון הפורמלי, הנחלת רגש של הערכה כלפי המתמטיקה ותרומתה לקדמה האנושית, פיתוח כשרים של עקביות, עבודה עצמית וריכוז, כושר של חשיבה מקורית והגיונית, רגש של ביטחון עצמי ואמונה בכוחות העצמי, רגש אחריות לתוצאות הפעולה, כושר של ניתוח, בקרה והתבטאות בהירה ומדויקת. ארנסט, שכאמור הוא ממובילי הקהילייה המחקרית בחינוך מתמטי, מדגיש את חשיבות הטיפוח של החשיבה הביקורתית בעזרת המתמטיקה, כמיומנות בסיסית לאזרח השואף לצדק חברתי במדינה דמוקרטית. בישופ, שהוא חלוץ בתחום המחקר על חינוך לערכים בתחום המתמטיקה, הבחין בשלוש קבוצות של ערכים: ערכים מתמטיים (כמו רציונליות), ערכים בהוראת המתמטיקה (כמו דיוק) וערכים כלליים (כמו כבוד לזולת).

בספרות המחקר נמצאו מאמרים בודדים המתייחסים לחינוך לערכים בשילוב עם הוראת המתמטיקה. בארצות-הברית: גוטשטיין ופטרסון (Gutstein & Peterson, 2006), פרנקנשטיין (Frankenstein, 1998) ואוסלר (Osler, 2007) ובהודו: טפלין (Taplin, 2009) מתארים דוגמאות בנושאי לימוד שונים במתמטיקה על-יסודית, המאפשרות, לטענתם, שילוב של חינוך לערכים בעזרת ההקשר (Context) בבעיות מילוליות – לדוגמה בעיות מתמטיות, אשר הקשרן עוסק בצדק חברתי, מהוות הזדמנות למורה למתמטיקה לעסוק בצדק חברתי. בישראל, וינר (Vinner, 2006) מוסיף על גישתו התאורטית הנזכרת לעיל ניתוח של אפשרויות אחדות לשילוב הנדון.

המחקר הנוכחי בא לבדוק באופן שיטתי את ההיתכנות של שילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה הנלמדת על פי תכנית הלימודים בישראל. יודגש כי מדובר בשילוב החינוך לערכים בנושאים מתמטיים ולא בשיטות הוראה שמטפחות חינוך לערכים ואפשר ליישמן בדיסציפלינות רבות אחרות כגון עבודה בקבוצות, עידוד תלמידים חלשים, טיפוח מצוינות.

סולם ערכים וחינוך לערכים

מערכת הערכים שהאדם דבק בה נקראת "סולם ערכים". מידת הדבקות של האדם בערך מסוים נמדדת בעזרת הדברים שהיא או הוא מוכנים לוותר עליהם כדי לדבוק באותו ערך ולנהוג על פיו (ליבוביץ, 1988; הרן, 2003). למשל דבקות האדם בערך "חברות" עשויה לגרום לוותר על הערך "נאמנות לקבוצה" במקרה של חרם קבוצתי על חבר טוב. לעתים, בסולם הערכים של האדם, נמצא יותר מערך אחד בשלב כלשהו, ואז במצב שבו תידרש בחירה ביניהם, ייקלע האדם ל"דילמה ערכית".

כאמור, חינוך לערכים הוא תהליך ממושך, אשר מטרתו להביא את החניך לגיבוש סולם הערכים העצמי. אין חולקים על כך שהחינוך לערכים הוא התהליך החינוכי המרכזי בחיי האדם ובמיוחד בנעוריו, והוא מתרחש בסביבה החינוכית רבת-הפנים שהוא נחשף אליה – הבית, בית-הספר, הרחוב, תנועת-הנוער, חיי-החברה, אמצעי-התקשורת וסביבות וירטואליות למיניהן. חלקו מתרחש במכוון וביודעין, כך למשל על-ידי ההורים שזו זכותם הטבעית, וחלק אחר מתרחש מבלי משים, לטוב ולרע.

אחת הסוגיות הנתונות לוויכוח היא מקומה של מערכת החינוך בכלל ומקומם של המורה ובית-הספר בפרט, בחינוך לערכים באורח מכוון. יש הגורסים כי בבית-הספר אין לעסוק בחינוך לערכים מחמת החשש לאינדוקטרינציה וכי יש להסתפק בטיפוח החשיבה הביקורתית של התלמיד (יזור, 1990; שיינברג, 1999). עם זאת, כמתואר לעיל, יעדי מערכת החינוך המוגדרים בחוק החינוך (כנסת ישראל, 1953, 2000), מפרטים שורה ארוכה של יעדים שיש להם הקשר ערכי מובהק. נודינגס (Noddings, 1984) ווייס ועמיתיו (2003) מדגישים את תפקידו של החינוך הערכי בטיפוח תודעה אכפתית ואמפתיה כלפי הזולת, ואלוני (2005) טוען כי החינוך לערכים בא להגן על החברה כדי:

...שאנשים כפרטים וכחברים בקהילות יצליחו לזהות בזמן וכהלכה את המאפיינים הבלתי מוסריים שבמצאות, ויפעלו כמיטב יכולתם למנוע את הירידה אל מתחת לסטנדרטים הראויים של צלם אנוש, כבוד האדם ושוויון ערך האדם (שם, עמ' 287).

המחקר המתואר במאמר זה מצדד בעמדה האחרונה, ונסמך על כך שהמורה הוא שליח של המדינה בין כותלי בית-הספר וחובתו לקדם את השגת יעדי החינוך כמוגדר בחוק.

קיימת הסכמה רחבה לכך שלחינוך לערכים בהוראה יש שלושה ממדים: רגשי, התנהגותי ושכלי (למשל, אדר, 1976; מינקוביץ, 1967; Rosenberg, 1960; Karthwohl, 1994; Festinger, 1957).

בממד הרגשי – מערכת היחסים המתפתחת בין התלמיד לבין המורה היא הגורם המרכזי. מצד אחד, התלמיד יחוש אי-נוחות ואף תסכול במקרים שבהם לתפיסתו יש פער בין התנהגותו לבין ציפיות המורה ממנו, או בין הדימוי העצמי שלו לבין האופן שבו הוא קולט את דמות המורה. מצד אחר, בהיווצר תפיסת-פער כזאת, התלמיד יחוש סיפוק כאשר יחול צמצום של הפער הנתפס. תהליך זה, שמקובל לקרוא לו בשם 'למידת הזדהות' ("Modeling"), מתאפיין באיזון בין חיבה לבין תביעה מצד המורה. נמצא כי למידת הזדהות היא אופן הלמידה העיקרי והבטוח ביותר ליצירת נטיות המאפשרות לתלמיד לפעול באופן אוטונומי לפי ערכים שהוא מסגל לעצמו (מינקוביץ, 1967). בניסוחו של מרטין בובר (1963): "עלינו (המורים) לחנך את עצמנו לבני-אדם הראויים לשמש מודל לחיקוי, אז יאהבנו הילדים ויבקשו להידמות לנו".

בממד ההתנהגותי – הערכים נרכשים תוך כדי עשייה, תוך כדי מתן שכר ועונש לתלמיד, כלומר, באמצעות חיזוק חייוני המיועד להקנות לתלמיד הרגלים ההולמים סטנדרטים שלפי תפיסתו של המורה הם הרצויים. כך למשל, אדם הופך לנדיב מתוך קניית ההרגל של עשיית מעשים של נדיבות בעידודו של המורה (מינקוביץ, 1967). תהליך זה נקרא בשם: "למידת מניפולציה" ("Manipulation").

בממד השכלי – שכתמן (1980) קובעת כי חינוך לערכים מתבסס על מודל של שלוש רמות הוראה. לפי מודל זה ההוראה מתרחשת ברמת הידיעה, ברמת ההמשגה וברמת הערכית. הוספת הרמה הערכית לפעילויות ההוראה בכיתה מתבצעת לפי רטס, הרמין וסימון (Raths, Harmin & Simon, 1987) בגישה של "הבהרת ערכים" ("Value Clarification") או לפי קולברג, לוין והיוור (Kohlberg, Levine, & Hower, 1983) בגישה ה"הבנייה".

הכלי המרכזי בדיון הערכי בשיטת הבהרת ערכים הוא שאלות הבהרה, שבעזרתן התלמיד נדרש לזהות את הערכים החשובים לו, לשתף בכך את הקבוצה, לקבל היזונים חוזרים ואלטרנטיבות מגוונות לעצם זיהוי הערך והתחושה כלפיו, ולהצהיר לפני הקבוצה על התנהגות רצויה, תוך בדיקת האפשרות לשינוי בהתנהגות או **בדעה**. התלמיד בוחר בערכים בתיאום עם צרכיו הפנימיים והמורה לא אמור להביע את עמדותיו הערכיות, אלא לתמוך בתהליך התפתחות הכוחות הרציונליים של התלמיד כדי שיאפשרו לו בחירה שקולה במצבי אמת. הדיון הערכי, לפי רוג'רס (Rogers, 1969), יתקיים באווירה לא שיפוטית, ולפי רטס ועמיתיו (Raths et al., 1987), הוא יתקיים באווירה של חופש בחירה בעמדות הערכיות.

הכלי המרכזי בדיון ערכי בגישה ההבניה הוא *דילמה ערכית* המציבה לפני התלמידים דילמה בין שתי

דרכי התנהגות מנוגדות ששתיהן מבטאות ערכים חשובים להם.¹ התלמידים מתלבטים באופן אישי בפתרונה של הדילמה, נוקטים עמדה מנומקת, נחשפים לעמדות אחרות ולבסוף מגיעים לניסוח מחדש את עמדותיהם לאור הכרת העמדות שעלו בדיון (פלג וברנהולץ, 2003). קולברג ועמיתיו (Kohlberg et al., 1983) מסבירים כי בדיון דילמה, תלמיד שעמדותיו לגבי התנהגות מסוימת מאופיינות בפרספקטיבה חברתית רחבה ובגישה עקרונית או מצפונית טהורה, יפתח גישה ביקורתית כלפי עמדות המצדדות בהתנהגות ערכית, אשר המניע שלה הוא חשש מעונש או רצייה חברתית. לעומת זאת, תלמיד שמחזיק בעמדה שהתנהגות ערכית מונעת על-ידי שיקולים אגואיסטיים כאלה, הנחשף לעמדות ברמה ערכית שהיא פחות אגואיסטית ומבוססת על מצפון ואחריות כלפי החברה, עשוי לשנות את עמדתו. המחקר של קולברג ועמיתיו (שם, 1983) מצביע על כך שתלמידים כאלה בדרך כלל אימצו לעצמם עמדות שהנימוק להן מתאים לרמת חשיבה מוסרית גבוהה יותר מכפי שהיו בה תחילה. בגישה ההבניה נדרש מהמורה להכיר ולדעת לאפיין עמדות ברמות חשיבה מוסרית שונות כלפי פתרון הדילמה שעולה לדיון בכיתה. עליו לחשוף את התלמידים לעמדה שהיא בשלב גבוה מזה שהוצג על-ידי התלמידים בכיתה.

בשתי הגישות החינוך לערכים מבוסס על הסבר שמטרתו להעניק לתלמיד מודעות לערכים, שיקול-דעת עצמאי ושיפוט עצמי בעימות עם מצבים חדשים. ושתיהן דוגלות כאמור בדיון ערכי כאמצעי להוספת הרמה הערכית לפעילויות ההוראה בכיתה. בדיון ערכי התלמידים מביעים את עמדותיהם האישיות המנומקות ביחס למהותה של התנהגות לאור ערכים מסוימים, ומקשיבים לעמדות מנומקות על-ידי אחרים, העולות בדיון. חשיפת התלמיד למגוון של עמדות מנומקות מעוררת תהליך רציונלי הפונה לשכלו ולשיפוטו של התלמיד. התהליך כרוך מצד אחד בטיפול יכולות הלמידה וההקשבה, ומצד אחר בטיפול של כישורי חשיבה ברמה גבוהה ביניהם חשיבה ביקורתית, העלאת שאלות, הנמקה, ניתוח והסקת מסקנות. שתי הגישות מדגישות במקביל לטיפול המודעות העצמית וכישורי החשיבה, את טיפוחה של המודעות החברתית והמוטיבציה למעורבות חברתית על-ידי זימון התנסויות לתלמידים במעורבות חברתית-קהילתית (פלג וברנהולץ, 2003).

מטבע הדברים החינוך לערכים במחקר הנוכחי שנעשה במסגרת הוראת המתמטיקה, התממש בשלושת הממדים של החינוך לערכים. אולם השאיפה לרתום את הדיסציפלינה המתמטית לעניין, הובילה להתמקדות מחקרית בממד השכלי, זאת מבלי להפחית כהוא זה מחשיבותם של שני הממדים האחרים במהלך ההוראה עצמה.

1. דוגמה לבעיה מילולית מספרות המחקר, שמבחינה מתמטית לצורך פתרונה יש לחבר משוואה ליניארית מתאימה (תת-סעיף 1), ומבחינת החינוך לערכים יש בה שלוש שאלות הבהרה המעוררות דילמות ערכיות (תת-סעיף 4-2) (מתוך שכטמן, 1980): סוחר קנה מספר מוצרים במחיר של 4 ש"ח למוצר, 10 מהמוצרים התקלקלו ואת השאר הוא מכר במחיר של 6 ש"ח למוצר. בסה"כ הרוויח בעסקה 80 ש"ח.

1. כמה מוצרים קנה הסוחר?
2. באיזה מידה תספר לקונה אם משהו איננו כשורה במוצר שאתה עומד למכור?
3. האם תוריד את מחירו של המוצר עבור חבר טוב?
4. האם תוריד את מחירו של המוצר עבור אדם חסר אמצעים?

מסגרת המחקר

כאמור, המחקר המתואר במאמר זה, בא לבחון את אפשרות החינוך לערכים במסגרת הוראת המתמטיקה. בסדרה של מחקרי-זוטא מקדמיים נבדקו התפיסות הרווחות ביחס לאפשרות של שילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה בקרב מתמטיקאים, מנהיגי החינוך המתמטי בישראל, מורים למתמטיקה וסטודנטים שהם בוגרי מערכת החינוך המתמטי בבית-הספר. במחקרי-זוטא אלה נמצאו ספקות רבים ביחס לאפשרות השילוב הנדון, במיוחד לגבי ערכים חברתיים שאינם טבעיים לשילוב כזה. בכל זאת – דבקנו בגישה כי הכרחי למצות את האפשרויות לשלב את החינוך לערכים בהוראתה של כל דיסציפלינה, ועל כן גם במתמטיקה, גם אם על פניו הדבר מעורר תמיהה. מה גם שמצאנו פה ושם בספרות תימוכין לכך (ראו לעיל). ההחלטה לצאת לדרך, התבססה על שלוש הנחות-יסוד:

1. המורה למתמטיקה כמו מורה לכל דיסציפלינה אחרת, הוא קודם כל דמות חינוכית.
2. אם קיימת אפשרות לשילוב החינוך לערכים בהוראת מתמטיקה, הכרחי למצות אותה.
3. בהיות המתמטיקה דיסציפלינה המטפחת את השכל הישר, יש בה פוטנציאל לחינוך לערכים.

המחקר בא לבדוק את היתכנות השילוב של החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה הן ברמה העיונית והן ברמה המעשית. ברמה העיונית, נערך ניסוי חשיבה כדי לאתר הזדמנויות פוטנציאליות לשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה על פי תכנית הלימודים החדשה לחטיבת הביניים. ברמה המעשית, בעקבות ניסוי החשיבה, נערך מחקר פעולה על-ידי המחברת הראשונה שהיא גם מורה למתמטיקה, באחת מכיתותיה (להלן "כיתת-המחקר") במשך שנה וחצי. במקביל במשך שנה התנהלה פעולת התערבות על-ידי 12 מורים ב-12 כיתות משבעה בתי-ספר שונים (על הכשרת המורים להוראה המשלבת חינוך לערכים כחלק מפעולת ההתערבות – ראו אדרי ומובשוביץ-הדר, 2013). מחקר הפעולה הוא במקודם מאמר זה.

לפני שנעבור לתיאור מחקר הפעולה, נציין כי כדי לשלב את החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה על פי תכנית הלימודים החדשה לחטיבת הביניים, ננקטו בניסוי החשיבה שבעקבותיו התבצע מחקר הפעולה, הקווים המנחים הבאים לאיתור הזדמנויות לכך:

חיפוש בעיות בנושאי הלימוד של תכנית הלימודים, שהקשרן מאפשר התפתחות דיון ברמה הערכית או שאפשר להחליפו בהקשר שמאפשר התפתחות דיון כזה. למשל: מכוניות מתנגשות או שני ברזים ממלאים בריכה (שכטמן, 1980; מובשוביץ-הדר, 2007).

חיפוש מונחים מתמטיים בתכנית הלימודים שיש להם משמעות גם מחוץ למתמטיקה ואפשר להוסיף להם דיון ברמה הערכית. למשל: דיון סביב המונחים שוויון, אמת, מכנה משותף או סימטריה (מובשוביץ-הדר, 2007).

חיפוש נושאים שמתאים לבקש מהתלמידים לחבר בהם בעיות מתמטיות שיש להן הקשר שנוגע לערכים שחשובים להם.

חיפוש סיפורים על חייהם של מתמטיקאים ועל ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראת נושאי הלימוד של תכנית הלימודים, שיש להם נגיעה לחינוך לערכים. למשל: הנושא מערכת צירים קרטזית, מוביל באופן טבעי אל רנה דקארט שהסיפור על אודותיו מאפשר דיון ברמה הערכית תוך התייחסות לערכים האישיים: התמדה, סיפוק אינטלקטואלי וצניעות (מובשוביץ-הדר, 2007).

חיפוש נושאים מתמטיים שמאפשרים את הכרת המתמטיקה כטבע. למשל: משולש הזהב בגוף האדם. בדיונים ברמה הערכית יכולים לבוא לידי ביטוי הערכים: יופי, צניעות, סקרנות, שאלת שאלות, פתיחות לרעיונות חדשים.

חיפוש נושאים מתמטיים שמאפשרים את הכרת המתמטיקה בתרבות האנושית: בתנ"ך, במסורת היהודית, בעיצוב, בבנייה, בספרות, בשירה. למשל: חישוב שטח והיקף המעגל בתנ"ך בספר מלכים א' פרק ז' פסוק כ"ג. בדיונים ברמה הערכית יכולים לבוא לידי ביטוי הערכים: כבוד למורשת, כבוד למסורת.

חיפוש בעיות מתמטיות סטנדרטיות שמאפשרות דיון ברמה הערכית תוך התייחסות לערכים שנחשבים טבעיים לשילוב בהוראת המתמטיקה: הגיוניות, סדר, דיוק, ספקנות, ביקורתיות, כבוד למילה הכתובה, הכללה.

חיפוש בעיות אתגר בנושאי הלימוד של תכנית הלימודים, ופתרון בכיתה תוך כדי הדרכת הכיתה לגילוי המשפט או הפתרון לבעיה והתייחסות לערכים: אומץ אינטלקטואלי, התמדה, סבלנות, נחישות ודבקות במטרה (מובשוביץ-הדר, 2007).

חיפוש פרדוקסים מתמטיים בנושאי הלימוד של תכנית הלימודים ושימוש בהתרתם תוך התייחסות להידברות, סובלנות וכבוד לזולת (מובשוביץ-הדר ווב, 2002; מובשוביץ-הדר, 2007).

חיפוש בעיות מתמטיות משעשעות (חידות, פאזלים) בנושאי הלימוד של תכנית הלימודים תוך התייחסות להנאה שבפתרון הבעיות המתמטיות.

למותר לציין ששיטות הוראה המטפחות ערכים שניתנות ליישום בדיסציפלינות מגוונות, לא היו במוקד מחקר זה.

מחקר הפעולה

מחקר פעולה כשיטת מחקר

למען התוהים על מחקר פעולה כשיטת מחקר יצוין כי מחקר פעולה הוא מקרה פרטי של מחקר איכותני.

נביא כאן סקירה קצרה מתוך ספרות המחקר על הפרדיגמה האיכותנית בכלל ועל מחקר פעולה בפרט, שמתוכם נגזרה שיטת המחקר שננקטה.

מחקר פעולה בתחום החינוך, הוא מחקר איכותני שבו מורים חוקרים את ההוראה של עצמם בכיתתם (Feldman & Minstrell, 2000). למורה במחקר פעולה יש שני כובעים: כובע של מורה וכובע של חוקר. מטרת המחקר הן בדרך כלל שיפור ההוראה והלמידה, והבנה טובה יותר של הסביבה החינוכית

הנחקרת. מכאן תרומתו לעלייה במקצועיות ובאחריות של המורה ולשיפור הישגי התלמידים (Capobianco et al., 2004). מחקר פעולה בתחום החינוך הוא גמיש ונתון לאינטרפרטציות אישיות של המורה החוקר (McNiff, 1998).

בהיותו מקרה פרטי של מחקר איכותני הוא "פעילות ממוצבת הממקמת את הצופה בעולם. היא כוללת מערכת של פרשנויות, פרקטיקות חומריות ההופכות את העולם לנראה. הן מעצבות את העולם והופכות אותו לסדרת ייצוגים הכוללים רשימות שדה, ראיונות, שיחות, תצלומים, הקלטות ותזכורות אישיות. ברמה זו, המחקר האיכותני כולל גישה פרשנית ונטורליסטית על העולם" (Denzin & Lincoln, 2003, pp. 4-5). הגישה האיכותנית גורסת שאי אפשר לגלות ולפרש את כל המציאות אלא רק חלקים ממנה ולכן יש לשלב שיטות רבות כדי לפרש מערך מציאות גדול יותר (Denzin & Lincoln, 1994).

הנחת העבודה היא שהמציאות הנחקרת מורכבת. לכן כדי לתת תוקף ומהימנות לממצאי המחקר האיכותני, יש להשתמש במגוון כלי מחקר. שימוש במגוון הכלים נקרא טריאנגולציה (שילוש) והכוונה היא שהחוקר בוחר במספר כלי מחקר לאיסוף הנתונים במטרה להשיג תוקף מתכנס (Convergent Validity) – Lincoln & Guba, 1985.

כלי המחקר המקובלים במחקר איכותני בכלל ובמחקר פעולה בפרט הם תצפיות, ראיונות מובנים או מובנים למחצה, שאלונים סגורים, פתוחים או חצי פתוחים ומעל לכל יומני מחקר של החוקר או יומנים אישיים של הנחקרים. דיקמן (2005) חקרה את היומנים האישיים שניהלו מורים ככלי לשיקוף ולקידום תהליכי הלמידה של המורים במהלך הכשרתם לתפקידי הנחייה כמורי מורים למתמטיקה. עבודתה מצביעה על תרומתו של היומן האישי ככלי לעידוד החשיבה הרפלקטיבית תוך חידוד ההבנה והתבוננות בדברים מזוויות שונות מצד אחד, ולמציאת פתרונות בתחומים שונים מצד שני. היומן האישי נמצא כמתאים לאסוף ראיות על תהליך של התפתחות מקצועית ואישית של מורים.

מערך המחקר האיכותני מאופיין בכך שהוא גמיש וכללי ומצביע על כיווני התקדמות. שאלות המחקר וכלי המחקר מתפתחים בדרך-כלל לאחר תהליך ההעמקה בשדה הנחקר וההבנה הנוצרת. לפחות בשלבים הראשונים של המחקר החוקר לא נדרש לקבוע את מגוון האסטרטגיות ואת טווח הנושאים, הוא לא יוצא לשדה עם שאלות ספציפיות כדי לבסס השערות. המיקוד בנושא הנחקר ובחירת האסטרטגיה למחקר והכלים מתעצבים בזמן השהייה בשדה מתוך ההכרות עמו. במחקר מתקיים תהליך אינדוקטיבי של איסוף נתונים הממקד בהמשך את אופי המחקר (Neuman, 2006).

מחקר איכותני מאופיין ברצף ספירלי המתחיל בבחירת הנושא וניסוח שאלות מחקר התחלתיות, מעבר לאיסוף הנתונים מהשטח, עריכת הנתונים וניתוחם. הדבר יכול להוביל להצגת שאלות חדשות, צורך באיסוף נתונים ושוב יכול להתחיל מעגל חדש או יציאה לסיכום וכתובה (צבר-בן יהושע, 1990; Capobianco et al., 2004).

להלן מרכיבי שיטת המחקר הנוכחי שהתאימו לאופיונים של מחקר פעולה בתחום החינוך המתוארים לעיל:

- א. החוקרת שימשה כמורה חוקרת בכיתה שבה היא לימדה.
- ב. במחקר התקיימו שלושה מעגלי מחקר, בכל אחד מהם נבדק המימוש של הזדמנויות מסוג מסוים לשילוב של חינוך לערכים בהוראת המתמטיקה על-ידי החוקרת. במרכזו של כל מעגל הייתה שאלה,² עוצבה התערבות שהייתה מורכבת מפעילות מתוכננת, הפעילות נוסתה בכיתה, החוקרת אספה נתונים לגביה, ניתחה אותם והפיקה מהם לקחים לגבי יישום עתידי של פעילות דומה.
- ג. לרפלקציה במחקר הפעולה היה מקום חשוב. התייעוד ביומן המחקר סייע לחוקרת בחידוד ההבנה של תהליכים במחקר וגם שימש בדיה כלי לאיסוף ראיות במחקר.

מחקר הפעולה - כיתת המחקר ושאלות המחקר

מחקר הפעולה התבצע במחצית השנייה של שנה"ל, בכיתה ז' ובשנה שלאחריה כשהכיתה עלתה לכיתה ח', בבית-ספר שש-שנתי גדול לא-סלקטיבי השייך לחינוך ההתיישבותי בצפון הארץ. בכיתה היו 35 תלמידים, מהם 21 בנים ו-14 בנות. כיתת המחקר למדה מתמטיקה ברמה מוגברת.

המטרה הייתה להשיב על השאלות הבאות:

- מהם הקווים המאפיינים את השילוב של החינוך לערכים שהתבצע בכיתת-המחקר?
- האם, ואם כן כיצד שילוב החינוך לערכים בהוראה פגע בהתקדמות של ההוראה על פי תכנית הלימודים, או בהישגי התלמידים?
- מהם הקשיים הכרוכים בשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה, וכיצד אפשר להתגבר עליהם לאור ניסיונה של המורה-החוקרת בכיתתה?

מחקר הפעולה - כלי המחקר

כאמור, מחקר הפעולה התנהל באורח יומיומי תוך כדי הוראת המתמטיקה במשך כשנה וחצי, ב-153 שיעורים. איסוף הנתונים במחקר זה נשען ברובו על כלי-מחקר מחקר איכותניים: יומן-שדה של החוקרת, ראיונות עם תלמידים, עבודות התלמידים ומבחן-משווה של הישגים במתמטיקה.

יומן-שדה: לשם איסוף נתונים על דרכי-שילוב של החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה, ניהלה החוקרת יומן-שדה ובו רשמה מדי יום ביומו דיווח על:

- א. תכנון השיעורים וביצוע של הוראת המתמטיקה לפי תכנית הלימודים בכיתת המחקר.
- ב. תכנון וביצוע של חינוך לערכים תוך כדי הוראת המתמטיקה בכיתת המחקר.

2. אלה שלוש השאלות שהיו במרכזיהם של מעגלי מחקר הפעולה: 1. כיצד אשלב חינוך לערכים בעזרת בעיות שההקשר שלהן מאפשר התפתחות לדיון ברמה הערכית? 2. כיצד אשלב חינוך לערכים בעזרת מונחים מתמטיים שיש להם משמעות גם מחוץ למתמטיקה ולכן אפשר להוסיף להם דיון ברמה הערכית? 3. כיצד אשלב חינוך לערכים בעזרת משימות שבהן התלמידים התבקשו לחבר בעיות מתמטיות שיש להן הקשר שנוגע לערכים שחשובים להם?

ג. ציטטות מדברי התלמידים או מדבריה של החוקרת עצמה שהייתה להן משמעות בהיבט של חינוך לערכים.³

ד. התלבטויות של החוקרת בהקשר למחקר ולהוראה. רפלקציה שוטפת על הדוחות ביומן-השדה בסמוך לכתיבתם נוצלה כדי להפיק מהם לקחים לגבי תכנון וביצוע הפעילויות הבאות שנעשו במהלך מחקר הפעולה.

ראיונות: החוקרת קיימה ראיונות עם תלמידי כיתת המחקר כדי לדעת אילו מבין הפעילויות שיושמו על ידה כדי לשלב חינוך לערכים, היו בעבורם משמעותיות ואכן נתפסו על ידם כפעילויות שיש בהן מסר ערכי (זאת על אף המודעות לכך שעצם קיום ראיונות יכול לגרום לשינוי כלשהו).

עבודות תלמידים: כחלק משיטת ההוראה (המפורטת בסעיף הבא) הוטלו על התלמידים מטלות מגוונות שבחלקן היו מתמטיות טהורות ובחלקן התייחסו לנושאים ערכיים. החוקרת אספה מדי שבוע את עבודות התלמידים לבדיקה. התשובות לסעיפי השאלות שנוגעות לחינוך לערכים הוערכו בנפרד. הקריטריון להערכת התשובות המתמטיות היה לפי טיב השגיאות המופיעות בהן, תוך התייחסות ליצירתיות ולמקוריות התשובות (כשהיו כאלה). הקריטריון להערכת התשובות לשאלות ברמה הערכית היה מספר הנימוקים וטיבם, כלומר, רמת החשיבה המוסרית והפרספקטיבה החברתית שאפיינה אותן לפי קולברג ועמיתיו (Kohlberg et al., 1983). לתלמידים ניתנה אפשרות לתקן את עבודותיהם, אם נמצא שאינן ברמה משביעת רצון. נוסף לאיסוף נתונים הולם, שירתה ההפרדה הזאת גם מטרה חינוכית של הדגשת החשיבות לתשובות אלה בעיני התלמידים והגברת מודעותם לתוספת הבלתי שגרית לבעיות במתמטיקה.

מבחני-משווה: הישגי התלמידים בתחום המתמטיקה בכיתת המחקר נבדקו באמצעות מבחני המשווה המקובלים בבית-הספר שבו נערך מחקר הפעולה והשוושו עם ההישגים של תלמידי הכיתות האחרות בשכבת הגיל. כמו כן נערכה השוואת ההישגים במתמטיקה של תלמידי כיתת המחקר בסוף כיתה ז' עם הישגיהם בסוף כיתה ח'.

מחקר הפעולה - שיטת ההוראה

כאמור, מחקר הפעולה התבצע לאחר ניסוי החשיבה שבמסגרתו אותרו בתכנית הלימודים החדשה של חטיבת הביניים הזדמנויות פוטנציאליות לשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה. כמו כן במסגרת ניסוי החשיבה, פותחו בהתייעצות עם מומחים, פעילויות מתמטיות המאפשרות שילוב של חינוך לערכים אישיים וחברתיים בהוראת המתמטיקה. הן כונסו לקובץ בשם "שער-חם: שילוב ערכים בחינוך מתמטי". הפעילויות שיושמו במחקר הפעולה לשילוב החינוך לערכים נלקחו בחלקן מ"שער-חם", ובחלקן פותחו בהשראתו במהלך מחקר הפעולה. כולן כללו שאלות הבהרה שנמצאו הכרחיות כדי לאפשר לחוקרת לקיים בעזרתן דיונים ברמה הערכית, כולל דיוני דילמה וניסוח של עמדות ערכיות (ראו גם שכטמן, 1980).

3. ראו לעיל הערה 2.

במהלך מחקר הפעולה התקיים בכיתת המחקר חינוך לערכים בשלושה ממדים: רגשי, התנהגותי ושכלי, תוך מתן דגש מיוחד בממד השכלי ובשילוב החינוך לערכים בתכנים המתמטיים הנלמדים.⁴ בממד זה ננקטו ארבע שיטות שנשענו על מודל שלוש דרגות ההוראה הנזכר לעיל (שכטמן, 1980): [א] שילוב ערכים בפתרון בעיות מתמטיות; [ב] דיון במושגים מתמטיים בהקשר חוץ-מתמטי; [ג] הטלת משימות של חיבור בעיות מתמטיות; [ד] הבאת התלמידים לניסוח מחדש של עמדות ערכיות.

[א] **שילוב ערכים בפתרון בעיות מתמטיות:** שיטה זו מבוססת על הצגת בעיות מתמטיות בנושא מתוך תכנית הלימודים, שהקשרן מאפשר לקיים דיון ערכי. במחקר הפעולה התברר שכל עוד הפן הערכי אינו מוצף במפורש על פני השטח, התלמידים פותרים את השאלה המתמטית ואינם נותנים את דעתם לפן הערכי של הקשריה.⁵ לעומת זאת, כאשר מופיעות שאלות הבהרה המהוות חלק בלתי נפרד מהמשימה המוטלת עליהם, לא רק שקיימת התייחסות, אלא שהיא אף מעוררת שיח ביניהם (ראו ראיות לכך בסעיף הבא). כפי שעולה מספרות המחקר (למשל שכטמן, 1980, 1987), לשיח כזה יש סיכוי יותר גדול להשאיר חותם. על כן על פי שיטה זו, קיום הדיון הערכי נשען על תוספת של שאלות הבהרה ברמה הערכית.

הבעיה המתמטית הבאה בנושא "פונקציה קווית", אשר חוברה על-ידי המורה-החוקרת במחקר הפעולה, כוללת חמישה תתי-סעיף מתמטיים סטנדרטיים (1-5) ועוד שני תתי-סעיף (6, 7), שבהם מופיעות שאלות הבהרה ברמה הערכית:

זן וערן תלמידים טובים וחברים טובים. ערן חלה ולכן החסיר שבועיים של לימודים. כשחזר הוא התקשה להשתלב בשיעורי המתמטיקה.

באותו שבוע, זן פתר בכיתה בהצלחה 22 שאלות במתמטיקה בכל יום. ערן פתר תרגיל אחד בלבד בהצלחה ביום א'.

זן החליט לבוא לעזרתו של ערן, ועזר לו להשלים את החומר. בימים הבאים, זן המשיך לפתור בכיתה בהצלחה בכל יום 22 שאלות במתמטיקה, ואילו ערן התקדם בקצב קבוע - בכל יום פתר בהצלחה 3 שאלות במתמטיקה יותר מאשר ביום שקדם לו.

4. אף שלשני הממדים האחרים אין ייחוד מבחינת הקשר לדיסציפלינה המתמטית (ועל כן לא היו במוקד מחקר הפעולה), נביא כאן דוגמאות אחדות לכל אחד מהם ובכך נבהיר כי חשיבותם בעינינו אינה נופלת מחשיבות הממד השכלי (שהיה במוקד מחקר הפעולה):

בממד הרגשי המורה-החוקרת שילבה חינוך לערכים בהוראת המתמטיקה בעזרת התנהגות אישית לאור הערכים ששאפה להנחיל לתלמידים, ומדי פעם בפעם, הצביעה במפורש על ערכים אלה.

לדוגמה: התנהגות סובלנית המכבדת את הזולת ומתחשבת בצרכיו הייחודיים: "מפני שאני מכבדת את המאמצים שאתה עושה כדי להגיש את העבודות בזמן, אני מתחשבת כך ומאפשרת לך להגיש את העבודה הנוכחית במועד מאוחר יותר."

לדוגמה: הכוונת התלמידים להשגת המטרות שהציבו לעצמם תוך טיפוח של מערכת תגמולים אוטונומית: "הבעיות מאתגרות. תנסו להתמודד. גם פתרון חלקי שתתנו יכול להצביע על חשיבה ומאמץ שעשיתם כדי לפתור את הבעיות. תלמידים שיצליחו להשלים את פתרון הבעיות במלואן ירגישו סיפוק רב מפני שהצליחו להשיג את היעדים שהציבו לעצמם."

בממד ההתנהגותי החוקרת שילבה חינוך לערכים בעזרת חידושים חיוניים להתנהגות רצויה.

לדוגמה: תלמיד שעזר לחברו להשלים שיעורי בית שהחסיר צוין לשבח על עזרה לזולת באחת או יותר מהדרכים הבאות: דברי הערכה שנאמרו בפני הכיתה, מכתב להורים, שיחה עם מחנכת הכיתה וכתביה הערה בתיק התלמיד.

לדוגמה: תלמידים מתקשים במתמטיקה צוינו לשבח על מאמץ מיוחד שעשו כדי להצליח, למשל כאשר תיקנו תיקון חוזר ונשנה של עבודות בית גדולות עד השלמתן לשיעור רצונה של המורה.

5. אגב, כידוע, הרקע להקמת היחידה ללימודים הומניסטיים בטכניון היה ההתייחסות ההנדסית טכנית של סטודנטים שקיבלו משימת תכנון של צינור להובלת דם מאילת לאשדוד והם הסתערו על החישובים מבלי לשים לב להקשר ומבלי לעצור ולשאול לשם מה בעצם נחוץ צינור כזה. ראו ז' גלילי (2005, 25 בפברואר). *צנור הדם לאילת – הסיפור המלא* [בלוג]. אוהור מתוך <http://www.zeevagalili.com/?p=269>

1. הכינו טבלת ערכים עבור מספר השאלות במתמטיקה שפתר ערן בהצלחה במשך ימות השבוע.
 2. שרטטו מערכת צירים אחת. ציר ה-x יתאר את ימות השבוע, וציר ה-y את מספר הפתרונות הנכונים בכל יום. שרטטו שני גרפים המתארים את מספר הפתרונות הנכונים של דן ושל ערן.
 3. מה ניתן להסיק מתוך הגרף לגבי מספר הימים שלקח לערן "להזביק" את דן? באיזה יום בשבוע זה היה? כמה שאלות במתמטיקה פתרו השניים ביחד בהצלחה באותו היום? נא לנסק.
 4. מהו הייצוג האלגברי של הפונקציות המתארות את מספר השאלות במתמטיקה שפתר כל אחד מהתלמידים בכל אחד מימות השבוע? וסמנו את הביטוי האלגברי המתאים על-ידי כ"א מהישרים בשרטוט.
 5. האם יש יום שבו פתרו השניים אותו מספר שאלות במתמטיקה? חברו משוואה המתארת מצב זה ופתרו אותה. מה משמעות הפתרון שקבלתם? כיצד בא לידי ביטוי פתרון זה באופן גרפי?
 6. נא לתאר מקרה שבו נעזרת בחברה/ה לכיתה כדי להשלים חומר שהיה עליך להשלים. מה היה הגמול לעזרה שקבלת (אם היה גמול)?
 7. נא לתאר מקרה שבו עזרת לחברה/ה בכיתה כדי להשלים חומר שהיה עליה/ה להשלים. האם הצלחת במשימה? מה היה הגמול לעזרה שנתת (אם היה גמול)?
- פיתוח הבעיה נעשה באותה השיטה שבעזרתה פותחו חלק ניכר מהבעיות המתמטיות ב"שער-חם". העיקרון המנחה את פיתוחה היה הסבת בעיה מוכרת לבעיה אנלוגית שיש בה הזדמנות לחינוך לערכים.
- שיטה זו הייתה השיטה המרכזית שננקטה במהלך מחקר הפעולה על-ידי המורה-החוקרת. שלוש השיטות האחרות היו כדלקמן:

[ב] דיון במושגים מתמטיים בהקשר חוץ-מתמטי: נוסף על השיטה המרכזית, הסתייע מחקר הפעולה בהעלאת דיונים בהקשר החוץ-מתמטי של מושג מתמטי מסוים. לדוגמה: סביב המושג המתמטי "מכנה משותף", אפשר לפתח דיון בעזרת שתי שאלות הבהרה:

1. מהו 'המכנה המשותף' של תלמידי הכיתה?
2. האם יש 'מכנה משותף' לתלמידי הכיתה ולתלמידי כיתה ח' בכפר יאסיף? אם כן – מהו? אם לא – מדוע?

[ג] הטלת משימות של חיבור בעיות: שיטה שלישית הייתה הטלת משימות שבהן התלמידים נדרשו לחבר בעיות מתמטיות בעלות הקשר לערכים שהם מייחסים חשיבות אליהם, או למצוא הקשר ערכי למושגים מתמטיים ולהצדיק את בחירת ההקשר. לדוגמה: בלימוד הנושא "אחוזים" ניתנה המשימה הבאה של חיבור בעיה:

עליך לחבר 3 בעיות מתמטיות בנושא אחוזים שנוגעות לערכים שחשובים לך, ומהבחינה המתמטית הן דומות לבעיות מתוך ספר הלימוד: בני גורן, אלגברה, חלק א',

עליך להשיב אחרי חיבור כל בעיה על שתי השאלות הבאות:

מדוע בחרת בהקשר בו בחרת?

מהם הערכים שבחרת לדון בהם?

הדוגמה הבאה היא של משימה למציאת הקשר ערכי למושג "שוויון":

כידוע לך, שוויון בין שני ביטויים אלגבריים יכול להוביל לפתרון בעיות משני סוגים: (א) הוכחה של זהות בין שני הביטויים שביניהם ניצב סימן השוויון (למשל: לכל ערך של a, b מתקיים $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). (ב) מציאת ערך שעבורו מתקיים השוויון בין שני הביטויים, כלומר פתרון משוואה (למשל מסוג $x^2 + 3x = 2x - 5$). במקרה הראשון השוויון הוא בסימן שאלה ויש להוכיחו. במקרה השני השוויון נתון ויש למצוא ערכים שמקיימים אותו. האם מוכר לך השימוש במושג "שוויון" בהקשר שונה? למשל בגאומטריה? או אולי בהקשר מחוץ למתמטיקה, בחיי החברה?

[ד] הבאת התלמידים לניסוח מחדש של עמדות ערכיות: השיטה הרביעית היא שיטת-על.

להשלמת דיון ערכי שהתקיים באחת מהשיטות הנזכרות, התלמידים התבקשו לשקול ולנסח מחדש את עמדותיהם הערכיות. הדבר התבצע, למשל, בעזרת משימת דירוג על פי העדפותיהם האישיות של רשימת עמדות ערכיות מנומקות אשר הועלו קודם לכן בדיון בכיתה.

לסיכום, ארבע השיטות המנויות לעיל אפיינו את מהלכי ההוראה בשיעורי המתמטיקה בכיתת המחקר ואפשרו את שילוב החינוך לערכים. בסעיף 4.5 מובאות ראיות להתייחסות של התלמידים לפן הערכי.

מחקר הפעולה - הספק ההוראה לפי תכנית הלימודים והישיג התלמידים במתמטיקה

הספק ההוראה לפי תכנית הלימודים לא נפגע. התלמידים עברו באחוזי הצלחה גבוהים את מבחני המשווה של כיתה ח' שנועדו למיין את התלמידים לרמת לימודים מוגברת בחטיבה העליונה, וההישגים במבחני המיצ"ב של כיתת המחקר היו דומים להישגי הכיתה המקבילה ברמה המוגברת.

השוואת הציונים של 17 התלמידים שהשתתפו בכיתת המחקר בכיתה ז' והן בכיתה ח' העלתה כי:

ממוצע הציונים של התלמידים במבחן המסכם את החומר של כיתה ז' היה 87.35 (ס.ת. 5.26).

ממוצע הציונים של התלמידים במבחן המיצ"ב בסוף כיתה ח' היה 87.58 (ס.ת. 5.90).

נתונים אלה מצביעים על כך שרמת ההישגים של התלמידים בכיתת המחקר לא נפגעה, ואף עלתה מעט.

מחקר הפעולה - ראיות להתייחסות של התלמידים לפן הערכי

הראיות המובאות בסעיף זה מקובצות לארבע קבוצות התואמות את השיטות שנקטו לשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה על-ידי המורה-החוקרת (ראו פירוט בסעיף הקודם). כל הראיות לוקטו באמצעות כלי המחקר הנזכרים לעיל.

נא] פתרון בעיות - תשובות לשאלות הבהרה ברמה הערכית:

תשובותיו של מ' לשתי שאלות הבהרה (6, 7) בדוגמה הראשונה לשיטה [א] לעיל מאפיינת תשובות של תלמידים רבים:

היה מקרה שהייתי חולה ובמשך כמה ימים לא הגעתי לבית הספר. חבר שלי אסף עבורי את החומר, הגיע לביתי, ישב איתי והסביר לי מה עלי לעשות. אחרי שסיימנו וכגמול ירדנו לאחר השחקים ושחקנו יחד.	ידיד שלי שבר את יד ימין – היד בו הוא כותב. במשך זמן רב עזרתי לו לכתוב את החומר בכיתה. השתמשתי בנייר קופי. חבר שלי פשוט אמר תודה ונהנתי לעזור. זה גם היה המלל – ההנאה שבעזרה.
---	---

מתוך הדיון שהתקיים בכיתה בעקבות העבודה על פתרון הבעיה אפשר לראות שיש הבדלים בין נטיותיהם של הבנים לנטיותיהן של הבנות לגבי הגשת מתנה כהכרת תודה:

תלמידה 1: "אני בחרתי לתת גמול מוחשי לחבר שעזר לי מפני שכך אני רגילה להגיד תודה." תלמיד 2: "לא מוכרחים לתת משהו, אפשר פשוט להגיד תודה. לפעמים יש למילה כוח יותר גדול מאשר למתנה." תלמידה 1: "אני הייתי שמחה לקבל שוקולד בתור תודה." תלמיד 3: "ההרגשה הטובה שעזרתי למישהו היא מספיקה לי." תלמידה 4: "ההרגשה הטובה מספיקה לי, אבל לא מספיקה למי שרוצה להודות לך. לכן אני הייתי נותנת מתנה קטנה." תלמיד 2: "זה לא נכון בעיני. מי שרוצה להודות שיגיד תודה, לי זה מספיק."

אחת השאלות שנשאלה בכיתת המחקר עסקה בנושא יחס ופרופורציה, ובה שלוש שאלות הבהרה (4, 5, 6):

מיטל אורית ורונן החליטו לחסוך כסף במשותף, כדי לעשות יחד מעשים טובים.

מאז, כל אחת מהן הכניסה לקופה משותפת עשירית מדמי הכיס השבועיים שלה.

התברר שהן תרמו לקופה ביחס של 1:2:3.

1. מה היחס בין ההפקדה של מיטל ושל רונן?

2. מה היחס בין ההפקדה של אורית ושל רונן?

3. כמה כל אחת מהן הפקידה, אם בקופה הצטברו 240 ש"ח?

ההפקדות השבועיות נמשכו עד שהצטבר סכום של 1500 ש"ח. בשלב מסוים, הן

החליטו לתרום לעמותה לסיוע לילדים אוטיסטיים 500 ש"ח מהקופה. להפתעתן,

הן קיבלו מכתב תודה מהעמותה, ואילו צורפו תלושי קניה של ספרים בגובה של 240 ש"ח.

4. עליך להציע לפחות שתי דרכים שונות לחלוקה הוגנת של הזכייה (240 ש"ח) בין שלוש השותפות. כמה תלושים תקבל כ"א מהחברות בדרכים שהצעת?

5. אחת החברות טענה שיש להתחלק באופן שווה בתלושים. האם סידור כזה נראה לך הוגן?

6. אילו זכו בפרס בגובה 240,000 ש"ח. האם היית משנה את דעתך?

מתוך תשובות התלמידים לשאלה 5, במקרה של חלוקת פרס בגובה 240 ש"ח בין שלוש החברות:

תלמיד 1: "הסידור לא נראה לי הוגן כי לא כולן תרמו במידה שווה."
תלמיד 2: "שלושת החברות לא תרמו במידה שווה לקופת המשותפת. לדעתי זה לא הוגן."
תלמיד 4: "שלושת החברות לא תרמו במידה שווה לקופת המשותפת ובכל זאת הסידור ביניהם נראה לי הוגן, בגלל שזה לא באשמתן שיש להם יכולת כלכלית שונה."
תלמיד 5: "הם לא תרמו במידה שווה, אך הסידור נראה לי הוגן כי כ"א תרם כפי יכולתה."
תלמיד 6: "לדעתי זה הוגן כי לשלושתן יש מטרה משותפת וכל אחת תרמה מחלקה כמה שהיא יכולה."

מתוך תשובות התלמידים לשאלה 6, בעד או נגד חלוקה שווה של פרס בגובה 240,000 ש"ח בין שלוש החברות:

תלמיד 1: "בסכום כזה גבוה הייתי משנה את דעתי: הייתי מחלק שווה בשווה את כל הסכום בין החברות. כ"א תקבל 80,000 ש"ח."
תלמיד 2: "הייתי משנה את הצעתי: למי שתרמה הכי מעט, מפני שכנראה מצבה הכלכלי הכי גרוע, הייתי נותן הכי הרבה. מי שתרמה הכי מעט תקבל 140 אלף ש"ח, ומי שתרמה כמות תקבל סכום בינוני ומי שתרמה הכי הרבה, תקבל 50 אלף ש"ח מפני שהן לא זקוקות להרבה כסף."
תלמיד 3: "במקרה כזה כדאי שתתחלקנה שווה בשווה, ואז כ"א מהן תקבל תלושים בגובה של 80,000 ש"ח."
תלמידים 4, 5: "לא היינו משנים את דעתנו. אנו מציעים להכפיל את כל המספרים שהתקבלו בתשובה הקודמת ב 1000."

מניתוח תשובות התלמידים לשאלה 5 עלה כי 75% מתלמידי הכיתה חשבו שחלוקה שווה היא הוגנת, והצדיקו זאת בכך שכל חברה תרמה כפי יכולתה, הסידור בין החברות הוא חברי ולכן מי שיכול יותר ראוי שיתרום יותר. התלמידים שטענו שחלוקה שווה אינה הוגנת הצדיקו זאת בכך שאם תרומת החברות לקופת המשותפת אינה שווה, אז גם חלוקת הזכייה צריכה להיות לא שווה.

מתשובות התלמידים לשאלה 6 עלה כי 25% מתלמידי הכיתה שינו את דעתם. מספר התלמידים

שתמכו בחלוקה שווה קטן מ-75% ל-20% מהתלמידים. גם מספר התלמידים שתמכו בחלוקה יחסית לגודל התרומה קטן מ-25% ל-1%, ועוד 14% הציעו חלוקה מתקנת כלומר ביחס הפוך לגובה התרומה. שני תלמידים מתוכם הציעו חלוקה מתקנת לפי מפתח שרירותי. תלמיד אחד כתב שלא ידע מה להשיב מפני שקשה לו לתאר מצב של זכייה כל כך גדולה.

בכיתה התקיים דיון ברמה הערכית בשיעור שבו הוחזרו לתלמידים עבודות הבית שנבדקו. מספר תלמידים חזרו בעל פה על העמדות שכתבו בעבודותיהם, והמורה-החוקרת רשמה אותן על הלוח. הבעיה העלתה לפני התלמידים דילמה ערכית שבה התלמידים נדרשו לבחור בין הערך "שוויון" לבין הערך "צדק חברתי". היו תלמידים שדבקו בערך "שוויון", ולכן בחרו בחלוקה שווה, ולעומתם מי שדבק בערך "צדק חברתי" בחר בחלוקה פרופורציונלית או בחלוקה מתקנת. בכל מקרה, התלמידים נדרשו לנמק את עמדותיהם כדי לדעת על סמך בחירה של איזה ערך היא התקבלה.

אפשר להניח שהדיון שהתפתח בכיתה תרם לחינוך לערכים, ובפרט לערכים שאליהם הייתה התייחסות מפורשת בדיון: שוויון, צדק חברתי, חלוקה הוגנת, חברות ושותפות.

[ב] דיון במונחים ובמושגים מתמטיים בהקשר חוץ-מתמטי

כאמור, בשלב מתקדם של לימוד פתרון מערכת של שתי משוואות עם מכנה מספרי, התלמידים נשאלו מהו לדעתם המכנה המשותף לכל התלמידים בכיתה?

תלמיד: "כולנו רוצים לקבל ציון 100 במתמטיקה בתעודה".

מורה-חוקרת: בואו נחפש את המכנה המשותף לא רק לכל התלמידים בכיתה, אלא בבית-הספר ובכל בתי-הספר במדינה.

תלמיד: כולנו בני-אדם.

מורה-חוקרת: שמעתם על חוק זכויות התלמיד? מה הקשר בינו לבין המונח "מכנה משותף"?

תלמיד: המכנה המשותף לכל התלמידים הוא שחל עליהם חוק זכויות התלמיד.

מורה-חוקרת: ומה לדעתכם יגיד החוק הזה?

תלמיד: שלכל התלמידים יש זכות ללמוד.

מורה-חוקרת: חוק זכויות התלמיד (2000) מגדיר את זכויות כל התלמידים במדינת-ישראל, ברוח האמנה הבינלאומית של האו"ם שהגדירה את זכויות הילד: הזכות לחינוך, הזכות לשוויון, הזכות לכבוד והזכות לשלמות הגוף.

מי מוכן לסכם של חוק זכויות התלמיד לקראת השיעור הבא? (התנדבו 3 תלמידים)

כעת נחזור למכנה משותף במתמטיקה.

במהלך הלימוד על משפט פיתגורס, נערך בכיתה חישוב היתר של משולש ישר-זווית בעל שני ניצבים בגודל 1 על פי משפט פיתגורס, והתקבלה התוצאה $\sqrt{2}$. בעקבות זאת הכניסה המורה-החוקרת את המושג: מספר אי-רציונלי, התלמידים הוכיחו ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר כזה, והמורה-החוקרת הוסיפה רקע היסטורי כדי לנצל אותו להתייחסות ערכית.

מורה-חוקרת: "בהיסטוריה של המתמטיקה יש סיפור על היפסוס, שהיה שייך לכת הפיתגורית, שהאמינה בכך שיש רק מספרים רציונליים. כלומר, כל המספרים ניתנים לביטוי כמנה של שני שלמים. היפסוס, בעקבות חישוב היתר במשולש ישר זווית שצלעותיו יחידה, הבין שאורכו של היתר לא ניתן לביטוי כמנה של שני שלמים בדומה לדרך בה אנחנו ראינו זאת. לכן, הוא טען שיש גם מספרים אי-רציונליים. יש אומרים כי בשל כך, הוא הוטבע בנהר. למה בעצם הוא הוטבע?"

תלמיד: "מפני שאנשי הכת הפיתגוראים היו בלתי סובלניים לדיעות שאינן מתאימות לאמונתם."

תלמידה: "אבל הוא בעצם בגד בהם, אז מגיע לו עונש."

תלמיד: "לא נכון. להיות סובלני זה לכבד דעות של מישהו אחר גם אם הן שונות משלך. זו בכלל לא בגידה."

מורה-חוקרת: "מוכר לכם סיפור מההיסטוריה של מדינת-ישראל על חוסר סובלנות שהביא לאסון."

תלמיד: "המקרה של רצח רבין."

נגן חיבור בעיות על-ידי תלמידים

כאמור בשיעור בנושא "אחוזים", התלמידים התבקשו לפתור בעיות מתמטיות מתוך ספר הלימוד, ולאחר מכן לחבר בעיות אנלוגיות לבעיות שבספר, אשר קשורות לערכים החשובים להם, תוך נימוק ההקשר הערכי שבחרו בו בחיבור הבעיות. במהלך הדיון, המורה-החוקרת רשמה על הלוח את הערכים שהתלמידים ציינו כי בחרו למקד סביבם את ההקשר הערכי של הבעיות האנלוגיות שחיברו.

כעבודת בית התבקשו התלמידים לחבר בעיות בנושא אחוזים בנושאים שנוגעים לערכים שחשובים להם.

ב-26 מתוך 36 בעיות שחוברו על-ידי התלמידים בעבודת הבית בנושא זה, אפשר היה למצוא הזדמנויות לחינוך לערכים חברתיים: 10 בעיות (28%) עסקו בעזרה לזולת: חלוקת מזון לקשישים, כיבוי שרפות, תרומה לאגודה למלחמה בסרטן, תרומה לעניים לקראת החגים, משלוחי מנות לחיילים, מכירת צעצועים כדי לעזור לנכים, התנדבות למבצעי התרמה, התנדבות לעזרה לקשישים; שמונה בעיות (23%) עסקו באיכות הסביבה והגנה על בעלי חיים: הפגנה נגד ניסויים בבעלי חיים, התנדבות לטיפול בחיות, התנדבות לעזרה בכלביה, עזרה בניקוי רחובות, ניקוי של שונית בים סוף, ייצור של קומפוסט ביתי, מניעת פליטה של גזים לאוויר, מניעת שפכים לים; שבע בעיות (20%) עסקו בערכי הדמוקרטיה, או צרכנות נבונה: שביתת בתי-הספר במדינה, מספר חברים בכנסת, שוטרים עוצרים מפגינים, פיטורים של עובדים במפעל, חישובים במכירה של מוצר, הנחה בקנייה של ספר, הנחה בקניה של עץ; בעיה אחת (3%) עסקה בגמילה מעישון; ב-10 הבעיות הנתורות שחוברו לא נמצא הקשר המזמן חינוך לערכים חברתיים. אפשר היה לטפח בעזרתן ערכים שנחשבים לטבעיים לשילוב בהוראת המתמטיקה כמו חשיבה הגיונית, דיוק, עקביות וסדר.

הנה מובאות אחדות מתוך עבודות הבית של התלמידים:

עכאבה כחיתא'קה - צורת אאלות

1. ה'יתרה הפלטה נגד ניסויים בפלטי חיים.
6 אנשים עלו אור הפלטה וזה הפלטה אס.
מהאנשים שהיו קודם.
כמה אנשים היו בהתחלה?

2. באורץ ישאול יש שביתת בתי-ספר.
לשביתה הצטרפו 250 מוסבר בתי הספר שגיו.
בשביתה בהתחלה עליו יש 50 בתי ספר בשביתה.
כמה בתי ספר היו בהתחלה?

3. האנודה הצטרף בעלי חיים מוסבר חיות שקל.
כאשר מוסבר החיות שהיה זהם בהתחלה.
עליו יש צלם גב בעלי חיים.
כמה בעלי חיים היו זהם בהתחלה?

4. (לשית צללים בל' בשב) של בית ספר יסודי הצטרפו.
עוד 50 ילדים. לזה הוסף עוד 250 מהילדים שהיו בהתחלה.
כמה ילדים היו בהתחלה?

בעיות עם מסר בחשבון

גלאידי כיגה 5'
מאי 2008

יש מספר קטן של שוטרי תנועה במשמרת הערב.
אם יצטרפו עוד 10 שוטרי תנועה למשמרת הערב, סך שוטרי
התנועה במשמרת הערב יגדל ב-25%.

כמה שוטרי תנועה יש במשמרת הערב?

בשתי כיתות ו' ילדים רבים מתנדבים לעזור לקשישים.
בכיתה ו' 1 כמות המתנדבים קטנה ב-40% מאשר ב-ו' 2. סך
המתנדבים בשכבה הוא 32.

כמה מתנדבים ב-ו' 1?

בחבורה מסוימת חלק מהחברים מעשנים. אם 6 מעשנים
מהחבורה יגמלו מעישון, אז יהיו 20% מעשנים פחות
בחבורה.

ארבעה חודשים לאחר מכן, התלמידים התבקשו לחבר בעיות מילוליות בעלות הקשר שיש בו חינוך לערכים שחשובים להם, בנושא התאמה בין שני משתנים. לתלמידים נמסר דף ההנחיות הבא:

כתבו סיפור משלכם שיהיו בו שני גדלים משתנים, ויש לו משמעות של חינוך לערכים שחשובים לכם (למשל: שמירה על איכות הסביבה, כבוד לזולת, תרומה לחברה, שמירה על הבריאות, חסכון במים, הימנעות מאלימות, הימנעות מאלכוהול, זהירות בדרכים). תארו את הקשר בין המשתנים בייצוגים שונים (גרף, טבלה, דיאגרמה), חברו בעיה עם ארבע תת-שאלות (סעיפים) וענו עליהן בעזרת חישובים או שיקולים מתמטיים.

אפשר להיעזר ברעיונות מתוך החוברת "שבילים" לכיתה ח בנושא: ייצוג של סיפורים בגרפים ובטבלאות ערכים, עמודים: 54-70. העבודה תהיה מהבחינה המתמטית בנושא התאמה בין שני משתנים (משתנה בלתי תלוי ומשתנה תלוי), מהבחינה הערכית - תוכן הבעיה יכוון לחינוך לערכים שיש להם משמעות בעיניך התלמיד.

להלן שלוש דוגמאות לחלקים מתוך העבודות שהוגשו:

הבעיה הראשונה חוברה על-ידי א' בנושא **חסכון במים**. העבודה כללה פתרונות מתמטיים מלאים, וצורפה לה רשימת המקורות לנתוני הבעיה באינטרנט (אתר הרשות הממשלתית למים וביוב, ואתר מנהלת הכנרת):

סיפור שיש בו שני גדלים משתנים:

אנו עומדים בפתחו של הסתיו ומקווים שיביא עמו חורף גשום במיוחד. מדינת-ישראל נשענת על מספר מקורות מים, כשמקור המים העילי הגדול ביותר הוא אגם כנרת. הכנרת מספקת כחצי מתצרוכת המים השנתית של המדינה. הכנרת ידועה בעולם כימה המתוקה הנמוכה ביותר בעולם – בגובה 212.5 מטרים מתחת לפני הים. הכנרת מקבלת את מימיה ממספר מקורות: נהר הירדן, שפך הנחלים: נחל עמוד, נחל מושיש, נחל אל-על ונחל יהודה. כמו כן מקבלת הכנרת חלק מהפשרת השלגים של רכש החרמון. הקו האדום הוא המונח, הבא לתאר את גובה המים המינימלי שמתחתיו מפסיקים לשאוב את מי הכנרת. גובה הקו האדום נקבע על-ידי שני דברים: ראשית – גובה המשאבות.

שנית – כמות המים המינימלית כדי לשמור על איכות המים כמים מתוקים. משאבות שאיבת המים מותקנות בתחתית הכנרת כדי להזרים מים למוביל הארצי. גובה המשאבות אינו בקרקעית הכנרת אלא בגובה נמוך – בערך 205 מטרים מתחת לפני הים. במידה שגובה מי הכנרת יורד מתחת לגובה זה, המשאבות אינן יכולות לפעול ולשאוב את מי הכנרת. הסיבה השנייה – בכנרת ישנם מים הנחשבים כמתוקים. גם במים מתוקים יש מינרליים. במקרה של שאיבה מופרזת נפגע האיזון של המינרלים לעומת המים ואז עלול להיווצר מצב, שבו כמות המים קטנה וכמות המינרלים גבוהה ולכן איכות המים נפגעת ולא ניתן להשתמש במים אלה לצריכה ביתית. בנוסף לקו התחתון קיים קו עליון. זהו גובה המפלס שבהגיע הכנרת אליו פותחים את סכר דגניה ומפנים את המים לעבר הירדן וים המלח כדי למנוע הצפה של הכנרת וסביבתה. הנתונים הבאים מציגים את מפלס הכנרת בחודשים של שנת 2007 ולצידם – גובהו של הקו האדום והקו העליון...

לאור הנתונים בטבלה, ענו על השאלות הבאות :

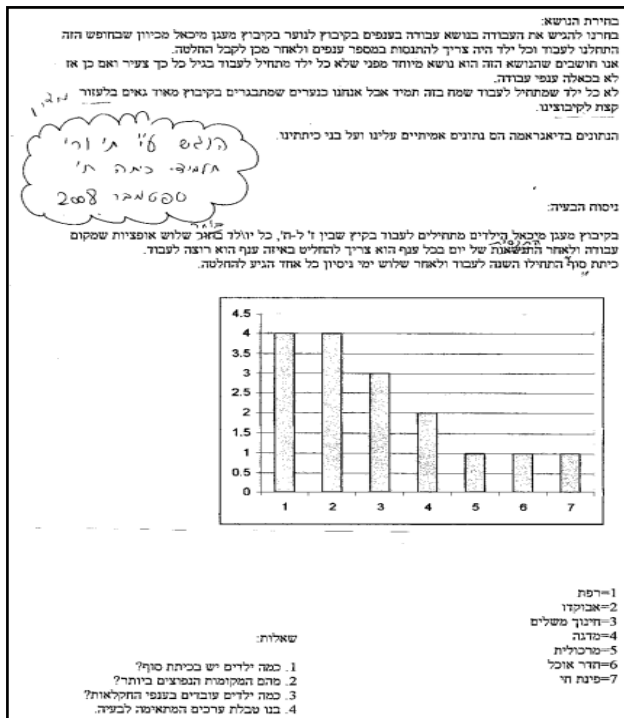
[1] נא לצייר את גרף מפלסי הכנרת בחודשים של שנת 2007 ואת הגרף של הקו העליון והקו התחתון.

[2] נא לכתוב פונקציות המתארות את הקו העליון ואת הקו התחתון.

[3] אם ידוע כי בתחילת אוגוסט 2008 היה מפלס הכנרת 208.8 מ' מתחת לפני הים וידוע כי מפלס הכנרת יורד ב 1.6 ס"מ ליום – כתוב פונקציה המתארת את מפלס הכנרת לחודש אוגוסט 2008. מה גובה הכנרת ב 31 באוגוסט 2008?

[4] נא לצייר על גבי הגרף קו ישר, המחבר את מפלס הכנרת בחודש ינואר לחודש דצמבר. קו זה נקרא $f(x)$, כאשר x הוא החודש. קו זה מתאר את ממוצע מפלס הכנרת לשנת 2007. כתבו פונקציה והשלימו טבלת ערכים המתאימים לקו.

(תלמיד כיתה ח', מתמטיקה ברמה מוגברת, ספטמבר 2008)

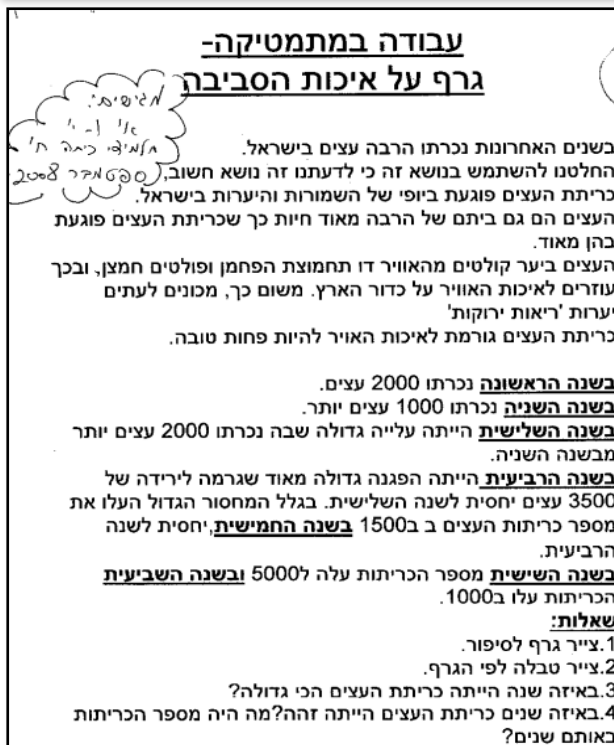


הבעיה השנייה חוברה על-ידי שני תלמידים (ת' ו-ר') שגרים בקיבוץ, והיא עוסקת בערך ה"עבודה". תלמידי הקיבוצים בכיתה ח' נדרשים לעבוד בתקופת החופש הגדול באחד מענפי הקיבוץ. התלמידים שהתבקשו לחבר בעיה בנושא "שיש לו משמעות של חינוך לערכים שחשובים להם", בחרו בנושא זה, וכפי שעולה מסיפור הבעיה התלמידים הם היו מאוד גאים לתרום לקיבוץ בעבודתם.

הבעיה השלישית חוברה על-ידי שני תלמידים (א' ו-י') בנושא הימנעות מכריתת עצים הקשור לשמירה על איכות הסביבה.

שלא כמו בפעילות בנושא אחוזים, בפעילות זו כל התלמידים (32 תלמידים) חיברו בעיות שנמצא בהן הקשר המאפשר חינוך לערכים חברתיים. כלומר, נמצאה עלייה ביכולת התלמידים לחבר בעיות בהקשר חברתי.

ניתוח השאלות שהתלמידים חיברו העלה כי הייתה עלייה יחסית במספר הבעיות שעסקו בתרומה ועזרה לזולת מ-28% ל-47%, הייתה עלייה יחסית במספר הבעיות שעסקו בשמירה על איכות הסביבה מ-23%



ל-47%, הייתה ירידה יחסית במספר הבעיות שעסקו בצרכנות נבונה מ-10% ל-6%.

התלמידים הגישו עבודות מודפסות עם תשובות מפורטות הן בנושאים המתמטיים והן בנושאים הערכיים. ניכר היה שהעבודות היוו בעבור תלמידים רבים דרך לביטוי עצמי תוך מיצוי היכולת.

נמצא כי המחווה שחובר להערכת תוצרי הפעילות, היווה תמריץ לטיפוח של שאיפה למיצוי היכולות, חריצות, יוזמה ורצון להתמודד עם אתגר. התלמידים ידעו מה נדרש מהם והתאמצו לקראת השגת המטרות שהוגדרו במחווה. המחווה נועד לגרום להרגשה של שליטה מסוימת על קביעת הערכת העבודה ובכך תרם לביטחונם העצמי של התלמידים. כמו כן, המוטיבציה לבדוק את התוצר מול המחווה באה לעורר גישה ביקורתית אצל התלמידים כלפי עבודותיהם.

נדן ניסוח מחדש של עמדות ערכיות

בעקבות הדיון הערכי שהתקיים בהקשר לבעיה המודגמת בראיות לשיטה [א] לעיל, התלמידים התבקשו לסכם מחדש את עמדותיהם הערכיות. הניסוח מחדש של העמדות הערכיות נעשה כחלק מעבודת הבית על-ידי בחירת התשובות המועדפות עליהם מתוך מגוון העמדות שעלו בכיתה לשאלות ההבהרה, ואלה נמסרו להם בתוך טבלה בת שתי עמודות. בעמודה האחת נכתבו תשובות התלמידים ל"גמול שנתתי לחבר תמורת עזרה שקיבלתי", ובשנייה תשובותיהם ל"גמול שקיבלתי מחבר תמורת עזרה שנתתי".

הגמול שנתתי לחבר תמורת עזרה שקיבלתי	הגמול שקיבלתי מחבר תמורת עזרתי שנתתי
הפכנו להיות חברות טובות	חיזקנו את החברות בינינו
לאחר שהתלמיד החלים הוא אמר לי תודה וחייך וזהו הגמול האמיתי בשבילי.	הגמול שלי לעזרה זה תחושה טובה של מעשה טוב ועזרה לחבר.
הודיתי לה מקרב לב שהיא עזרה לי	חבר שלי פשוט אמר תודה ונהניתי לעזור זה היה הגמול – ההנאה שבעזרה.

התברר כי כמחצית מהתלמידים שינו את עמדותיהם בעקבות החשיפה לתשובות השונות. ההסברים שנתנו התלמידים לשינויים שחלו כללו נימוקים שהתבססו על ערכים, כמו למשל:

תלמיד א: "בעצם אני חושב שמספיק להגיד 'תודה'. לא מוכרחים לתת מתנה."
תלמיד ב: "עכשיו אני מבין שההרגשה הטובה שהייתה לי בעקבות זה שעזרתי, היא מספיקה."

היתרון בהעברת המשימה לבית הוא בכך שהדבר החזיר את התלמידים לחשיבה אישית על הדיון שהתרחש וניסחו מחדש של עמדותיהם הערכיות, מבלי שהדבר לקח זמן מתוך השיעור בכיתה.

דיון בממצאים וסיכום

ממצאי מחקר הפעולה המתוארים במאמר זה מאששים את טענת ההיתכנות של שילוב החינוך למגוון רחב של ערכים בהוראת נושאים במתמטיקה. אף שהמורה-החוקרת פעלה בשלושת הממדים: הרגשי,

ההתנהגותי והשכלי, התמקד המחקר בממד השכלי ובהקשר לתכנית הלימודים של חטיבת הביניים במתמטיקה.

במהלך המחקר, המורה-החוקרת הייתה מחויבת באורח רציף ועקבי במשך כשנה וחצי כלפי בדיקת ההיתכנות של שילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה. למותר לציין שכמו כל עניין שיש לו חשיבות חינוכית, עניין זה הצריך הקדשת זמן. הזמן שהוקדש לכך התחלק בין זמן-הכנה שהוקדש להכנת הפעילויות, בדיקת העבודות והערכתן, בהיקפי זמן של בין שלוש לחמש שעות שבועיות, לבין זמן-יישום בכיתת המחקר בהיקפי זמן הוראה שונים – בין 10 דקות בשיעור לבין שני שיעורים רצופים. עם זאת, ממצאי מחקר הפעולה מצביעים על כך שעל אף הקדשת הזמן הנזכרת, אפשר לשלב חינוך לערכים בהוראת המתמטיקה בכל אחד מנושאי הלימוד של כיתה ח', מבלי לפגוע בהישגי התלמידים ובקצב הוראת תכנית הלימודים.

שילוב החינוך לערכים אישיים בהוראת המתמטיקה, ביניהם: דיוק, עקביות, סדר, חשיבה ביקורתית, ספקנות, סקרנות, אומץ-אינטלקטואלי, נמצא כטבעי להוראת המתמטיקה. הוא הכרחי כדי שהוראת המתמטיקה תשיג את יעדיה בתחום הקניית הידע המתמטי והחשיבה המתמטית. יצוין, בדרך אגב, כי במחקר מקדמי נמצא כי מורים למתמטיקה המשלבים בהוראת חינוך לערכים טבעיים אלה, עושים זאת בדרך-כלל באופן בלתי מודע ומבלי משים.

שילוב החינוך לערכים חברתיים בהוראת המתמטיקה, ביניהם: שוויון, צדק חברתי, עזרה לזולת, הימנעות מאלימות, כבוד לזולת וסובלנות, אשר נמצא כפחות טבעי להוראת המתמטיקה, אינו הכרחי לשם השגת המטרות התכניות של הוראת המתמטיקה על פי תכנית הלימודים. שילובם של ערכים אלה בהוראת המתמטיקה לא נתפס בקרב רוב המורים למתמטיקה כחיוני. להפך, עשייה כזו נתפסת על-ידי מורים רבים למתמטיקה כמיותרת, ומציינים כי היא כרוכה בשלושה קשיים עיקריים: [1] דורשת זמן הכנה נוסף; [2] גוזלת זמן הוראה יקר; [3] מסיחה את דעתם של התלמידים מלימוד התכנים המתמטיים (אדרי ומובשוביץ-הדר, 2013). למרות התפיסות הרווחות הללו, עלה בידי המורה-החוקרת לשלב חינוך לערכים חברתיים בהוראה, וזאת אף מבלי לפגוע בהישגי התלמידים בלימוד המתמטיקה ותוך כיסוי מלא של תכנית הלימודים. המורה החוקרת מצאה כי שילוב ביועין של ערכים אלה שהם פחות טבעיים לשילוב בהוראת המתמטיקה, השפיע הן על ההוראה שלה והן על הלמידה של תלמידה.

לשם יישום הרעיונות שהועלו במאמר זה לשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה על-ידי ציבור המורים למתמטיקה כולו, מוצעים פתרונות אפשריים לשלושת הקשיים הנזכרים:

[1] בספרי הלימוד ראוי שיופיעו בעיות בעלות הקשר המאפשר להוסיף להן שאלות הבהרה אשר יציפו דיון ברמה הערכית. זמינותן בספרי הלימוד של בעיות מתאימות כאלו יחד עם שאלות ההבהרה המתבקשות מהן, תתרום לצמצום בזמן ההכנה הנדרש מהמורים לצורך שילוב החינוך לערכים בהוראה. חלק מהבעיות המופיעות בספרי הלימוד ראוי שיהיו בעלות הקשר חברתי ועדיף שתתבססנה על נתוני אמת.

[2] הכשרת פרחי-הוראה והתנסותם ביישום השילוב של החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה במהלך תקופת ההכשרה, תיעל את התנהלותם בבוא העת בכיתה, ותאפשר חיסכון בזמן ההוראה הנדרש לכך. זאת הודות לכך שיסגלו לעצמם את ההרגל ליישום השילוב במינון הנכון ובזמן הנכון, כך שהדבר לא יפגע ברצף ההוראה, בקשב התלמידים או בהבניה נכונה של תפיסת המושגים במתמטיקה.

[3] השתלמויות למורים המשרתים כבר במערכת, שיוקדשו לנושא יעצימו את המורים בנטילת האחריות המוטלת עליהם לשלב חינוך לערכים בהוראת המקצוע. גם כאן, כפי שהומלץ לעיל לגבי פרחי ההוראה, חשוב לפתח את המודעות וההכרה של המורים לאפשרות לשלב סוגיות ערכיות באורח שגרתי תוך הקפדה על מינון שיאפשר התקדמות בתכנית הלימודים והתפתחות הידע של התלמידים בתכנים המתמטיים שעל הוראתם הם מופקדים. המינון של שילוב החינוך לערכים בהוראת המקצוע נתון בידי המורה. אין להימנע מהסבת תשומת לבם של התלמידים אל עבר הנושאים החברתיים הנובעים מהקשרי הבעיות המתמטיות. להפך, תחת ההסתייגות שתוארה כאן לעיל, יש לטפח בקרב התלמידים חשיבה ביקורתית הכוללת הקשרים רחבים כולל ההקשר החברתי. חשיבותה של גישה זו בהוראה משתמעת מיעדי החינוך המוגדרים בחוק החינוך, ראוי ליישם אותה בהוראת כל הדיסציפלינות ובפרט בהוראת המתמטיקה. מורה שיעשה כך, יתרום לחינוכו של התלמיד כאדם בעל כישורי חשיבה כמותית וביקורתית, המקשרת בין הנתונים המספריים המציפים אותנו כאזרחים בחברה דמוקרטית-חופשית לבין המשמעויות שיש להם בהקשרים החברתיים.

ולבסוף, ברמת היישום, מחקר הפעולה הוכיח היתכנות של החינוך לערכים בד בבד עם הוראת נושאים מתמטיים. רמת התוצר, כלומר, השפעת שילוב החינוך לערכים על התנהגויות התלמידים לא הייתה במוקד המחקר הנוכחי, מפני שחינוך לערכים הוא משימה ארוכת טווח. בעתיד, במחקר רב-שנתי יהיה חשוב להתמקד בהתנהגויות התלמידים לאור הערכים שרכשו. עם זאת, מהמחקר הנוכחי עולה כי פעילויות המשלבות בתוכן חינוך לערכים הביאו למודעות התלמידים לערכים רבים, ואף הציגו את המתמטיקה כרלוונטית לתלמידים ובכך תרמו לחיבוב המקצוע עליהם.

בזהירות המתבקשת ממגבלות המחקר, הנשען בחלקו על הבעת דעות על-ידי הנחקרים, הכרוכה בסיכון של רצייה חברתית, המסקנה העולה מהתוצאות היא כי אפשר למצות את הפוטנציאל הקיים בהוראת המתמטיקה כדי לתרום לחינוכו הערכי של התלמיד.

רשימת מקורות

- אדר, ל' (1976). יסודות פסיכולוגיים של החינוך לערכים. תל-אביב: צ'ריקובר.
- אדרי, י' ומובשוביץ-הדר, נ' (2013). מורים למתמטיקה מתגייסים לחינוך לערכים. דפים, 55, 90-117.
- אלוני, נ' (2005). כל שצריך להיות אדם: מסע בפילוסופיה חינוכית: אנתולוגיה. תל-אביב: הקיבוץ המאוחד ומכון מופ"ת.
- בובר מ' (1963). בסוד שיח: על האדם ועמידתו נוכח ההווה (מהדורה שנייה). ירושלים: מוסד ביאליק.
- בן-יהודה, ב' (1962). מטרות ההוראה של המתמטיקה. בתוך הלכה ולמעשה בחינוך התיכון: קובץ מאמרים מוקדשים לבעיות בית-הספר התיכון העיוני (עמ' 29-45). ירושלים: בית-הספר התיכון ליד האוניברסיטה העברית.
- גורדון, ד' (1997). בעיית החינוך לערכים הנדחק לקרן זוית. בתוך י' דנילוב (עורכת), תכנון מדיניות החינוך: גיירות עמדה התשל"ה (כרך א, עמ' 5-8). תל-אביב: משרד החינוך התרבות והספורט.
- דוברת, ש' (2005). התוכנית הלאומית לחינוך [דו"ח דוברת]. אוהור מתוך http://www.nrg.co.il/images/stuff/news/Dovrat_05.01.05.pdf
- דיקמן, נ' (2005). כתבת יומן-קורס אישי, ככלי לשיקוף ולקידום תהליכי למידה של מורים במהלך הכשרתם לתפקידי הנחייה כמורי-מורים למתמטיקה (עבודת דוקטור). הטכניון, חיפה.
- הרן, ג' (2003). סולם הערכים. ירושלים: פרינטיב.
- וייס, ר', בן-אברם, ח', עין-דור, י', קביליו, ע' ושמיר, ח' (2003). טיפוח תרבות של אכפתיות. תל-אביב: מכון מופ"ת.
- וינר, ש' (1999). הוראת מתמטיקה וערכים: חינוך, שקרים ווידאו. בתוך מ' ברלב (עורכת), ערכים וחינוך לערכים (סוגיות בהשתלמויות מורים, ח, עמ' 213-231). ירושלים: משרד החינוך והאוניברסיטה העברית.
- יזהר, ס' (1990). שני פולמוסים: פולמוס הספרות ופולמוס החינוך. תל-אביב: זמורה ביתן.
- כנסת ישראל (1953). חוק חינוך ממלכתי, התשל"ג-1953. אוהור מתוך http://www.knesset.gov.il/review/data/heb/law/kns2_education.pdf
- כנסת ישראל (2000). חוק חינוך ממלכתי (תיקון מס' 5), התשל"ס-2000. אוהור מתוך http://www.knesset.gov.il/laws/data/law/1729/1729_2.pdf
- ליבוביץ, י' (1988). הערות לפרשיות השבוע. ירושלים: אקדמון.
- מובשוביץ-הדר, נ' (2007). מודלים חלופיים לשילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה [מסמך גלויה להרצאה בסדנת מפתחים בניסוי שילוב החינוך לערכים בהוראת המתמטיקה, סוכות תשס"ח]. חיפה: "קשר-חם" – המרכז לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי, הטכניון, הוצאה פנימית.
- מובשוביץ-הדר, נ' ווב, ג' (2002). אחד שווה אפס ועוד הפתעות מתמטיות (ס' שפירא, מתרגמת). חיפה: "קשר חם" – המרכז לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי, הטכניון.
- מינקוביץ, א' (1967). בעיות פסיכולוגיות בחינוך לערכים. החינוך, ה-1. אוהור מתוך <http://www.daat.ac.il/DAAT/chinuch/minkovits-2.htm>
- מסלוביט, נ' (1987). הקשר בין רקע הבית והסביבה הלימודית בבית-הספר העל-יסודי, לבין תחומים שונים במבנה הערכים של המתבגרים (עבודת דוקטור). אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
- משרד החינוך (2008). התחדשות תהליכי ההוראה, הלמידה וההערכה בבית-הספר העל-יסודי. חוזר המנהל הכללי: הוראות קבע, סט/1(א), 35-3.
- משרד החינוך התרבות והספורט (1996). דמות הבוגר הרצוי. חוזר המנהל הכללי: חוזר מיוחד, כ, 9.
- פלא, ח' וברנהולץ, י' (2003). ניהול דיוני דילמה לקידום החשיבה המוסרית. ירושלים: משרד החינוך התרבות והספורט.
- צבר בן-יהושע, נ' (1990). המחקר האיכותי בהוראה ובלמידה. גבעתיים: מסדה.
- רוטנשטריך, נ' (1964). סוגיות בחינוך: בשני שערים. ירושלים: בית-הספר לחינוך של האוניברסיטה העברית ומשרד החינוך והתרבות.
- שיינברג, ש' (1999). התנגדות לחינוך לערכים – דגמי שיח ביקורתי מודרני. בתוך מ' ברלב (עורכת), ערכים וחינוך לערכים (סוגיות בהשתלמויות מורים, ח, עמ' 45-79). ירושלים: משרד החינוך והאוניברסיטה העברית.

- שכטמן, צ' (1980). הוראת תכנים עיוניים בעזרת תהליך "הבהרת ערכים". עיונים בחינוך, 28, 135-142.
- שכטמן, צ' (1987). חינוך לערכים דמוקרטיים בבית הספר: תכנית התערבות חינוכית על פי התיאוריה של הבהרת ערכים (Values Clarification). ירושלים: משרד החינוך והתרבות.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (2008). Mathematics teaching and values education – An intersection in need of research. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 231-238). Melbourne, Australia: Springer.
- Bloom, B. S., Karthwohl, D. R., & Masia, B. B. (1964). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals* (Handbook II: Affective domain). New York: David McKay.
- Capobianco, B., Horowitz, R., Canuel-Browne, D., & Trimarchi, R. (2004). Action research for teachers. *The Science Teacher*, 71, 48-53.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2003). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (2nd ed. pp. 1-45). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Ernest, P. (2004). What is the philosophy of mathematics education? *Philosophy of mathematics education journal*, 18. Retrieved from <http://www.ex.ac.uk/~PERnest/pome18/contents.htm>
- Ernest, P. (2009). What is 'First Philosophy' in mathematics education? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25-42). Thessaloniki, Greece: PME.
- Feldman, A., & Minstrell, J. (2000). Action research as a research methodology for the study of the teaching and learning of science. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.429-455). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance*. Evanston, Illinois: Row, Peterson.
- Frankenstein, M. (1998). Goals for a critical mathematical literacy curriculum. In E. Lee, D. Menkart, & M. Okazawa-Rey (Eds.), *Beyond heroes and holidays: A practical guide to K-12 anti-racist, multicultural education and staff development* (pp. 306-313). Washington, DC: Network of Educators on the Americas.
- Gutstein, E., & Peterson, B. (Eds.). (2006). *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers*. Milwaukee, Wisconsin: Rethinking Schools Publication.
- Kohlberg, L., Levine, C., & Hwer, A. (1983). *Moral stages: A current formulation and response to critics*. Basel: Krager.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematics discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage Publication.
- McNiff, J. (1998). *Action research for professional development: Concise advice for new action researchers*. Mississauga, ON: Ontario Public School Teachers' Federation.
- Neuman W. L. (2006). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches* (6th ed.) Boston: Allyn & Bacon.
- Noddings, N. (1984). *Caring: A feminine approach to ethics & moral education*. Berkeley: University of California Press.
- Osler J. (2007). *A guide for integrating issues of social and economic justice into mathematics curriculum*. Retrieved from <http://www.radicalmath.org/docs/SJMathGuide.pdf>
- Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Raths, L. E., Harmin, M., & Simon, S. B. (1987). Selection from 'values and teaching'. In J. P. E. Carbone (Ed.), *Value theory and education* (pp. 198-214). Malabar, FL: Krieger Press.
- Rogers, C. (1969). *Freedom to learn*. Columbus, Ohio: C. E. Merrill Pub. Co.
- Rokeach, M. (1973). *The nature of human values*. New York: Free Press.
- Rosenberg, M. J. (1960). An analysis of affective-cognitive consistency. In M. J. Rosenberg, C. I. Hovland, W. J. McGuire, R. P. Abelson, & J. W. Brehm (Eds.), *Attitude organization and change: An analysis of*

consistency among (pp. 15-64). New Haven, CT: Yale University Press.

Taplin, M. (2009). *Teaching values through a problem solving approach to mathematics*. Hong Kong: Sathya Sai Baba Center of Hong Kong. Retrieved from http://www.mathgoodies.com/articles/teaching_values.html

Vinner, S. (2006). Some missing dimensions in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (The International Handbook of Mathematics Teacher Education, 2, pp. 305-320). Rotterdam: Sense Publisher.

Vinner, S. (2009). Mathematics education and values. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 43-46). Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki.



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הק'מה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מופ' לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החוזרים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממחן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב.



ד"ר יעל אדרי

בוגרת הטכניון. עבדה בתחום מערכות המידע בתעשייה. רכזה את האולמפידיע של שנת 2003 בנושא הצפנה, בנוסף הקימה מעבדת הצפנה באגף ההוראה של המוזיאון למדע, והשתתפה בכתיבת ספר בנושא. חברה בוועדה הארצית של משרד החינוך לקידום החינוך לערכים בהוראה, יועצת אקדמית בתחום שילוב הערכים בהוראה ומלווה בית-ספר ניסויי בגן ניסוי של משרד החינוך, בניסוי שמטרתו שילוב החינוך לערכים בכל התכנים הנלמדים בבית-הספר. משנת 2006, מורה למתמטיקה בבית-הספר העל-יסודי, המשותף חוף הכרמל, שבקיבוץ מעגן מיכאל.

שיתוף בתהליך קבלת החלטות - המקרה של תלמידי כיתות ט'

אילנה לביא, האקדמית עמק יזרעאל ע"ש מקס שטרן

אורלי צרפין, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך

תקציר

במחקר זה בחנו את ההשפעות של מתן האפשרות לתלמידי מתמטיקה בכיתה ט' להשתתף בתהליך קבלת החלטות בנוגע לרמת הלימוד, שבה ישובצו במתמטיקה בכיתה י'. החלטות שנוגעות לתפיסת היכולת העצמית שלהם בנוגע ליכולתם המתמטית, מטרות הלמידה שלהם ואווירת הלימוד בכיתה. במהלך כיתה ט' התלמידים למדו שלושה נושאים מתמטיים בשתי רמות לימוד (רגילה ומורחבת) ובסוף כל נושא כל תלמיד היה רשאי לבחור באיזו רמה הוא מעוניין להיבחן. בסוף כל בחינה התבקשו התלמידים למלא שאלון שהכיל שאלות הנוגעות לסיבות אשר בגינן הם בחרו ברמה שנבחנו בה. מניתוח התוצאות עולה שהתלמידים למדו לנתב עצמם על פי יכולתם המתמטית; מטרות הלימוד שלהם היו בעיקר מטרות ביצוע ושליטה, והאווירה הכיתתית השתנתה לחלוטין. ביטויים של תסכול ואכזבה שהיו שכיחים בכיתות ט' שלמדו אחת החוקרות שקדמו לכיתה הניסוי, לא נשמעו בכיתה הניסוי.

מילות מפתח: אוטונומיה; הכוונה עצמית; יעילות עצמית; תפיסת היכולת המתמטית.

הבעיה ושאלות המחקר

אין עוררין על כך שאחד המקצועות הקשים הנלמדים בבית-הספר הוא מתמטיקה. על פי הישגיהם במתמטיקה התלמידים מחולקים לרמות לימוד בכיתה י': 3, 4 ו-5 יח"ל. תהליך החלוקה מתבסס על הישגי התלמידים במתמטיקה בחטיבת הביניים, אך השנה המשמעותית יותר לקביעת רמות הלימוד היא שנת הלימודים בכיתה ט'. אף שתהליך החלוקה לרמות נעשה בכובד ראש ומבוסס על שיקולים מקצועיים וענייניים של צוות המורים, תלמידים רבים מאוכזבים מהרמה ששובצו אליה וקשה להם לקבל את ההחלטה שמתקבלת בלי המעורבות שלהם. משיחות בלתי פורמליות של אחת החוקרות עם תלמידים במהלך השנים, עולה כי אחת הסיבות לאכזבה נובעת מהרגשתם שאין להם יכולת השפעה על תהליך קבלת ההחלטה ושלא ניתנת להם הזדמנות לשפר את הרמה המתמטית שלהם במהלך כיתה ט'. כיוון שתהליך המיון לרמות לימוד משפיע גם על האפשרויות שפתוחות לפנייהם בעתיד, הוא הופך להיות משמעותי יותר. אף שהשיבוץ בפועל מתבצע רק בכיתה י', ההישגים של התלמידים בכיתה ט' קובעים את החלוקה העתידית, לכן התלמידים מביעים רגשות של תסכול מכך שהם לא משתתפים

בתהליך קבלת ההחלטות. האווירה הכיתתית הופכת להיות לא נעימה והמתח של התלמידים מתבטא בביטויים של תסכול, כעס וחוסר משמעות. תסכול התלמידים גורם להם לפתח יחס שלילי כלפי מתמטיקה והאווירה הלא נעימה בכיתה משפיעה גם על המורה עצמו.

מטרת המחקר ושאלות המחקר

במחקר זה נבחנו ההשפעות של מתן אוטונומיה לתלמידים להשתתף בתהליך קבלת החלטות בנוגע לתהליך המיון שלהם לרמות לימוד במתמטיקה על תפיסתם את היכולת שלהם במתמטיקה. שאלות המחקר היו:

1. מה אפשר ללמוד על אודות תפיסת התלמידים את היכולת שלהם במתמטיקה כתוצאה משיתופם בתהליך קבלת ההחלטות?
2. מה אפשר ללמוד מההצדקות שנתנו התלמידים לבחירת הרמה שבחרו?
3. מהן מטרות הלמידה של התלמידים?
4. כיצד השפיע מתן האוטונומיה להשתתף בתהליך קבלת ההחלטות על האווירה הכיתתית?

מהלך המחקר

כדי להשיב על שאלות המחקר, יישמנו את התהליך הבא: במהלך שנת הלימודים של כיתה ט' שיעורי המתמטיקה נלמדו בשתי רמות: רמה רגילה (המקבילה ל-3 יח"ל) ורמה מורחבת (המקבילה ל-4-5 יח"ל). המבחן שהתקיים בסיומו של כל נושא הוצע לתלמידים בשתי רמות (רגילה ומורחבת) והתלמידים יכלו לבחור באיזו רמה הם מעוניינים להיבחן. במהלך שנת הלימודים נלמדו שלושה נושאים בשיטה שהוצגה לעיל ובסוף כל נושא התקיימה בחינה. כל בחינה ניתנה בשתי גרסאות: רגילה ומורחבת, ולתלמידים ניתנה האפשרות לבחור באיזו גרסה להיבחן. ההבדל בין שתי הגרסאות ניכר ברמת הקושי של המשימות בבחינה. בעוד שבגרסה הרגילה התבקשו התלמידים לגלות בקיאות בסיסית בנושאים שנבחנו עליהם, הגרסה המורחבת כללה משימות שדרשו הבנה מעמיקה של נושאי הלימוד. לתלמידים ניתנה אפשרות להחליף את גרסת הבחינה במהלך רבע השעה הראשונה של הבחינה (משך הבחינה הכולל היה 90 דקות). אחרי כל בחינה התבקשו למלא שאלון, אשר כלל שאלות המתייחסות לסיבות שבגינן בחרו להיבחן ברמה זו או אחרת, וכמו כן שאלות המתייחסות לתפיסת היכולת שלהם במתמטיקה. תהליך זה חזר על עצמו שלוש פעמים במהלך שנת הלימודים.

רקע תאורטי

התפיסה העצמית של יכולת מתמטית של תלמידים נובעת מכמה מקורות שונים: מוטיבציה, יעילות עצמית, הכוונה עצמית ותורת הייחוס הסיבתית. בהמשך מוצג רקע תאורטי תמציתי של הנושאים הנזכרים לעיל. בנוסף, מצורף גם רקע תאורטי תמציתי הנוגע לאווירה כיתתית.

ההכוונה העצמית של תלמידים בלמידת מתמטיקה

תפיסות של לומדים בנוגע ליכולת ולמוכנות שלהם להתמודד עם למידת מתמטיקה מושפעות מגורמים שונים אשר במקרים רבים משפיעים ומושפעים זה מזה. אחד מגורמים אלו נוגע להכוונה העצמית שלהם במתמטיקה אשר מדגישה את התפיסה העצמית של הפרט ודפוסי ההתנהגות שלו (Bandura, 1985; Deci & Ryan, 1994; 1986). ההכוונה העצמית מוגדרת כתהליך שבמהלכו הלומד מציב לעצמו יעדים ללמידתו ומבצע מהלכים של פיקוח, בקרה ושליטה במחשבותיו, במוטיבציה שלו ובהתנהגותו כדי להגשים אותם (Jarvela & Jarvenoja, 2001; Zimmerman, 2000; Pintrich, 2000). פינטריך (Pintrich, 2000) זיהה ארבע הנחות יסוד הנמצאות בבסיסה של התאוריה להכוונה עצמית. שתיים מהנחות אלו רלוונטיות למחקר הנוכחי. הראשונה היא הנחת *הבקרה*, אשר לפיה ללומד יש את הפוטנציאל לבקר, לשלוט ולפקח על מאפייני הסביבה הלימודית שלו כמו על מאפיינים אישיים, למשל מוטיבציה. השנייה היא הנחת *המטרה* הטוענת כי הלומד יכול להציב לעצמו מטרות, אשר אותן הוא רוצה להשיג בלימודיו, הוא יכול לפקח על תהליך ההתקדמות לקראת השגתן ולווסת ולהתאים את מאמציו, את חשיבתו, את מידת ההנעה שלו ואת התנהגותו כדי להגיע אליהן.

תאוריית ההכוונה העצמית מצביעה על שלושה צרכים בסיסיים של האדם: הצורך באוטונומיה, הצורך בקשר והצורך בתחושת מסוגלות (Deci & Ryan, 2002). הצורך באוטונומיה הנו צורך של התלמיד להרגיש שהפעילויות שהוא מבצע מבטאות את ערכיו ואת נטיותיו ותואמות לצרכיו. האוטונומיה מתפתחת ומתעצמת כאשר קיימת תמיכה של המבוגרים המשמעותיים בחיי התלמיד במרחב האוטונומי שלו ובחופש הבחירה והמחשבה שלו. הצורך בקשר הוא צורך של האדם להרגיש שיש אנשים שמקבלים ומחבבים אותו ושהוא ראוי לאהבה, ובנוסף להרגיש חלק מקבוצה הנותנת תחושת שייכות, ביטחון וזהות. הצורך בתחושת מסוגלות הנו צורך הפרט לתפוס עצמו כבעל יכולת לבצע משימות ולהשיג מטרות שהציב לעצמו. יש הרואים בסיפוק הצרכים תנאי הכרחי להתפתחות רגשית וקוגניטיבית תקינה של הפרט ואת התנהגותו כמונעת מתוך הרצון והשאיפה לספק אותם (Ryan & Deci, 2000).

תאוריית הייחוס הסיבתי

החלטות כגון באיזו רמת היבחנות לבחור נעשות לאחר הבנת הסיבות אשר בבסיס התנהגות זו. תאוריית הייחוס הסיבתי עוסקת בנושא של כיצד אנשים מבינים את הסיבות להצלחות והכישלונות שלהם. בהקשר הלימודי, תורת הייחוס הסיבתי קובעת כי תלמיד מייחס את הסיבה לתוצאות של הביצועים שלו (Weiner, 1986, 1992). יתרה מזו, הפעילות הבאה של התלמיד והמוטיבציה מושפעים מהסיבות המיוחסות יותר מאשר התוצאה עצמה.

ההתייחסות לייחוס הסיבתי נעשית על פי שלושה ממדים אשר שניים מהם רלוונטיים למחקר הנוכחי. הראשון הוא מיקום הסיבה מבחינת תפיסת התלמיד שיכול להיות פנימי או חיצוני. כלומר התלמיד עשוי לראות את הסיבה להצלחתו או כישלונו כתלויה בו כמו ביכולת שלו, במידת ההשקעה של בפעילות או כתלויה בגורמים חיצוניים כמו המשימה הייתה קשה/קלה מדי, איכות ההוראה ועוד.

הממד השני הוא ממד השליטה והוא מתייחס למידה שבה התלמיד חש כי הוא יכול לשלוט ולהשפיע על הסיבות להצלחה/כישלון שלו.

ייחוס הסיבות מתרחש לרוב כאשר התוצאות חשוכות ללומד או שהן בלתי צפויות או שליליות (Weiner, 1992). תלמידים נוטים לייחס הצלחה כאשר הגורמים הם אישיים כמו יכולת ומאמצים וכישלון – כאשר הגורמים הם סביבתיים. הסיבה לכך עשויה להיות בהנחה שבסיטואציות בעלות חשיבות לתלמיד, קיימת מעורבות רבה של הערכה עצמית ושל הערכה חברתית (Stephanou, 2006).

מתמטיקה ומסוגלות עצמית

האמונות של התלמידים במסוגלות העצמית שלהם משפיעות על הביצועים הלימודיים שלהם במספר דרכים (Pajares, 2002). בנדורה (Bandura, 1997) זיהה ארבעה מקורות שמהם נובעת תחושת המסוגלות אשר שניים מהם רלוונטיים למחקר הנוכחי:

המקור הראשון נוגע לניסיון קודם והביצועים מהעבר. חוויות של הצלחה נוטות להעלות את תחושת המסוגלות העצמית, ולהפך – כישלונות חוזרים יחלישו אותה. מתן האפשרות לתלמידים לבחור את רמת ההיבחנות שלהם מאפשר להם להוציא את עצמם מהמצב הקבוע של כישלונות חוזרים. הול ופונטון (Hall & Ponton, 2005) מצאו שניסיון קודם וכישלונות במתמטיקה מכתיבים, בדרך כלל, את דעות התלמידים בנוגע לתפיסת היכולת העצמית שלהם במתמטיקה וכמו כן את האופטימיות שלהם בנוגע לאפשרויות הקריירה העומדות לפניהם.

המקור השני הוא העוררות הפיזית והרגשית של הלומד, אשר מבטאת את היכולת של הלומד לסיים משימות. לדוגמה, לחץ הוא ביטוי של עוררות רגשית, אשר יכולה לגרום לחוסר נוחות שיכול להסתיים בירידה של תחושת המסוגלות העצמית של הלומד. אילוץ התלמידים להתמודד עם בחינות ברמה מורחבת שהיא מעבר ליכולת המתמטית שלהם יכול להסתיים בעוררות רגשית שלילית כמו תסכול וחרדה. נמצא כי תלמידים בעלי רמה גבוהה של תחושת מסוגלות עצמית חיובית מסוגלים להתמודד עם משימות אקדמיות מורכבות ומשתמשים באסטרטגיות פתרון מגוונות טוב יותר מאלו שאינם מאמינים ביכולות שלהם (Pajares & Graham, 1999). מחקרים מצאו כי למסוגלות עצמית ולשימוש באסטרטגיות של הכוונה עצמית יש השפעה הדדית זה על זה. אמונות של מסוגלות עצמית גבוהה מביאות לעלייה בשימוש של אסטרטגיות להכוונה עצמית (Usher & Pajeras, 2008) והשימוש באסטרטגיות להכוונה עצמית יכול להביא להעלאה באמונה במסוגלות עצמית והישגים אקדמיים (Bouffard-Bouchard, Parent & Larivee, 1991).

מושג נוסף המתקשר לנושא תחושת המסוגלות הוא התפיסה העצמית (self-concept) שזאת תפיסת הפרט את עצמו בכל ההיבטים (לימודיים, רגשיים, חברתיים ופיזיים). בדומה לממצאים של מסוגלות עצמית ומתמטיקה, חוקרים גילו קשר חיובי בין תפיסת האני במתמטיקה לבין הביצועים במתמטיקה והקשר הזה נמצא קיים במדינות שונות (Pajares & Graham, 1999). הממצאים הראו שתלמידים בעלי תפיסת אני גבוהה במתמטיקה מפגינים מעורבות גבוהה, התמדה והשקעת מאמצים במשימות

הקשורות למתמטיקה, יותר מתלמידים בעלי תפיסה עצמית נמוכה במתמטיקה. אנחנו סבורים שתלמידים בעלי תפיסת מסוגלות גבוהה ינהגו באופן שונה מאשר אלו שתפיסת המסוגלות שלהם נמוכה כאשר תינתן בידיהם האפשרות להשתתף בקבלת החלטות בנוגע לרמת הלימודים שישוּבצו אליה.

מוטיבציה והצבת מטרות

המונח "מוטיבציה" מתייחס לתהליך אישי שמייצר, מפקח ותומך בהתנהגויות מסוימות. מוטיבציה היא מכלול ההתנהגויות, השאיפות והרצונות של הפרט המובילים אותו להשגת יעדי. חוקרים הגדירו שלושה ממדים של התנהגות מוטיבציונית אשר אחת מהן רלוונטית למחקר שלנו והיא כיוון ההתנהגות (Maehr & Midgley, 1996). כיוון ההתנהגות מתייחס לבחירה של התנהגות מסוימת מתוך מכלול של התנהגויות והתמדה בה למרות הקשיים שעולים תוך כדי הפעלתה. לזה מתווספת האוטונומיה המתארת את תפיסת ההתנהגות כנובעת מבחירה או מדרישה חיצונית. חוקרים שונים תיארו את המוטיבציה לפי רמת תחושת האוטונומיה. המונח של תמיכה באוטונומיה נטבע כדי להסביר את הגורמים של ההקשר החברתי בלמידה של תלמידים (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). מושג זה מתאר אדם במצב של שליטה (לדוגמה, מורה) אשר מספק לאחר (לדוגמה, התלמיד) את המידע והאפשרויות העומדות לפניו תוך כדי צמצום השימוש בלחץ ושליטה (Williams & Deci, 1996).

הכוונה עצמית ומוטיבציה פועלים יד ביד להסביר את הצלחת הלמידה של התלמיד. כאשר תלמידים בעלי מוטיבציה ללמוד, הם מוכנים להשקיע זמן ואנרגיה בלימודים שלהם (Zimmerman, 2000, 2008).

שני סוגי מטרות הובחנו במחקר הלימודי: מטרות התמחות ומטרות ביצוע. הסוג האחד מגדיר מטרות המייצגות את התוצאה שאליה הפרט רוצה להגיע והן נקראות מטרות התמחות (נקראות גם מטרות עם אוריינטציה משימה או מטרות למידה). הסוג השני מגדיר את הסיבות הכלליות שיש לפרט בביצוע המשימה והן נקראות מטרות ביצוע שנקראות גם מטרות הקשורות בהערכה עצמית (Ames, 1992; Maehr & Midgley, 1996; Nicholls, 1989). תלמידים עם מטרות התמחות מתמקדים בשיפור היכולת שלהם, בפיתוח כישורים חדשים ובהשגת תחושת שליטה יחסית לסטנדרטים עצמיים. הם רוצים להבין את החומר ולהעריך את הצלחתם לפי היכולת שלהם להשתמש בידע ולהעביר אותו. הם נוטים להגיב בגמישות לכישלון ומתמקדים ברכישת ידע ומיומנויות גם כאשר זה מהווה אתגר. הם לא רואים בכישלון אשמה אישית ומאמינים שמאמצים מובילים להצלחה. אקלס וויגפילד (Eccles & Wigfield, 2002) מצאו כי מטרות התמחות קשורות לתחושת מסוגלות והכוונה עצמית. תלמידים עם מטרות ביצוע מעוניינים בעיקר בביצוע של המטלה כפי שהוגדרה על-ידי המורה. הם שואפים להצליח, אבל בעיקר במשימות מוכרות, הם נמנעים ממשימות מאתגרות או מתייאשים מהן במהרה, תפיסת המסוגלות שלהם מוזנת מיכולתם לזכות בהכרה והם חשים איום על ערכם כאשר מאמציהם לא מובילים להכרה. תחושת המסוגלות שלהם נקבעת על-ידי השוואה לאחרים והם מבססים יכולת גבוהה על כך שהגיעו להישגים גבוהים מחבריהם (Ames & Archer, 1988; Nicholls, 1989). מתן

האוטונומיה לתלמידים לבחור את רמת ההיבחנות שלהם יכולה לסייע לנו להבחין בין תלמידים בעלי מטרות התמחות לבין תלמידים בעלי מטרות ביצוע.

מתמטיקה ואקלים כיתתי

אקלים כיתתי מתייחס להתנהגות הכוללת של התלמידים במהלך שיעורי המתמטיקה אשר עשויה לנבוע מרגשות חיוביים או שליליים. רגשות חיוביים יכולים ליצור אקלים כיתתי נעים ונינוח, אשר בו התלמידים עושים מאמצים ללמוד מתמטיקה בהתאם ליכולתם, בעוד שרגשות שליליים יכולים ליצור בעיות התנהגות אשר מחבלות בתהליך הלימוד. לאקלים כיתתי חיובי יש תפקיד חיוני הן בעבור המורה והן בעבור התלמידים. הספרות המחקרית כוללת התייחסויות רבות הנוגעות לנושא של האקלים הכיתתי. רבים ממחקרים אלו בחנו את ההשפעות של שילוב שיטות הוראה/למידה חדשניות על תהליך הלמידה וכמטרה משנית על האקלים הכיתתי (Ah Chee Mok, 2009; Bellomo & Wertheimer, 2010; Graves et al., 2009; Kaygin et al., 2011).

בלק ודיסי (Black & Deci, 2000) מצאו כי לאקלים כיתתי אשר תומך באוטונומיה של התלמידים יש השפעה חיובית על התפיסה העצמית של התלמידים בנוגע ליכולת שלהם להתמודד עם לימוד המתמטיקה וכמו כן על המאמצים שהם משקיעים ועל הישגיהם הלימודיים.

במחקר הנוכחי האקלים הכיתתי השלילי שניכר בבעיות התנהגותיות של התלמידים בשיעורי המתמטיקה היה בין הסיבות לכך שהתאפשר לתלמידים להשתתף בתהליך קבלת ההחלטות בנוגע לרמת הלימוד שישוּבצו אליה בשנת הלימודים העוקבת, בהנחה שמתן אוטונומיה זו תשפיע לחיוב על האקלים הכיתתי.

מהלך המחקר

בפרק זה נעסוק באוכלוסיית המחקר, במהלך המחקר, באיסוף הנתונים ובשיטות לניתוחם.

אוכלוסיית המחקר

במחקר זה השתתפו 26 תלמידי כיתה ט' מבית-ספר אזורי בצפון הארץ. רוב התלמידים מתגוררים ביישובים קטנים (קיבוצים ומושבים) ורמתם במתמטיקה הנה הטרוגנית. בשנת הלימודים שבה התבצע המחקר, התלמידים התבקשו להיבחן שלוש פעמים. 26 תלמידים ניגשו למבחן הראשון, 24 ניגשו למבחן השני ואילו למבחן השלישי ניגשו 20 תלמידים בלבד. כיוון שמספר התלמידים ירד לאורך שלוש הבחינות, המחקר מתמקד ב-20 התלמידים שניגשו לכל שלוש הבחינות.

איסוף הנתונים - השאלון

השאלון כלל 12 שאלות. שאלות 1 ו-2 הן שאלות כלליות המתייחסות לתהליך הבחירה של גרסת הבחינה כמו: "איזו גרסה בחרת ומדוע?" שאלות 3-6 מתייחסות לעמדות התלמידים בנוגע לתפיסתם את רמת השליטה שלהם בנושאי הלימוד, כגון "קבע את דרגת השליטה שלך בנושא הטרפז" בסולם

של 1-5. שאלות 1-7 מתייחסות להיבטים של יעילות עצמית במובן של זיהוי מטרות הלמידה שלהם והמוטיבציה שלהם ללמוד מתמטיקה. שאלה 12 מורכבת משמונה היגדים המתייחסים לעמדת התלמידים כלפי מתמטיקה.

נוסף על הנתונים שנאספו ממילוי השאלון, נתוני המחקר כללו את הציונים שהתלמידים קיבלו בשלוש הבחינות.

שיטות לניתוח הנתונים

הנתונים שנאספו לאחר מילוי השאלונים נותחו תוך שימוש באינדוקציה אנליטית (Taylor & Bogdan, 1998) ובניתוח תוכן (Neuendorf, 2002). ניתוח הנתונים העלה את הקטגוריות הבאות: גורמים חיצוניים, תפיסה עצמית של היכולת המתמטית, מטרות לימודיות, מוטיבציה וניסיון ביצועי.

גורמים חיצוניים – קטגוריה זו כוללת התייחסויות של התלמידים בנוגע לרמת הבחינה ולמידת המוכנות שלהם לקראתה כגון "הסתכלתי על הבעיות בבחינה והן נראו לי פשוטות", "הבחינה המורחבת הייתה קשה ולא היה לי מספיק זמן".

תפיסה עצמית של היכולת המתמטית – קטגוריה זו כוללת התייחסויות של התלמידים בנוגע לתפיסתם את היכולת המתמטית שלהם כגון "הידע המתמטי שלי הוא די טוב ואני חושב שאני יכול להצליח ברמה המורחבת" או "אני לא כל כך טוב במתמטיקה".

מטרות לימודיות – קטגוריה זו כוללת התייחסויות של התלמידים בנוגע למטרות הלימודיות שלהם, פנימיות וחיצוניות כגון "אני באמת רוצה לשפר את הידע המתמטי שלי" או "אני רוצה ללמוד באוניברסיטה לכן אני צריך להיות טוב במתמטיקה".

מוטיבציה – קטגוריה זו כוללת התייחסויות של התלמידים בנוגע למוטיבציה שלהם להצליח במתמטיקה כגון "מאוד חשוב לי להצליח" או "אני רוצה להיות אחד מהתלמידים הטובים בכיתה".

ניסיון ביצועי – קטגוריה זו כוללת התייחסויות של התלמידים בנוגע לסיבות אשר בגינן בחרו בגרסה מסוימת שנבעו ממידת ההצלחה שלהם בבחינות קודמות כגון "במבחן הקודם בחרתי בגרסה הרגילה וזה היה קל לי".

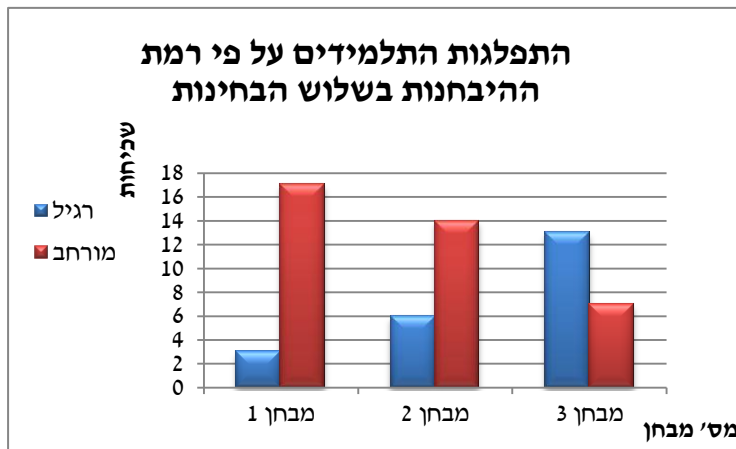
בהמשך נדון בהרחבה בקטגוריות שלעיל. בנוגע לשאלות 3-6, אשר מהן היה אפשר ללמוד על אודות תפיסת התלמידים את מידת השליטה שלהם בחומר הלימוד ושאלות 7-11, אשר מהן היה אפשר ללמוד על אודות המטרות הלימודיות של התלמידים ומשאלה 12 ששפכה אור על עמדות התלמידים כלפי מתמטיקה, כל התוצאות המוזכרות לעיל סייעו לנו לקבל תמונה כוללת של ההתנהגות הלימודים של כל תלמיד.

תוצאות ודיון

הסעיפים הבאים מתייחסים לשאלות המחקר שנוסחו בסעיף הבעיה ושאלות המחקר.

ההשפעות של החופש לבחור את רמת ההיבחות על התפיסה העצמית של התלמידים את יכולתם המתמטית

כפי שהוזכר קודם לכן, רק 20 מתוך 26 התלמידים ניגשו לשלוש הבחינות ולכן התוצאות שלהלן מתייחסות רק לתלמידים אלו. איור 1 מציג את התפלגות התלמידים לפי בחירת רמת ההיבחות בשלוש הבחינות. הנתונים המוצגים מראים מעבר ברור מבחירה ברמה המורחבת לרמה הרגילה. במבחן הראשון רוב התלמידים בחר ברמה המורחבת, בעוד שבמבחן השלישי שני שלישים בחרו בגרסה הרגילה, ואילו שליש מהתלמידים בחר בגרסה המורחבת. ההתפלגות במבחן השלישי מראה התפלגות של כיתת לימוד הטרוגנית, שבה כשני שלישים מהתלמידים הם בעלי הישגים הנעים סביב הממוצע, ואילו השליש הנותר הוא בעל הישגים שהם מעל הממוצע.



איור 1: התפלגות התלמידים על פי רמת ההיבחות בשלוש הבחינות

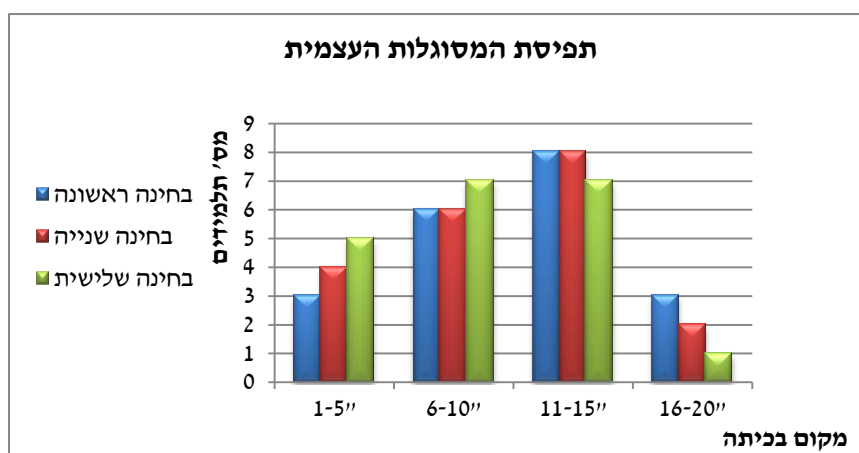
מתוך 20 התלמידים שנבחנו בשלוש הבחינות, שמונה (שבעה שבחרו בגרסה המורחבת ואחד שבחר בגרסה הרגילה) לא שינו את דפוס ההתנהגות שלהם לאורך שלוש הבחינות (מכונים: "השמרנים") – בעוד ששנים עשר תלמידים שינו את גרסת ההבחנות שלהם לאורך שלוש הבחינות (מכונים: "המשנים"). טבלה 1 מציגה את הציון הממוצע שהתקבל בכל אחד משלוש הבחינות בשתי הגרסאות.

מבחן 3		מבחן 2		מבחן 1		גרסה
מורחבת	רגילה	מורחבת	רגילה	מורחבת	רגילה	
75	71.8	67.6	57.1	57.4	44.1	ציון ממוצע
19.5	22.8	15.1	29.6	24.6	17.1	סטיית תקן

טבלה 1: התפלגות ממוצע הציונים וסטיית התקן בשלוש הבחינות על פי גרסאות המבחן

התוצאות המוצגות בטבלה 1 מראות כי ציוני התלמידים תומכים בהחלטה שהם קיבלו לשנות את גרסת ההיבחנות שלהם ממורחבת לרגילה. אפשר לראות גידול ברור בציונים בשתי גרסאות ההיבחנות לאורך כל שלוש הבחינות. אם כן, אפשר לומר שהתלמידים הגיעו להחלטה נכונה בכך ששינו את גרסת הבחינה שלהם ממורחבת לרגילה. החלטות התלמידים עומדות בקנה אחד עם פאג'רס (Pajares, 2002), שטען שבמקרה של בחירה חופשית, תלמידים נוטים לבחור משימות שהם מרגישים שהם מסוגלים להתמודד איתן ונמנעים מאלו שהם אינם מסוגלים להתמודד איתן.

כדי לחקור את תפיסת התלמידים את יכולתם המתמטית לאורך שלוש הבחינות, ביקשנו מהם במסגרת השאלון למקם את עצמם בתוך כיתת המתמטיקה על פי הסקלה הבאה: 1-5 בין התלמידים המצטיינים בכיתה, 6-10 בין התלמידים הטובים, 11-15 בין התלמידים הבינוניים, 16-20 בין התלמידים החלשים. איור 2 מציג את התוצאות שהתקבלו.



איור 2: תפיסת המסוגלות העצמית של התלמידים
כפי שבאה לידי ביטוי במיקומם ביחס לשאר תלמידי הכיתה

התוצאות המוצגות באיור 2 מראות כי מספר התלמידים בעלי תפיסת מסוגלות עצמית גבוהה עלה לאורך שלוש הבחינות ומספר התלמידים בעלי תפיסת מסוגלות נמוכה ירד למרות העובדה שחלק מהם שינה את גרסת הבחינה שבה נבחן ממורחבת לרגילה. היה אפשר לצפות שמעבר מגרסה מורחבת לרגילה יביא לירידה בתפיסת מסוגלות עצמית, אך התוצאות מראות מצב שונה. הסבר אפשרי לתופעה הוא שבבחינה הראשונה, החלטת התלמידים הייתה שרירותית. ההחלטה לא יכולה הייתה להתבסס על ניסיון היבחנות קודם, לכן אף שהתלמידים קיבלו ציונים נמוכים, זה לא השפיע על תפיסת המסוגלות העצמית שלהם. בחירת התלמידים בבחינה השנייה והשלישית, לעומת זאת, התבססה על הציון שקיבלו בבחינה הקודמת. העובדה שבבחינות עוקבות התלמידים שיפרו את ציוניהם יכולה להסביר את העלייה בתפיסת המסוגלות העצמית שלהם. חוקרים מצאו שתמיכה בתפיסת המסוגלות העצמית של תלמידים משפיעה ומעוררת מוטיבציה ללמידה (Ryan & Deci, 2000). במחקר הנוכחי השתמשנו במקורות חיצוניים (מתן האפשרות לבחור את רמת ההיבחנות) לתמוך בתפיסת המסוגלות העצמית של

התלמידים. כפי שהוזכר קודם לכן, שמונה תלמידים מתוך 20 לא שינו את הגרסה שבה בחרו להיבחן לאורך כל שלוש הבחינות (שבעה מהם בחרו בגרסה המורחבת ואילו אחד בגרסה הרגילה). תלמידים אלו מיקמו עצמם או כתלמידים מצטיינים או כתלמידים טובים, כך שאנחנו יכולים להניח שתפיסת המסוגלות העצמית שלהם בנוגע ליכולות המתמטיות שלהם הייתה גבוהה יחסית.

את התנהגות התלמידים אפשר להסביר גם על-ידי הממד של פנימי/חיצוני בתאוריית ייחוס הסיבתיות (Weiner, 1986, 1992). ממד זה מתייחס לאופי הסיבתי שיכול להיות או פנימי או חיצוני. כיוון שתלמידים אלו מיקמו עצמם כתלמידים טובים, אפשר לומר שהם מייחסים את הסיבות לחוסר הצלחתם בבחינה הראשונה לכמות המאמצים שהם השקיעו בלמידה. המוטיבציה של תלמידים להצלחה ניכרת בשיפור בציוניהם בבחינות הבאות. אפשר גם לומר שקבוצת תלמידים זו הייתה מונעת על-ידי מטרות התמחות. בכל שלוש הבחינות הם התמקדו בשיפור היכולת המתמטית שלהם שניכר בשיפור ההישגים שלהם. הם התנהגו כך שקבלת ציון נמוך לא נבעה מחוסר יכולת, אלא רק מחוסר השקעה מספקת בהכנה לבחינות.

בנוגע ל-12 התלמידים, אשר שינו את גרסת הבחינה פעם או פעמיים במהלך שנת הלימודים, רובם מיקמו עצמם כתלמידים ממוצעים במתמטיקה. לכן אפשר להניח שתפיסת המסוגלות העצמית שלהם בנוגע ליכולתם המתמטית איננה גבוהה. למרות זאת, בבחינה הראשונה הם בחרו להיבחן בגרסה המורחבת. לכן אנחנו יכולים לייחס את ההחלטה שלהם להיות מונעת על-ידי מטרות ביצוע (Ames, 1989; Maehr & Midgley, 1996; Nicholls, 1992). תלמידים המונעים על-ידי מטרות ביצוע מחפשים אחר הצלחה, אך מרימים ידיים די מהר כאשר הם נתקלים במשימות מאתגרות. התנהגות מסוג זה נצפתה בקרב התלמידים אשר שינו את גרסת הבחינה לאורך שנת הלימודים. כיוון שתפיסתם את היכולת המתמטית שלהם ניוונה מהסיכוי לקבל הכרה חיצונית (הורים וחברים לכיתה) הם בחרו את הגרסה המורחבת בבחינה הראשונה. כאשר הם נתקלו בקשיים להתמודד עם הגרסה המורחבת, הם ויתרו ובבחינה הבאה בחרו את הגרסה הרגילה. במונחים של תאוריה להכוונה עצמית (Ryan & Deci, 2002) הגשמה של צרכים פסיכולוגיים בסיסיים כגון מתן עצמאות ובחינת היכולת הם הכרחיים בעבור התפתחות קוגניטיבית ורגשית של הלומד (Ryan & Deci, 2000). בחינת היכולת היא הצורך של הפרט לבחון את יכולתו להשלים משימה העומדת לפניו. במקרה שלנו, אנחנו עודדנו הן מתן העצמאות והן את בחינת היכולת על-ידי מתן האפשרות לתלמידים לבחור את רמת הבחינה שהם מצאו לנכון כמתאימה ליכולת שלהם ולשליטתם בחומר הלימוד. מנקודת מבט של אמונות על אודות מסוגלות עצמית, ידוע שאמונות אלו משפיעות על הביצועים האקדמיים של הלומדים (Pajares, 2002). אחד המקורות של מידע של מסוגלות עצמית הוא ניסיון עבר. פאג'רס (Pajares, 2002) מצא שחוויות חיוביות נוטות להעצים מסוגלות עצמית, בעוד שכישלונות מתמשכים נוטים להחליש אותה. הול ופונטון (Hall & Ponton, 2005) מצאו שכישלון במתמטיקה, בדרך כלל, מעצב את דעות התלמידים בנוגע לתפיסתם את היכולת המתמטית שלהם וכמו כן את מידת האופטימיות שלהם בנוגע לאפשרויות הקריירה הפתוחות לפניהם. מתן ההזדמנות לתלמידים לבחור את רמת ההיבחנות שלהם אפשר להם להוציא עצמם ממצב קבוע של חוויות כישלון. המקור השני של מידע בעבור מסוגלות

עצמית הוא עוררות רגשית, אשר מבטאת את היכולת של התלמידים לבצע את המשימות. העמדת תלמידים במצב שבו הם אינם יכולים להתמודד עם המשימות הניצבות לפניהם יכול לעורר בהם תחושות רגשיות שליליות כגון תסכול וחרדה. על-ידי מתן האפשרות לשנות את גרסת ההיבחנות, ניתנה לתלמידים האפשרות להימנע ממצבי תסכול על-ידי בחירה בגרסה המכילה משימות המתאימות לרמתם.

הסיבות לבחירת גרסת ההיבחנות

התלמידים העלו בסך הכול 90 סיבות בנוגע לבחירתם להיבחן בגרסה מסוימת (חלקם רשם יותר מסיבה אחת). ניתוח הסיבות העלה כי הן ניתנות למיון בחמש קטגוריות עיקריות: מטרות, תפיסה עצמית את היכולת המתמטית, מוטיבציה, גורמים חיצוניים וניסיון ביצועי. תחילה נפרט את הקטגוריות ולאחר מכן נתייחס לשתי קבוצות תלמידים: "השמרנים" ו"המשנים".

מטרות (28.8% – 26 תגובות מתוך 90)

תחת קטגוריה זו כללנו אמירות הנוגעות למטרות קצרות וארוכות טווח כגון "אני באמת רוצה לשפר את הידע המתמטי שלי", "שינתי את גרסת ההיבחנות כיוון שרציתי לקבל ציון טוב יותר", "אני מתכוון ללמוד מתמטיקה ברמה גבוהה" ו"אני רוצה להתקבל לאוניברסיטה וללמוד בפקולטה טובה כמו מדעי המחשב".

תפיסה עצמית את היכולת המתמטית (24.4% – 22 תגובות מתוך 90)

תחת קטגוריה זו כללנו אמירות כגון "אני חושב שאני מסוגל ללמוד מתמטיקה ברמה בינונית ורציתי לבדוק אם זה קשה לי", "הרמה המוגברת קשה לי ואני מרגישה שאני לא יודעת מתמטיקה מספיק טוב", "הידע המתמטי שלי הוא די טוב ואני חושבת שאני מסוגלת להצליח ברמה המורחבת", ו"זה [הרמה המורחבת] משקף את היכולות שלי".

גורמים חיצוניים (24.4% – 22 תגובות מתוך 90)

תחת קטגוריה זו כללנו אמירות אשר התייחסו לרמת הבחינה ולמידת המוכנות של התלמידים לקראתה כגון "הסתכלתי על הבעיות בבחינה והן נראו לי פשוטות", "הבחינה המורחבת הייתה יותר קשה ולא היה לי מספיק זמן ללמוד לבחינה" ו"לא התכוננתי מספיק לבחינה ולכן בחרתי את הגרסה הרגילה".

ניסיון ביצוע (12.2% – 11 תגובות מתוך 90)

תחת קטגוריה זו כללנו אמירות אשר הכילו סיבות שהיו תוצאה של ניסיון ביצוע קודם כגון "בבחינה הקודמת בחרתי בגרסה הרגילה והיא הייתה לי קלה", "לא הצלחתי בגרסה המורחבת ולכן החלטתי הפעם לבחור בגרסה הרגילה", "בדרך כלל אני עושה את הגרסה המורחבת אבל הפעם לא הבנתי את השאלות שהיו בה ולכן בחרתי בגרסה הרגילה" ו"עד עתה בחרתי בגרסה המורחבת ולא קיבלתי ציונים גבוהים לכן החלטתי הפעם לבחור בגרסה הרגילה בתקווה לקבל ציון גבוה יותר".

מוטיבציה (10% – תשע תגובות מתוך 90)

תחת קטגוריה זו כללנו אמירות כגון "אני רוצה להיות ברמה הגבוהה כדי שלא אישאר מאחור", "מאוד חשוב לי להצליח", "אני לא רוצה להתייאש מהלימודים שלי", "אני אוהב את האתגרים" ו"אני רוצה לעשות את המקסימום כדי לקבל ציונים טובים יותר".

כדי להשיב על השאלה האם ישנם הבדלים בין הסיבות שהתלמידים נתנו בנוגע לבחירת רמת ההיבחנות, השווינו בין שתי קבוצות התלמידים ה"שמרנים" וה"משנים" בנוגע למספר הסיבות שניתנו בכל קבוצה לכל אחת מהקטגוריות שלעיל. התוצאות מרוכזות בטבלה 2.

קטגוריה	בחינה ראשונה		בחינה שנייה		בחינה שלישית		סה"כ	
	משנים	שמרנים	משנים	שמרנים	משנים	שמרנים	משנים	שמרנים
מטרות	3	8	2	7	0	6	5	21
יכולת	7	6	2	5	0	2	9	13
גורמים חיצוניים	4	1	6	2	7	2	17	5
ניסיון ביצועי	1	0	2	1	6	1	9	2
מוטיבציה	2	2	4	1	0	0	6	3
סה"כ	17	17	16	16	13	11	46	44

טבלה 2: התפלגות התלמידים לפי קטגוריות והשתייכות קבוצתית

העמודה הימנית בטבלה 2 מתייחסת לקטגוריות שעלו כתוצאה מניתוח הסיבות שהתלמידים נתנו לבחירתם את גרסת הבחינה. העמודות הבאות מתייחסות לשלוש הבחינות שביצעו במהלך שנת הלימודים כאשר קיימת חלוקה לשתי קבוצות התלמידים שהוזכרו לעיל. שתי העמודות האחרונות הן סיכומי שורה של כל אחת מקבוצות התלמידים באותה בחינה.

ניתוח התוצאות בטבלה 2 מעלה כי באופן כללי, מספר הסיבות שניתנו על-ידי קבוצת ה"משנים" השתנה מבחינה לבחינה בעוד שמספר הסיבות שניתנו על-ידי קבוצת ה"שמרנים" היה פחות או יותר קבוע בשלוש הבחינות. בהמשך נדון בכל אחת משתי הקבוצות בהרחבה.

קבוצת ה"שמרנים"

מספר הסיבות שניתנו על קבוצת תלמידים זו היה פחות או יותר קבוע בשלוש הבחינות. כפי שצוין קודם לכן, רוב התלמידים בקבוצה זו בחרו להיבחן בגרסה המורחבת. יתרה מזו, כל התלמידים בקבוצה זו תופסים עצמם או כתלמידים מצטיינים או כתלמידים טובים ביחס לשאר בני כיתתם, דבר אשר יכול להשליך על תפיסתם העצמית בנוגע ליכולת המתמטית שלהם. תוצאה זו עומדת בקנה אחד עם פאג'רס וגרהם (Pajares & Graham, 1999), שמצאו כי תלמידים בעלי תפיסה עצמית גבוהה

במתמטיקה מגלים יותר מעורבות, עקביות והשקעת מאמץ במשימות מתמטיות.

מספר הסיבות הגדול ביותר שניתן על-ידי קבוצת ה"שמרנים" בבחינה הראשונה מתייחס למטרות וליכולת מתמטית ובבחינה השלישית התייחס למטרות. למעשה, תלמידים אלו סיפקו דו"ח קבוע בנוגע ליכולות המתמטיות שלהם לאורך שלוש הבחינות והציונים שהם קיבלו נתנו מעין גושפנקא לתפיסות שלהם על אודות היכולות המתמטיות שלהם. אפשר לומר שהם היו מונעים בעיקר על-ידי המטרות שהציבו לעצמם לשפר את ההישגים שלהם. העלייה בציונים בשלוש הבחינות מראה שההחלטה לדבוק בגרסת ההיבחות בכל שלוש הבחינות הייתה נכונה. בחינת תוצאות אלו דרך העדשה של תאוריית המסוגלות העצמית מעלה שאפשר לומר שהאמונות של קבוצת ה"שמרנים" השפיעו על הביצועים האקדמיים שלהם בבחירות ובהתנהגות שלהם (Pajares, 2002). תפיסת המסוגלות העצמית של קבוצת ה"שמרנים" ניזונה גם מהמטרות שהם הציבו לעצמם. היו להם מטרות ברורות והם האמינו ביכולת שלהם להתמודד עם הבחינה המורחבת. הם לא נזקקו לצידוקים הקשורים בניסיון ביצועי בבחינות קודמות או מוטיבציה כדי להצדיק את בחירתם. את ההבדלים המזעריים במספר הסיבות שניתנו בין הבחינות השונות אפשר להסביר גם על-ידי תהליך ההכוונה העצמית: ההערכה של הביצוע לא גרמה לשינוי במטרות שהתלמידים קבעו לעצמם בשלוש הבחינות.

המספר הזניח של סיבות המתייחסות לגורמים חיצוניים ולניסיון ביצועי בבחינות קודמות שניתן על-ידי קבוצת תלמידים זו מחזק את העובדה שהם בטוחים ביכולתם להתמודד עם הגרסה המורחבת של הבחינות. לכן אף שהם לא קיבלו ציונים גבוהים בבחינה הראשונה, הם לא ייחסו את חוסר ההצלחה שלהם לגורמים חיצוניים או לניסיון ביצועי בבחינות קודמות, אלא השקיעו יותר מאמצים בשיפור הידע שלהם כדי להצליח יותר בבחינה העוקבת. במונחים של תאוריית הייחוס הסיבתי (Weiner, 1986, 1992) אפשר לומר שקבוצת תלמידים זו ממקמת את הסיבות להצלחה/כישלון שלה בבחינות לאורך הממד הפנימי. כלומר, תלמידי קבוצה זו מייחסים את הסיבות לביצועים שלהם למידת ההשקעה שהם השקיעו בלמידה לקראת הבחינה.

בנוגע לסיבות שניתנו על-ידי קבוצת ה"שמרנים" ביחס למוטיבציה, המספר הנמוך של סיבות אשר הלך וקטן בשלוש הבחינות יכול להצביע על שהם היו בטוחים ביכולת המתמטית שלהם והיו מונעים בעיקר על-ידי המטרות שהציבו לעצמם. אפשר להסביר זאת על-ידי ממד הכיוון של התנהגות מוטיבציונית אשר מתייחס לבחירה בהתנהגות מסוימת ודבקות בה למרות המכשולים (Maehr & Midgley, 1996). אף שהם קיבלו ציונים נמוכים בבחינה הראשונה, הם דבקו בגרסת ההיבחות שבחרו בה. להפך, בהיותם מונעים על-ידי המטרות שהציבו לעצמם, הם השקיעו יותר מאמצים לשפר את הידע המתמטי שלהם. תפיסת מטרות כאחד המרכיבים של תהליך ההכוונה העצמית (Pintrich, 2000) פירושה שאפשר לומר שתלמידים אלו קבעו מטרות לעצמם (להצליח בבחינות המורחבות) ורק לאחר מכן להתאים את ההתנהגות שלהם כדי להגשים אותן. לאורך כל התהליך הם השתמשו בפעולות של בקרה והערכה כדי לבחון את ה"איכות" של הביצועים ושל התוצרים שלהם שתוצאתם הייתה בחלק מהמקרים בהצבת מטרות חדשות.

קבוצת ה"משנים"

מספר הסיבות שניתנו על-ידי קבוצת תלמידים זו המתייחסות לגורמים חיצוניים עלתה לאורך שלוש הבחינות בעוד שמספר הסיבות שניתנו המתייחסות למטרות ויכולת ירדו לאורך שלוש הבחינות. במונחים של תאוריית הייחוס הסיבתי (Weiner, 1986, 1992) אפשר לומר שקבוצת תלמידים זו ממקמת את הסיבות לחוסר הצלחה בבחינות לאורך הממד החיצוני. כלומר, הם מייחסים את הסיבות להישגיהם לגורמים חיצוניים כמו הקושי של הבחינה. יתרה מזו, כיוון שרובם תופסים עצמם כשייכים לקבוצת התלמידים הטובים או הבינוניים בכיתה, תפיסתם את היכולת שלהם בנוגע לרמת המסוגלות שלהם להתמודד עם משימות מתמטיות של הגרסה המורחבת איננה בין הגבוהות, אי לכך הם מבינים שהם יכולים להצליח יותר בגרסה הרגילה. אף שהם מייחסים את חוסר ההצלחה שלהם לגורמים חיצוניים בבחינה הראשונה, למרות זאת הם משנים את גרסת ההיבחות שלהם במבחן הבא כיוון שהם מבינים שחוסר ההצלחה שלהם איננו תוצאה של רק גורמים חיצוניים.

המספר ההתחלתי שסיפקה קבוצת תלמידים זו הנוגע למטרות היה נמוך והוא ירד במהלך שלוש הבחינות. אפשר להניח כי המטרות שהוצבו בעבור הבחינה הראשונה נראו לתלמידים פחות ברות השגה אחרי שהם קיבלו את הציונים. הספרות המחקרית מבחינה בין מטרות התמחות אשר מתמקדות בשיפור היכולת של הפרט ופיתוח מיומנויות בהתאם, ומטרות ביצועיות אשר מתמקדות בהישגים והפגנת יכולות (Ames, 1992; Maehr & Midgley, 1996). במקרה של קבוצת ה"משנים", אפשר להניח שהמטרות שלהם היו מטרות ביצועיות.

המספר הגדול של סיבות הנוגעות ליכולת מתמטית בבחינה הראשונה שניתן על-ידי קבוצת תלמידים זו יכול להיות תוצאה של העובדה שהם היו צריכים למלא את השאלון **אחרי** הבחינה. הם נתקלו בוודאי בקשיים בפתירת השאלות של הגרסה המורחבת (כפי שזה ניכר בציונים הנמוכים שקיבלו) ולכן רוב הסיבות שניתנו נגעו ליכולתם המתמטית.

המעבר של קבוצת תלמידים זו מהגרסה המורחבת לגרסה הרגילה יכול להצביע על עיצוב של תפיסת היכולת העצמית שלהם. ההחלטה של רוב התלמידים לבחור בגרסה המורחבת בבחינה הראשונה נבעה ככל הנראה מהרצון והמטרות הלימודיות שלהם. הציונים שהם קיבלו בבחינה הראשונה הציבו לפניהם תמונת מצב המשקפת את היכולות המתמטיות האמתיות שלהם ועזרו להם לנתב את הבחירה שלהם באופן נכון יותר. אפשר לתפוס את הבחינות כהזדמנויות למידה אשר מעוררים את התהליך של עיצוב תפיסת היכולת העצמית והגדרה מחדש של המטרות. אחרי קבלת ציונים נמוכים בבחינה הראשונה, הירידה בתפיסת המסוגלות העצמית באה לידי ביטוי בהחלפת הגרסה של הבחינה ממורחבת לרגילה. תוצאות אלו עולות בקנה אחד עם בונג וסקאלביק (Bong & Skaalvik, 2003), אשר מצאו שתלמידים בעלי רמה גבוהה במתמטיקה מדויקים יותר בתפיסת היכולת העצמית שלהם מאשר תלמידים חלשים. כאשר לתלמידים ניתן החופש לבטא העדפות, הם בדרך כלל נוטים לבחור משימות שהם מסוגלים להתמודד איתן ולהימנע מאלו שלא (Pajares, 2002).

הסיבות המתייחסות למוטיבציה הראו התנהגות מעורבת: עלייה במספר הסיבות בין הבחינה הראשונה

לשנייה וירידה במספר הסיבות בין הבחינה השנייה לשלישית. את תופעה זו אפשר להסביר בהתנהגות קבוצת ה"משנים". כלומר, המוטיבציה שלהם באה לידי ביטוי באמונה כי על-ידי שינוי גרסת ההיבחנות הם יצליחו יותר, וכאשר אמונות אלו הוכחו כנכונות (עליהן בציונים בין הבחינה הראשונה לשנייה) – המוטיבציה שלהם מולאה מנקודת מבטם.

במחקר הנוכחי תלמיד היה צריך לבחור באיזו גרסה הוא מעוניין להיבחן ובכך למעשה בחר בהתנהגות מסוימת. הקשיים שהתלמידים חוו במהלך בחינה והציון שקיבלו שימשו כמקור לעיצוב ההתנהגות העתידית שלהם. ההתנהגות שלהם הייתה מונעת למעשה מגורמים חיצוניים ומניסיון ביצועי בבחינות קודמות. הפרשנות שכנראה ניתנה על ידם הייתה: "הצלחתי בבחינה ולכן הייתי מסוגל להתמודד עם הגרסה הרגילה, לכן אולי אני יכול לנסות להתמודד גם עם הגרסה המורחבת" או להפך "עד עתה בחרתי בגרסה המורחבת ולא הצלחתי ולכן החלטתי לבחור בגרסה הרגילה כדי להצליח". ה"שמרנים" אשר הראו יציבות בבחירת רמת ההיבחנות קיבלו אף הם אישור לתפיסת היכולת העצמית שלהם שבאה לידי ביטוי בעלייה הדרגתית של הציונים לאורך שלוש הבחינות.

מטרות הלימוד של התלמידים

במסגרת מילוי השאלון אחרי כל בחינה, התבקשו התלמידים להתייחס למטרות הלימוד שלהם. בסך הכול 183 מטרות למידה הועלו על-ידי התלמידים. נתייחס רק לאמירות שניתנו על-ידי 20 התלמידים שהשתתפו בכל שלוש הבחינות. מרבית התלמידים העלו מספר מטרות. מטרות אלו סווגו לחמש קטגוריות מרכזיות: למידה ברמת לימודים גבוהה, הצלחה בלימודים, קבלת ציונים טובים, העמקת ההבנה המתמטית שלהם ולמידה בקבוצת לימוד שרמת הלימוד בה בינונית.

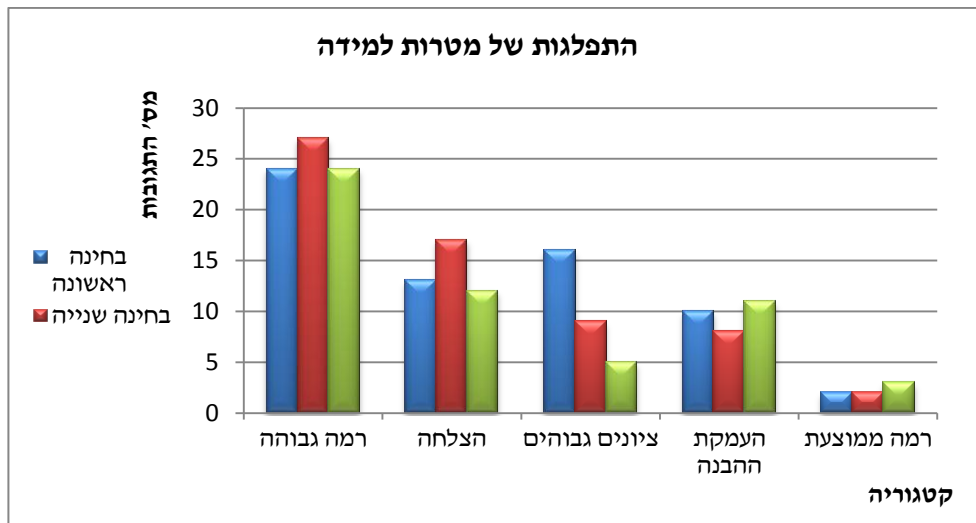
בקטגוריה "למידה ברמת לימודים גבוהה" צוינו תגובות כגון "אני רוצה ללמוד בקבוצה של 5 יח"ל ואני לא מוכן לקבל שום אפשרות אחרת" ו"אני רוצה להגיע לרמת הלימוד המקסימלית".

בקטגוריה "הצלחה בלימודים" נכללו תגובות כגון "אני רוצה להצליח בלימודים ובבחינות הבגרות" ו"אני מאוד רוצה להצליח במתמטיקה ואני מקווה שזה באמת יקרה".

בקטגוריה "קבלת ציונים טובים" נכללו תגובות כגון "אני רוצה לקבל ציון בין 70 ל-90 בקבוצה של 5 יח"ל" ו"אני רוצה להיות במצב שאני אעבור את הבחינה של 5 יח"ל בציון מעל 75".

בקטגוריה "העמקת ההבנה המתמטית" נכללו תגובות כגון "אני רוצה להבין היטב את הנושאים המתמטיים הנלמדים במיוחד בגאומטריה" ו"לפעמים אני מרגישה שאני מבינה את החומר הלימודי אבל כשאני מנסה לפתור בעיות אני רואה שזה לא מספיק".

בקטגוריה "למידה בקבוצת לימוד שרמת הלימוד בה בינונית" נכללו תגובות כגון "אני לא יכול ללמוד בקבוצה של 4 יח"ל כיוון שצריך ללמוד שם גאומטריה וזה מאוד קשה לי" ו"אני מעדיפה לקבל ציון טוב בקבוצה של 3 יח"ל מאשר לקבל ציון נמוך בקבוצות הגבוהות יותר [4 ו-5 יח"ל]".



איור 3: התפלגות תגובות התלמידים בנוגע למטרות הלמידה שלהם בשלוש הבחינות

מאיור 3 עולה שהמטרה המרכזית של התלמידים לאורך שלוש הבחינות הייתה ללמוד ברמה גבוהה במתמטיקה למרות שרבים מהם שינו את גרסת הבחינה ממורחבת לרגילה. הסבר אפשרי לכך הוא הידע של התלמידים שלמידה ברמה גבוהה במתמטיקה בתיכון מעלה את הסיכוי שלהם להתקבל ללימודים באוניברסיטה. מטרות כאלו יכולות להיחשב כחיצוניות כיוון שהן נובעות או מלחץ חברתי או מלחץ המופעל מצד ההורים אשר מעודדים אותם למקסם את המאמצים שהם משקיעים בתהליך הלמידה. בנוגע לקטגוריה "קבלת ציונים גבוהים" מספר התגובות השייכות לקטגוריה זו ירד לאורך שלוש הבחינות. זה יכול להיות כתוצאה מהנתונים המופיעים בטבלה 1 שמראים עלייה הדרגתית בציוני התלמידים הן בגרסה המורחבת והן בגרסה הרגילה.

התגובות הנוגעות ל"העמקת ההבנה המתמטית" מראות מספר קבוע ויציב לאורך שלוש הבחינות. תגובות אלו ניתנו בעיקר על-ידי קבוצת התלמידים אשר לא שינו את גרסת ההיבחות בכל שנת הלימודים. אם כן, אפשר להניח שתלמידים אלו אשר מחשיבים עצמם כשייכים לקבוצת התלמידים המצטיינים בכיתה הם בעלי תפיסת מסוגלות עצמית גבוהה בנוגע ליכולות המתמטיות שלהם והעמקת הבנתם את המתמטיקה היא בין מטרות הלמידה שלהם.

המטרות שצוינו על-ידי התלמידים הן מטרות הישג אשר לפי אמס (Ames, 1992) ניתנים לסיווג לפי כוונות התלמידים. שני סוגים עיקריים של מטרות הובחנו בספרות המחקרית: מטרות שליטה ומטרות ביצוע (Ames & Archer, 1988). התלמידים אשר ציינו מטרות שתכליתן להעמיק את ההבנה המתמטית שלהם יכולים להיחשב כבעלי מטרות שליטה כגון שיפור היכולות ופיתוח מיומנויות חדשות. תלמידים כאלה להוטים להבין את החומר הנלמד ומעריכים את ההצלחה שלהם על-ידי בדיקה האם הם יודעים להשתמש בידע שלהם באופן נכון. את שאר הקטגוריות אפשר לשייך למטרות ביצוע. בראש מעיינם של תלמידים המונעים ממטרות ביצוע עומדת השאלה האם הם יכולים לבצע את

המשימות הניצבות לפנייהם. הם מחפשים הצלחה אך בעיקר במשימות מוכרות וברגע שנתקלים בקשיים או במשימות מאתגרות הם נמנעים מהם או מרימים ידיים. התפיסה שלהם את יכולתם נובעת מהרצון לקבל הכרה חיצונית. תפיסת היכולת של הפרט נבחנת בהשוואה לאחרים ויכולת גבוהה נמדדת בכך שהביצוע של תלמיד מסוים טוב יותר משל עמיתיו (Ames & Archer, 1988; Nicholls, 1989).

רק מספר זניח של תלמידים ציין מטרות שסווגו תחת הכותרת "למידה בקבוצת לימוד שרמת הלימוד בה בינונית". באופן טבעי, אנשים מציבים לעצמם מטרות גבוהות גם כאשר הם מודעים לכך שאת חלקן קשה יהיה להגשים. זה גם יכול להסביר את המספר הגבוה של מטרות תחת הקטגוריה "לימוד ברמה גבוהה". הנתונים מעלים שהתלמידים שצינו מטרות אשר סווגו תחת הקטגוריה "למידה בקבוצת לימוד שרמת הלימוד בה בינונית" היו בעלי הישגים נמוכים ואשר נתקלו בקשיים כאשר ניסו להתמודד עם המשימות אשר נכללו בבחינות של הגרסה הרגילה.

האקלים בכיתת המתמטיקה

אחת החוקרות היא מורה למתמטיקה בבית-ספר תיכון והמחקר הנוכחי נערך באחת הכיתות שבה היא מלמדת. הפסקה הבאה לקוחה מהרפלקציה שלה על כל התהליך:

כמורה למתמטיקה כבר יותר מ-20 שנים, הייתה לי ההזדמנות ללמד תלמידי כיתות ט' מספר רב של פעמים ואני חייבת לומר שברוב המקרים האקלים הכיתתי היה לא נעים ביחס לכיתות אחרות בשנתונים אחרים בהן לימדתי. אווירה זו הייתה בעיקר בסמסטר השני שבו התלמידים ידעו שהולכים לחלק אותם לקבוצות לימוד אשר יכולות להשפיע על הלימודים שלהם בתיכון ואפילו בהמשך. במהלך שיעורי המתמטיקה התלמידים לא שיתפו פעולה ואמירות כגון: "מה זה משנה? מסילא ישבצו אותי לרמה בינונית בשנה הבאה" נשמעו לעתים תכופות. שיטות ההוראה בהן השתמשתי כדי לגרום לשינוי באווירה, ושיחות פרטיות שקיימתי עם חלק מהתלמידים לא עזרו. בשיחות רבות שקיימתי עם התלמידים הם הביעו את חוסר שביעות הרצון שלהם מכך שהם עתידים להשתבץ לקבוצות לימוד שונות מבלי שתניתן להם האפשרות להשתתף בתהליך. גם הורי התלמידים התלוננו שבית-הספר לא מאפשר לתלמידים להשקיע מאמצים כדי לשפר עצמם בכדי שיוכלו להשתלב בקבוצת לימוד גבוהה יותר במתמטיקה. אי לכך עלה בדעתי הרעיון לאפשר לתלמידים להשתתף בתהליך קבלת ההחלטות הנוגע לשיבוצם לקבוצות לימוד במתמטיקה. לשם כך, יישמתי את הרעיון לפיו נושאי הלימוד יילמדו בשתי רמות רגילה ומורחבת, ובסוף כל נושא התלמידים יוכלו לבחור באיזו רמה הם מעוניינים להיבחן. במהלך שנת הלימודים בה יישמתי רעיון זה הייתי עדה לשינוי מהותי בהתנהגות של התלמידים. זה היה באמת שינוי גדול. האווירה בכיתה השתנתה לחלוטין וביטויים של תסכול הפכו להיות נדירים וגם התלמידים וגם הוריהם היו מוכנים יותר להשלים עם רמת הלימוד שבה שובצו בסופו של דבר כיוון שהייתה להם הרגשה שההחלטה הייתה שלהם. למעשה, רוב התלמידים השתבצו ברמה אשר התאימה לכישוריהם. ובמקום שבסוף שנת הלימודים התלמידים יקבלו הודעה לאיזו קבוצה הם משובצים, התלמידים השתתפו בתהליך הדרגתי שעזר להם להפנים ולקבל את רמת הלימוד המתאימה לכישוריהם. החופש לבחור עזר לתלמידים לעצב את תפיסת המסוגלות העצמית שלהם בנוגע ליכולת המתמטית שלהם.

התוצאות המשתמעות מהפסקה שלעיל עולות בקנה אחד עם בלאק ודיסי (Black & Deci, 2000), אשר מצאו כי לאקלים כיתתי התומך באוטונומיה של התלמידים – יש השפעה חיובית על תפיסת המסוגלות העצמית של התלמידים וכמו כן גם על ההנאה, המאמצים והביצועיים הלימודיים שלהם. מושג התמיכה באוטונומיה נטבע בהקשר של הבנת הגורמים החברתיים שמשפיעים על המוטיבציה של התלמידים ללמוד (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). מושג זה מתאר סיטואציה שבה אדם בעמדת כוח (לדוגמה, המורה) מספק לאחר (התלמיד) את המידע והבחירה תוך צמצום השימוש בלחץ ושליטה (Williams & Deci, 1996). האלאם ואירסון (Hallam & Ireson, 2007) חקרו את ההשפעה של מיקום תלמידים בקבוצת לימוד על פי היכולת שלהם על שביעות הרצון שלהם והגיעו למסקנות דומות.

אין ספק שלאקלים כיתתי יש השפעה משמעותית הן על המורה והן על התלמידים בכל התהליך של הוראה/למידה. חוקרים רבים התעמקו בהשפעות של יישום שיטות הוראה/למידה על התהליך הלימודי מצד אחד ועל האקלים הכיתתי מצד אחר (Ah Chee Mok, 2009; Bellomo & Wertheimer, 2010; Kaygin et al., 2011; Graves et al., 2009) והגיעו למסקנה שיש להם השפעה הדדית.

הערות סכום והשלכות בעבור הכשרת מורים

התהליך שבו השתתפו חלק מתלמידי כיתה ט' שבו הם יכולים היו לבחור באיזו רמה הם מעוניינים להיבחן אפשר הסתגלות הדרגתית לרמת המתמטיקה אשר מתאימה לכישוריהם. תהליך הדרגתי זה היה כרוך בפיתוח מכניזם של בקרה וניהול אצל התלמידים של התפיסה העצמית שלהם על אודות יכולתם, המוטיבציה שלהם והתנהגותם. לפי תוצאות המחקר, הבחירה העצמית של רמת ההיבחנות אפשרה לתלמידים לבחון את המטרות שלהם בהתאם לביצועים שלהם בבחינות.

התבוננות בהתפלגות התלמידים על פי רמת ההיבחנות בשלוש הבחינות (איור 1) מראה מעבר ממצב שבו רוב התלמידים בוחרים ברמה המורחבת (בחינה ראשונה) כלפי מצב (בחינה שלישית) שבו שני שלישים מהכיתה בוחרים בגרסה רגילה ואילו רק שליש אחד בוחר בגרסה המורחבת. העלייה ההדרגתית בציוני התלמידים גם היא מצביעה על העובדה שהתלמידים אשר שינו את גרסת ההיבחנות שלהם ביצעו החלטה נכונה.

הסיבות שניתנו על-ידי התלמידים בנוגע לבחירת גרסת ההיבחנות היו מגוונות והצביעו על תהליך של עיצוב המסוגלות העצמית של התלמידים בנוגע ליכולות המתמטיות שלהם על פי מטרות הלמידה שקבעו לעצמם ובהתאם להישגים שלהם בפועל. השינוי במספר מטרות הלמידה לאורך שלוש הבחינות (איור 3) גם מצביע על תהליך שבו התלמידים מנסים למצוא את מקומם בכיתה בהתאם לכישוריהם ולהישגיהם בפועל. כאשר משווים את שתי קבוצות התלמידים: ה"שמרנים" וה"משנים" אנחנו מוצאים שבעבור ה"משנים" היה מעבר מסיבות הקשורות ביכולת אחרי הבחינה הראשונה לסיבות הקשורות לגורמים חיצוניים ולניסיון ביצועי בבחינות קודמות אחרי הבחינות השנייה והשלישית. התפלגות הסיבות שניתנו על-ידי קבוצת ה"שמרנים", לעומת זאת, הייתה יציבה לאורך כל שלוש הבחינות בעבור רוב הקטגוריות. בעוד שקבוצת ה"שמרנים" הייתה מונעת בעיקר מהמטרות

אשר הציבה לעצמה, קבוצה ה"משנים" שינתה את הסיבות להחלפת גרסת הבחינה מסיבות הקשורות ביכולת לסיבות הקשורות בגורמים חיצוניים ובניסיון ביצועי בבחינות קודמות.

מטרות הלימוד של התלמידים היו בעיקר מטרות ביצוע והישג ורק התלמידים מקבוצת ה"שמרנים" קבעו לעצמם מטרות שליטה כמו להעמיק את ההבנה המתמטית שלהם.

אחד מתוצאות המחקר הוא השיפור באקלים הכיתתי. האקלים הכיתתי השתפר מאוד במהלך המחקר וביטויים של תסכול הפכו להיות נדירים. מעל הכול הובחנה עליה בתפיסת המסוגלות העצמית של התלמידים ללמוד מתמטיקה לאורך שלוש הבחינות. לכן אפשר לסכם כי לקראת תום שנת הלימודים של כיתה ט' קיבלו התלמידים החלטות נכונות בנוגע לרמת הלימוד במתמטיקה אשר מתאימה ליכולות שלהם.

אף שהמיקוד של מחקר זה הוא במתן אוטונומיה לתלמידים לבחור את רמת ההיבחנות, אנחנו סבורים שכדי לבצע פעולה זו הם בוחרים בהתנהגות לימודית אשר יש לה השפעה על עיצוב התפיסה העצמית שלהם על אודות היכולות המתמטיות שלהם. מונעים מהבחירה שלהם, אנחנו מאמינים שהם ייקחו אחריות על הלמידה שלהם ויקבלו בצורה טובה יותר את רמת הלימוד שעמה הם מסוגלים להתמודד. כאשר תלמיד בוחר רמת היבחנות מסוימת, הוא לוקח אחריות על ההשלכות הנובעות מבחירתו. תלמידים יודעים שאם הם רוצים להצליח ברמה מסוימת, עליהם להשקיע את המאמצים הדרושים במהלך תהליך הלמידה. כל בחירה שיעשו יכולה לסייע להם לעצב את הלמידה העתידית שלהם בהסתמך על מטרות, יכולות ותפיסה עצמית של יכולתם המתמטית.

בנוגע להשלכות לגבי הכשרת מורים, אנחנו מאמינים שבמהלך ההוראה חשוב שמורים ייחשפו לרעיונות כמו הרעיון המוצג במחקר הנוכחי אשר יכול לסייע להם בהתמודדות עם מצבים דומים. חשיפה כזו מעבירה את המסר שמורים צריכים להיות רגישים לצרכים/מצוקות של התלמידים שלהם ולהשקיע מאמצים ביצירת סביבת למידה תומכת בעבורם.

למרות שהמחקר הנוכחי בוצע בכיתת המתמטיקה, אנחנו מאמינים שהוא יכול להיות מיושם בהצלחה בכל נושא לימודי אחר.

לבסוף, כיוון שאוכלוסיית המחקר לא הייתה גדולה (20 תלמידים), אנחנו סבורים שיש לחזור על מחקר זה עם קבוצת תלמידים גדולה יותר כדי לבסס את תוצאות שהתקבלו.

מקורות

- Ah Chee Mok, I. (2009). In search of an exemplary mathematics lesson in Hong Kong: An algebra lesson on factorization of polynomials. *ZDM Mathematics Education*, 41(3), 319-332.
- Ames, C. (1992). Classrooms: Goals structures and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, 84(3), 261-271.
- Ames, C., & Archer, J. (1988). Achievement goals in the classroom: Students' learning strategies and motivation processes. *Journal of Educational Psychology*, 80(3), 260-267.
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (Vol. 4, pp. 71-81). New York, NY: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], *Encyclopedia of mental health*. San Diego, CA: Academic Press, 1998).
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York, NY: Freeman.
- Bellomo, C., & Wertheimer, C. (2010). A discussion and experiment on incorporating history into the mathematics classroom. *Journal of College Teaching Learning*, 7(4), 19-24.
- Black, A. E., & Deci, E. L. (2000). The effects of instructors' autonomy support and students' autonomous motivation on learning organic chemistry: A self-determination theory perspective. *Science Education*, 84, 740-756.
- Bong, M., & Skaalvik, E. M. (2003). Academic self-concept and self-efficacy: How different are they really? *Educational Psychology Review*, 15(1), 1-40.
- Bouffard-Bouchard, T., Parent, S., & Larivee, S. (1991). Influence of self-efficacy on self-regulation and performance among junior and senior high school aged students. *International Journal of Behavioral Development*, 14, 153-164.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York, NY: Plenum.
- Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology*, 53, 109-132.
- Graves G. H., Sulewski C. A., Dye H. A., Deveans T. M., Agras N. M., & Pearson, J. M. (2009). How are you doing? Assessing effectiveness in teaching mathematics. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 19(2), 174-193.
- Hall, M., & Ponton, M. (2005). Mathematics self-efficacy college freshman. *Journal of Developmental Education*, 28(3), 26-33.
- Hallam, S., & Ireson, J. (2007). Secondary school pupils' satisfaction with their ability grouping placements. *British Educational Research Journal*, 33(1), 27-45.
- Harris, K. R., Friedlander, B. D., Saddler, B., Frizzelle, R., & Graham, S. (2005). Self-monitoring of attention versus self-monitoring of academic performance: Effects among students with ADHD in the general education classroom. *Journal of Special Education*, 39(3), 145-156.
- Jarvela, S., & Jarvenoja, H. (2011). Socially constructed self-regulated learning and motivation regulation in collaborative learning groups. *Teachers College Record*, 113(2), 350-374.
- Kaygin, B., Balcin, B., Yildiz, C., & Arslan, S. (2011). The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, 15, 961-965.
- Maehr, M. L., & Midgley, C. (1996). *Transforming school cultures*. Boulder, CO: Westview Press.
- Neuendorf, K. (2002). *The content analysis guidebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Nicholls, J. G. (1989). *The competitive ethos and democratic education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pajares, F. (2002). Gender and perceived self-efficacy in self-regulated learning. *Theory into Practice*, 41(2), 116-125.
- Pajares, F., & Graham, L. (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. *Contemporary Educational Psychology*, 24(2), 124-139.
- Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self regulated learning. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M.

- Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 451-502). San Diego, CA: Academic Press.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68-78.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2002). Overview of self-determination theory: An organismic dialectical perspective. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Eds.), *Handbook of self-determination research* (pp. 3-33). Rochester, NY: University of Rochester Press.
- Stephanou, G. (2006). Effects of cognitive factors and teacher effectiveness on students' academic emotions and performance. In R. G. Graven, J. Eccles, & M. Tr. Ha (Eds.), *Proceedings of the 4th SELF Research Conference: Self-concept, Motivation, Social and Personal Identity for the 21st Century* (CD form). Sydney, Australia: SELF Research Center, University of Western Sydney. Retrieved from <http://self.uws.edu.au>
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1998). *Introduction to qualitative research methods* (3rd ed.). New York, NY: John Wiley.
- Usher, E. L., & Pajares, F. (2008). Sources of self-efficacy in school: Critical review of the literature and future directions. *Review of Educational Research*, 78, 751-796.
- Weiner, B. (1986). *An attribution theory of motivation and emotion*. New York, NY: Springer-Verlag.
- Weiner, B. (1992). *Human motivation: Metaphors, theories and research*. London, UK: Sage.
- Williams, G. C., & Deci, E. L. (1996). Internalization of biopsychosocial values by medical students: A test of self-determination theory. *Journal of Personality and Social Psychology*, 70, 767-779.
- Zimmerman, B. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45, 166-183.
- Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). San Diego, CA: Academic Press.
- Zimmerman, B. J. (2001). Theories of self-regulated learning and academic achievement: An overview and analysis. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Self-regulated learning and academic achievement: Theoretical perspectives* (2nd ed., pp. 1-37). Mahwah, NJ: Erlbaum.



פרופ' אילנה לביא

מכהנת כראש החוג למערכות חידע
ניהוליות במכללת עמק יזרעאל. בוגרת
הוראת המדעים במתמטיקה בטכניון.
תחומי המחקר שלה הם: התפתחות
מקצועית של פרחי הוראה ומורים
למתמטיקה וחקר קשיי לומדים בהבנת
מושגים מדעיים (במתמטיקה ובמדעי
המחשב). פרסמה מאמרים רבים בנושאים
אלו.



גב' אורלי צרפין

לימדה מתמטיקה בבית-הספר התיכון בבית
ירח במשך שנים רבות.
כיום מלמדת מתמטיקה בתיכון חדש בתל-
אביב. בעלת תואר שני בהוראת מתמטיקה
והמדעים - מכללת אורנים.

תפיסות של מרצים למתמטיקה במכללות לחינוך בנוגע להוראה וללמידה מקוונת של קורסים מתמטיים

עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך

תקציר

בשנים האחרונות הולכת ומתחזקת המגמה של הוראה מקוונת במוסדות להשכלה גבוהה, וכפועל יוצא מכך עולה הצורך לשנות, להתאים ולעדכן את הגישות החינוכיות המקובלות להוראה. מתוך אמונה שהבניית גוף הידע העדכני הרלוונטי צריכה להתבצע בסיוע המרצים עצמם, במחקר הנוכחי נעשה ניסיון לקבל תמונת מצב ראשונית בנוגע לקיומם של קורסים מקוונים במחלקות לחינוך מתמטי במכללות בישראל, וללמוד מקרוב על תפיסותיהם של המרצים באשר למגוון היבטים הקשורים להוראה וללמידה בסביבות מקוונות. במחקר השתתפו 73 מרצים, מתוכם 13 מרצים שכבר התנסו בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים ו-60 מרצים שטרם התנסו בכך. כל קבוצה של משתתפים השיבה על שאלון שכלל שאלות סגורות ופתוחות, שהותאם לניסיון שלה בהוראה מקוונת.

מתוך הממצאים עולה כי קיימים הבדלים בולטים בין שתי קבוצות המרצים שאפשר לייחס אותם לקיומה או להיעדרה של התנסות בהוראה מקוונת. כל המרצים שהתנסו בהוראה מקוונת רואים יתרונות מגוונים בהוראה/למידה מקוונת, והם דיווחו על כך שלמדו על היתרונות הללו במהלך ההתנסות. לעומתם, רבים מהמרצים שטרם התנסו בהוראה מקוונת לא ראו כל יתרון בהוראה/למידה מקוונת, וצפו קשיים מגוונים הן בהיבט של ניהול הקורס והן בהיבט של תהליכי למידה. הממצאים מעידים על הפוטנציאל של עצם ההתנסות בהוראה מקוונת להבנת היתרונות הטמונים בהוראה ולמידה מסוג זה. מכיוון שאפשר לשער שמרצים בלי ניסיון יכולים להימנע מהתנסות בהוראה מקוונת בשל הדימוי שבו הם מחזיקים, מוצע שיתנסו בכך תוך הכוונה של מרצים מנוסים, תוך גיבוש תפיסת עולם חינוכית המבוססת על פרקטיקה ולא על אמונות.

בסוף המאמר מועלות הצעות, בליווי דוגמאות, לרכיבים שמומלץ לכלול בקורסים מקוונים במתמטיקה ובחינוך מתמטי.

מילות מפתח: חינוך מתמטי; הוראה מקוונת; למידה מקוונת; מיומנויות לומד עצמאי; קריאת טקסטים מתמטיים.

מבוא

התפתחותה המואצת של טכנולוגיית המידע שינתה את העולם בלי היכר. ברחבי העולם, האינטרנט משמש כיום ככלי עצמתי להגברת הנגישות לחינוך, ובהתאם לכך הולכת ומשתנה גם המתכונת המקובלת להוראה וללמידה. מוסדות להשכלה גבוהה מתאימים את עצמם באופן מתמיד לשינויים אלה, כדי להשביח את ההוראה ולתת מענה עדכני לסטודנטים, למרצים, לסגל האדמיניסטרטיבי והטכני ועוד (Khan, 2001). אחד הביטויים הבולטים בשינוי מתכונת ההוראה והלמידה הוא המעבר ללמידה מקוונת (online learning), סביבת למידה השייכת לקטגוריה הרחבה יותר של למידה מרחוק (distance education) שמקיפה גם טכנולוגיות מוקדמות כגון קורסים הנלמדים בהתכתבות, קורסים הנלמדים באמצעות הטלוויזיה החינוכית ושיחות ועידה המתקיימות באמצעות וידאו (Means et al., 2010). קורסים מקוונים הם קורסים, שבהם לפחות 80% מתוכני הקורס מועברים באופן מקוון (Kocur & Kosci, 2009). טכנולוגיית הלמידה המקוונת מרחוק (Online Distance Education – ODL) מאפשרת העברה של משאבי למידה או תקשורת בין מרצים לסטודנטים באמצעות מערכת ניהול קורסים, מערכות מבוססות אינטרנט וטקסטים כתובים. בחלק מהמקרים הלמידה מתווכת על-ידי המרצה באמצעות שיחות ועידה (בכתב או בווידיאו) או דואר אלקטרוני, כדי לתמוך בהתפתחות הידע של הלומדים (Rudestam & Schoenholtz-Read, 2009).

בשנת 2003 החלו אלן וסימן (Allen & Seaman, 2011) לסקור את הנעשה בלמעלה מ-2,500 מכללות ואוניברסיטאות בארה"ב בתחום ההוראה המקוונת. מתוך סקר, שפרסמו בשנת 2011 בנוגע לרישום של סטודנטים לקורסים מקוונים, עולה כי למעלה משישה מיליון סטודנטים היו רשומים בשנה זו לקורס מקוון אחד לפחות. למעשה, מאז שנת 2003, השנה שבה החלו לבצע את הסקרים, חלה עלייה של 358% ברישום לקורסים מקוונים. עוד עולה מהסקר שהוראה מקוונת נתפסת על-ידי 65% מהמוסדות כשיקול אסטרטגי לטווח ארוך, כיוון שבדרך זו אפשר להגיע למגוון רחב של סטודנטים פוטנציאליים ולהזיל את עלויות ההוראה, וכי כשני שלישים מהמרצים סבורים שסטודנטים הלומדים במתכונת מקוונת משיגים תוצאות זהות או אף טובות יותר מאלה המושגות במתכונת של פנים-אל-פנים. תמיכה לכך אפשר למצוא בסקירת מחקרים שערכו מינס ועמיתיה (Means et al., 2010), אשר עולה ממנה כי סטודנטים שלמדו בקורסים מקוונים לא השיגו תוצאות שונות באופן מובהק מסטודנטים שלמדו במתכונת של פנים-אל-פנים במונחים של יעילות ושל תוצרי הלומדים. מכאן הסיקו קובעי המדיניות שאם הוראה מקוונת מביאה לתוצאות דומות לאלה של ההוראה המסורתית, הרי שאפשר להצדיק יוזמות להוראה מקוונת על בסיס של עלות-תועלת או על בסיס הצורך להנגיש את החינוך באופן רחב יותר.

כיום, קיימים שלושה סוגים עיקריים של קורסים המבוססים על הוראה מרחוק: 1. קורסים המשתמשים בתקשורת א-סינכרונית בין המרצה לסטודנטים (למשל דואר אלקטרוני, אתר קורס, פורומים, קבוצות דיון), המאפשרת לסטודנטים להשתתף בקורס במועדים המתאימים להם; 2. קורסים המבוססים על תקשורת סינכרונית (למשל צ'אטים, חדרי וידאו), הדומים יותר לשיטת ההוראה המסורתית המקובלת במתכונת של פנים-אל-פנים; 3. קורסים המאופיינים על-ידי שילוב של

טכנולוגיה א-סינכרונית וטכנולוגיה סינכרונית, או שילוב של הוראה מרחוק ומפגשי פנים-אל-פנים. אחד הפורמטים הא-סינכרוניים ההולכים וצוברים תאוצה, שבו לא נדון במסגרת זו, הוא קורס מקוון פתוח מסיבי (Massive Open Online Courses – MOOC). פורמט זה החל להתפתח בשנת 2011, כאשר מספר פרופסורים מאוניברסיטת סטנפורד פיתחו קורסים מקוונים במדעי המחשב אשר משכו אליהם אלפי סטודנטים מרחבי העולם. בקורסים מסוג זה הלומדים אינם נדרשים בדרך כלל לשלם שכר לימוד, ומטרתם העיקרית היא להנגיש את הידע לכל מי שחפץ בו. ממוצע הלומדים בכל אחד מהקורסים הקיימים כיום ברשת הוא כ-33,000. בסקר שנערך לאחרונה השתתפו 103 מרצים המלמדים בקורסים כאלה, ונמצא שכ-80% מהם תומכים נלהבים בגישה (Kolowich, 2013).

המספר המרשים של סטודנטים הלומדים בקורסי MOOC, וממצאי הסקרים של אלן וסימן מצביעים על כך שההוראה מרחוק היא כיום "עובדה קיימת", בעלת כוח משיכה, וכפי הנראה התופעה תלך ותתפשט ברחבי העולם. לאור זאת, ראוי לתת את הדעת למגוון ההיבטים החינוכיים הקשורים לכך. בהקשר ספציפי להוראת מתמטיקה, אין ספק שהפדגוגיות המקובלות צריכות לעבור התאמה, הרחבה ושינוי, אם רוצים להפוך את המתמטיקה לנגישה באמצעות קורסים מקוונים. אולם יש לזכור שמהפכות בתחום החינוך האקדמי לא יכולות להתרחש בלי שיתוף פעולה של המרצים עצמם, והנכונות שלהם לשנות את דרכי ההוראה שלהם. לכאורה יש כאן מלכוד, שכן מצד אחד דרכי הוראה מושפעות מאמונות חינוכיות ומתפיסת התפקיד החינוכי (Pajares, 1992; Richardson, 2003), ומצד אחר יש הגורסים ששינוי אמונות יכול להתרחש רק בעקבות התנסות מוצלחת (למשל, Kay, 2006). לכן, על פניו, נראה שרק לאחר שמרצים יתנסו בהוראה מקוונת, הם יוכלו לנסח את האמונות ואת התפיסות החינוכיות שלהם בנוגע למידת ההתאמה של מתכונת הוראה ולמידה זו לתפיסת עולמם.

לאור זאת, מטרתו של המחקר המתואר במאמר זה הייתה לבחון את תפיסותיהם של מרצים למתמטיקה במכללות להוראה בישראל בנוגע להיבטים מגוונים הקשורים להוראה וללמידה מקוונת. במחקר השתתפו 73 מרצים, מתוכם 13 מרצים בעלי ניסיון קודם בהוראת קורסים מתמטיים במתכונת מקוונת, ו-60 מרצים חסרי ניסיון קודם בהוראה מסוג זה.

1. רקע תאורטי

בפרק זה נסקור בקצרה כמה מההיבטים הנוגעים להוראה וללמידה מקוונת. במיוחד נתייחס לחלק מהגורמים המשפיעים על הצלחתם של קורסים מקוונים, ולגורמים התומכים או מעכבים את היכולת של סטודנטים להתמיד בלמידה בקורסים מסוג זה. בהמשך נדון בסוגיה של למידה מתוך טקסטים אלקטרוניים, ובקשיים העולים מתוך קריאה של טקסט מתמטי.

1.1 גורמים המעודדים התמדה בלמידה בקורסים מקוונים או המעכבים אותה

הצלחתו של קורס מקוון נמדדת במקרים רבים בהתאם ליכולת הלומדים להתמיד בו ולסיימו בהצלחה. התמדה בלמידה נחקרה בעיקר בהקשר של הוראה המסורתית, וכמעט ולא נחקרה בהקשר להוראה

מרחוק. בעוד שבהקשר של קורסים הנלמדים במתכונת של פנים-אל-פנים מרבית המחקרים בתחום התייחסו להתמדה במונחים של השלמת חובות הקורס, הרי שבהקשר של למידה מרחוק התמדה קשורה למערכת מורכבת יותר של גורמים שאינה נוגעת רק לידע הדרוש לסיום הקורסים בהצלחה (Hart, 2012). מספרות המחקר (למשל, Liu, Gomez & Yen, 2009) עולה, כי אף שבאופן כללי סטודנטים, הלומדים בקורסים מקוונים, מדווחים על שביעות רצון דומה לזו שעליה הם מדווחים בקורסים המתקיימים במתכונת ההוראה המסורתית, הרי שההוראה מרחוק מציבה אתגרים הנוגעים לחוסר היכולת של חלק מהסטודנטים להשלים את חובותיהם בקורסים המקוונים, וכפועל יוצא מכך – לחוסר היכולת שלהם להשלים את תכנית הלימודים בכללותה.

את המשאבים התומכים בלמידה המכוונת מקובל לחלק למשאבים אנושיים, משאבים טכנולוגיים ומשאבי התכנים המקוונים:

1.1.1 המשאבים האנושיים

המשאבים האנושיים מתייחסים, בין השאר, לגורמים המוסדיים, למאפייניהם של המרצים בקורסים ולמאפייני הסטודנטים.

א. הגורמים המוסדיים קשורים לתמיכה הכללית והטכנולוגית שמספקים המוסדות למרצים ולסטודנטים, כגון תמיכה טכנית, זמינות מחשבים ונגישות לחומרי הלימוד (Allen & Seaman, 2005; Govindasamy, 2002). יצירת תשתית טובה וזמינות של תמיכה טכנית וטכנולוגית הם תנאי הכרחי לקיומו של קורס מקוון.

ב. מאפייני המרצים קשורים לכישורים הטכנולוגיים שלהם, לעמדות שלהם כלפי הסטודנטים, לסגנון ההוראה שלהם בקורסים המקוונים, לאופן שבו הם מעודדים אינטראקציה בינם לבין הלומדים ובין הלומדים לבין עצמם, אופן התמיכה שלהם בסטודנטים ועוד (Allen & Seaman, 2005; Govindasamy, 2002; Selim, 2007; Volery & Lord, 2000). למעשה, למרצים יש תפקיד מרכזי בקביעת היעילות ובמידת ההצלחה של הסטודנטים הלומדים בקורסים המקוונים, מכיוון שבמהותם קורסים אלה מאופיינים בכך שהפדגוגיה המיושמת בהם היא של "הלומד במרכז", גישה המטילה על הלומדים אחריות רבה ללמידה שלהם (Butler & Cartier, 2004). לכן יש להבטיח שהמרצים בקורסים המקוונים מבינים את מהותה של פדגוגיה זו, ויודעים ליישמה היטב.

חשיבות מרובה מיוחסת לאיכות האינטראקציה בין המרצה ללומדים כמו גם למשוב שניתן ללומדים. בהיעדר תמיכה ישירה, בדומה לזו הניתנת ללומדים במתכונת של פנים-אל-פנים, יש חשיבות רבה לאינטראקציה השוטפת בין המרצה ללומדים, ובפרט לתמיכה הניתנת להם באופן מקוון. המשמעות של "תמיכה" היא רחבה, ולכן חשוב שהמרצה יהיה קשוב לצורכי הסטודנטים ויביע נכונות להיענות לצורכיהם. תמיכה רגשית וקוגניטיבית תבוא לידי ביטוי במשוב שוטף שהמרצה יספק לסטודנטים, שבו יכוון אותם לנקודות התורפה והחוזק שלהם, ואילו תמיכה טכנית תתבטא במתן סיוע שיאפשר לסטודנטים להתגבר על חסמים וקשיים טכנולוגיים. יש לציין שסטודנטים התופסים את הקורס ככזה הנעדר תמיכה טכנית רואים בכך חיסרון העולה על

הקשיים הטכניים עצמם (Bunn, 2004). אולם אין להסתפק באינטראקציה בין המרצה ללומדים (Aragon & Johnson, 2008). מרצים צריכים ליצור בקורס המקוון סביבה שתאפשר **נוכחות חברתית**, כלומר לזמן **אינטראקציה בין הלומדים לבין עצמם**. החשיבות של אינטראקציה זו נגזרת מתוך ממצאים המעידים על כך שהתמדה קשורה, בין השאר, לאמונה של הסטודנטים בכך שסביבת הלמידה המקוונת מאפשרת להם ליצור קשרים חברתיים, ולצורך שלהם בתחושת השתייכות לקהילייה וירטואלית שאפשר לשאוב ממנה עידוד ותמיכה. לכן חשוב שהמרצה יזום פעילויות המניעות דיונים ושיח, וישרה אווירה שבה הסטודנטים יחוו בנוח מבחינה חברתית להביע את דעתם בקבוצת הדיון של הקורס. בהקשר זה נמצא שלכמות הזמן שבה מעורבים הסטודנטים בלמידה (קריאה, תגובה לפוסטים, צפייה בדיונים ותגובה לדיונים וכדומה) יש קשר ישר עם התמדה (Liu et al., 2009).

ג. **מאפייני הסטודנטים** קשורים לידע קודם **בשימוש בטכנולוגיה**, תפיסות בנוגע לעצם **הרעיון של למידה מקוונת**, **המוטיבציה שלהם ללמוד** באופן עצמאי, **היכולת שלהם לקיים אינטראקציה** מקוונת עם המרצה ועם לומדים אחרים ועוד (Selim, 2007; Volery & Lord, 2000). כדי להבטיח רמה מסוימת של התמדה, חיוני שתהיינה ללומד **מיומנויות מחשב** בסיסיות (Harrell & Bower, 2011). עוד גורם הקשור ליכולתם של סטודנטים להתמיד בקורסים מקוונים הוא **השנתון** שבו הם לומדים. ככל שהסטודנט לומד בשנתון מתקדם יותר, ונשאר לו זמן קצר יותר לסיום לימודיו, קיים סיכוי גבוה יותר לכך שיתמיד בקורס מקוון. נראה שהסיבה העיקרית היא הניסיון המצטבר של הסטודנטים והביטחון העצמי שלהם כלומדים (Levy, 2007). גם **המחויבות** שחשים הסטודנטים **לסיים את לימודיהם** לתואר קשורה קשר חיובי להתמדה בקורסים מקוונים. סטודנטים בעלי תחושת מחויבות גבוהה בדרך כלל תופסים את ההשכלה כאמצעי להגשמת שאיפות ולהשגת מטרות עתידיות (Ivankova & Stick, 2005). **ממוצע ציונים** של סטודנטים בתואר נמצא אף הוא כמנבא התמדה. נראה שהסיבה לכך היא העובדה שציונים גבוהים מעידים על יכולת אקדמית, וסטודנטים בעלי יכולות אקדמיות גבוהות יותר מצליחים טוב יותר לתמרן בסביבה המקוונת ולאמץ התנהגויות אקדמיות המאפשרות להם להצליח בקורסים הללו (Harrell & Bower, 2011).

אולם מעבר לגורמים המוזכרים לעיל, ספרות המחקר מייחסת חשיבות בעיקר **לתחושת המסוגלות העצמית** של הלומדים ולקיומן של **מיומנויות לומד עצמאי**:

תחושת מסוגלות עצמית, ציפיותיהם של הסטודנטים מעצמם ונחישות לסיים את הקורס בהצלחה זוהו במחקרים רבים כקריטריונים העיקריים המבחינים בין סטודנטים המתמידים בלימודיהם בקורסים מקוונים לבין כאלה המתקשים להתמיד בכך (Holder, 2007). קריטריונים אלה קשורים גם למיקוד שליטה פנימי, לגמישות מחשבתית, למוטיבציה עצמית, לרצון להתמודד עם אתגרים, וליכולת לקחת אחריות על הלמידה. כל אלה עומדים למבחן בעיקר בעת שבה סטודנטים נתקלים בקשיים ונדרשים להגביר מאמץ. בתמורה, סטודנטים בעלי תחושת מסוגלות עצמית גבוהה ונחישות יחוו סיפוק מכך שהם מתפתחים מבחינה אישית, וסיפוק זה כשלעצמו יתרום להתמדה (Parker, 2003).

היעדר **מיומנויות לומד עצמאי** הוא אחד מהגורמים המשמעותיים ביותר בהקשר של חוסר היכולת

של סטודנטים להתמיד בקורסים מקוונים (Azevedo & Cromley, 2004). וויסות עצמי של הלמידה (Self-Regulated Learning – SRL) מתייחס ליכולת של הלומדים להבין את סביבת הלמידה שלהם ולשלוט בה, תוך וויסות עצמי של מחשבות, תחושות ופעולות הננקטות לצורך הגשמת מטרות אישיות (Zimmerman, 2000). בהתאם לצימרמן, למידה נתפסת כפעילות שתלמידים עושים בעבור עצמם באופן פעיל, ולא כתגובה פסיבית להוראה. מכיוון שוויסות עצמי אינו יכולת מנטלית, אלא תהליך שבו הלומדים הפוכים את היכולות המנטליות שלהם למיומנויות אקדמיות, המודל של צימרמן מניח שלכל הלומדים יש מיומנויות SRL, אולם קיימים ביניהם הבדלים הנוגעים לאיכות הלמידה וליכולות הלומדים. צימרמן טוען שלמידה כוללת שלושה מרכיבים עיקריים: קוגניציה (מיומנויות הדרושות לקידוד, שינון וזכירה של מידע), מטא-קוגניציה (מיומנויות הקשורות להבנה ולניתוב התהליכים הקוגניטיביים), ומוטיבציה (אמונות ועמדות המשפיעות על הפעלת המיומנויות המטא-קוגניטיביות והתפתחותן). כל אחד משלושת המרכיבים הללו הוא הכרחי, אך לא מספיק, לוויסות עצמי, מכיוון שיש ביניהם קשרים פנימיים.

למרות שמחקרים מצביעים על החשיבות של מיומנויות SRL, במהלך שנות בית-הספר מורים מעטים מפתחים מיומנויות אלה בקרב תלמידיהם. כתוצאה מכך, רבים מהסטודנטים מתחילים את לימודיהם באקדמיה ללא מיומנויות SRL בסיסיות. מדובר במכשלה משמעותית בעבורם, שכן בניגוד למרבית ההתנסויות המתרחשות במסגרת בית-הספר, מערכת ההשכלה הגבוהה דורשת מהסטודנטים להשתתף השתתפות פעילה בלמידה שלהם, לדעת להציב לעצמם מטרות ולתכנן את אסטרטגיות הלמידה שלהם בהתאם, להיות בעלי משמעת עצמית ויוזמה, לפתח מוטיבציה פנימית ללמידה, לדעת כיצד אפשר להשיג עזרה לצורך הגשמת המטרות האקדמיות שלהם, ולהיות מסוגלים להעריך את האופן שבו ביצעו את המשימות האקדמיות (McKeachie, 2011). מכיוון שמיומנויות הקשורות לוויסות עצמי של הלמידה אינן נרכשות או מתפתחות באופן ספונטני, יש לפתח מיומנויות אלה באמצעות הכוונה מפורשת (Ge & Land, 2003).

1.1.2 משאבים טכנולוגיים ומשאבי התכנים המקוונים

המשאבים הטכנולוגיים מתייחסים למאפייני פלטפורמת הקורס המקוון, קלות הגישה וההתמצאות, מהירות התקשורת האינטרנטית, רמת האינטראקציה שאפשר לקיים, עיצוב הממשק ועוד. לעיצוב הממשק יש השפעה על התקשורת ועל ביצוע פעילויות הלמידה של הקורס. הממשק צריך להיות ידידותי וקל להתמצאות, בבחינת "מה שאתה רואה זה מה שאתה מקבל" (Allen & Seaman, 2005; Papp, 2000; Selim, 2007).

משאבי התכנים המקוונים קשורים בעיקר לאופן שבו המרצה בונה את הקורס, הגמישות שהוא מאפשר מבחינת לוחות הזמנים ותוספי הלמידה (לדוגמה, הפניות למקורות נוספים) (Papp, 2000). קורסים המאפשרים ללומדים גמישות בניהול זמן הלמידה תורמים להתמדה בלמידה, בפרט בשל העובדה שהלומד יכול להתאים את מועד הלמידה שלו למחויבות אחרות, כגון משפחה ועבודה. עם זאת, בקורסים שבהם מועדי הלמידה גמישים יש חשיבות מרובה להרגלי הלמידה של הסטודנטים וליכולתם לנהל את הזמן שלהם ביעילות (Ivankova & Stick, 2005). סגנון הלמידה האישי מהווה

את אחד החסמים ליכולת ההתמדה בקורסים מקוונים. לדוגמה, סטודנטים בעלי סגנון למידה שמיעתי עלולים לנשור מקורס מקוון המבוסס בעיקר על מידע כתוב, בשל הקושי שלהם לעבד מידע מסוג זה. לכן חשוב להקפיד על ייצוג המידע בדרכים מגוונות, תוך ניצול מלוא הפוטנציאל של המדיה האלקטרונית (Harrell & Bower, 2011). מרצים יכולים להיעזר, נוסף לטקסטים כתובים, במצגות קוליות, סרטונים, יישומנים, צילומי שיעורים ועוד, ובכך להתאים את משאבי התכנים המקוונים למגוון רחב ככל האפשר של סגנונות למידה.

1.2 קריאה עצמאית של טקסטים במסגרת קורס מקוון

קיימת ספרות ענפה ורחבה העוסקת בהיבטים השונים של קריאת טקסטים מודפסים וטקסטים אלקטרוניים והקשיים שבהם נתקלים הלומדים כאשר הם מתמודדים עם קריאה עצמאית של טקסטים מסוגים שונים. במסגרת זו לא נוכל להתייחס למגוון הממדים הנוגעים לכך, ולהלן נתייחס בקצרה לכמה מההיבטים הקשורים ללמידה מטקסטים, ובפרט לקשיים המלווים את תהליך הקריאה העצמאית והקשר שיש לכך למיומנויות לומד עצמאי. בנוסף, יוצגו ממצאים מתוך ספרות המחקר המצומצמת העוסקת בקריאה של טקסטים מתמטיים. יש לציין, כי למרות חיפוש מעמיק בספרות המחקר, לא הצלחתי למצוא מחקרים הדנים בקריאת טקסטים אלקטרוניים שעוסקים במתמטיקה.

1.2.1 למידה מטקסטים אלקטרוניים

סטודנטים הלומדים בקורסים מקוונים נדרשים לעתים קרובות לקרוא וללמוד מתוך כמות נכבדה של טקסטים אינפורמטיביים. בטקסטים יכולים להופיע קישורים לתוכן נוסף, ולעתים קרובות משולבים בהם גרפיקה, אנימציות וסרטים (Bol & Garner, 2011). סקר הספרות שערכו בן-יהודה ועשת-אלקלעי (Ben-Yehudah & Eshet-Alkalai, 2014) מצביע על האתגרים הרבים המלווים את הקריאה של טקסטים אלקטרוניים, ביניהם – הריחוק מצג המחשב לעומת קרבתו של דף מודפס; שורות טקסט ארוכות בפורמט האלקטרוני, המקשות על תנועת העיניים; קריאה בעלת אופי שאינו ליניארי בשל קישורים המופיעים בטקסט, מה שפוגם בהבנת הנקרא ועוד. כל אלה יוצרים על הקורא עומס קוגניטיבי המקשה על הלמידה. אכן, מצד אחד, סביבות היפרמדיה, בהיותן גמישות ומאפשרות גישה לייצוגים מרובים, נחשבות לכלי למידה יעיל לפיתוח מודלים מנטליים. אולם מצד אחר, כדי שהלומדים בסביבות כאלה יוכלו להפיק מהן את המיטב, עליהם להיות בעלי מיומנויות SRL גבוהות, מכיוון שניווט בין ייצוגים שונים ולמידה מהם דורשים יכולת גבוהה של מעקב עצמי. לומדים שאינם בעלי מיומנויות SRL מספקות עלולים 'ללכת לאיבוד' בתוך שפע האופציות הפרושות בפניהם בסביבות ההיפרמדיה, ובכך מגוון הייצוגים הופך לחיסרון ולמעכב למידה במקום ליתרון (Greene & Azevedo, 2009).

בן-יהודה ועשת-אלקלעי (Ben-Yehudah & Eshet-Alkalai, 2014) סקרו מחקרים שעסקו בהבדלים בין הבנת הנקרא מתוך טקסטים מודפסים לבין הבנת הנקרא מתוך טקסטים אלקטרוניים. מהמחקרים עולה היתרון הברור של טקסטים מודפסים, כאשר שימוש בכלים אלקטרוניים המאפשרים להדגיש חלקים בטקסטים יכול לשפר במעט את הבנת הנקרא של הטקסטים האלקטרוניים. במחקר שערכו בן-

יהודה ועשת-אלקלעי נמצא כי להדגשת חלקים בטקסט ולרישום הערות נלוות על גבי הטקסט עצמו לא הייתה השפעה על הבנת הנקרא של טקסטים מודפסים וטקסים אלקטרוניים כאשר הקוראים התבקשו להשיב על שאלות ברמה עובדתית המתייחסות לטקסט, אך הייתה לכך השפעה חיובית על היכולת של הקוראים להתמודד בהצלחה עם שאלות הדורשות הסקה. השפעה זו ניכרת רק במקרה של הטקסטים המודפסים, אך לא במקרה של הטקסטים האלקטרוניים. לאור זאת, החוקרים קוראים להעמיק את התובנות בנוגע לגורמים המשפיעים על הבנת טקסטים אלקטרוניים.

בהינתן החשיבות של מיומנויות SRL להבנת הנקרא בכלל, ובמקרה של טקסטים אלקטרוניים בפרט, חשוב ללוות את הטקסט האלקטרוני בשאלות שתעוררנה את הסטודנטים לבצע רפלקציה על הידע הקודם שלהם, ועל הקשר שבין הידע החדש לידע הקודם, או בשאלות הדורשות מהלומד לתת תשובה המשלבת בין הידע החדש לידע הקיים (Greene & Azevedo, 2009). מחקרים (למשל, Azevedo & Cromley, 2004) מצאו שאפילו אימון קצר המשולב בהסברים מפורטים על השלבים שיש לעבור כדי לפתח מיומנויות SRL עשוי לסייע ללומדים לבצע אינטראקציה עם טקסטים אלקטרוניים.

1.2.2 קריאה של טקסטים מתמטיים

בבית-הספר, ספרי הלימוד במתמטיקה הם בעיקר אוסף של בעיות ומשימות, ולכן לעתים קרובות הקריאה מוגבלת לקריאת הטקסט של הבעיות והמשימות הללו (Foxman, 1999). בשל כך, המידה שבה התלמידים מבינים את הטקסטים משפיעה על היכולת שלהם לפתור את הבעיות, ולחלופין מהווה מכשול ללמידה. לכן הקריאה של טקסטים מתמטיים כשלעצמה אין בה הזדמנות ללמידה, אלא רק תנאי הכרחי לכך שהתלמיד יהיה מעורב בסיטואציות שבהן מתרחשות פעילויות של פתרון בעיות (Österholm, 2005).

לומדים רבים, בכל הרמות, מתקשים בקריאת טקסטים מתמטיים. טקסט מתמטי שונה מטקסטים בנושאים אחרים, כיוון שהוא כולל יותר מושגים בכל משפט ופסקה מאשר כל סוג אחר של טקסט. טקסטים מתמטיים כתובים בסגנון חסכני, מכילים שילוב של מלל, מספרים וסמלים, וכל משפט מכיל מידע רב, בלי עודפים. בנוסף, מבנה הדף הוא כזה המחייב את העין לנוע בתבניות שונות מאשר כיוון הקריאה המקובל בטקסט מילולי. הטקסט יכול לשלב גם ייצוגים גרפיים שיש לפענח. לעתים קרובות מטרתם של הייצוגים הללו היא להוסיף להבנת הטקסט, אולם הם יכולים גם לגרום להסחת הדעת (Barton & Heidema, 2002). נוסף לעיצוב ולמבנה הייחודי של מרבית הטקסטים המתמטיים, המבנה הדקדוקי הבסיסי של בעיות מתמטיות שונה ממבנה המשפטים בכתיבה הבלתי פורמלית. כאשר קוראים טקסט בשפה הטבעית, יש נושא בתחילת המשפט, והמשפטים בהמשך מרחיבים את הרעיון המרכזי ותומכים בו. בבעיה מתמטית הרעיון הבסיסי מופיע לעתים קרובות בסוף הפסקה, בצורה של שאלה או טענה שיש להוכיח. תלמידים מוכרחים ללמוד לקרוא את השאלה כדי לקבוע מהם הרעיונות המרכזיים, ואז לקרוא שוב את הנתונים כדי להבין מהו המידע המתייחס לשאלה שעליה יש להשיב, ומהו המידע שאינו רלוונטי. התלמידים צריכים גם להבין את ההקשר של הבעיה ורק אז ליישם אסטרטגיות שלדעתם יובילו לפתרון, תוך שימוש במידע מתאים (Metsisto, 2005).

בספרות המחקר אפשר למצוא מחקרים בודדים העוסקים באופן שבו לומדים מבינים ומפרשים טקסטים מתמטיים, והקשיים שבהם הם נתקלים, ובפרט בהקשר של לימודים במסגרות אקדמיות.

וואטקינס (Watkins, 1977, 1979) בחנה את כישורי הבנת הנקרא של סטודנטים הלומדים במכללה באמצעות שימוש בארבעה סוגים של טקסטים מתמטיים שעסקו באותו נושא: טקסט אחד כלל סמלים מתמטיים, טקסט אחד לא כלל סמלים מתמטיים, טקסט אחד עשה שימוש במבנים דקדוקיים של "אנגלית מתמטית" וטקסט אחד עשה שימוש באנגלית מדוברת. ממצאי המחקרים שערכה הצביעו על כך ששילוב סמלים בטקסט אינו מסייע או מפריע להבנת הנקרא כאשר מדובר בסטודנטים עם רקע מוגבל במתמטיקה, אולם הוא עשוי לעזור לסטודנטים בעלי ידע מתקדם יותר. בנוסף, נמצא שהסטודנטים שקראו את הטקסט שהוצג בשפה המדוברת, האנגלית "הרגילה", גילו הבנה טובה יותר של הטקסט. בעקבות מחקרה של וואטקינס, אוסטרהולם (Österholm, 2005) השווה בין האופן שבו מבינים תלמידי תיכון וסטודנטים שלושה טקסטים שונים: שני טקסטים מתמטיים וטקסט היסטורי אחד. לשני הטקסטים המתמטיים היו תכנים זהים, והם עסקו במושגים בסיסיים בתורת הקבוצות, אך אחד מהם נכתב בשפה הטבעית והשני נכתב באמצעות סמלים מתמטיים שהיו מוכרים לנבדקים. הטקסט ההיסטורי נכתב בשפה הטבעית, ואורכו של כל טקסט היה עמוד אחד. החוקר התמקד בהבדלים שבין ההשפעה של התוכן ותחום הדעת לבין ההשפעה של הייצוג על הבנת הנקרא, ובניגוד למחקרה של וואטקינס, השאלות שהתבקשו הנבדקים להתייחס אליהן, היו שאלות ברמת יישום ולא ברמת הבנה או ידע. ממצאי המחקר הצביעו על כך שהבנת הנקרא של כל הטקסטים הושפעה באופן שווה על-ידי הידע המתמטי/ההיסטורי הקודם של הנבדקים. בהשוואה בין הקבוצות שקראו את הטקסטים המתמטיים, לפי ידע מתמטי קודם, נמצא שהקבוצה שקראה את הטקסט ללא הסמלים הבינה אותו טוב יותר. תוצאות אלה מצביעות על הבדל בהבנת הנקרא בין שני סוגים של טקסטים מתמטיים. השוואה בין התלמידים לבין הסטודנטים בשלושת הטקסטים, לפי ידע קודם, העלתה שלא נמצאו הבדלים מובהקים בנוגע להבנת הנקרא של הטקסט עם הסמלים. אולם, בעבור הטקסט ללא הסמלים נמצאו הבדלים מובהקים בין הקבוצות, לטובת הסטודנטים. נוסף על כך, על אף שלסטודנטים היה ידע קודם בהיסטוריה קלוש יותר מאשר לתלמידים (הבדל כמעט מובהק), הם הצליחו לענות טוב יותר על השאלות. תוצאות אלה מצביעות על כך שקיים סוג של ידע ו/או יכולת קריאה שמפותחים יותר בקרב סטודנטים מאשר בקרב תלמידים, אך ידע זה או יכולת זו משפיעים על הבנת הנקרא רק כאשר מדובר בטקסט ללא סמלים. המשמעות היא שקיים סוג אחר של ידע או יכולת קריאה המשפיעים על הבנת הנקרא של טקסטים מתמטיים הכתובים באמצעות סמלים. מכאן הסיק החוקר שמתמטיקה כשלעצמה אינה ההיבט הדומיננטי המשפיע על תהליכי הבנת הנקרא, אלא בעיקר השימוש בסמלים בטקסט, וכאשר קוראים טקסטים מתמטיים יש צורך בכמה סוגים של מיומנויות. לעומת זאת, בקריאת טקסט מתמטי הכתוב בשפה הטבעית אפשר להסתפק במיומנות כללית של קריאה.

על אף הקשיים הכרוכים בקריאת טקסטים מתמטיים, הרי שכפי שעולה מתוך סקר הספרות של אוסטרהולם (Österholm, 2005), עצם קריאת הטקסטים הללו הוא חלק הכרחי ממתמטיקה ומידע מתמטי, משום שהוא כולל את היכולת לתת פרשנות ולהבין את הטקסטים. לכן, קריאה של טקסטים מתמטיים והבנת הנקרא צריכים להיות חלק מפורש ובלתי נפרד מהחינוך המתמטי, ויש לראות בהם הזדמנות ללמידה. לפיכך, כאשר שמים דגש בפיתוח מיומנויות SRL, חשוב לשאול את הלומדים שאלות על מבנה הטקסט (Metsisto, 2005).

בפרק זה הוצג חלק קטן ממגוון המחקרים העוסקים בהיבטים שונים של למידה והוראה במסגרת קורסים מקוונים, וכן הוצגה התייחסות לנושא הקריאה של טקסטים אלקטרוניים וטקסטים מתמטיים. לאור העובדה שההוראה המקוונת הולכת ותופסת בהדרגה את מקומה במסגרות אקדמיות שונות, אך טבעי הוא שמרצים למתמטיקה במכללות יידרשו בעתיד הקרוב ללמד, בין השאר, בסביבות למידה מסוג זה. מתכונת ההוראה המקוונת יוצרת מציאות חדשה המולידה את הצורך בבניית גוף ידע אשר יעסוק בהרחבתן של הפדגוגיות הקיימות, ובהתאמתן לסוגיות העולות מתוך הפורמט של הוראה ולמידה של מתמטיקה בסביבות מקוונות. בתוך כך, המחקר המתואר להלן הוא ניסיון להניח תשתית ראשונית לבניית גוף הידע הרלוונטי להוויה של הוראה מקוונת של קורסים מתמטיים וקורסים העוסקים בחינוך מתמטי במכללות לחינוך בישראל.

2. המחקר

בפרק זה יתוארו ממצאים מתוך מחקר שעסק בתפיסות של מרצים למתמטיקה במכללות לחינוך בנוגע ליתרונות ולחסרונות של הוראה ולמידה במתכונת מקוונת, ובמידת החשיבות שהם מייחסים ללמידה בסביבה כזו.

2.1 הרקע לביצוע המחקר

לפני כארבע שנים, לפני שהתחלתי לתכנן קורס מקוון בתולדות המתמטיקה, חיפשתי בספרות המחקר מידע שיוכל לסייע לי בתכנון הקורס. מכיוון שהקורס מבוסס על קריאה עצמאית של טקסטים מתמטיים, החיפוש התמקד בקורסים מקוונים בעלי מאפיין דומה. לצערי, לא הצלחתי למצוא בספרות המקצועית מאמרים מסוג זה, ולכן סברתי שיש לעשות את הצעדים הראשונים בהבניית גוף הידע הרלוונטי תוך שיתוף קהיליית המרצים למתמטיקה במכללות, ולמידה מתוך הניסיון והתובנות של חבריה. לצורך זה פניתי למרצים המלמדים במחלקות לחינוך מתמטי במכללות, כפי שיתואר להן.

2.2 מטרת המחקר

מטרת המחקר הייתה לקבל תמונת מצב עדכנית בנוגע לקיומם של קורסים מקוונים במתמטיקה (ובכלל זה קורסים העוסקים גם בחינוך מתמטי באופן כללי) במכללות, וללמוד מקרוב על תפיסותיהם של המרצים בנוגע למגוון היבטים הנוגעים להוראה וללמידה בקורסים מסוג זה.

2.3 כלי המחקר

לצורך המחקר נעשה שימוש בשאלון שנכתב במתכונת של גוגל דוקס. השאלון נכתב בשתי גרסאות: גרסה המיועדת למרצים **חסרי ניסיון** קודם בהוראה של קורסים מקוונים במתמטיקה (ראו נספח א), וגרסה המיועדת למרצים **בעלי ניסיון** קודם בהוראה של קורסים מקוונים במתמטיקה (ראו נספח ב).

החלק הראשון של השאלון כלל שאלות שבהן התבקשו המשיבים לספק מידע כללי (שם המכללה, ותק בהוראה במכללות, וסוג ההתמחות של הסטודנטים שהם מלמדים). החלק השני של השאלון כלל שמונה שאלות פתוחות ושתי שאלות סגורות בגרסה למרצים **חסרי ניסיון** קודם, ו-10 שאלות פתוחות

ושתי שאלות סגורות בגרסה למרצים בעלי ניסיון קודם. חמש מבין השאלות הפתוחות ושתי השאלות הסגורות היו זהות בשני השאלונים. בסיום השאלונים הוזמנו המרצים להעיר הערות נוספות. השאלות נבנו על בסיס ספרות המחקר שהוצגה בפרק 1 לעיל, תוך ניסיון להתייחס למגוון רחב ככל האפשר של היבטים הנוגעים להוראה וללמידה מקוונת, בכלל, ושל קורסים מתמטיים, בפרט.

השילוב בין שאלות פתוחות לשאלות סגורות נועד לאפשר העמקת התובנות בנוגע לתשובות המרצים, בדומה למקובל במחקרים הנשענים על שילוב של מתודולוגיה כמותנית ואיכותנית (Caracelli & Greene, 1997).

2.4 אוכלוסיית המחקר

בקיץ תשע"ג נשלח דוא"ל לכ-250 מרצים למתמטיקה המלמדים ב-15 מכללות ברחבי הארץ. למרצים הוסברה מטרת השאלון, והם התבקשו להיכנס לקישור לשאלון המתאים לסוג ההתנסות הקודמת שלהם בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים. מבין 250 המרצים שהשאלון הופנה אליהם התקבלו תשובות מ-73 מרצים (29.2%) מ-10 מכללות, מתוכם 60 מרצים (82.2%) חסרי ניסיון קודם בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים, ו-13 מרצים (17.8%) בעלי ניסיון קודם, כאשר הוותק הממוצע בהוראה מקוונת של קורסים במתמטיקה היה 2.88 שנים.

לוח 1 מציג את התפלגות המשיבים משתי הקבוצות בהתאם למספר שנות ותק בהוראת מתמטיקה במכללות. נוסף על כך, אפשר לראות בלוח את התפלגות מספר שנות הוותק בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים של המרצים שהתנסו בכך. מהתפלגות זו אפשר ללמוד על כך שהוראה מקוונת של קורסים במתמטיקה במסגרת מכללות לחינוך החלה את צעדיה הראשונים בארץ לפני כחמש שנים.

שנות ותק בהוראת מתמטיקה במכללות	חסרי ניסיון בהוראה מקוונת		בעלי ניסיון בהוראה מקוונת	
	מספר משיבים		מספר משיבים	
5-3	16		2	
10-6	15		1	
15-11	5		3	
20-16	12		3	
20 ומעלה	12		4	
סה"כ	60		13	

לוח 1

התפלגות המשיבים לפי ותק בהוראת מתמטיקה במכללות ולפי ותק בהוראה מקוונת

2.5 שיטות לניתוח הנתונים

תשובות המרצים לשאלות הסגורות של השאלון נותחו באמצעות שימוש בכלים בסיסיים של סטטיסטיקה תיאורית (אחוזים, ממוצעים וסטיות תקן), ומבחן טי להשוואה בין שתי קבוצות המשיבים.

התשובות לשאלות הפתוחות נותחו בעזרת אינדוקציה אנליטית, כדי לזהות את התמות המרכזיות העולות מהן (Patton, 2002) ואת התבניות האופייניות (Bogdan & Biklen, 1982).

2.6 חמצאים

להלן יוצגו הממצאים שעלו מכל אחת מהשאלות שהיו כלולות בשאלונים, תוך התייחסות להבדלים בין מרצים בעלי ניסיון קודם בהוראה מקוונת לבין מרצים חסרי ניסיון כזה.

2.6.1 תפיסות המרצים את היתרונות והחסרונות של הוראה ולמידה מקוונת

בלוח 2 מוצגות תשובות המרצים לשאלות שעסקו ב**יתרונות** של הוראת/למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון (שאלות 2 ו-4 בנספח א, שאלות 5 ו-7 בנספח ב), בחלוקה לפי קטגוריות ותת-קטגוריות שעלו מתוך ניתוח התשובות, ובאחוזים מתוך סך המשיבים בכל אחת משתי הקבוצות.

יתרונות ההוראה המקוונת			יתרונות הלמידה המקוונת				
חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	סה"כ N=73	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	סה"כ N=73		
33.33	23.07	31.5	28.33		23.28	אינטראקציה	אינטראקציה מרצה-סטודנט
10	38.46	15.06	23.33	15.38	21.91		אינטראקציה סטודנט-סטודנט
			93.33	53.84	86.3	היבטים הנוגעים ללומד	שליטה על זמן ומקום הלמידה
13.33	30.76	16.43	8.33	23.07	10.95		למידה פעילה
6.66		5.48	35	38.46	35.61		פיתוח מיומנויות SRL
20		16.43				היבטים הנוגעים למרצה	זמינות ההוראה
11.66		9.58					הימנעות מחזרות
	30.76	5.48					התפתחות מקצועית
5		4.1					מענה להטרונגיות
	23.07	4.1					חסכון זמן בטווח הארוך
18.33	69.23	27.39	10		8.21	היבטים דידקטיים	שימוש במגוון טכנולוגיות
3.332		19.17	15	23.07	16.43		העמקת הידע
			6.66	38.46	12.32		גיוון הלמידה
13.33	30.76	16.43				היבטים הקשורים למכללה	חיסכון במשאבים
93	32	125	132	25	157		סה"כ כמות אמירות
46.66	7.69	39.72	33.33		27.39	אין יתרונות	

תפיסות המרצים את היתרונות של הוראת/למידת מתמטיקה בסביבה מקוונת (באחוזים)

באופן דומה, **בלוח 3** מוצגות תשובות המרצים לשאלות שעסקו **בחסרונות** של הוראת/למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון (שאלות 3 ו-5 בנספח א, שאלות 6 ו-8 בנספח ב). את מרבית התשובות של כל מרצה היה אפשר לסווג ליותר מאשר קטגוריה או תת-קטגוריה אחת.

חסרונות ההוראה המקוונת			חסרונות הלמידה המקוונת				
חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	סה"כ N=73	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	סה"כ N=73		
75	53.84	71.23	46.66	53.84	47.94	אינטראקציה	היעדר אינטראקציית מרצה-סטודנט
15	15.38	21.91	15	23.07	16.43		היעדר אינטראקציית סטודנט-סטודנט
10		8.22				היבטים הנוגעים ללומד	קשיים לימודיים
5		4.1	8.33	38.46	13.69		ריבוי מטלות
				15.38	2.73		קשיים בקריאת טקסטים מתמטיים
		18.75	68.33		56.16		קשיים בנטילת אחריות ללמידה
			3.33		2.73		היעדר סביבת למידה מתאימה
28.33	38.46	30.13					השקעת זמן רב בתכנון הקורס
13.33		10.95					קושי באיתור קשיים
	46.15	8.22				היבטים דידקטיים	השקעת זמן רב בבדיקת המטלות
10	61.53	19.17					קושי להסביר תכנים
			21.66		17.8	היבטים טכנולוגיים	היעדר עזרי הוראה מוחשיים
	12.5	2.73					תקלות וקשיים בתקשורת
			18.33		15.06		מיומנויות טכנולוגיות חסרות של סטודנטים
94	33	127	109	17	126	סה"כ כמות אמירות	

לוח 3

תפיסות המרצים את החסרונות של הוראת/למידת מתמטיקה בסביבה מקוונת (באחוזים)

מהתבוננות ראשונית בשני הלוחות עולה שכמות האמירות הנוגעות ל**יתרונות** של ה**הוראה** המקוונת (125) כמעט זהה לכמות האמירות המתייחסות ל**חסרונות** של ה**הוראה** המקוונת (126), ואילו כמות האמירות בהקשר של **יתרונות הלמידה** המקוונת (157) גבוהה בכ-25% מכמות האמירות

המתייחסות **להסרונות הלמידה** המקוונת (126). באופן כללי, המשיבים ייחסו **יתרונות** רבים יותר ל**למידה** המקוונת מאשר **להוראה** המקוונת, מה שמצביע על כך שהמרצים שהשיבו על השאלון תופסים את סוגיית הקורסים המקוונים בעיקר כפן של היתרונות לסטודנטים. הפער בין ה**יתרונות** המיוחסים ל**למידה** מקוונת לבין ה**יתרונות** המיוחסים **להוראה** המקוונת בולט יותר בקרב מרצים **בעלי ניסיון** בהוראה (25 אמירות הנוגעות ליתרונות הלמידה לעומת 17 אמירות הנוגעות ליתרונות ההוראה, כלומר הבדל של כ-47%), מאשר הפער בין המרצים **חסרי הניסיון** (132 אמירות לעומת 109 אמירות, הבדל של כ-21%).

עם זאת, יש לשים לב לאחוז הגבוה של משיבים **חסרי ניסיון** שציינו שלהוראה או ללמידה מקוונת אין כלל יתרונות (46.66% ו-33.33%, בהתאמה). רק מרצה אחד **בעל ניסיון** ציין שלהוראה מקוונת אין יתרונות, ואף לא אחד מהמרצים בעלי הניסיון ציין שללמידה מקוונת אין כל יתרון. מצד אחד ממצא זה מעיד על הפוטנציאל של עצם ההתנסות בהוראה מקוונת להבנת היתרונות הטמונים בהוראה או למידה מסוג זה, ומצד אחר ממצא זה מצביע על כך שיתכן שמרצים חסרי ניסיון עשויים להימנע מהתנסות בהוראה מקוונת בשל הדימוי שבו הם מחזיקים.

להלן תוצגנה חלק מהאמירות של המרצים משתי הקבוצות בנוגע לכמה מהיתרונות והחסרונות של הוראה ולמידה מקוונת, כפי שהם נתפסים על-ידם.

א. היתרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון

מלוח 2 עולה שקבוצת המרצים **חסרי הניסיון** תופסת את היתרון המרכזי של הוראת מקוונת של קורסים מתמטיים בהיבט של **אינטראקטיב מרצה-סטודנטים** (33.33%): "בכיתה המרצה אינו יכול להגיע לכל סטודנט, אבל בקורס מקוון המרצה יכול להגיע לכל אחד בזמן שמתאים לו"; "קורס מקוון מאפשר למרצה לקבל מידע בנוגע לרמה של כל סטודנט ולבעיות שלו, ובכך להתאים לכל אחד את התגובה"; "הרבה פעמים קורה שסטודנט לא יכול להגיע לשיעור, ואז הוא מבקש מהמרצה לעזור לו להשלים את החומר. לא תמיד יש זמן לזה. בקורס מקוון הסטודנטים יכולים להשלים לבד, ולשאול את המרצה שאלות בזמנים שמתאימים לשניהם". מאמירות אלה אפשר ללמוד על כך שבאופן כללי מרצים רבים חשים שבמסגרת ההוראה המקובלת הם אינם מצליחים להכיר באופן מספק כל אחד מהסטודנטים, או להיענות באופן אישי לצורכיהם. ההוראה המקוונת נתפסת בעיניהם כהזדמנות להעמיק את ההיכרות שלהם עם הסטודנטים, ולתת מענה הולם לצורכיהם. המרצים **בעלי הניסיון** הדגישו יותר את היתרונות של ההוראה המקוונת בהקשר של האפשרות לנצל את המדיה כדי ליצור **אינטראקציה בין הסטודנטים לבין עצמם** (38.46%): "הפורום של הקורס מאפשר לי ליצור אינטראקציה בין פרחי ההוראה ולקיים דיונים בנושאי הקורס בצורה הרבה יותר משמעותית מאשר בכיתה, כי כולם חייבים להשתתף כחלק מהמטלות שלהם. זה מאוד מקדם את הלמידה"; "בקורס מקוון יש למרצה הזדמנות לפתח את המרכיב של למידת עמיתים, ובכך ליצור קהילייה לומדת". התייחסות זו מצביעה על כך שמרצים תופסים את המתכונת המקובלת של ההוראה הכיתתית כבלתי מספקת מבחינת האפשרות ליצור אינטראקציה בין הלומדים, ורואים בהוראה המקוונת הזדמנות לפתח שיח פנימי משמעותי בין הסטודנטים, בעיקר בשל העובדה שמשמיות מקוונות דורשות השתתפות פעילה גלויה של כל הלומדים. אכן, כפי שאפשר לראות בסעיף 1.1.1ב, שני סוגי האינטראקציה

(אינטראקטיבית מרצה-סטודנטים ואינטראקציה בין הסטודנטים לבין עצמם) הם חלק משמעותי בגורמי ההצלחה הקריטיים של קורסים מקוונים.

היתרון המשמעותי ביותר שייחסה קבוצת המרצים **בעלי הניסיון** להוראה מקוונת ניכרת בפן **הדידקטי**, ובפרט ביכולת של המרצה לעשות שימוש במגוון טכנולוגיות (69.23%): "מקצוע המתמטיקה הוא מופשט, והוראה מתקשבת מאפשרת למרצה לשלב כלים טכנולוגיים שיעזרו לו להבהיר דברים באופן ויזואלי ולהמחיש את הרעיונות המופשטים"; "הטכנולוגיה המקוונת נותנת אפשרות להציג חומר עיוני בדרכים שונות ומגוונות, לשלב תכנות, סרטונים, וחומרים מהאינטרנט, וככה להדגים את החומר בצורה טובה ויעילה". בהקשר זה אפשר לראות שהמרצים **חסרי ניסיון** קודם בהוראה מקוונת מוצאים קשר בעיקר בין **ההיבט הטכנולוגי** ובין ההזדמנות **להעמיק את הידע** של הסטודנטים (23.33%): "קורס מקוון מספק הזדמנות להרחיב ולהעמיק בנושא שבו עוסקים, שכן יש אפשרות לקשר לשיעור מגוון של מקורות, וכל סטודנט יכול להרחיב במה שמעניין אותו". מאמירות אלה עולה שמרצים תופסים את ההוראה המקוונת כהזדמנות לנצל את הטכנולוגיה לצורך הצגה מגוונת של חומרים רלוונטיים, ובכך להעמיק את ההבנה של הסטודנטים. מעניין לציין כי אף שהאפשרות לעשות שימוש בתכנות, סרטונים, וחומרים אינטרנטיים אחרים קיימת באופן תאורטי ומעשי, גם במסגרת קורסים המתקיימים במתכונת של פנים-אל-פנים, הרי שמתוך הדברים שלעיל נראה, שעל אף הזמינות של הטכנולוגיה במכללות, מרצים למתמטיקה אינם מרבים לעשות בכך שימוש בהוראה ה'רגילה' מסיבות שונות. התפיסה של שימוש בטכנולוגיה באופן בלעדי בקורסים מקוונים ראויה למחקר נוסף, במיוחד בקרב מרצים המלמדים הן במתכונת המסורתית, והן במתכונת המקוונת.

ממצא מעניין נוסף הוא שההתנסות בהוראה מקוונת מביאה את המרצים **בעלי ניסיון** להכיר ביתרונות שיש למתכונת הוראה זו למרצה עצמו, הן בהקשר של **חיסכון בזמן לטווח הארוך** (23.07%), והן בהיבט של **הזדמנות להתפתחות מקצועית אישית** (30.76%): "אמנם ההכנה של קורס מקוון אורכת זמן רב, אבל זה גם מאפשר למרצה לארגן את החומר בצורה טובה ומסודרת, כך שהחומר תמיד זמין למרצה, ואין צורך להכין אותו בכל פעם מחדש. לכן, לטווח הארוך דווקא קורס מקוון חוסך למרצה זמן"; "הכנה של קורס מקוון תורמת לידע האישי של המרצה ולהתפתחות המקצועית שלו. כדי להכין את הקורס המרצה צריך לחפש חומרים חדשים, וכך הוא נחשף למגוון גדול של כלים, אפליקציות, ומידע חדש. אין למרצים הרבה הזדמנויות כאלה". יתרונות אלה לא באו לידי ביטוי אצל מרצים חסרי ניסיון קודם, מה שמצביע על כך שתובנות מסוג זה מתפתחות בד בבד עם ההתנסות בהוראה המקוונת עצמה.

ב. היתרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון

מלוח 2 עולה שמרצים משתי הקבוצות תופסים את היתרון המרכזי של **למידה** במתכונת מקוונת בעיקר בהקשר של יכולת הסטודנטים **לשלוט על זמן ומקום הלמידה** שלהם (93.33% מהמרצים חסרי הניסיון, ו-53.84% מהמרצים בעלי הניסיון). בהקשר זה מעניין לציין שעל אף שכמעט כל המרצים חסרי ניסיון קודם ייחסו לכך חשיבות, הרי ששליש מהם בכל זאת ציינו שאין ללמידה מקוונת כל יתרון.

הנימוקים של המרצים בנוגע ליתרון הטמון ביכולת לשלוט בזמן ובמקום היו דומים, בלי קשר לניסיון

העבר שלהם בהוראה מקוונת. חלק מהאמירות התייחס לעניין **המרחק הגאוגרפי**: "אם יהיו הרבה קורסים מקוונים זה יקל מאוד על סטודנטים שגרים רחוק מהמכללה", **ולתנאים הפיזיים** של סביבת הלמידה: "ללמידה בבית יש יתרון גדול. סטודנטים יכולים ללמוד בשקט, ללא רעשי הרקע הקיימים בכיתה"; "יש הרבה סטודנטים עם הפרעות קשב שמתקשים ללמוד בכיתה, והלמידה השקטה בבית יכולה להיות עבורם פתרון מתאים". אחרים התייחסו ליתרון הנוגע ל**מועד הלמידה**: "זה מאוד מקל על הסטודנטים. הם יכולים ללמוד גם אם הם עובדים או שאינם פנויים בשעות המקובלות של ההוראה"; "כל אחד יכול לבחור מתי שמתאים לו ללמוד. זה מאפשר לסטודנטים לשלוט בלוח הזמנים שלהם"; "בעצם ככה סטודנטים לא מפסידים שיעורים. מי שמסיבה כלשהי לא יכול להגיע לשיעור, יכול להשלים אותו בכוחות עצמו". אולם עיקר האמירות התייחסו לתרומה שיש לשליטה על זמן ומקום ליכולת של הסטודנטים **להעמיק את ההבנה והידע** שלהם: "מכיוון שהחומר זמין כל הזמן, כל אחד יכול להקדיש לכל תת נושא את מידת הזמן שהוא זקוק לו, ורק לאחר שהוא מרגיש שהבין טוב את הנושא, הוא יעבור הלאה. מצב כזה לא ייתכן בכיתה. הרבה פעמים סטודנטים 'נתקעים' במשהו, ובינתיים כבר המרצה התקדם הלאה"; "הגמישות בלוח הזמנים היא היתרון הגדול ביותר. כל אחד מתאים לעצמו את קצב הלמידה, חוזר על מה שהוא צריך, כמה פעמים שהוא צריך ומתי שהוא יכול"; "החומר נגיש לסטודנטים מתי שהם רוצים, וכמה פעמים שהם צריכים. זה יתרון עצום עבור סטודנטים שמתקשים להבין את החומר בפעם אחת".

ג. החסרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון

כפי שעולה מלוח 3, **היעדר אינטראקטיב מרצה-סטודנטים** נתפס על-ידי מרצים משתי הקבוצות (75% מחסרי הניסיון, 53.84% מבעלי הניסיון) כאחד החסרונות המרכזיים של ההוראה המקוונת. ממצא זה מעניין במיוחד בהקשר של קבוצת המרצים **חסרי הניסיון**, משום שהזדמנות להעמיק את האינטראקציה בין המרצה לבין הסטודנטים נתפסה על-ידם גם כיתרון הגדול ביותר. עוד מעניין לציין שאם נסכם את אחוז המרצים **חסרי הניסיון** שייחסו לכך יתרון (33.33%) ואחוז המרצים שייחסו לכך חיסרון (75%) – נקבל תוצאה גדולה מ-100%, מה שמצביע על כך שחמישה מהמרצים רואים בכך הן יתרון והן חיסרון.

המרצים **חסרי הניסיון** התייחסו למשמעות של היעדר אינטראקציה מספקת בין המרצה לבין הסטודנטים, בעיקר תוך שימוש בביטויים חוזרים כגון "היעדר קשר עין" ו"חוסר מגע אנושי". בהקשר של **היעדר קשר עין** עיקר ההתייחסות הייתה לחשיבות של קשר מסוג זה למהלך תקין של הוראה: "בהוראה מקוונת אין למרצה קשר עין עם הסטודנטים. כשאין קשר עין אי אפשר לראות לא את מידת ההבנה של הסטודנטים, והאם צריך לחזור על משהו, ולא את הברק בעיניים שלהם כשהם מבינים. קשה ללמד ככה"; "הבעות העיניים של הסטודנטים אומרות הכל. בלי זה אי אפשר ללמד, אי אפשר לדעת מה דורש הסבר נוסף, מה עוד דורש תרגול, וכד'. פשוט אין משוב מיידי מהסטודנטים".

המגע האנושי הישיר נתפס על-ידי המרצים כ"משהו שאין לו תחליף" או "מגע שבלעדיו נוצר ניכור בין המרצה לסטודנטים", אולם הם לא סיפקו נימוקים לחשיבותו של מגע מסוג זה. מעניין לציין שלמעט אחד המרצים **בעלי הניסיון**, שטען ש"קשר עין עם הסטודנטים מאפשר למרצה לומר את המילה הנכונה בזמן הנכון, בקונטקסט הנכון, ובאווירה המתאימה", הרי ששאר המרצים בעלי ניסיון

בהוראה מקוונת לא התייחסו לנושא של היעדר קשר עין. מרצים אלה התייחסו בעיקר לכך ש"לא קיים קשר אישי" או ש"אין אפשרות ליצור קשר רגשי-אנושי", אולם לא ציינו מהן ההשלכות שיש לכך על ההוראה. מרצה אחד ציין ש"חוסר האינטראקציה הישירה מקשה על המרצה לעקוב אחר הנוכחות בפועל". נראה שההבדלים בין שתי הקבוצות נובעים מכך שבמהלך ההוראה המקוונת התברר למרצים שאפשר ללמד כהלכה למרות היעדרו של קשר עין ישיר. עם זאת, מכיוון שהדברים לא נאמרו במפורש, יש צורך בעוד מחקר כדי לבחון כיצד הצליחו השכילו המרצים בעלי הניסיון לפצות על אי-קיומו של קשר זה.

כפי שעולה מלוח 3, מרצים **בעלי ניסיון** מוצאים את החיסרון העיקרי בהוראה מקוונת **בקושי להסביר את התכנים** (61.53%): "כדי שאצליח להבהיר את תכני הקורס, אני צריך לכתוב הרבה מאוד מידע. לא תמיד ברור לי איך אפשר לעשות את זה כך שהמידע יהיה מספיק ברור"; "כדי להבהיר רעיונות ומושגים מתמטיים אני צריכה לכתוב מלל רב, להוסיף שרטוטים והדגמות, ולקשר ביניהם. זה ממש קשה, ואתה אף פעם לא יודע אם מה שעשית יספק את הסטודנטים"; "כדי להבין רעיון מתמטי הסטודנטים צריכים לקרוא הרבה מאוד מלל. הם צריכים להתייחס לאיורים ולמשוואות, ולהבין את הקשר שלהם למלל. זה מאוד קשה"; "כמרצים, אנחנו רגילים ללמד באמצעות מילים, ולשלב את השרטוטים או המשוואות כדי להדגים את הדברים באופן מתמטי. הבעיה היא שבקורס מקוון אי אפשר לעשות את הדברים במקביל, ומאוד קשה למצוא דרך חלופית לעשות את זה בטקסט כתוב". ממצא זה מראה כי **חסרי הניסיון** שהתייחסו לסוגיה זו (10%) אפשר להסיק שהמודעות לקשיים מתפתחת כפועל יוצא מההתנסות בהוראה מקוונת.

ד. החסרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון

קושי בנטילת אחריות אישית ללמידה נתפס על-ידי מרצים **חסרי ניסיון** כחיסרון העיקרי של הלמידה המקוונת (68.33%): "למידה כזו לא מתאימה לכל אחד. הסטודנטים צריכים להיות בעלי משמעת עצמית, ואני לא בטוח שלסטודנטים שלנו יש את זה"; "למידה מקוונת מטילה המון אחריות על הלומד. לא כולם מסוגלים לעמוד בזה"; "הסטודנטים שלנו לא מספיק בשלים ללמוד ככה מתמטיקה". ביתר פירוט: "בקורס מקוון הסטודנטים צריכים להיות בעלי רמה גבוהה של יכולת לעבוד באופן עצמאי. אני בספק אם רובם מסוגלים לעמוד בזה"; "כדי שסטודנט יצליח בקורס מקוון הוא חייב להיות סטודנט בעל מכוונות עצמית גבוהה ויכולת ללמוד באופן עצמאי. סטודנט שאין לו את זה לא יצליח". שני מרצים התייחסו **לקושי של הסטודנטים להעריך את מידת ההבנה שלהם** את חומר הלימוד: "בקורס מקוון כל אחד לומד לבד. בקורסים רגילים הסטודנטים רואים את מצבם ביחס לאחרים, וזה מאוד חשוב. כאשר סטודנט לא יכול לדעת איך הוא ביחס לסטודנטים אחרים, קשה לו להעריך את מידת ההבנה שלו את חומר הלימוד, ובמה הוא צריך עוד להעמיק". החסרונות שמציינים המרצים **חסרי הניסיון** מתייחסים לכמה מהממדים הקשורים למיומנויות SRL (ראו סעיף 1.1.1), ובפרט לקשר ההדוק שבין מיומנויות אלה לבין הצלחה בקורסים מקוונים (ראו סעיף 1.2.1). יש לשים לב לכך שאף לא אחד מהמשיבים **בעלי הניסיון** התייחס לכך, ודרוש עוד מחקר כדי להבין מדוע.

בנוסף, בדומה לאופן שבו תפסו המשיבים את **החיסרון** המשמעותי של **ההוראה** המקוונת, כך גם אחד

החסרונות המרכזיים של הלמידה המקוונת נתפסו בהקשר של **היעדר אינטראקציה בין המרצה לבין הסטודנטים** (46.66% מחסרי הניסיון, 53.84% מבעלי הניסיון). מעניין לציין שמרצים חסרי ניסיון קודם בהוראה מקוונת של קורסים נתפסו בהקשר זה את החסרונות של ההוראה המקוונת (75%) כמשמעותיים יותר מאשר החסרונות של הלמידה המקוונת (46.66%). מרצים אלה התייחסו בעיקר לכך שהיעדר האינטראקציה הישירה "גורמת לניכור בין הלומדים למרצה", ומקשה על הסטודנטים לשאול שאלות ולקבל מענה על קשייהם: "הסטודנט לא יכול לשאול שאלות ממוקדות ברגע האמת", "המרצה אינו זמין לענות באופן מידי לכל שאלה שמתעוררת", "יש סטודנטים שחייבים את המענה האישי, פנים אל פנים. בקורס מקוון אי אפשר לספק להם את זה". יתרה מזו, "פעמים רבות סטודנטים אינם מבינים את הדברים נכון. לא תמיד הם אפילו מודעים לכך, אבל כשיש מגע ישיר המורה יכול לראות את זה מיד, ולהסביר לו באותו הרגע". מרצים **בעלי ניסיון** קודם בהוראה מקוונת התייחסו בהקשר זה בעיקר לקשיים של הסטודנטים: "לסטודנטים קשה מאוד ללמוד מהכתב. זה חסרון עצום של הקורסים המקוונים". לדעתם, "הרגלנו את הסטודנטים לקשר אישי. הם רגילים לקבל תשובות לשאלות שלהם בזמן אמת, וכאן זה לא קיים. הם לא יודעים איך להתמודד עם זה".

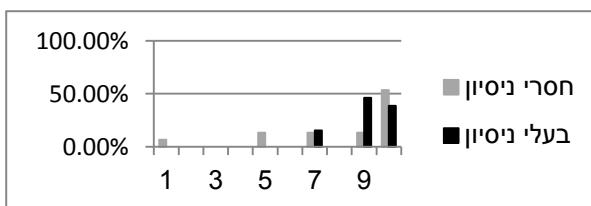
מרצים **בעלי ניסיון** התייחסו גם לסוגיית **ריבוי המטלות** בקורס מקוון (38.46%): "בקורס כזה יש המון מטלות וגם לוח זמנים מדויק. סטודנטים שלא עומדים בקצב, פשוט מרימים ידיים. בקורס רגיל אפשר להיות גמיש יותר"; "בקורס מקוון יש הרבה מאוד מטלות יחסית לקורס רגיל. הקריאה דורשת השקעה רבה של זמן, צריך לעקוב אחרי השאלות והתשובות של אחרים ועוד. בגלל העומס הזה סטודנטים יכולים לאבד עניין בקורס, או לאבד את היכולת שלהם לעקוב אחרי התכנים".

2.6.2 מידת החשיבות המיוחסת

להתנסות בלמידה

מתמטיקה במתכונת

מקוונת



תרשים 1

החשיבות המיוחסת להתנסות סטודנטים בלמידה מתמטיקה במתכונת מקוונת, לפי קבוצות ואחוזים מתוך כל קבוצה

שתי הקבוצות נשאלו לגבי מידת החשיבות שהם מייחסים להתנסות הסטודנטים במכללות בלמידה מתמטיקה במסגרת קורס מקוון (שאלה 6 בנספח א, שאלה 10 בנספח ב), והתבקשו להסביר את הדירוג.

הדירוג התבצע בסולם בן 10 דרגות (1 = כלל לא חשוב, 10 = חשוב במידה רבה מאוד). **בתרשים 1 ובלוח 4** מופיעה התפלגות ההתייחסות של המשיבים לסוגיית החשיבות בהתנסות בלמידה מקוונת בהתאם לסוג הניסיון הקודם שלהם ולמספר שנות הוותק שלהם בהוראת מתמטיקה במכללות.

מעניין להיווכח שדווקא מרצים **חסרי ניסיון** קודם בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים מייחסים

חשיבות רבה יותר להתנסות סטודנטים בלמידה מסוג זה מאשר מרצים **בעלי ניסיון**. הדירוג הממוצע שהתקבל על-ידי מרצים חסרי ניסיון קודם היה 8.2 (ס.ת. 2.6), לעומת ממוצע של 7.69 (ס.ת. 1.93) שהתקבל על-ידי מרצים בעלי ניסיון קודם. עם זאת, במבחן טי למדגמים בלתי תלויים נמצא שהבדל זה אינו מובהק ($t(71)=0.656, p>0.05$). כלומר, בקרב שתי הקבוצות קיימת מידה דומה של תמיכה בכך שסטודנטים במכללות יתנסו פעם אחת לפחות בלמידת מתמטיקה בקורס מקוון. בנוסף, למעלה מ-50% מהמרצים **חסרי ניסיון** קודם דרגו את מידת החשיבות כ-10, לעומת פחות מ-40% מהמרצים **בעלי ניסיון** קודם. אולם מידת החשיבות שייחסו מרצים בעלי ניסיון להתנסות בלמידה מקוונת הייתה מדורגת כ-7 ומעלה, בעוד חלק מחסרי הניסיון דרגו את מידת החשיבות גם כ-1 או 5.

מלוח 4 אפשר ללמוד על כך שאי אפשר להצביע על מגמה עקבית כלשהי בנוגע לחשיבות שמייחסים מרצים להתנסות סטודנטים בלמידה מקוונת הקשורה למספר שנות הוותק בהוראת מתמטיקה במכללות, אולם קבוצת המרצים עם ניסיון קודם בעלי ותק של 3-10 שנים ייחסה לכך את החשיבות הגדולה ביותר.

ממוצע החשיבות המיוחסת להתנסות בלמידה מקוונת			שנות ותק בהוראת מתמטיקה במכללות
סה"כ	בעלי ניסיון	חסרי ניסיון	
9.33	10	9.25	3-5
7.89	10	7.75	6-10
9.25	9	9.40	11-15
7.10	7.5	7	16-20
8.19	8.75	8	20 ומעלה

לוח 4

החשיבות המיוחסת להתנסות סטודנטים בלמידת מתמטיקה בסתכנות מקוונת לפי ותק בהוראת מתמטיקה במכללות וסוג הניסיון הקודם בהוראה מקוונת

הנימוקים שהעלו המרצים **חסרי ניסיון** קודם עסקו בעיקר בכך ש"אי אפשר להתעלם מהנוכחות של הטכנולוגיה בחינוך", שכן "הטכנולוגיה בחיים, בכלל, ובחינוך, בפרט, הולכת ותופסת מקום נכבד, ולכן חשוב שמורים לעתיד יתנסו בלמידה מסוג זה". יתרה מזו, "ניתן לשער שבעתיד יהיה עליהם ללמד תלמידים בדרך זו או אחרת באופן מקוון". לפיכך, "חיוני שפרחי הוראה יתנסו בלמידה מסוג זה ויחוו את מגמות החינוך העכשוויות, יכירו את היתרונות והחסרונות של הוראה מקוונת, יפתחו תובנות, ויהיו פתוחים ללמד כך בעתיד". למרות ההכרה בחשיבות ההתנסות בלמידה מקוונת, חלק מהמרצים הודו שבהקשר להוראת קורסים מתמטיים הם מעדיפים "להמשיך וללמד במתכונת הישנה והטובה".

גם המרצים **בעלי ניסיון** בהוראה מקוונת התייחסו לסוגיית הצורך בהתנסות ב"למידה המותאמת למאה העשרים ואחת", ולכך "שסביר להניח ששיטת הוראה זו תיכנס בעתיד הלא רחוק למערכת החינוך, ולכן חשוב שהסטודנטים שלנו יתנסו בכך". אחת האמירות התייחסה להכנת הסטודנטים לקראת המשך לימודים: "זו מגמה שהולכת ומתפשטת בעולם האקדמי. סביר להניח שרבים מהבוגרים

שלנו ימשיכו ללמוד לתארים מתקדמים, ושם יידרשו ללמוד באופן מקוון חלק מהקורסים. לכן חשוב להכין אותם לכך כבר עכשיו".

מתוך התשובות עולה שמרבית המרצים תופסים את חשיבות ההתנסות בלמידה מקוונת **מהפך הטכני**, הקשור להתפשטותה של מתכונת הלמידה המקוונת, ולא **מהפך הפדגוגי** או מתוך שיקולים הנוגעים לתרומה אפשרית של התנסות זו **להעצמת הלמידה** של המתמטיקה עצמה. על רקע זה מעניין לבחון את תשובות המרצים בעלי הניסיון לשאלה "מדוע בחרת ללמד קורס/ים מתמטי/ים במתכונת של קורס מקוון?" (ראו שאלה 1 בנספח ב), ואת תשובות המרצים חסרי הניסיון לשאלה "האם היה מעניין אותך להתנסות בהוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון? מדוע?" (ראו שאלה 9 בנספח א).

כל המרצים **בעלי הניסיון**, בלא יוצא מן הכלל, ציינו בדרך זו או אחרת שההחלטה בנוגע להוראת קורסים ספציפיים במתכונת מקוונת התקבלה על-ידי המכללה ו/או הצוות. כלומר, ההוראה במתכונת מקוונת לא הייתה מונעת מאידאולוגיה חינוכית כלשהי, או מוטיבציה פנימית להתנסות בהוראה במתכונת שונה: "זו הייתה הדרישה של המכללה", "לא בחרתי בזה. זה נקבע בגלל אילוצי מערכת", "המדיניות של המכללה היא לתת לכל סטודנט שני קורסים מקוונים במהלך לימודיו, ואחד מהקורסים האלה היה הקורס שלי".

לשאלת העניין בהתנסות עתידית בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים השיבו 32 מבין 60 המרצים חסרי הניסיון הקודם (53.33%) בשלילה, לעומת 28 (46.67%) שהשיבו בחיוב. לכאורה, ממצא זה סותר את הממצא בדבר החשיבות שמייחסים מרצים אלה להתנסות הסטודנטים בלמידה מקוונת, ולכן מעניין היה לבחון את ההסברים שסיפקו לחוסר העניין שלהם ללמד מתמטיקה במתכונת זו. ההסברים התחלקו באופן כמעט שווה לשלושה גורמים: חוסר התאמה של הקורסים שהם מלמדים ללמידה במתכונת מקוונת ("אני מלמדת קורסים דידקטיים, וזה לא מתאים ללמידה כזו", "הקורס שלי הוא במתמטיקה לא פשוטה עבור הסטודנטים, ואין סיכוי שהם יצליחו ללמוד את זה ככה"); תפיסת החסרונות של הוראה מקוונת כעולים על היתרונות ("אני לא מאמינה בהוראה שאין בה קשר עין עם הסטודנטים. אני רואה בזה רק חיסרון"); והחשש מפני הצורך בהשקעה רבה של זמן ("כדי לכתוב קורס מקוון צריך להשקיע המון זמן, ואין לי", "שמעתי שהבקרה על קורס כזה דורש מהמרצה זמן יקר").

ממצא ראוי לציון נוגע לכך שמבין 28 המרצים שהביעו רצון להתנסות בהוראה מקוונת, 16 מרצים הם בעלי ותק של 3-5 שנים בהוראת מתמטיקה במכללות, כלומר, כלל המרצים המשיבים בקבוצת ותק זו. מבין 15 המרצים בעלי ותק של 6-10 שנים, רק שבעה מרצים (46.66%) הביעו רצון כזה, מרצה אחד מתוך חמישה מרצים (20%) בעלי ותק של 11-15 שנים, שני מרצים מתוך 12 (16.66%) בעלי ותק של 16-20 שנים ושני מרצים מתוך 12 בעלי ותק של למעלה מ-20 הביעו רצון להתנסות בכך בעתיד. במילים אחרות, נראה שככל שהמרצה בעל ותק רב יותר בהוראת מתמטיקה במכללות, כך יורדת מידת העניין שלו בהתנסות בהוראה מקוונת. הסיבות לקיומו של קשר כזה ראויות למחקר נוסף.

2.6.3 תפיסות המרצים בנוגע להיבטים הקשורים להוראת/למידת מתמטיקה בקורסים מקוונים

שאלה 8 בשאלון למרצים חסרי ניסיון קודם בהוראה מקוונת, ושאלה 12 בשאלון למרצים בעלי הניסיון היו זהות, וכללו התייחסות לשמונה היגדים שעסקו בהיבטים שונים הנוגעים להוראת מתמטיקה ולמידתה במתכונת מקוונת. את ההיגדים התבקשו המשיבים לדרג בסולם ליקרט בן 5 רמות, בהתאם למידת ההסכמה שלהם עם ההיגד (1=כלל לא מסכים/ה, 5=מסכים/ה במידה רבה מאוד).

בלוח 5 מוצגת התפלגות מידת ההסכמה של המרצים עם ההיגדים השונים, באחוזים מתוך כל אחת משתי הקבוצות, וכן הממוצע וסטיית התקן שהתקבלו בעבור כל היגד. העמודה השמאלית בלוח זה מציגה את ההבדלים בין שתי הקבוצות, כפי שהתקבל מתוך מבחן טי.

היגד	ממוצע (ס.ט.)	5		4		3		2		1		t ₍₇₁₎
		בעלי ניסיון N=13	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	חסרי ניסיון N=60	בעלי ניסיון N=13	חסרי ניסיון N=60	
א	-0.754	4.69 (0.48)	4.53 (0.72)	69.23	66.67	30.77	20	0	13.33	0	0	
ב	-3.281 **	4 (0.71)	3.13 (0.98)	23.08	13.33	53.85	6.67	23.08	60	0	20	
ג	-0.231	3.61 (1.19)	3.53 (1.15)	30.77	13.33	23.08	60	23.08	0	23.08	20	
ד	-2.341 *	3 (1.47)	2 (0.97)	23.08	0	15.38	0	15.38	46.67	30.77	6.67	
ה	-2.181 *	4 (0.91)	3.26 (1.13)	30.77	33.33	46.15	33.33	15.38	26.67	7.69	20	
ו	-1.389	2.92 (0.95)	2.46 (1.09)	7.69	6.67	15.38	6.67	38.46	33.33	38.46	33.33	
ז	1.208	3.23 (0.72)	3.53 (1.15)	38.46	26.67	46.15	20	15.38	40	0	6.67	
ח	1.950	2.3 (0.75)	2.8 (0.84)	0	6.67	0	0	46.15	66.67	38.46	20	

p<0.001***, p<0.01**, p<0.05*

לוח 5

מידת ההסכמה של המשיבים עם היגדים המתייחסים להיבטים שונים הנוגעים להוראת מתמטיקה ולמידתה במסגרת קורסים מקוונים, באחוזים מתוך כל קבוצה

היגד א התייחס לכך שהכנה של קורסים מקוונים דורשת זמן רב. מידת ההסכמה עם היגד זה הייתה הגבוהה ביותר בקרב שתי הקבוצות, ואפשר להתרשם מכך שכך המשיבים מודעים להשקעה הנדרשת בהכנת קורסים מקוונים. בשתי הקבוצות יש הסכמה רבה מאוד עם ההיגד ולא נמצא הבדל מובהק ביניהן.

היגד ב התייחס לסוגיית היכולת לתת מענה אישי לצורכי הסטודנטים הלומדים בקורס מקוון. בהקשר זה, ההבדל בין שתי הקבוצות היה המובהק ביותר, כאשר מרצים בעלי ניסיון תומכים בנאמר בהיגד

זה במידה רבה יותר. למעלה משלושה רבעים מהמרצים בעלי ניסיון קודם בהוראה הסכימו או הסכימו במידה רבה עם כך שאפשר לתת לסטודנטים מענה אישי, לעומת כחמישית מהמרצים חסרי הניסיון.

היגד ג התייחס לשאלה האם קורסים מקוונים במתמטיקה מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות. שתי הקבוצות מסכימות עם היגד זה במידה בינונית, ולא נמצא הבדל מובהק ביניהן. למעלה ממחצית מהמרצים בעלי הניסיון וכשלושה רבעים מהמרצים חסרי הניסיון הסכימו או הסכימו במידה רבה עם כך שקורסים מקוונים מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות.

בהתייחסות להיגד ד, שעסק בהתאמתם של קורסים בדיקטיקה של מתמטיקה למתכונת של קורס מקוון, נמצא הבדל מובהק בין שתי הקבוצות, כאשר מרצים בעלי ניסיון תומכים בכך במידה מסוימת, ומרצים חסרי ניסיון תומכים בכך רק במידה מועטה. בעוד שכ-40% מקרב בעלי הניסיון הסכימו או הסכימו במידה רבה עם האפשרות ללמד קורסים העוסקים בדיקטיקה של המתמטיקה באופן מקוון, הרי שאף לא אחד מהמרצים חסרי הניסיון הסכים לכך במידה זו. בהקשר זה ראוי לציין ששמונה מרצים מלמדים קורסים מקוונים העוסקים בשילוב טכנולוגיה ותקשוב בהוראת מתמטיקה, ארבעה מרצים מלמדים קורס בתולדות המתמטיקה, וארבעה מרצים מלמדים קורסים העוסקים בתפיסות שגויות של תלמידים. מרצה אחד בלבד ציין שהוא מלמד קורס מתמטי "טהור" במתכונת מקוונת. ארבעה מרצים מלמדים יותר מאשר קורס מקוון אחד. לכן אפשר לשער שהפער בין שתי הקבוצות נובע מהתנסות מוצלחת של אותם מרצים המלמדים בקורסים בעלי אוריינטציה דידקטית. גם בהקשר להיגד ה, העוסק באפשרות ללמד קורסי חינוך כלליים במתכונת מקוונת, נרשם הבדל מובהק, כאשר מרצים בעלי ניסיון תומכים בנאמר בהיגד זה במידה רבה, ואילו מרצים חסרי ניסיון תומכים בו במידה מסוימת. בנוסף, שתי הקבוצות נוטות להסכים במידה רבה יותר שקורסי חינוך כלליים מתאימים להוראה מקוונת יותר מאשר קורסים העוסקים בדיקטיקה של המתמטיקה. כדי לבחון את ההבדל בין מידת ההסכמה של המשיבים להיגד ד ולהיגד ה, נערך מבחן טי למדגמים מזווגים לכל קבוצה בנפרד. בקרב שתי הקבוצות נמצא, כי ההבדל בין התמיכה במידת ההתאמה של קורס מקוון בדיקטיקה של המתמטיקה לבין התמיכה במידת ההתאמה של קורס מקוון בנושאי חינוך כללי היה מובהק ($t_{(12)} = -4.416$, $p < 0.01$) בקבוצת בעלי הניסיון, ו- $t_{(59)} = -16.965$, $p < 0.001$) בקבוצת חסרי הניסיון).

היגד ו עסק בשאלה האם לסטודנטים הלומדים במכללות יש מידה מספקת של מיומנויות לומד עצמאי שתאפשרנה להם להתמודד בהצלחה עם למידה מקוונת. בהתייחסות להיגד זה לא נמצא הבדל מובהק בין הקבוצות, ושתיהן תומכות בכך במידה מסוימת. פחות מרבע מהמרצים בעלי ניסיון וכ-13% מחסרי הניסיון מסכימים או מסכימים במידה רבה עם הטענה שלסטודנטים יש מיומנויות מספקות. עם זאת, כפי שאפשר להתרשם מהתגובות להיגד ז, למעלה מ-85% מהמרצים בעלי הניסיון וקרוב למחצית מהמרצים חסרי הניסיון מסכימים או מסכימים במידה רבה שיש בכוחם של קורסים מקוונים לפתח את המיומנויות הללו. לא נמצא הבדל מובהק בין הקבוצות, ושתיהן תומכות בכך במידה בינונית.

לבסוף, בהיגד ח התבקשו המשיבים להתייחס לסוגיית סיכויי ההצלחה בלמידה בקורסים מקוונים לעומת סיכויי ההצלחה בקורסים הנלמדים במתכונת פנים אל פנים. כפי שאפשר לראות בלוח 5, בדומה לממצאיהם של אלן וסימן (Allen & Seaman, 2011), מרבית המשיבים משתי הקבוצות סבורים שלמידה בקורסים מקוונים אינה מפחיתה את סיכוייהם של הסטודנטים להצליח, ולא נמצא הבדל מובהק בין הקבוצות.

2.6.4 תפיסות של מרצים חסרי ניסיון בנוגע לסוג התמיכה הדרוש להם כדי ללמד בקורסים מקוונים

שאלה 10 בשאלון למרצים חסרי הניסיון (ראו נספח א) אשר בשאלה 9 ציינו שהיו מעוניינים להתנסות בהוראה מקוונת התייחסה לסוג העזרה או התמיכה הנחוצים להם, לדעתם, כדי ללמד קורסים מקוונים. התשובות שהתקבלו לשאלה זו נגעו לתמיכה טכנית, ולסיוע של מרצה בעל ניסיון בהוראה מקוונת. התמיכה הטכנית התייחסה הן לפן הטכנולוגי ("היכרות עם הטכנולוגיות התומכות בהוראה בקורס מקוון", "עזרה בפתרון תקלות תקשורת", "תמיכה טכנולוגית צמודה לאורך כל הקורס"), והן לפן הטכני-דידקטי ("איך מכינים מצגות ברמה גבוהה", "איך מעצבים את החומרים כך שיהיה לסטודנטים קל להתמודד עם החומר", "תמיכה בשימוש בתכנות מתמטיות מתאימות שיעזרו בלמידה"). הצורך בסיוע של מרצה בעל ניסיון בא לידי ביטוי כבר מהשלב הראשון של תכנון הקורס: "שיחשוף אותי לחומרי לימוד המיועדים להוראה בדרך זו, על מנת שאוכל להיעזר בהם לצורך תכנון הקורס"; "שילמדו אותי על השיקולים שצריך לחשוב עליהם כאשר מתכננים קורס מקוון". בשלב הבא, של כתיבת התכנים, הצורך הוא "בעזרה בעיצוב חומרי הלימוד. איך כותבים ומה כותבים, ואיך מגישים את החומרים לסטודנטים". עזרה דרושה גם במהלך הקורס עצמו: "חשוב לי שיראו לי באופן מפורש איך עוקבים אחר הלמידה, בכלל, ואחרי כל סטודנט, בפרט, ואיך מבצעים הערכה מעצבת ומסכמת של הקורס".

2.6.5 שיקולים בפיתוח קורסים מקוונים והקשיים העיקריים של מרצים בעלי ניסיון בהוראה מקוונת

בשאלה 4 בשאלון שהיה מיועד למרצים בעלי הניסיון (ראו נספח ב) התבקשו המרצים לתאר את השיקולים שהנחו אותם בפיתוח הקורסים המקוונים. המשיבים לא התייחסו לכך בהרחבה, ורבים מהם ציינו באופן כללי ש"השיקולים כללו התייחסות למה שיכול לקדם את הסטודנטים מבחינת הידע"; "בחירה בנושאים שמתאים לשלב אותם בקורס מקוון"; "חיפוש חידושים בדרכי הוראה כדי לגוון את הלמידה ולעניין את הסטודנטים"; או "חיפשות איך לעשות שימוש בחומרים זמינים באינטרנט"; "חשבותי על מגוון האפשרויות של שימוש בתכנות הקיימות באינטרנט". התייחסות ממוקדת יותר נגעה לאופי המשימות: "השיקול המרכזי שלי היה לבחור משימות כאלה בהן נדרשים הסטודנטים ליישם את הידע התאורטי שרכשו"; "חיברתי משימות שיעודדו דיון בין משתתפי הקורס"; "חשוב היה לי לשלב מטלות שיעודדו את הסטודנטים ללבן ביניהם בעיות"; או אמירות כלליות, כגון "חשיבה על פעילויות שיכוונו את הלמידה של הסטודנטים"; "השיקולים שלי התייחסו למשימות שיכולות לתרום

להתפתחות המקצועית של הסטודנטים". שיקולים אחרים עסקו במרכיבי הקורס המקוון עצמו: "בניתי את התכנים כך שיתאימו להעברת הרצאה, תכנים לתרגול עצמי במהלך השיעור, ביצוע מטלות חקר מחוץ לשיעור המקוון, ומענה לשאלות נבחרות של המשתתפים".

סוגיה זו ראויה לבירור מעמיק יותר באמצעות ראיונות אישיים, שכן אפשר להניח שהבנת השיקולים העומדים בבסיס בניית קורסים מתמטיים מקוונים תסייע להתפתחותו של גוף ידע העוסק בפדגוגיה המתאימה להוראה כזו, וכן תסייע למרצים חסרי ניסיון המעוניינים להתנסות בהוראה מקוונת.

בשאלה 9 התבקשו המרצים לספר על הקשיים העיקריים שלהם בהוראת קורסים מקוונים, ולהתייחס לאופן שבו הם מתמודדים עם הקשיים. מרבית התשובות לשאלה זו התייחסו לדברים שנאמרו קודם לכן בהקשר לחסרונות של ההוראה המקוונת. למעט מרצה אחד שציין שאין לו כל קושי בהוראה מקוונת, הרי שכל שאר המשיבים טענו שהקושי העיקרי ניכר בהשקעה המרובה הנדרשת מהם, הן בשלב התכנון וההכנה של הקורס והן במהלכו. בשלב ההכנה, אחד מהקשיים נובע מהיעדרם של חומרי עזר אינטרנטיים זמינים בשפה העברית. מקורו של העומס המוטל על כתפי המרצים במהלך ההוראה עצמה נובע מהצורך להיות זמין לסטודנטים במהלך כל השבוע, "מכיוון שכל סטודנט לומד מתי שמתאים לו", להשיב לשאלות ולתת מענה לקשיים, להגיב לסטודנטים, להשתתף בפורומים, לבדוק עבודות רבות ועוד. מרבית המשיבים ציינו שכדי להקל מעט על עומס העבודה הם נוהגים לתת מטלות שיש להגיש בזוגות או בקבוצות. לא נמצאה התייחסות נוספת לפתרונות רלוונטיים לבעיית העומס. שניים מהמשיבים ציינו את הקושי בהעלאת חומרים על הכתב, אולם לא ציינו כיצד הם מתמודדים עם הקושי. גם סוגיה זו ראוי לברר לעומק באמצעות ראיונות אישיים.

3. דיון והשלכות לפיתוח פדגוגיה להוראה מקוונת של קורסים מתמטיים

ראשית נעיר שמכיוון שרק כ-30% מהמרצים שהשאלון הופנה אליהם אכן השיבו עליו, ומכיוון שלא מדובר במדגם מייצג מבחינה סטטיסטית, הרי שאי אפשר להסיק שממצאי המחקר משקפים בנאמנות את תמונת המצב של הוראה מקוונת של קורסים מתמטיים במכללות לחינוך. כלומר, אי אפשר לומר בכמה מהמכללות מקובל ללמד במתכונת מקוונת ועד כמה סביבות הלמידה הללו נפוצות בחוגים לחינוך מתמטי, או מהם הקורסים השכיחים שאותם מלמדים בפורמט כזה.

מכיוון שהמטרה העיקרית הייתה להניע תהליך של הבניית הידע הרלוונטי להוראת מתמטיקה במכללות לחינוך בישראל, התבקש שיתוף קהיליית המרצים למתמטיקה במכללות, תוך למידה מתוך התפיסות הרווחות בקרב חבריה. לפיכך יש לראות בממצאים את הצעד הראשון בדרך הארוכה להשגת המטרה, ומובן שיש להמשיך ולהעמיק את התובנות באמצעות מחקרים נוספים.

במסגרת הדיון נתמקד במיוחד בהבדלים בין התפיסות של שתי קבוצות המשיבים – מרצים בעלי ניסיון קודם בהוראה מקוונת, ומרצים חסרי ניסיון קודם. הסיבה להתמקדות בהבדלים אלה היא ההנחה שאפשר לייחס אותם לתובנות שאותן רכשו המרצים בעלי הניסיון במהלך התנסותם בפועל בהוראה מקוונת, לעומת תפיסות שבהן אוהזים מרצים בטרם התנסו בכך. לכאורה, היה אפשר לייחס את

ההבדלים בין הקבוצות גם לכך שמלכתחילה קבוצת המרצים בעלי הניסיון הקודם היו בעלי עמדות חינוכיות התומכות בהוראה מקוונת, שכן דרכי ההוראה מושפעות מאמונות חינוכיות ומתפיסת התפקיד החינוכי (Pajares, 1992; Richardson, 2003). אולם, ממצאי המחקר עולה (ראו סעיף 2.6.2) שכל המשיבים בעלי הניסיון בהוראה מקוונת מלמדים בקורסים המקוונים בעקבות החלטה מנהלתית, ולא בעקבות רצון לממש חזון חינוכי כלשהו. לפיכך, אפשר לשער שמקור ההבדלים בין הקבוצות הוא למידה מתוך חווית ההוראה המקוונת, שכן שינוי אמונות חינוכיות יכול להתרחש רק בעקבות התנסות (למשל, Kay, 2006).

תחילה יש לשים לב לכך שמלוחות 2 ו-3 עולה שאחד ההבדלים הבולטים ביותר בין שתי הקבוצות נוגע לאחוז הגבוה מבין המשיבים **חסרי הניסיון** שציינו שלהוראה או ללמידה מקוונת אין כלל יתרונות (%46.66 ו-33.33, בהתאמה), זאת לעומת רק מרצה אחד **בעל ניסיון** שציין שלהוראה מקוונת אין יתרונות. אף לא אחד מהמרצים בעלי הניסיון ציין שללמידה מקוונת אין כל יתרון. בנוסף, אפשר להתרשם מכך שבאופן כללי המרצים שהשיבו לשאלון תופסים את **היתרונות** של סביבות למידה מקוונת בעיקר בהיבט של יתרונות ללומד, ופחות בהיבט של יתרונות למרצה.

מתוך ממצאים אלה אפשר ללמוד על כך שעצם ההתנסות בהוראה מקוונת תורמת להבנת היתרונות הטמונים בהוראה או למידה מסוג זה. עם זאת, יש לתת את הדעת לכך שמכיוון שאמונות חינוכיות משליכות על העשייה החינוכית בכללותה, הרי שייתכן שמרצים חסרי ניסיון עשויים להימנע מהתנסות בהוראה מקוונת בשל הדימוי שבו הם מחזיקים. בפרט, כפי שעולה מתרשים 1, למרות שכשני שלישים מהמרצים חסרי הניסיון דרגו את החשיבות של התנסות הסטודנטים בלמידה מקוונת כ-9-10, הרי שמהאמור בסעיף 2.6.2 אפשר לראות שתפיסה זו מונעת מתוך שיקולים הקשורים להיתכנות של שינויים בדפוסי ההוראה בעקבות התפשטותה של הטכנולוגיה, ולא מתוך מניע פנימי או רצון להתנסות בחוויית הוראה שונה. חיזוק לכך אפשר למצוא בממצא לפיו למעלה ממחצית המרצים חסרי הניסיון סבורים שמתכונת ההוראה המקוונת אינה מתאימה לתפיסת עולמם החינוכית או לקורסים שהם מלמדים. לפיכך, אם רוצים לרתום מרצים נוספים להוראה מקוונת של קורסים מתמטיים, חשוב שיכירו מקרוב את נקודת המבט של מרצים בעלי ניסיון, וילמדו מתוך הניסיון המצטבר שלהם. ייתכן ובעקבות זאת יביעו נכונות להתנסות בהוראה מקוונת.

3.1 הבדלים בתפיסות המרצים היבטים הנוגעים לאינטראקציית מרצה-סטודנטים בקורסים מקוונים

כפי שעולה מלוח 2, המרצים חסרי הניסיון תופסים את היתרון המרכזי של הוראת מקוונת של קורסים מתמטיים בהיבט של אינטראקציית מרצה-סטודנטים (%33.33). מההסברים שנתנו המרצים אפשר ללמוד על כך שחלק מהם אינו שבע רצון מהמידה שבה המתכונת ה'רגילה' של קורסים מאפשרת למרצים להכיר לעומק כל אחד מהסטודנטים או לספק מענה אישי לצורכיהם. ההוראה המקוונת נתפסת בעיניהם כאפשרות להכיר כל סטודנט ולתת מענה אישי לצרכיו. עם זאת, פחות מרבע מהמרצים בעלי ניסיון (%23.07) ראו בהוראה מקוונת הזדמנות להעמיק את האינטראקציה בינם לבין

הסטודנטים (ראו סעיף 2.6.1א). לפיכך, אפשר להניח שמתוך ניסיונם של מרצים אלה ההוראה המקוונת לא סייעה באופן משמעותי לחיזוק הקשר בינם לבין הסטודנטים או ליכולת שלהם לספק מענה אישי לצרכיהם.

ממצא זה עומד, לכאורה, בסתירה לממצאים העולים מתוך לוח 5. היגד ב בשאלה 12 בשאלון למרצים חסרי הניסיון (ראו נספח א) ובשאלה 8 למרצים בעלי הניסיון (ראו נספח ב) היה: "בקורסים מקוונים אפשר לתת מענה אישי לצרכי הסטודנטים". ההבדל בין הקבוצות במידת ההסכמה עם ההיגד (ממוצע 4, ס.ת. 0.71 בקבוצת בעלי הניסיון, ממוצע 3.13, ס.ת. 0.98 בקבוצת חסרי הניסיון) היה המובהק ביותר מבין כל ההבדלים בדירוג מידת ההסכמה עם ההיגדים האחרים. כפי שאפשר לראות, בעוד שלמעלה משלושה רבעים מהמרצים בעלי ניסיון קודם הסכימו או הסכימו במידה רבה עם כך שאפשר לתת לסטודנטים מענה אישי במסגרת קורס מקוון, הרי שרק כחמישית מהמרצים חסרי הניסיון הסכימו במידה כזו עם ההיגד.

נראה שאפשר לפתור את הסתירה בין הממצאים בכך שהמשמעות של "אינטראקטיב מרצה-סטודנטים" נתפסת על-ידי מרצים באופן שונה מאשר המשמעות של "מתן מענה אישי לצורכי הסטודנטים". מסעיף 6.2.1ג עולה שמרצים מפרשים את המשמעות של אינטראקטיב מרצה-סטודנטים בעיקר במונחים של "קשר עין" ו"מגע אנושי". עם זאת, מסתבר שמרצים בעלי ניסיון הצליחו להתגבר על היעדרה של אינטראקציה מסוג זה, ולספק מענה אישי לצורכי הסטודנטים למרות היעדרו של הקשר הישיר. לאור זאת, ראוי שמרצים חסרי ניסיון יהיו מודעים לכך שלמרות שהוראה מקוונת א-סינכרונית אינה מאפשרת קשר עין או מגע אנושי עם הסטודנטים, הרי שעדיין אפשר לתת מענה לצורכי הסטודנטים, ובכך להמשיך ולתמוך בלמידה שלהם.

בהינתן החשיבות של איכות האינטראקציה בין המרצה ללומדים והערך המיוחס לשוב שניתן ללומדים בסביבות למידה מקוונות, הנעדרות תמיכה ישירה הדומה לזו הניתנת ללומדים במתכונת של פנים-אל-פנים (Bunn, 2004), ההשלכות של ממצא זה נוגעות לכך שבפיתוח הפדגוגיות התואמות הוראה מקוונת של קורסים מתמטיים יש לתת את הדעת על איתור דרכים לחיזוק האינטראקציה והיכולת של מרצים לתמוך בסטודנטים. החשיבות שיש לכך נוגעת הן לתמיכה ביכולת של הסטודנטים להתמיד בלימודיהם בקורס המקוון ולהצליח בו (Bunn, 2004), והן לתרומתה של אינטראקציה זו לפיתוח מיומנויות לומד עצמאי (Azevedo & Cromley, 2004). יש לציין שחלק גדול מהפלטפורמות של קורסים מקוונים מכילות מרכיבים מובנים המאפשרים למרצים להעמיק את האינטראקציה בינם לבין הסטודנטים, ומומלץ להיעזר ביכולות אלה. לדוגמה, באמצעות המרכיב של שאלון וסקרים אפשר להפיק תובנות בנוגע למצבו של כל סטודנט כמו גם בנוגע למצבה של הקבוצה כולה; פורום למתן עזרה שוטפת יכול לסייע למרצים לתת מענה אישי לקשיי הסטודנטים וכדומה. פלטפורמות רבות מכילות גם מרכיב של מבחנים מתוקשבים, המאפשר לתת לסטודנטים בתום כל שיעור מקוון משוב אישי בנוגע למידת ההבנה שלהם את התכנים. מבחנים כאלה יכולים להוות מעין "מבדק עצמי", והמשוב המתקבל מהמערכת המתקשבת יסייע לסטודנטים לבצע רפלקציה על המידה שבה הם מבינים את חומר הלימוד, ויפתח את יכולתם לקחת אחריות על החלטות בנוגע לצורך להגביר מאמץ או לחזור

על החומר. כדי לעודד סטודנטים להיעזר במגננון זה, מוצע לקבוע משקל כלשהו לממוצע המבדקים העצמיים בשקלול הציון הסופי של הקורס, וכדי לעודד למידה מומלץ לאפשר לסטודנטים להשיב למבדקים אלה מספר פעמים כרצונם, עד לקבלת ציון 100. בנוסף, לאור העובדה שמרצים חסרי ניסיון ייחסו חשיבות גם ליכולת של הסטודנטים להעריך את מצבם ביחס לסטודנטים אחרים (ראו סעיף 2.6.1ד), אפשר בקלות לספק לכל סטודנט משוב אישי המעיד על מצבו היחסי. בלי ספק מדובר במתן מענה אישי עמוק ורחב הרבה מעבר לזה שאפשר לתת לסטודנטים במתכונת ההוראה המקובלת.

3.2 הבדלים בתפיסות המרצים היבטים הנוגעים לאינטראקציה בין הסטודנטים בקורסים מקוונים

בהתייחסם לאינטראקציות הנוצרות במסגרת קורס מקוון ציינו 38.46% מהמרצים בעלי הניסיון את היתרונות של ההוראה המקוונת בהקשר של היכולת שלהם ליצור אינטראקציה בין הסטודנטים לבין עצמם (ראו סעיף 2.6.1א). החשיבות של אינטראקציה מסוג זה גם היא קשורה ליכולת של סטודנטים להתמיד בלמידה בקורסים מקוונים, שכן היא מאפשרת להם לחוש תחושת השתייכות לקהילייה וירטואלית של לומדים, שאפשר לשאוב ממנה עידוד ותמיכה (Liu et al., 2009). יתרה מזו, יש המאמינים שלמידה היא תהליך שתלוי באינטראקציה עם אחרים (למשל, Stone, 1994). ממצאי המחקר מצביעים על כך שלדעת המרצים בעלי הניסיון המדיה האלקטרונית מאפשרת להעצים אינטראקציה זו, הרבה מעבר למה שמתרחש בקורסים במתכונת של פנים-אל-פנים. האפשרות של מרצים לקיים דיונים בהשתתפות כלל הסטודנטים, והתרומה שיש לכך לקידום הלמידה וליצירת קהילייה לומדת, נתפסת על-ידם כאחד היתרונות המרכזיים של ההוראה המקוונת. מכיוון שרק 10% מהמרצים חסרי הניסיון מאמינים שקורסים מקוונים מסייעים ליצירת אינטראקציה בין סטודנטים (ראו לוח 2), נראה שהתובנה בנוגע לכך שאינטראקציה מסוג זה מתפתחת במסגרת קורסים מקוונים, ואף במידה רבה יותר מאשר בקורסים המתקיימים במתכונת פנים-אל-פנים, היא תובנה הנרכשת כתוצאה מהתנסות מוצלחת בהוראה מקוונת.

מרצים יכולים לעודד את התפתחותה של האינטראקציה בין הסטודנטים לבין עצמם באמצעות יצירת פורומים לדיון ושיח, עידוד לכתיבת בלוגים ופוסטים אישיים ומתן משוב הדדי ועוד (Liu et al., 2009). עם זאת, יש לזכור שעצם יצירת האפשרות לדיונים, כשלעצמה, אינה מבטיחה שאכן יתקיימו דיונים בעלי ערך. מלבד חיזוק האינטראקציה בין הסטודנטים, דיונים קבוצתיים מיועדים לסייע להבניית הידע, לטיפול חשיבה ביקורתית ומטא-קוגניטיבית, לפיתוח היכולת לנסח טיעון ולהתווכח עם טיעונים של עמיתים, ולפיתוח יכולת רפלקטיבית, כישורים המהווים חלק ממימוניות ה-SRL. אולם דיונים יכולים להפוך לשטחיים ולדעוך במהירות אם המרצה לא יתב אתם ויפיה בהם רוח חיים. לצורך זה על המרצה להעלות בפורום שאלות מעוררות עניין, ומדי פעם בפעם להוסיף שאלות מנחות או שאלות שעשויות לעורר מחלוקת. מכיוון שניהול שוטף של דיונים יכול ליצור עומס על המרצה, אפשר להפקיד בידי הסטודנטים, בסבב, את התפקיד של "מנחה שבועי", כך שבכל שבוע סטודנט, או קבוצה של סטודנטים (בהתאם למספר המשתתפים בקורס), יהיה אחראי על הדיון ועל שימור העניין

בו. אולם גם במקרה כזה חשוב שהמרצה יגלה נוכחות בפורום, ולו רק כצופה. בנוסף, יש לזכור שלא כל הסטודנטים מרגישים בנוח להביע את דעתם במרחב הווירטואלי, ולכן על המרצה להקפיד על אווירה לא שיפוטית ועל התפתחותה של תרבות דיון, להגדיר לסטודנטים מראש את נורמות ההשתתפות בדיונים, ואת מידת המחויבות של כל סטודנט להשתתף בהם. מרצים המעוניינים להבטיח את השתתפותם המלאה של כל הסטודנטים יכולים לקבע משקל כלשהו להשתתפות זו בציון הסופי. עם זאת, צריך לקחת בחשבון שקביעת הציון בגין השתתפות בדיונים אינה פשוטה. לעתים קרובות קיימת נטייה להעריך את השתתפותם של סטודנטים בדיונים באמצעות מדדים כמותיים, כדוגמת תדירות ההשתתפות. מדד כזה עלול שלא לשקף נאמנה את מידת ההשקעה האמתית של הסטודנטים, ולכן ההערכה צריכה להיות גם בעלת אופי איכותני (תוכן הדברים הנאמרים, מידת הרלוונטיות שלהם לשאלה העומדת לדיון, האופן שבו הסטודנט מסתמך על תכני הקורס ו/או על מקורות חיצוניים נוספים, היכולת של הסטודנט ליצור אינטגרציה קוהרנטית של מקורות מידע ועוד). מובן שיש לידע מראש את הסטודנטים בנוגע להיבטים הנלקחים בחשבון לצורך ההערכה, ולספק להם מחוון שהוכן מראש. יש לציין שהערכה מסוג זה מטילה גם היא עומס נוסף על המרצה, ולכן אפשר להיעזר בהערכת עמיתים (Moore & Kearsley, 2005). היתרונות הטמונים בהערכת עמיתים, כמו גם הקשיים והמגבלות הכרוכים בכך, ובפרט בהקשר של מוסדות להשכלה גבוהה, נדונים באופן נרחב בספרות המחקר (למשל, נוצר ואברמוביץ, 2008), ולא נוכל להתייחס אליהם במסגרת מצומצמת זו. נעיר רק שתהליך של הערכת עמיתים מסייע לתהליך הלמידה של המעריך ושל המוערך, ומפתח את היכולת של הסטודנטים לבצע רפלקציה. פעילות ההערכה מסייעת למעריך להעמיק את הידע התכני שלו כתוצאה מחשיפה לדוגמאות ולטיעונים שהועלו על-ידי עמיתיהם, ומניעה את המוערך לבצע חשיבה מחודשת על התוצרים שלו ולהשביח אותם בעקבות משוב המתקבל מעמיתים (Lavy & Shriki, 2014). עם זאת, יש להימנע מהטלת עומס יתר על הסטודנטים. כפי שאפשר לראות מלוח 3, 38.46% מהמרצים בעלי ניסיון ייחסו לריבוי מטלות בקורס מקוון את אחד מחסרונות הלמידה במסגרתו. לדעתם, ריבוי המטלות עלול לגרום לסטודנטים לאבד עניין בקורס, או לאבד את היכולת שלהם לעקב אחר תכניו (ראו סעיף 2.6.1ד).

3.3 הבדלים בתפיסות המרצים היבטים הנוגעים לתרומת הטכנולוגיה המוטמעת בקורסים מקוונים

מלוח 2 עולה שהיתרון המשמעותי ביותר שייחסה קבוצת המרצים בעלי הניסיון להוראה מקוונת בא לידי ביטוי ביכולת של המרצה לעשות שימוש במגוון טכנולוגיות (69.23%). לדעתם (ראו סעיף 2.6.1א), שילוב של מגוון טכנולוגיות מאפשר למרצה להבהיר, להדגים, ולהמחיש רעיונות מתמטיים מופשטים. מעניין לציין שלמרות שהאפשרות לעשות שימוש בתכנות, סרטונים, וחומרים אינטראקטיביים אחרים קיימת, באופן תאורטי ומעשי, גם במסגרת של קורסים המתקיימים במתכונת של פנים-אל-פנים, הרי שמתוך הדברים שלעיל נראה שעל אף זמינותה של הטכנולוגיה במכללות, מסיבות שונות מרצים למתמטיקה אינם מרבים לעשות בכך שימוש בהוראה ה'רגילה'. התפיסה של שימוש בטכנולוגיה באופן בלעדי בקורסים מקוונים ראויה למחקר נוסף, במיוחד בקרב מרצים המלמדים הן

במתכונת המסורתית והן במתכונת המקוונת.

ההבדל בין שתי הקבוצות של מרצים בנוגע ליתרונות הטמונים בהוראה מקוונת בהקשר של שימוש רב-ממדי בטכנולוגיות להעשרת הלמידה הנו בולט, וכפי שאפשר לראות מלוח 2, רק 18.33% מהמרצים חסרי הניסיון התייחסו לכך. נראה שגם כאן אפשר לייחס את ההבדלים בין שתי הקבוצות לעצם החוויה המוצלחת של מרצים שהתנסו בהוראה מקוונת. אכן, מומלץ לבחור בסביבת למידה המאפשרת לעשות שימוש במשאבים מגוונים ככל האפשר, ביניהם מידע טקסטואלי, תמונות, סרטונים (בין אם סרטונים הלקוחים מהאינטרנט ובין אם סרטונים בהם המרצה עצמו מצולם), ומצגות דינמיות משולבות קול. שימוש במשאבים מגוונים יסייע, נוסף לגיוון הלמידה ולהעמקתה, לתת מענה לסגנונות למידה שונים, ובמיוחד ללומדים בעלי סגנון למידה שמיעתי, המתקשים לעבד מידע כתוב (Harrell & Bower, 2011). ספרות המחקר הדנה באפשרויות לניצול הטכנולוגיה לשירות ההוראה והלמידה המקוונת הנה נרחבת, ולא נוכל להתייחס אליה לעומק במסגרת מאמר זה.

3.4 הבדלים בתפיסות המרצים בנוגע ליכולת לשלוט על זמן ומקום הלמידה במתכונת מקוונת

מלוח 2 עולה שמרצים משתי הקבוצות תופסים את היתרון המרכזי של למידה מקוונת בהקשר של מתן אפשרות לסטודנטים לשלוט על זמן ומקום הלמידה שלהם (93.33% מהמרצים חסרי הניסיון, ו-53.84% מהמרצים בעלי הניסיון). לדעתם, היתרונות הטמונים בכך נוגעים בעיקר להקלת תהליך הלמידה, הן בהיבט של יכולת הסטודנטים להתגבר על מאמצים הכרוכים בנסיעות ממושכות למכללה ומתן מענה לסטודנטים המתקשים ללמוד בכיתה רגילה בשל בעיות קשב, והן בהיבט של מתן אפשרות לסטודנטים ללמוד במועדים המתאימים להם. יתרון משמעותי נוסף קשור לאפשרות של הסטודנטים להעמיק את הידע וההבנה שלהם. לדעת המרצים, העובדה שהחומר נגיש בכל עת מסייעת לסטודנטים לחזור על נושאים בהם הם מתקשים מתי שמתאים להם ובכל עת שנדרש להם.

אכן, נמצא שקורסים המאפשרים גמישות בניהול זמן הלמידה תומכים ביכולת של הלומדים להתאים את מועדי הלמידה למחויבויות אחרות, ובכך מסייעים להתמדה בקורסים (Ivankova & Stick, 2005). עם זאת, לאור הפער שבו שתי קבוצות המרצים רואות את האפשרות של הסטודנטים לשלוט על זמן ומקום הלמידה כאחד היתרונות של הלמידה המקוונת, נראה שמסיבה כלשהי מרצים בעלי ניסיון קודם לא תמיד רואים בכך יתרון. מכיוון שקיים קשר בין גמישות במועדי הלמידה לבין הרגלי הלמידה של הסטודנטים והיכולת שלהם לנהל את הזמן ביעילות (Ivankova & Stick, 2005), ייתכן שחלק מהמרצים נוכח לדעת שסטודנטים רבים מתקשים בניהול זמן הלמידה. ממצא זה ראוי למחקר נוסף.

3.5 הבדלים בתפיסות המרצים בנוגע ליכולת הסטודנטים ליטול אחריות אישית ללמידה מקוונת

מתוך לוח 3 אפשר לראות שקושי בנטילת אחריות אישית ללמידה נתפס על-ידי מרצים חסרי ניסיון כחסרון העיקרי של הלמידה המקוונת (68.33%), ולעומתם, מרצים בעלי ניסיון לא התייחסו כלל

לקושי זה בהקשר של חיסרון הלמידה המקוונת. לדעתם של מרצים חסרי ניסיון, למידה במסגרת קורסים מקוונים מצריכה מיומנויות של למידה עצמאית, ויכולת לכוון את הלמידה, ורבים מהם מטילים ספק ביכולת של הסטודנטים לקחת אחריות על למידה מסוג זה. אכן, היעדר מיומנויות לומד עצמאי מהווה את אחד החסמים המרכזיים ליכולת של סטודנטים להתמיד בקורסים מקוונים (Azevedo & Cromley, 2004).

בהקשר זה ראוי לבחון את הממצאים המופיעים בלוח 5. למרות שההבדלים בין הדירוג הממוצע שנתנו המשיבים משתי הקבוצות להיגד ו ("לסטודנטים הלומדים במכללות יש מידה מספקת של מיומנויות לומד עצמאי שתאפשרנה להם ללמוד בהצלחה קורסים מקוונים במתמטיקה") לא היו מובהקים ושתי הקבוצות תמכו בהיגד זה במידה מסוימת, הרי שמרצים בעלי ניסיון מאמינים יותר מאשר מרצים חסרי ניסיון בכך שלסטודנטים יש מידה מספקת של מיומנויות לומד עצמאי. גם ההבדלים בין הדירוג הממוצע שנתנו המשיבים משתי הקבוצות להיגד ז ("קורסים מקוונים במתמטיקה מפתחים בקרב הסטודנטים מיומנויות של לומד עצמאי") לא היו מובהקים, ושם המגמה היא הפוכה לזו הקיימת ביחס להיגד ו. עם זאת, יש לשים לב לכך שלמעלה מ-85% מהמרצים בעלי הניסיון וקרוב למחצית מהמרצים חסרי הניסיון מסכימים או מסכימים במידה רבה שיש בכוחם של קורסים מקוונים לפתח מיומנויות לומד עצמאי.

מכיוון שמיומנויות הקשורות לוויסות עצמי של הלמידה אינן נרכשות או מתפתחות בספונטניות, יש לפתח מיומנויות אלה באמצעות הכוונה מפורשת (Ge & Land, 2003). מעניין לציין שלמרות שספרות המחקר (למשל, Azevedo & Cromley, 2004) מייחסת לסביבות למידה מקוונות פוטנציאל לפיתוח מיומנויות לומד עצמאי בשל העובדה שהן מספקות ללומד הזדמנות לוויסות עצמי של הלמידה, מאפשרות לו לקבל החלטות לגבי איך ומתי ללמוד, ואיזה אסטרטגיות ליישם, הרי שממצאי המחקר הנוכחי מצביעים על כך שמרצים מתקשים לממש את הפוטנציאל הגלום בלמידה המקוונת. ייתכן והדבר נובע מכך שבאופן כללי מרצים במוסדות אקדמיים אינם מפתחים באופן מספק מיומנויות SRL (למשל, McKeachie, 2011), הן בשל חוסר מודעות לחיוניותם, והן בשל חוסר היכרות עם פדגוגיות שנועדו לסייע לסטודנטים לווסת את הלמידה שלהם. עם זאת, מתוך סעיף 2.6.1 אפשר לראות שמרצים מודעים לכך שאינם מפתחים באופן מספק את מיומנויות הלומד העצמאי של הסטודנטים במסגרת ההוראה המקובלות.

בשל חיוניותן של מיומנויות SRL להצלחה ולהתמדה בקורסים מקוונים, בעת פיתוח הפדגוגיות המתאימות להוראה מקוונת יש להקדיש לסוגיה זו תשומת לב מיוחדת, ובפרט יש לתת את הדעת למציאת דרכים הולמות לפיתוח מיומנויות אלה באמצעים שאינם תלויים באינטראקציה סינכרונית בין המרצה ללומד או בין הלומדים עצמם. בסעיף 3.1 לעיל התייחסנו כבר לעניין המשוב האישי כמקדם יכולת רפלקטיבית, ומיומנויות של הערכה עצמית וכיול עצמי, המהווים חלק משמעותי ממיומנויות SRL. לדרכים נוספות נתייחס בסעיף הבא, כאשר נדון בנושא של סיוע לסטודנטים להתמודד עם קריאה עצמאית של טקסטים מתמטיים אלקטרוניים.

3.6 הבדלים בתפיסות המרצים בנוגע להוראה וללימוד מקוונת של קורסים מתמטיים

עד כה התייחסנו להבדלים בין שתי קבוצות המרצים בהקשר של סוגיות כלליות הקשורות לפדגוגיות של הוראה ולמידה מקוונת. בסעיף זה נתמקד בהבדלים בין הקבוצות בהקשר ספציפי יותר להוראה מקוונת של קורסים מתמטיים או קורסים העוסקים בחינוך מתמטי.

שתי הקבוצות נשאלו לגבי מידת החשיבות שהם מייחסים להתנסות הסטודנטים במכללות בלמידה מתמטיקה במסגרת קורס מקוון. כפי שאפשר לראות בסעיף 2.6.2, שתי הקבוצות מייחסות חשיבה רבה להתנסות כזו, אולם מרצים חסרי ניסיון קודם בהוראה מקוונת מייחסים לכך חשיבות רבה יותר מאשר מרצים בעלי ניסיון (ממוצע של 8.2 לעומת 7.69, בהתאמה), על אף שההבדל בין שתי הקבוצות אינו מובהק (תמיכה נוספת לכך אפשר לראות בהתייחסות להיגד ג בלוח 5). עם זאת, כפי שאפשר לראות מתרשים 1, טווח הדירוג של המרצים חסרי הניסיון היה רחב הרבה יותר מאשר זה של בעלי הניסיון (ס.ת. של 2.6 לעומת 1.93, בהתאמה). לדעת המרצים משתי הקבוצות, החשיבות של התנסות הסטודנטים בלמידה מקוונת נובעת מעצם הנוכחות ההולכת ומתפשטת של הטכנולוגיה הן בחייהם של הסטודנטים והן במסגרות החינוך השונות. מכיוון שאפשר לשער שבעתיד הלא רחוק למידה מקוונת תתפשט גם למערכת הבית-ספרית, הרי שחיוני להכשיר את פרחי ההוראה לקראת מגמה עתידית זו. אכן, כפי שראינו במבוא למאמר, מתכונת ההוראה המקוונת הולכת ומתפשטת בעולם בקצב מהיר (Allen & Seaman, 2011). מלוח 5 עולה שמרצים בעלי ניסיון, באופן מובהק יותר מאשר מרצים חסרי ניסיון, מאמינים שקורסים העוסקים בדיקטיקה של המתמטיקה או קורסים בחינוך מתאימים ללמידה מקוונת (היגדים ד ו-ה). הבדלים מובהקים אלה עשויים להצביע על כך שהתנסות המרצים בהוראה מקוונת של קורסים מתמטיים ו/או קורסים העוסקים בחינוך מתמטי תרמה לפיתוח התובנות שלהם בנוגע להיתכנות של הוראה מקוונת של קורסים מסוגים שונים.

בניגוד למה שאפשר היה לצפות לאור ספרות המחקר העוסקת בקריאה מטקסטים אלקטרוניים ובקריאת טקסטים מתמטיים, הרי שההתייחסות לקשיים הנובעים מעצם קריאת הטקסטים בקורסים המקוונים כמעט ולא באה לידי ביטוי בממצאי המחקר. מלוח 3 עולה ששני מרצים בלבד (15.38%), בעלי ניסיון, התייחסו לסוגיית הקשיים של סטודנטים בקריאת טקסטים מתמטיים, ומרצים חסרי ניסיון כלל לא התייחסו לכך. ההתייחסות הדלה לקושי בקריאת טקסטים גם אינה עולה בקנה אחד עם ממצא אחר המתואר בלוח 3, לפיו החיסרון העיקרי שייחסו מרצים בעלי ניסיון להוראה המקוונת היה הקושי להסביר התכנים (61.53%). מכיוון שבמסגרת המחקר לא נאסף מידע בנוגע לאופן שבו מרצים בעלי ניסיון נוהגים להבנות את הקורסים המקוונים שהם מלמדים, וההתייחסות שלהם לשאלה שעסקה בשיקולים בפיתוח קורסים מקוונים הייתה מצומצמת (ראו סעיף 2.6.5), הרי שסוגיות אלה ראויות למחקר נוסף. בהקשר זה נעיר רק שמרצים בעלי ניסיון לא התייחסו כלל למקומה של ספרות המחקר כבסיס שאפשר להישען עליו בעת פיתוח קורסים מקוונים, וייתכן והם אינם מודעים לקיומו של גוף ידע העוסק בקריאת טקסטים אלקטרוניים ובקשיים המלווים קריאת טקסטים מתמטיים.

לאור ספרות המחקר, הרי שפיתוח היכולת לקרוא לבד טקסטים מתמטיים אלקטרוניים או טקסטים

שהנם רלוונטיים לחינוך מתמטי צריך להיות חלק בלתי נפרד מהקורסים המקוונים. כאמור, בבית-הספר תלמידים אינם לומדים להתמודד לבד עם טקסטים מתמטיים (Foxman, 1999). לכן, כאשר דנים בדרכים, שמטרתן לסייע לסטודנטים להתמודד עם הקריאה, יש לקחת בחשבון קשיים היכולים לנבוע מהמאפיינים של טקסטים מתמטיים: הכתיבה החסכונית, מגוון הייצוגים, הבדלים בין משמעות המילים בשפה המתמטית לבין משמעותם בשפת הדיבור ועוד (Barton & Heidema, 2002; Kenney, 2005; Österholm, 2005; Watkins, 1977, 1979). כפי שעולה ממחקריהם של אוסטרהולם וווסקינס (Österholm, 2005; Watkins, 1977, 1979), סטודנטים נוטים להבין טוב יותר טקסטים מתמטיים הכתובים בשפה המדוברת. אולם בהינתן החשיבות של פיתוח היכולת לקרוא טקסטים הכתובים ב"שפה מתמטית" כחלק בלתי נפרד מלימוד המתמטיקה עצמה (Österholm, 2005), האתגר הוא לשזור בין מלל לבין סימנים, ייצוגים גרפיים ושרטוטים, באופן שיסייע לסטודנטים להתמודד בהצלחה עם הקריאה. אכן, כפי שאפשר לראות בסעיף 2.6.1, הקשיים שעליהם מצביעים המרצים בעלי הניסיון קשורים, בין השאר, לצורך בשילוב בין ייצוגים.

כדי לזהות דרכים אפשריות לפיתוח היכולת של סטודנטים לקרוא טקסטים מתמטיים הכוללים מלל, סמלים וייצוגים שונים, ראוי לבחון את האופן שבו מוקנה ללומדים ידע מתמטי במסגרת הוראה המתקיימת במתכונת פנים-אל-פנים. במרבית המקרים, הקניית הידע מתבצעת באופן שבו רישום הסמלים והמניפולציות המבוצעות עליהם מלווה במלל הנאמר על-ידי המרצה. לדוגמה, כאשר מלמדים סטודנטים כיצד לפתור משוואה מסוימת, הרי שהייצוג המתמטי והמניפולציות האריתמטיות המבוצעות על המשתנים השונים מלווים בהסברים מילוליים סימולטניים. אמנם אי אפשר לשחזר תהליך כזה באופן מדויק בטקסטים כתובים, אולם אפשר לעשות מאמץ לדמות את התהליך ככל האפשר. אלגוריתמים, למשל, אפשר להציג בטבלה דו-ממדית, כאשר בעמודה אחת מופיעה מלל המציג שלב כלשהו באלגוריתם, ובעמודה שנייה תוצג הדגמה מתאימה תוך שימוש בייצוגים מתמטיים. לאחר אימון בקריאה מסוג זה, אפשר לבקש מהסטודנטים לנסות לתרגם בכוחות עצמם טקסט מילולי לייצוג סימבולי. בהמשך, אפשר לבקש מהסטודנטים לבצע את התהליך ההפוך, כלומר תרגום מידע או תהליך המוצג באופן סימבולי/גרפי/ויזואלי למלל. תרומתו של תהליך תלת-שלבי כזה נבחנה במחקר מצומצם (שריקי, 2013), ונמצא שיש בכוחו לסייע לפיתוח היכולת של פרחי הוראה להתמודד בהצלחה עם קריאת טקסטים מתמטיים.

בנוסף, מוצע לחלק כל פרק לתת-פרקים. התמודדות עם כמויות לא גדולות של מידע בכל זמן נתון מקילה על הקריאה ומקטינה את החרדה מפני ההתמודדות העצמאית עם הטקסט עצמו (שריקי, 2013). חשוב ללמד את הסטודנטים כיצד לקרוא את הטקסט באמצעות החלוקה שלו למבוא, גוף, ומסקנות, תוך התייחסות פרטנית לכל חלק, וליווי הקריאה ברישום הערות. בנוסף, יש להנחות אותם כיצד עליהם לקשר את המידע החדש המוצג לידע קודם, ולבצע רפלקציה על מידת היעילות של הלמידה שלהם כמו גם על מידת היעילות של האסטרטגיות והתהליכים שבהם השתמשו. מכיוון שלא כל הסטודנטים הלומדים בקורסים מקוונים הם בעלי מיומנויות SRL מספקות, חיוני לפתח מיומנויות אלה בד בבד עם הקניית הידע התכני. בדרך זו אפשר להבטיח הצלחה רבה יותר בלמידה מקוונת

(Kramarski & Michalsky, 2009). אחת הדרכים שבאמצעותן אפשר לעשות זאת היא ליווי הטקסט האלקטרוני **בשאלות מנחות** (Greene & Azevedo, 2009). מסקר הספרות שנערך על-ידי קנגספ (Kängsepp, 2011) עולה שהחוקרים חלוקים בדעתם בנוגע לעיתוי שבו יש להציג לפני הלומדים את השאלות המנחות. בעוד שבחלק מהמחקרים נמצא ששילוב השאלות בתוך הטקסט עצמו מסייע ללומדים ליצור קישורים בין המידע החדש לבין הידע הקודם שלהם, ובכך להעמיק את ההבנה, הרי שמחקרים אחרים מצביעים על כך ששילוב השאלות בטקסט יוצר עומס קוגניטיבי על הזיכרון לטווח קצר של הלומדים, ובכך מעכב את הלמידה. לאור זאת, ישנם חוקרים הממליצים לדחות את הצגת השאלות לסיום הקריאה. מכיוון שכך, נראה שעיתוי ההתמודדות עם שאלות הקשורות לטקסט תלוי בעיקר בהעדפותיו של כל לומד ובסגנון הלמידה האישי שלו, ולכן מוצע להשאיר זאת לשיקול דעתו של כל סטודנט. מומלץ גם לספק לסטודנטים מדי פעם דוגמאות לתשובות.

שאלות מנחות יכולות להיות מכמה סוגים: שאלות המניעות את הסטודנטים לקרוא את הטקסט באופן **ביקורתי**, ולהיות מעורבים בתכנון (לדוגמה – מדוע, לדעתך, הפך משפט פיתגורס למשפט ה"מוכח" ביותר בכל הזמנים?); שאלות העוסקות בהשוואה, שמטרתן לסייע לסטודנטים לעשות **קישור לידע קודם**, ובכך להעמיק את הבנתם בידע החדש (לדוגמה – מה דומה ומה שונה בין השיטה הבבילית לבין השיטה ההודית להוצאת שורש ריבועי? איזו שיטה יעילה יותר, לדעתך? מדוע?); שאלות שמטרתן לסייע לסטודנטים להעמיק את **התובנות המתמטיות** שלהם (לדוגמה – מהם היתרונות ומהם החסרונות של פתרון משוואות ממעלה שנייה בכלים גאומטריים במקום בכלים אלגבריים, בדומה לדרך שבה עשו זאת הבבלים?); ושאלות בעלות **השלכות דידקטיות**, שמטרתן להעמיק את מעורבות הסטודנטים בתהליך הלמידה (לדוגמה – האם, לדעתך, כדאי ללמד תלמידים את שיטת הכפל המצרי? מדוע?). כל אחת מהשאלות הללו אפשר גם להעלות כשאלות פתוחות לדיון בפורום. מובן שאי אפשר להעלות לדיון שאלות רבות מדי, ועל המרצה להפעיל שיקול דעת בנוגע לשאלות שיש בכוחן להביא לידי דיון פורה יותר.

לאחר סיום הלמידה של פרק שלם, מומלץ לבקש מהסטודנטים להשיב **לשאלון רפלקטיבי** שמטרתו להנחות אותם בביצוע רפלקציה על התהליך שבעזרתו התמודדו עם קריאת הטקסטים המתמטיים, ובכך לתמוך ביכולת שלהם לתכנן טוב יותר את המשך הלמידה. השאלון יכול לכלול גם שאלות כלליות הנוגעות למידת העניין שהסטודנטים מוצאים בחומר הלימוד, רמת הקושי של הטקסטים, לדעתם, מידת ההתאמה של הדוגמאות המוצגות בטקסט, האופן שבו מבדקי המשוב, השאלות המנחות, והדיונים בפורום מסייעים להם להתמודד עם התכנים המתמטיים ותומכים בהתפתחות היכולת שלהם לקרוא את הטקסטים ועוד. דוגמאות לשאלות שאפשר לשאול: מבין כל הנושאים שהיו כלולים בפרק, מה הנושא שמצאת בו עניין במיוחד? מדוע? מבין כל הנושאים שהיו כלולים, מה היה הנושא הקשה ביותר? מדוע נושא זה היה קשה יותר מאחרים? באיזה ידע קודם השתמשת כדי להשיב לשאלות? תאר/י את תהליך הלמידה שלך, ופרט/י כל אחד משלבי הלמידה; תאר/י את השינויים שחלו בתהליך הלמידה שלך מתוך הטקסטים המתמטיים, והסבר/י מה גרם לכך; כיצד את/ה מתמודד/ת עם קשיים בהם את/ה נתקל/ת במהלך הקריאה של הטקסטים?

לסיום, כפי שאפשר לראות בסעיף 1.2.1, קריאה מטקסטים אלקטרוניים מקשה על הבנת הנקרא (Ben-Yehudah & Eshet-Alkalai, 2014). לכן, בנוסף להצגת הטקסט בפלטפורמה האינטרנטית מומלץ, במידת האפשר, להפוך חלק מהתכנים הכתובים לקובץ שאותו יוכלו הסטודנטים להדפיס, ובכך לאפשר להם להתמודד ביתר יעילות עם התכנים.

4. הערות לסיום

- כפי שאפשר היה להתרשם, הוראה מקוונת דורשת מהמרצים השקעה מרובה של זמן ומאמץ, הרבה מעבר לאלה הנדרשים בהוראה במתכונת של פנים-אל-פנים. השקעת הזמן והמאמץ כרוכים לא רק בהכנת חומרי הלמידה והתוספים תומכי הלמידה עצמם (קישורים לאינטרנט, סרטונים, מצגות, יישומונים, תכנות, ועוד), אלא גם, ואולי בעיקר, בצורך לבצע מעקב שוטף אחר תהליך הלמידה של כל אחד מהסטודנטים, להיענות לצורכיהם ולקשייהם, לעודד למידת עמיתים והשתתפות פעילה בפורומים ועוד. יש לציין שלמרות ש-38.46% מהמרצים בעלי ניסיון (ראו לוח 3) תופסים את ההשקעה בתכנון קורס מקוון כאחד החסרונות של ההוראה המקוונת, ורואים בכך קושי מהותי (ראו סעיף 2.6.5), הרי שבכל זאת 23.07% מהם רואים בפיתוח קורס מקוון חיסכון לטווח הארוך (ראו לוח 2 וסעיף 2.6.1א). אולם הצורך במעקב, בשימור העניין בלמידה, בהשקעת זמן בבדיקת המטלות ובהערכת הסטודנטים (ראו לוח 3 וסעיף 2.6.5) מהווה נטל שוטף כבד על כתפיהם של מרבית המרצים. לאור זאת, נשאלה השאלה מדוע שמרצים יביעו עניין בהוראה מקוונת? נראה שהתשובה לשאלה זו קשורה, בראש ובראשונה, לתפיסת העולם החינוכית של כל מרצה, ולאמונות שלו בנוגע לתהליכי הוראה ולמידה. מחקרים שצוטטו במאמר זה, ומתוך אמירות של מרצים בעלי ניסיון, אפשר היה ללמוד על כך שיש בכוחה של למידה במתכונת מקוונת לתרום להעמקת האינטראקציה בין המרצה לבין הסטודנטים ובין הסטודנטים לבין עצמם, וכן לטיפול מיומנויות לומד עצמאי ולפיתוח כישורים שבדרך כלל לא ניתנת להם תשומת לב מספקת במסגרת ההוראה השכיחה. לכן, מוצע שמרצים יתנסו בהוראה מקוונת, ולו רק כדי לגבש תפיסת עולם חינוכית המבוססת על פרקטיקה ולא על אמונות. את הצעדים הראשונים אפשר לעשות במסגרת קורס שאינו מקוון במלואו, ולאפשר ללומדים להתנסות מדי פעם בפעם בלמידה מקוונת. התנסות כזו אף תסייע לסטודנטים עצמם לרכוש בהדרגה את המיומנויות הדרושות לצורך למידה עצמאית בקורס מקוון והמיומנות הנחוצות לקיום אינטראקציה א-סינכרונית עם המרצה ועם עמיתים לקורס. את קיומו של קורס במתכונת מקוונת מלאה מומלץ לדחות לשנתונים מתקדמים, שכן ככל שהסטודנט לומד בשנתון מתקדם יותר, ונשאר לו זמן קצר יותר לסיום לימודיו, קיים סיכוי גבוה יותר לכך שיצליח בלימודיו בקורס המקוון (Levy, 2007).
- כפי שאפשר לראות מסעיף 2.6.2, כל המשיבים בעלי ותק של שלוש-חמש שנים בהוראה במכללות הביעו רצון להתנסות בעתיד בהוראה מקוונת, וראוי שמכללות תנצלנה את הנכונות של מרצים חדשים להתנסות בכך. נראה שאפשר לייחס נכונות זו לכך שמרצים חדשים טרם גבשו תפיסת עולם חינוכית שלמה בנוגע לדרכים המתאימות להכשרת פרחי הוראה, והם פתוחים

להתנסויות מגוונות. אכן, מלוח 4 עולה שכל המרצים בעלי ותק של 3-10 שנים שהתנסו בהוראה מקוונת דירגו את החשיבות של התנסות סטודנטים בקורס מקוון במתמטיקה כ-10. מרצים חסרי ניסיון בעלי נכונות ללמד בקורסים מקוונים הביעו רצון להיעזר במרצה בעל ניסיון בהוראה מקוונת, אשר יסייע להם בהיבט הטכנולוגי והטכני-דידקטי, וכן שיחשוף אותם לחומרי למידה וינחה אותם כיצד לעקוב אחר הלמידה וההערכה של הסטודנטים (ראו סעיף 2.6.4). לכן, מומלץ שהמכללות תיערכנה ליצירת קהילייה שיתופית של מרצים בעלי ניסיון וחסרי ניסיון, כדי שיהיה אפשר לקדם היטב את ההוראה המקוונת של קורסים מתמטיים. כיוון שהקשיים העיקריים שעליהם הצביעו המרצים בהקשר של תכנון קורסים מקוונים התייחסו להשקעה המרובה הנדרשת מהם בשלב התכנון וההכנה של הקורס, בעיקר בשל היעדרם של חומרי עזר אינטרנטיים זמינים בשפה העברית (ראו סעיף 2.6.5), הרי שקהיליות שיתופיות של מרצים תוכלנה לכתוב ביחד את תכני הקורס, ובכך להפחית את הנטל המוטל על כתפיו של כל מרצה, כמו גם להשביח את התכנים עצמם. נוסף על כך, ראוי שראשי המכללות וקובעי המדיניות יתנו את הדעת לדרכים מתאימות לתגמול מרצים המלמדים בקורסים מקוונים בגין ההשקעה המרובה הכרוכה בהכנת הקורסים והפעלתם, ובכך לעודד מרצים נוספים ללמד בקורסים כאלה, כמו גם לתמוך בנכונותם של המרצים להתמיד בכך לאורך זמן. תגמול זה עשוי אף להתברר ככלכלי לטווח הארוך, לאור העובדה שקורסים מקוונים מאפשרים להרחיב את מעגל הסטודנטים, ובכך גם להוזיל את העלויות הנלוות להוראה (Allen & Seaman, 2011).

- כיום קיים היצע רחב של פלטפורמות אינטרנטיות המיועדות להוראה מקוונת, ולמאפייני הפלטפורמה המשמשת לצרכי הקורס יש השלכות על הלמידה בו (Papp, 2000; Selim, 2007). לאור החשיבות המיוחסת לגיוון באמצעי ההוראה ולתפקידן של האינטראקציות השונות, יש לתת את הדעת לבחירה בפלטפורמה שיכולה לתמוך באופן מקיף בתוספי למידה מסוגים שונים, וכזו המאפשרת קיום פורומים, דיונים ומבדקים מתוקשבים המספקים משוב.

לסיכום, ברצוני לציין שמניסיוני למדתי שבהוראה מקוונת טמונים קשיים רבים, אך גם אתגרים המביאים איתם סיפוק והתלהבות מחודשת מעצם ההוראה, ולכך יש תרומה לא מבוטלת להתפתחות המקצועית. אכן, את התרומה של הוראה מקוונת להתפתחות המקצועית האישית אפשר למצוא גם בהתייחסותם של כשליש מהמרצים בעלי הניסיון (ראו סעיף 2.6.1א).

רשימת מקורות

- נוצר, נ' ואברמוביץ, ר' (2008). הערכת עמיתים בחינוך הגבוה מהי? – דוגמא לגבי הוראה קלינית. על הגובה, 6, 27-32.
- שריקי, ע' (2013). פיתוח מיומנויות למידה עצמית של פרחי הוראה: המקרה של קורס מקוון בתולדות המתמטיקה. הרצאה שהוצגה בכנס המדעי השנתי ה-14: מחקר, עיון ויצירה באורנים, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, טבעון.
- Allen, I. E., & Seaman, J. (2005). *Growing by degrees: Online education in the United States, 2005*. Retrieved from <http://www.onlinelearningsurvey.com/reports/growing-by-degrees.pdf>
- Allen, I. E., & Seaman, J. (2011). *Online enrollments in the USA grow 10% in 2011; OERs becoming accepted*. Retrieved from <http://www.tonybates.ca/2011/11/09/online-enrollments-in-the-usa-grow-10-in-2011-oers-becoming-accepted/>
- Aragon, S. R., & Johnson, E. S. (2008). Factors influencing completion and noncompletion of community college online courses. *The American Journal of Distance Education, 22*(3), 146-158.
- Azevedo, R., & Cromley, J. G. (2004). Does training on self-regulated learning facilitate students' learning with hypermedia. *Journal of Educational Psychology, 96*(3), 523-535.
- Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching reading in mathematics* (2nd ed.). Aurora, CO: Mid-continent Research for Education and Learning.
- Ben-Yehudah, G., & Eshet-Alkalai, Y. (2014). The influence of text annotation tools on print and digital reading comprehension. In Y. Eshet-Alkalai, A. Caspi, N. Geri, Y. Kalman, V. Silber-Varod, & Y. Yair (Eds.), *Proceedings of the 9th Chais conference for the study of innovation and learning technologies: Learning in the technological era* (pp. 28-35). Raanana: The Open University of Israel.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Bol, L., & Garner, J. K. (2011). Challenges in supporting self-regulation in distance education environments. *Journal of Computing in Higher Education, 23*, 104-123.
- Bunn, J. (2004). Student persistence in a LIS distance education program. *Australian Academic Research Libraries, 35*(3), 253-270.
- Butler, D. L., & Cartier, S. C. (2004). Promoting effective task interpretation as an important work habit: A key to successful teaching and learning. *Teacher College Record, 106*(9), 1729-1758.
- Caracelli, V. J., & Greene, J. C. (1997). Crafting mixed-method evaluation designs. In J. C. Greene, & V. J. Caracelli (Eds.), *Advances in mixed-method evaluation: The challenges and benefits of integrating diverse paradigms* (pp. 19-32). San Francisco: Jossey-Bass.
- Foxman, D. (1999). *Mathematics textbooks across the world: Some evidence from the third international mathematics and science study (TIMSS)*. Slough, Berkshire: National Foundation for Educational Research.
- Ge, X., & Land, S. M. (2003). Scaffolding students' problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development, 51*(1), 21-38.
- Govindasamy, T. (2002). Successful implementation of e-learning pedagogical considerations. *The Internet and Higher Education, 4*(4), 287-299.
- Greene, J. A., & Azevedo, R. (2009). A macro-level analysis of SRL processes and their relations to the acquisition of sophisticated mental models. *Contemporary Educational Psychology, 34*, 18-29.
- Harrell, I. L., & Bower, B. L. (2011). Student characteristics that predict persistence in community college online courses. *American Journal of Distance Education, 25*(3), 178-191.
- Hart, C. (2012). Factors associated with student persistence in an online program of study: A review of the literature. *Journal of Interactive Online Learning, 11*(1), 19-42.
- Holder, B. (2007). An investigation of hope, academics, environment, and motivation as predictors of persistence in higher education online programs. *The Internet and Higher Education, 10*, 245-260.
- <http://chronicle.com/article/The-Professors-Behind-the-MOOC/137905/#id=overview>
- <http://eprints.cpkn.ca/7/1/finalreport.pdf>
- <http://www.ascd.org/publications/books/105137/chapters/Reading-in-the-Mathematics-Classroom.aspx>
- <http://www.qc.cuny.edu/academics/degrees/education/Documents/Fall%20Newsletter%20Final%20Novem%20ber%202011.pdf>
- Ivankova, N. V., & Stick, S. L. (2005). Collegiality and community-building as a means for sustaining student persistence in the computer-mediated asynchronous learning environment. *Online Journal of Distance*

- Learning Administration*, 8(3). Retrieved from <http://www.westga.edu/~distance/ojdla/fall83/ivankova83.htm>
- Kängsepp, P. (2011). Impact of asking support questions on grade 4 and 7 students reading comprehension. *Creative Education*, 2(4), 381-387.
- Kay, R. H. (2006). Evaluating strategies used to incorporate technology into preservice education: A review of the literature. *Journal of Research on Technology in Education*, 38(4), 383-408.
- Kenney, J. M. (2005). Mathematics as language. In J. M. Kenney, E. Hancewicz, L. Heuer, D. Metsisto, & C. L. Tuttle (Eds.), *Literacy strategies for improving mathematics instruction* (pp. 1-8). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development. Retrieved from <http://www.ascd.org/publications/books/105137/chapters/Mathematics-as-Language.aspx>
- Khan, B. H. (2001). *A framework for web-based learning*. New Jersey, USA: Educational Technology Publication, Englewood Cliffs.
- Kocur, D., & Kosci, P. (2009). E-learning implementation in higher education. *Acta Electronica et Information*, 9(1), 20-26.
- Kolowich, S. (2013). The professors who make the MOOCs. *The Chronicle of higher education*. Retrieved from
- Kramarski, B., & Michalsky, T. (2009). Investigating pre-service teachers' professional growth in self-regulated learning environments. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 161-175.
- Lavy, I., & Shriki, A. (2014). Engaging in assessment activities both as assessors and assesses – the case of geometrical proofs. *The International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 14(1), 1-32.
- Levy, Y. (2007). Comparing dropouts and persistence in e-learning courses. *Computers and Education*, 48, 185-204.
- Liu, S. Y., Gomez, J., & Yen, C. (2009). Community college online course retention and final grade: Predictability of social presence. *Journal of Interactive Online Learning*, 8(2), 165-182.
- McKeachie, W. J. (2011). Sustaining motivation and self-regulation through a lifespan educational career: A personal perspective of Dr. Wilbert (Bill) J. McKeachie. *SSRL Newsletter, American Educational Research Association*. Retrieved from
- Means, B., Toyama, Y., Murphy, R., Jones, K., & Bakia, M. (2010). *Evaluation of evidence-based practices in online learning: A meta-analysis and review of online learning studies*. Washington, D.C.: U.S. Department of Education. Retrieved from
- Metsisto, D. (2005). Reading in the mathematics classroom. In J. M. Kenney, E. Hancewicz, L. Heuer, D. Metsisto, & C. L. Tuttle (Eds.), *Literacy strategies for improving mathematics instruction* (pp. 9-23). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development. Retrieved from
- Moore, M. G., & Kearsley, G. (2005) *Distance education: A systems view*. Belmont, CA: Wadsworth.
- Österholm, M. (2005). Characterizing reading comprehension of mathematical text. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 325-346.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.
- Papp, R. (2000). *Critical success factors for distance learning*. Paper presented at the Americas Conference on Information Systems, Long Beach, California, USA.
- Parker, A. (2003). Identifying predictors of academic persistence in distance education. *USDLA Journal*, 17(1), 55-62.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Richardson, V. (2003). Preservice teachers' beliefs. *Advances in Teacher Education*, 6, 1-22.
- Rudestam, K. E., & Schoenholtz-Read, J. (2009). The flourishing of adult online education: An overview. In K. E. Rudestam & J. Schoenholtz-Read (Eds.), *Handbook of online learning* (2nd ed., pp. 1-28). Newbury Park, CA: Sage.
- Selim, H. M. (2007). Critical success factors for e-learning acceptance: Confirmatory factor models. *Computers & Education*, 49(2), 396-413.
- Stone, E. (1994). Reform in teacher education: The power and pedagogy. *Journal of Teacher Education*, 45, 310-318.
- Volery, T., & Lord, D. (2000). Critical success factors in online education. *The International Journal of*

Educational Management, 14(5), 216-223.

Watkins, A. E. (1977). *The effect of the symbols and structures of mathematical English on the reading comprehension of college students* (Doctoral Dissertation). University of California, Los Angeles.

Watkins, A. E. (1979). The symbols and grammatical structures of mathematical English and the reading comprehension of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 216-218.

Zimmerman, B. J. (2000). Attainment of self-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). San Diego, CA: Academic Press.



פרופ' עטרה שריקי

מרצה במכללת אורנים במסגרת התואר הראשון ושני, ועומדת בראש פרויקט המצוינות של המכללה בשיתוף עם קרן טראמפ. מחקריה כיום מתמקדים בתחום היצירתיות המתמטית, סוגיות הנוגעות ללמידה מרחוק, ותהליכים הקשורים ליצירת קהילייה מקצועית של מורים למתמטיקה.

נספח א

שאלון למרצים למתמטיקה במכללות חסרי ניסיון קודם בהוראה בקורסים מקוונים

מרצה יקר/ה,

במוסדות רבים להשכלה גבוהה משמש האינטרנט בשנים האחרונות לצורך הוראה של קורסים מקוונים מסוגים שונים ובתחומי דעת מגוונים.

במטרה לקבל תמונת מצב עדכנית בנוגע לקיומם של קורסים מקוונים במתמטיקה במכללות, ועל מנת ללמוד מקרוב על תפיסותיך בנוגע לקורסים מסוג זה, אודה לך אם תוכל/י להשיב לסקר קצר בנושא זה.

השאלון הוא אנונימי.

אני מקווה שהמידע שיתקבל יסייע לכולנו, כקהילייה מקצועית של מרצים למתמטיקה במכללות, להבין טוב יותר את הסוגיה של הוראה מקוונת של קורסים במתמטיקה. בתודה על שיתוף הפעולה.

חלק א – פרטים כלליים

שם המכללה שבה את/ה מלמד/ת:

ותק בהוראה במכללה (או במכללות באופן כללי):

מיהם הסטודנטים שאותם את/ה מלמד/ת במכללה?

(ניתן לסמן יותר מאשר אפשרות אחת)

1. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בגיל הרך
2. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בהוראה לבית-הספר היסודי
3. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בחינוך מיוחד
4. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בהוראת מתמטיקה לבית-הספר העל-היסודי
5. אני מלמד/ת מורים למתמטיקה לבית-הספר היסודי הלומדים לתואר שני
6. אני מלמד/ת מורים למתמטיקה לבית-הספר העל-היסודי הלומדים לתואר שני
7. אחר:

חלק ב – תפיסותיך בנוגע לקורסים מקוונים במתמטיקה

1. מדוע אינך מלמד/ת קורסים מתמטיים במתכונת של קורס מקוון?
2. מהם, לדעתך, היתרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
3. מהם, לדעתך, החסרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
4. מהם, לדעתך, היתרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
5. מהם, לדעתך, החסרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
6. באיזו מידה חשוב, לדעתך, שסטודנטים במכללות יתנסו פעם אחת לפחות בלמידת מתמטיקה בקורס מקוון?

תפיסות של מרצים למתמטיקה במכללות לחינוך בנוגע להוראה וללמידה מקוונת של קורסים מתמטיים | 103

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
חשוב במידה רבה מאוד									כלל לא חשוב
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

מדוע?

7. איזה קורסים מתמטיים ניתן, לדעתך, ללמד במתכונת של קורס מקוון, ואיזה קורסים לא ניתן?
מדוע?

8. לפניך מספר היגדים. עבור כל אחד מהם יש לסמן את מידת הסכמת עם ההיגד.

5 מסכים/ה במידה רבה	4 מסכים/ה	3 מסכים/ה במידה בינונית	2 לא מסכים/ה	1 כלל לא מסכים/ה	
					א. הכנה של קורסים מקוונים דורשת זמן רב
					ב. בקורסים מקוונים אפשר לתת מענה אישי לצרכי הסטודנטים
					ג. קורסים מקוונים במתמטיקה מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ד. קורסים מקוונים בדיקטיקה של המתמטיקה מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ה. קורסים מקוונים בנושאי חינוך כלליים מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ו. לסטודנטים הלומדים במכללות יש מידה מספקת של מיומנויות לומד עצמאי שתאפשרנה להם ללמוד בהצלחה קורסים מקוונים במתמטיקה
					ז. קורסים מקוונים במתמטיקה מפתחים בקרב הסטודנטים מיומנויות של לומד עצמאי
					ח. בקורס מתמטי מקוון יש לסטודנטים פחות סיכוי להצליח מאשר בקורס דומה הנלמד במתכונת של פנים אל פנים

הערות לתשובותיי (במידה ויש):

9. האם היה מעניין אותך להתנסות בהוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון? מדוע?
10. במידה ותשובתך לשאלה 9 הייתה "כן", איזו תמיכה/עזרה נחוצה לך, לדעתך, לצורך זה?
11. הערות נוספות (במידה ויש):

תודה על שיתוף הפעולה

נספח ב

שאלון למרצים למתמטיקה במכללות עם ניסיון קודם בהוראה בקורסים מקוונים

מרצה יקר/ה,

במוסדות רבים להשכלה גבוהה משמש האינטרנט בשנים האחרונות לצורך הוראה של קורסים מקוונים מסוגים שונים ובתחומי דעת מגוונים.

במטרה לקבל תמונת מצב עדכנית בנוגע לקיומם של קורסים מקוונים במתמטיקה במכללות, ועל מנת ללמוד מקרוב על תפיסותיך בנוגע לקורסים מסוג זה, אודה לך אם תוכל/י להשיב לסקר קצר בנושא זה.

השאלון הוא אנונימי.

אני מקווה שהמידע שיתקבל יסייע לכולנו, כקהילייה מקצועית של מרצים למתמטיקה במכללות, להבין טוב יותר את הסוגיה של הוראה מקוונת של קורסים במתמטיקה. בתודה על שיתוף הפעולה.

חלק א – פרטים כלליים

שם המכללה שבה את/ה מלמד/ת:

ותק בהוראה במכללה (או במכללות באופן כללי):

ותק בהוראה בקורסים מתמטיים מקוונים:

מיהם הסטודנטים שאותם את/ה מלמד/ת במכללה?

(ניתן לסמן יותר מאשר אפשרות אחת)

1. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בגיל הרך
2. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בהוראה לבית-הספר היסודי
3. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בחינוך מיוחד
4. אני מלמד/ת סטודנטים המתמחים בהוראת מתמטיקה לבית-הספר העל-היסודי
5. אני מלמד/ת מורים למתמטיקה לבית-הספר היסודי הלומדים לתואר שני
6. אני מלמד/ת מורים למתמטיקה לבית-הספר העל-היסודי הלומדים לתואר שני
7. אחר:

חלק ב – תפיסותיך בנוגע לקורסים מקוונים במתמטיקה

1. מדוע בחרת ללמד קורס/ים מתמטי/ים במתכונת של קורס מקוון?
2. מהם תכני הקורס/ים המקוון/ים שאותם את/ה מלמד/ת?
3. מהי אוכלוסיית היעד של הקורס/ים המקוון/ים שאותם את/ה מלמד/ת?
4. תארי/י בקצרה את השיקולים שהנחו אותך בפיתוח הקורס/ים המקוון/ים
5. מהם, לדעתך, היתרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
6. מהם, לדעתך, החסרונות המרכזיים של הוראת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
7. מהם, לדעתך, היתרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?

8. מהם, לדעתך, החסרונות המרכזיים של למידת מתמטיקה במתכונת של קורס מקוון?
 9. מהם הקשיים העיקריים שלך בהוראת הקורסים מקוון/ים, וכיצד את/ה מתמודד/ת עם קשיים אלה?

10. באיזו מידה חשוב, לדעתך, שסטודנטים במכללות יתנסו פעם אחת לפחות בלמידת מתמטיקה בקורס מקוון?

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
חשוב במידה רבה מאוד									כלל לא חשוב
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

11. איזה קורסים מתמטיים ניתן, לדעתך, ללמד במתכונת של קורס מקוון, ואיזה קורסים לא ניתן? מדוע?

12. לפניך מספר היגדים. עבור כל אחד מהם יש לסמן את מידת הסכמת עם ההיגד.

5 מסכים/ה במידה רבה	4 מסכים/ה	3 מסכים/ה במידה בינונית	2 לא מסכים/ה	1 כלל לא מסכים/ה	
					א. הכנה של קורסים מקוונים דורשת זמן רב
					ב. בקורסים מקוונים אפשר לתת מענה אישי לצרכי הסטודנטים
					ג. קורסים מקוונים במתמטיקה מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ד. קורסים מקוונים בדיקטיקה של המתמטיקה מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ה. קורסים מקוונים בנושאי חינוך כלליים מתאימים לסטודנטים הלומדים במכללות
					ו. לסטודנטים הלומדים במכללות יש מידה מספקת של מיומנויות לומד עצמאי שתאפשרנה להם ללמוד בהצלחה קורסים מקוונים במתמטיקה
					ז. קורסים מקוונים במתמטיקה מפתחים בקרב הסטודנטים מיומנויות של לומד עצמאי
					ח. בקורס מתמטי מקוון יש לסטודנטים פחות סיכוי להצליח מאשר בקורס דומה הנלמד במתכונת של פנים אל פנים

הערות לתשובתיי (במידה ויש):

13. הערות נוספות (במידה ויש):

תודה על שיתוף הפעולה

ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל

התאוריה של המושגים הצורניים*

אפרים פישביין

מציגה: טלי נחליאלי



אפרים פישביין (1920-1998)

מייסדי החוג להוראת המדעים בבית-הספר לחינוך באוניברסיטת תל-אביב ומייסדי האגודה הבינלאומית לפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה (PME).

פרופ' אפרים פישביין היה מהחוקרים המובילים בעולם בתחום הפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה. פישביין התעניין במיוחד בקשרים שבין חשיבה אינטואיטיבית לבין חשיבה לוגית, הגדיר סוגים שונים של אינטואיציה והתייחס להשפעות שיש לחשיבה האינטואיטיבית על תהליך הלמידה. פישביין האמין כי הנחלת הידע המחקרי שהצטבר בתחום המחקר המתמטי למורים תשפר את איכות ההוראה. לפיכך, הדגיש את ההשלכות הדידקטיות של מחקריו והקדיש מאמצים רבים לפיתוח יחידות הוראה במתמטיקה לפרחי הוראה ולמורים בבית-הספר היסודי.

הקדמה

מאמר זה מהווה חלק אחד מתוך עבודתו הענפה של פרופ' אפרים פישביין (1920-1998), אשר היה מחלוצי החוקרים בתחום הפסיכולוגיה של החינוך המתמטי ומהחוקרים המובילים בעולם בתחום זה. עבודתו התמקדה בנושאים שונים הקשורים לחשיבה המתמטית ולהתפתחותה. פישביין הבחין בין שלושה מרכיבים של החשיבה המתמטית: הפורמלי, האלגוריתמי והאינטואיטיבי וחקר את טבעה של האינטואיציה בחשיבה. הוא זיהה סוגים שונים של אינטואיציה וכן חקר את מקורותיה ואת השפעתה על תהליכי הלמידה. נוסף על כך, התמקדה עבודתו בנושא של מודלים מנטליים, סמויים ברובם, בתהליך החשיבה המתמטית. בסוף המאמר המתורגם מופיעים קישורים למאמרים נוספים של פישביין אשר תורגמו לעברית או נכתבו במקור בעברית.

בשנת 1993 פרסם פישביין את התאוריה שהוא פיתח בנוגע למושגים צורניים (figural concepts), תאוריה אשר הסתמכה על מחקר עשיר, על תאוריות פסיכולוגיות בנוגע למושגים ולצורות כמו זו של פיאז'ה ואינהלדר (Piaget & Inhelder, 1966) ושל פאיוו (Paivio, 1970), ועל תאוריות מהחינוך המתמטי בנוגע להגדרת המושג והדימוי למושג שפורסמו על-ידי טול ווינר (למשל, Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991).

* מאמר זה תורגם לעברית מתוך מאמרו של אפרים פישביין: Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

גאומטריה בית-ספרית מתמקדת בצורות גאומטריות אשר חלקן מוכרות לנו מגיל צעיר מאוד. במאמרו זה, דן פישביין בשאלה – מהי הצורה הגאומטרית? האם היא מושג (ישות מופשטת הנשלטת באופן מוחלט על-ידי הגדרתה)? האם היא דימוי (ייצוג חושי של עצם או תופעה בעלת תכונות כמו גודל וצבע)? או אולי מדובר בישות אחרת.

בעוד שתאוריות קוגניטיביות שונות מתייחסות בנפרד למושגים ולדימויים, מצביע פישביין על קיומו של סוג שלישי של ישות מנטלית – המושג הצורני (figural concept). לטענת פישביין, המושג הצורני הוא בעל אופי מושגי (קונספטואלי) וצורני בו בזמן. בסימביוזה זו, בין המושגי והצורני, הצורה היא זו אשר מעוררת דרכי חשיבה חדשות, והאילוצים המושגיים (הלוגיים) הם אלה ששולטים בדיוק הפורמלי של התהליך. פישביין טוען שהצורות הגאומטריות שייכות לסוג שלישי זה.

מטרתו של המונח "מושג צורני" היא להדגיש את העובדה שמדובר בישות מתמטית שאליה אי אפשר להתייחס כאל מושג בלבד או כאל צורה/דימוי בלבד. מדובר בצורות הנשלטות באופן בלעדי על-ידי הגדרות או מערכת אקסיומות. לטענת פישביין, הדימוי/צורה והמושג אמורים להתמזג לעצם מנטלי אחד. בלא הרעיון של מושגים צורניים אי אפשר לתאר או להסביר באופן מספק תהליכים של פתרון בעיות ושל יצירתיות בגאומטריה.

להלן השאלות שמעלה פישביין במאמרו:

1. האם המסלול של תהליך החשיבה המתמטית נקבע בעיקרו על-ידי מבנים מושגיים (המתווכים או מסומלים על-ידי אמצעים דימויים), או להפך: האם הדימויים (ההיבט הצורני) הם אלה אשר מאפשרים יצירתיות מחשבתית ובכך מקדמים את תהליך החשיבה?
2. האם מושגים צורניים הם תוצר טבעי של מוח האדם כמו המושגים והדימויים, או שהם מתפתחים רק כתוצאה מאימון שיטתי?

התייחסותו של פישביין לשאלות אלה מלווה בדוגמאות מרתקות אשר מבהירות את הבעייתיות של התייחסות לצורה הגאומטרית כאל מושג אך כאל צורה. פישביין טוען כי התפתחות הסימביוזה בין המושגי והצורני לא נעשית בדרך כלל בטבעיות וכי אחד התפקידים המרכזיים בהוראת הגאומטריה הוא ליצור מצבים דידקטיים שבהם נדרש יהיה למזג בין ההיבטים המושגי והצורני כדי לעזור ללומדים למזג בין שתי מערכות אלה.

ובנימה אישית, שיעורי הראשון בתואר השני בחינוך מתמטי באוניברסיטת תל-אביב היה סמינריון עם פרופ' פישביין. בשיעור זה, בעקבות שאלה שהעליתי, הפנה אותי פישביין למאמרו זה, *התאוריה של המושגים הצורניים*. מאמר זה היווה את כניסתי לעולם המחקר בחינוך מתמטי. בעקבות מאמר זה בחרתי נושא לתזה בהנחייתו של פרופ' פישביין. מעבר להנאה מהמחקר עצמו, למדתי רבות מהשיחות הרבות עם פרופ' פישביין, אשר זכיתי בהן בצהרי ימי שני – שיחות בנוגע לאינטואיציה, למאבק שבין הצורני והמושגי, לקשיים של תלמידים ולמחקר בחינוך מתמטי בכלל.

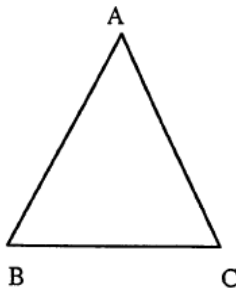
תקציר

הרעיון המרכזי במאמר זה הוא שגאומטריה עוסקת בישויות מנטליות (הנקראות צורות גאומטריות) אשר הן בעלות מאפיינים מושגיים וצורניים בו זמנית. כדור גאומטרי (sphere), למשל, הוא ישות מופשטת אידאלית אשר נקבעת באופן פורמלי כמו כל מושג. בו בזמן, יש לה תכונות צורניות, כשהראשונה בהן היא – צורה מסוימת. אי אפשר למצוא כדור גאומטרי מושלם במציאות. בסימביוזה זו שבין המושג והצורה, כפי שזה נחשף בישויות גאומטריות, המרכיב של הדימוי (הצורה) הוא אשר מעורר כיוונים חדשים של חשיבה, אך ישנם אילוצים לוגיים, מושגיים אשר שולטים בדיוק הפורמלי של התהליך. קראנו לצורות הגאומטריות מושגים צורניים בשל אופי דואלי זה. מאמר זה מנתח את המתחים הפנימיים אשר עשויים לעלות בהקשר של המושגים הצורניים בשל אופי דואלי זה, וכן היבטים התפתחותיים והשלכות דידקטיות הקשורים לתאוריה זו.

הרעיון של מושג צורני

תאוריות פסיכולוגיות עכשוויות מבחינות, בדרך כלל, בין מושגים¹ ודימויים מנטליים. בספרו "Vocabulaire de la Psychologie", פירו (Piéron) מגדיר מושג באופן הבא: "יצוג סימבולי (כמעט תמיד מילולי) אשר בו משתמשים בתהליך של חשיבה מופשטת אשר יש לו משמעות כללית המתאימה לאוסף של ייצוגים מוחשיים ביחס למשותף להם" (cf. Piéron, 1957, p. 72). אם כך, המאפיין העיקרי של מושג הוא שהוא מבטא רעיון,² ייצוג כללי, אידאלי של אוסף של עצמים על בסיס תכונות משותפות.

לעומת זאת, דימוי (נתייחס כאן לדימויים מנטליים) הוא ייצוג חושי של עצם או תופעה. המושג של מתכת הוא הרעיון הכללי של אוסף של יסודות שיש להם מספר תכונות משותפות: הולכה חשמלית, ועוד. הדימוי של עצם מתכתי הוא הייצוג החושי של העצם המיוחד (כולל צבע, גודל ועוד).



תרשים 1

בכל התאוריות הקוגניטיביות הממשיות, מושגים ודימויים נחשבים כשתי קטגוריות נפרדות של ישויות מנטליות. אפילו התאוריה הטענתית (propositional theory), אשר לפיה שני סוגי המידע מקודדים לבסוף באותו פורמט של טענות (propositional), מתייחסת למושגים ולדימויים כאל שני סוגים שונים של ישויות מנטליות.

נתייחס לדוגמה הבאה: נתון משולש שווה שוקיים ABC, אשר בו $AB = AC$ (תרשים 1). ברצוננו להוכיח ש $\angle B = \angle C$. אפשר לדמיין את ההוכחה הבאה: נניח שהיחיד מנתק את המשולש מעצמו,

1. בתרגום המאמר השתמשתי במילה "מושג" כתרגום למילה "concept", שבה השתמש פישיבין במאמרו. באותו אופן, השימוש במילה "מושג" תואם את המילה "conceptual" (הערת המתרגמת).
2. ההטיות המופיעות בתרגום זה תואמות את ההטיות במקור.

הופך אותו כך ש-AC בצד שמאל ו-AB בצד ימין ואז מניח את המשולש שעבר היפוך על המשולש המקורי. זווית A תישאר כפי שהייתה, והיות שאורכן של צלעות AB ו-AC שווה, AC תתלכד באופן מושלם עם AB בצד שמאל, ו-AB תתלכד באופן מושלם עם AC בצד ימין. כך המשולש ההפוך והמשולש המקורי יתלכדו באופן מושלם. בשל כך, זוויות B ו-C חייבות להיות שוות. מ.ש.ל.

בהוכחה זו נעשה שימוש בידע המבוטא באופן מושגי: הוצהר כי הצלעות AC ו-AB הן שוות. נעשה שימוש במושגים: נקודה, צלע, זווית ומשולש. דובר על תהליך של היפוך. אך בו בזמן נעשה שימוש הן במידע על צורות והן בפעולות המיוצגות על-ידי צורות – בעיקר הרעיון של ניתוק משולש ABC מעצמו, היפוכו והנחתו על המשולש המקורי.

האם אנו עוסקים כאן בעירוב של שתי ישויות בלתי תלויות ומוגדרות שהן רעיונות מופשטים (מושגים) מצד אחד, וייצוגים חושיים המשקפים פעולות קונקרטיות מצד אחר?

נתייחס ללב ההוכחה, כלומר, לפעולה של ניתוק משולש ABC מעצמו והיפוכו. אי אפשר לנתק, להפוך או להתאים מושגים. אנו עוסקים כאן בתיאורים של פעולות שהן פרקטיות לכאורה. אך במציאות, האם אפשר לנתק עצם מעצמו? ברור שלא. לפעולה שכזו אין משמעות קונקרטית. אנו עוסקים בעולם אידאלי, עם משמעויות אידאליות. לעצמים שאנו מתייחסים אליהם – לנקודות, צלעות, זוויות ולפעולות שאנו מבצעים אתם, יש קיום אידאלי בלבד. יש להם אופי מושגי. בו בזמן, יש להם אופי צורני אינהרנטי (מהותי): רק כשמתייחסים לדימויים אפשר להתייחס לפעולות כמו ניתוק, היפוך או התאמה. למעשה, אי אפשר להתייחס למשולש ולמרכיבים שלו כאל מושגים טהורים או כאל דימויים בלבד. לא היה אפשר לבצע את הפעולות שהתייחסנו אליהן קודם עם מושגים טהורים או עם עצמים אמיתיים. עם זאת, ישויות ופעולות אלה השתתפו בהוכחה לוגית, פורמלית, בעלת תוקף מתמטי, ועם זאת, את המסקנה שהתקבלה, שוויון הזוויות B ו-C אפשר לבדוק באופן מעשי.

לישויות שהתייחסנו אליהן למעלה – לנקודות, לצלעות (קטעים), לזוויות, למשולש עצמו ולפעולות שביצענו איתם, יש תכונות מושגיות. בחשיבה המתמטית³ לא מתייחסים אליהם כאל עצמים מוחשיים או כאל שרטוטים. העצמים המוחשיים – גופים או שרטוטים – אלה הם רק המודלים המוחשיים של הישויות המנטליות שבהן עוסק המתמטיקאי. שנית, אפשר להתייחס לשלמות המוחלטת של הישויות הגאומטריות: קווים ישרים, מעגלים, ריבועים, קוביות ועוד, רק אם מתייחסים אליהן כאל מושגים.

שלישית, לישויות גאומטריות אלה לא קיימים מתאימים מוחשיים אמיתיים. נקודות (עצמים אפס-ממדיים), קווים (עצמים חד-ממדיים) ומישורים (עצמים דו-ממדיים) לא קיימים ואינם יכולים להתקיים במציאות. העצמים האמיתיים השייכים לחוויה הפרקטית שלנו הם בהכרח תלת-ממדיים. אך אפילו הקובייה או הכדור הגאומטרי (sphere), שהמתמטיקאי מתייחס אליהם לא קיימים במציאות, למרות שהם תלת-ממדיים. גם הם מבנים מנטליים שלא אמורים להיות בעלי מציאות כלשהי.

3 המילים "חשיבה מתמטית" הן המילים שבהן בחרתי כתרגום למילים "mathematical reasoning" אשר בהן השתמש פישבין במאמר. אמנם המילים "הנמקה מתמטית" נכונים יותר מבחינה מילולית, אך נראה שפישבין משתמש במילה "reasoning" באופן רחב יותר, הכולל גם תהליכים של הנמקה והוכחה.

רביעית, כל המבנים האלה הם ייצוגים כלליים, כמו כל מושג, ולעולם אינם העתקים מנטליים של עצמים מוחשיים מסוימים. כאשר מציירים משולש ABC מסוים על דף נייר במטרה לבחון תכונות מסוימות שלו (למשל, את התכונה שהגבהים שלו נפגשים בנקודה אחת) לא מתייחסים לשרטוט המסוים, אלא לצורה מסוימת אשר עשויה להיות הצורה של קבוצה אינסופית של עצמים. למעשה, אנו עוסקים בהיררכיה של צורות, החל בצורה שהיא מסוימת לכאורה, אך למעשה היא מתאימה לאינסוף עצמים אפשריים, ועד לקטגוריה האוניברסלית של משולשים. אידאליזם, מופשטות, מושלמות מוחלטת ואוניברסליות – אלה הן תכונות שיש להן משמעות בעולם של מושגים.

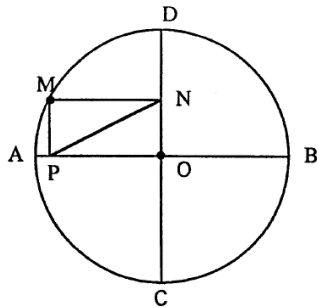
אך ישנה גם תכונה חמישית אשר מאפיינת את הצורות הגאומטריות ואשר מתייחסת גם היא לאופי המושגי שלהן. התכונות של הצורות הגאומטריות נאכפות על-ידי, או נגזרות מהגדרות בתחום של מערכת אקסיומות מסוימת. גם מנקודת מבט זו, יש לצורה הגאומטרית אופי מושגי. ריבוע אינו דימוי המצויר על נייר. זוהי צורה הנשלטת על-ידי הגדרתה (אם כי ייתכן שההשראה לכך התקבלה מעצם אמיתי). ריבוע הוא מלבן בעל צלעות שוות. כשיוצאים מתכונות אלה, אפשר להמשיך ולגלות תכונות אחרות של הריבוע (שוויון זוויות אשר כולן ישרות, שוויון אלכסונים ועוד).

לפיכך, אפשר לתאר צורה גאומטרית כבעלת תכונות מושגיות אינהרנטיות. עם זאת, הצורה הגאומטרית אינה רק מושג. היא דימוי, דימוי ויזואלי. יש לה תכונה שאין למושגים, היא כוללת ייצוג מנטלי של מאפייני המרחב.

כאשר ממשיגים, למשל, גלגל כדי לתאר את המעגליות שלו, אנו יכולים לקבל לא רק את הרעיון של המעגליות, לא רק את הדימוי של הגלגל המתקשר לכך, אלא גם מבנה מסוג שלישי שהוא הצורה הגאומטרית הנקראת "מעגל". כשנדרשים, למשל, לפתור בעיה הכוללת את הצורך בחישוב המרחק שעובר כלי רכב, בהינתן רדיוס הגלגלים, מספר הסיבובים ליחידת זמן והזמן שעבר, החישוב מתבצע על פי מודל מופשט של גלגל שהוא אינו דימוי טהור או מושג טהור. מושגים אינם מסתובבים, אינם זזים ולדימויים אין את תכונות המושלמות, הכלליות, המופשטות, הטוהר שמניחים אותן בעת ביצוע החישובים.

המשולש, העיגול, הריבוע, הנקודה, הקו, המישור אשר הוזכרו בדוגמאות לעיל, ובאופן כללי, כל הצורות הגאומטריות, מייצגות מבנים מנטליים שיש להם, בו בזמן, תכונות מושגיות וצורניות.

כמובן שכאשר אנו מדמיינים מעגל, אנו מדמיינים מעגל מצויר (כולל, למשל, צבע הדיו) ולא את המעגל האידאלי, המושלם. אך למעגל המתמטי, העומד בלב החשיבה המתמטית, אין צבע, אין בסיס חומרי, אין מסה וכך הלאה, והוא מושלם ואידאלי לכאורה. יש לו את כל התכונות של מושג והוא יכול להשתתף כפי שהוא בהנמקה המתמטית וזאת על אף העובדה שיש לו ייצוג של תכונות מרחביות.



תרשים 2

נחשוב על הדוגמה הבאה: "במעגל עם מרכז C נשרטט שני קטרים מאונכים זה לזה AB ו-CD. נבחר נקודה כלשהי M ונשרטט את האנכים MN ו-MP לקטרים הנתונים. מהו אורכו של PN?" (תרשים 2).

במבט ראשון, נראה שהבעיה אינה ניתנת לפתרון שכן אורכי הקטעים MN ו-MP תלויים במיקומה של הנקודה M. אך לפתע שמים לב ש-MPON הוא מלבן ושהקטע MO הוא אלכסון של מלבן זה. מכך נובע ש $PN = MO$, ו-MO הוא רדיוס המעגל. שוויון האלכסונים אינו מוטל בספק, שוויון הרדיוסים גם הוא אינו מוטל בספק. יחסים אלה אינם תלויים

בשרטוט המסוים. הם נכפים על-ידי הגדרות ומשפטים. העניין המרכזי שברצוננו להדגיש הוא שהמסקנה אינה נגזרת מהתייחסות נפרדת לדימוי ולאילווצים הפורמלים, אלא על-ידי תהליך ייחודי שבו ההתייחסות לצורה מזוקקת חושפת קשרים לוגיים. איננו צריכים להתאמץ כדי "להבריק" או לטהר את הצורה, מנטלית, מאי-הסדירויות שלה. תהליך האידאליזציה של הצורה נעשה מיד ואוטומטי כאילו כדי להופכו למרכיב אינטגרלי פעיל של הנמקה לוגית קשיחה.

העובדה שאנו קופצים לפתע למסקנה: $PN = MO$ אשר שווה לרדיוס השווה לקבוע, ברגע שזיהינו את PONM כמלבן, בלי התערבות של פעולת חקירה, תומכת ברעיון שהצורה שאנחנו מתייחסים אליה היא, מלכתחילה, לא דימוי רגיל אלא מבנה הנשלט באופן לוגי. המיזוג בין מושג לצורה, במקרה זה, נוטה להיות מושלם.

העצמים שהם תחת חקירה ומניפולציה בתהליך החשיבה הגאומטרית, הם אם כך ישויות מנטליות, אשר להן אנו קוראים מושגים צורניים. המושגים הצורניים משקפים תכונות מרחביות (צורה, מיקום, גודל), ואשר הם, בו בזמן, בעלי תכונות מושגיות כמו אידאליות, מופשטות, כלליות ומושלמות.

איני מתכוון לטעון שכאשר אנו מדמיינים צורה גאומטרית, הייצוג במוחנו הוא נטול תכונות חושיות (כמו צבע) פרט לתכונות מרחביות. אך אני טוען שכאשר אנו פועלים עם צורה גאומטרית, אנו פועלים כאילו כל תכונה אחרת אינה נחשבת.

אני שואל את עצמי: איזו צורה אקבל כתוצאה מחיתוך של קובייה על-ידי מישור דרך האלכסונים של שתי פאות נגדיות? קל לדמיון את הפעולה. אך לשם כך יש להתייחס לשתי מציאויות מנטליות נפרדות. האחת היא הייצוג של קובייה אמיתית (משהו כמו קובייה מעץ) ופעולת החיתוך שלה. זהו דימוי חושי כמו דימויים רבים העולים במוחנו בשל הניסיון הפרקטי שלנו: הבית שאני גר בו, החדר שאני עובד בו, ייצוגים של קרובים, חברים, סטודנטים ועוד.

מעבר לדימוי זה ישנו דימוי נוסף אשר אינו מתקבל על-ידי החושים, אלא על-ידי מחשבה, העצם האמיתי של החשיבה הגאומטרית שלנו. זהו הדימוי שאנחנו מתייחסים אליו כאשר אנו מבצעים פעולה מתמטית.

אנו כה רגילים להבחין בין דימויים, כמו "תמונות במוח" לבין מושגים, כמו רעיונות כלליים שאינם חושיים, שקשה לנו מאוד לקבל מבנה אשר יכלול בו בזמן תכונות שהן גם מושגיות וגם דמיוניות-מרחביות.

חשוב להבהיר שמיזוג זה בין מושג וצורה בחשיבה הגאומטרית מבטאים מצב שהוא אידאלי וקיצוני שבדרך כלל לא מגיעים אליו באופן מוחלט בשל אילוצים פסיכולוגיים. ההיסטוריה של המתמטיקה עדה למורכבות הדינמיות של התהליך של ההמשגה והאקסיומטיות של המידע הצורני. אקסיומות רבות שבהן השתמש אויכלידס בספריו "היסודות" מעולם לא נוסחו על-ידו בפירושו:

כפי שציין גאוס, אויכלידס דיבר על נקודות הנמצאות בין נקודות אחרות וקווים הנמצאים בין קווים אחרים, אך הוא מעולם לא התייחס לרעיון של הביניים (betweenness) ולתכונות שלו (Kline, 1980, p. 102).

היה זה מוריץ פש (Moritz Pasch) אשר העניק, במאה התשע-עשרה, סטטוס פורמלי ל"ביניים" אשר עד אז התקבל כמידע המבוסס על היבטים צורניים.

בעמודים הבאים, נפגוש בדוגמאות של תופעות המעוררות אצל היחיד קונפליקט הקשור לראשית התפתחות הרעיון של המושגים הצורניים בקרב היחיד.

האינטראקציה בין דימויים ומושגים

מקובל לקבל את התופעה שבמהלך תהליך יעיל של הנמקה יש אינטראקציה בין דימויים ומושגים. שפרד (Shepard) ציטט דוחות אינטרוספקטיביים רבים של מדענים שמתארים את הדרכים אשר בהן גילוי של רעיון חדש התבסס על דמיון שהתעורר על-ידי חקירה תאורטית (Shepard, 1978). למשל, בקשר לעבודתו של איינשטיין, כתב שפרד:

לאורך כל הדרך, עבודתו של איינשטיין בפיסיקה תאורטית התבלטה באינטראקציה בין ויזואליזציה תפיסתית קונקרטית מחד, ודחף נחוש לשימוש בעקרונות מופשטים ואסתטיים של סימטריה או שימור, מאידך. נראה שאינטראקציה זו הייתה מתווכת, לא על-ידי דדוקציה מילולית, גשרים לוגיים או פורמליות מתמטית, אלא על-ידי זינוק מרקיע של אינטואיציה פיסיקלית ומרחבית (Shepard, 1978, p. 135).

שפרד מזכיר את החוויה המנטלית המפורסמת של Kékulé, אשר הובילה אותו לגילוי של מבנה מושווה דמוי-טבעת של מולקולת הבנזין, בעודו מנמנם מול האח אחר צהריים אחד (1865):

האטומים ליהטטו לפני עיני [...] לפני עיני מוחי, מחודדים על-ידי מראות חוזרים מאותו סוג, אפשר היה להבחין קעת במבנים גדולים יותר של תצורות שונות, בשרשראות ארוכות, רבים מהם קרובים: הכל התפתל באופן דמוי-נחש. לפתע, מה זה היה? אחד מהנחשים תפס את זנבו והמבנה כולו התפתל בפני עיני כאילו מלגלג. כמוכה ברק, התעוררתי (Shepard, 1978, p. 147).

הקורא יכול למצוא עשרות דוגמאות מסוג זה במאמרו של שפרד.

הרעיון המרכזי, החוזר בספרות העדכנית, הוא שחשיבה יעילה הן בהקשרים יומיומיים והן בסיטואציות מדעיות, כוללת אינטראקציה קבועה בין דינמיות מושגית ודימויית. האם מהלך החשיבה נקבע בעיקרו על-ידי מבנים מושגיים (המסומלים או מתווכים בעזרת אמצעים דימויים), או להפך: האם אלה הדימויים המעודדים את היצירתיות המקדמת את מהלך החשיבה? התופעות כה מורכבות שלא נראה שקיימת תשובה החלטית לשאלה זו. נראה שההשערה הסבירה ביותר היא שלמעשה אנו עוסקים במשחק אחד שבו רשתות מושגיות פעילות נמצאות באינטראקציה עם מקורות דימויים. מעבר לכך, יש לנו סיבות להודות שבמהלך אינטראקציה זו, משמעויות נעות מקטגוריה אחת לאחרת, הדימויים נעשים בעלי חשיבות כללית יותר והמושגים מעשירים את מארג הקונטציות והשילובים שלהם.

יש עדויות ניסוייות רבות בקשר לאינטראקציה שבין הדימויים והמושגים בלמידה ובפתרון בעיות (לסקירות ולתאוריות כלליות, ראו למשל, Anderson, 1978, 1990; Blanc-Garin, 1974; Denis & Dubois, 1976; Kosslyn, 1980, 1983; Paivio, 1970, 1971; Rohwer, 1970).

אך באינטראקציה זו דימויים ומושגים נחשבים לקטגוריות נפרדות של ישויות מנטליות. אנו מניחים שבמקרה הייחודי של חשיבה גאומטרית, היחיד עוסק בסוג שלישי של אובייקטים מנטליים שלהם יש תכונות מושגיות וצורניות בו בזמן.

הסיבה לסמביוזה החזקה בין האילוצים האנליטיים, סימבולים לבין התכונות הצורניות בחשיבה הגאומטרית היא שאנו עוסקים למעשה במערכות אקסיומטיות. לפיכך, עלינו להבחין בין תקפות מתמטית פורמלית לבין תקפות אמפירית. כל עוד מתייחסים לצורה הגאומטרית בסביבה של מבנה אקסיומטי מסוים, התכונות שלה והמשפטים הרלוונטיים מוכתבים באופן ישיר או שאינו ישיר על-ידי הגדרות סמויות או מפורשות. החקירה של תכונות אלה תחומה למאמץ אינטלקטואלי, ואנו עוסקים בסוג פורמלי של תקפות. אם אנו מעוניינים בתקפות האמפירית של התכונות או המשפטים, הדברים משתנים באופי בסיסי ועל היחיד לעמת את הטענות המתמטיות המתאימות עם העובדות האמפיריות.

כפי שכבר ציינו, ההמשגה המוחלטת של דימויים מרחביים בחשיבה הגאומטרית מייצגת, למעשה, תופעה אידאלית. המרכיב הצורני בדרך כלל מושפע מכוחות צורניים-גשטלט והמרכיבים המושגיים עשויים להיות מושפעים מכשלים לוגיים. עם הגיל, וכתוצאה מהוראה מתאימה, כפי שנראה בהמשך, המיזוג בין הצורני והמושגי נוטה להשתפר.

במחקרים העוסקים בייצוגים מרחביים אשר התבצעו עד כה, לא התייחסו לסטטוס המסוים שלהם. אפילו שפרד אשר הקדיש מחקר רב למניפולציות המנטליות של צורות גאומטריות (כמו סיבוב ופריסה), אינו מדגיש היבט זה של הבעיה (ראו Shepard & Cooper, 1982). רק פיאז'ה ואינהלדר ציינו את הסטטוס של דימויים מרחביים, אך גם הם לא התייחסו להשלכות שיש לקשר שבין הצורני לבין האילוצים הלוגיים בתחום זה (Piaget & Inhelder, 1966, pp. 373-412).

היבטים התפתחותיים

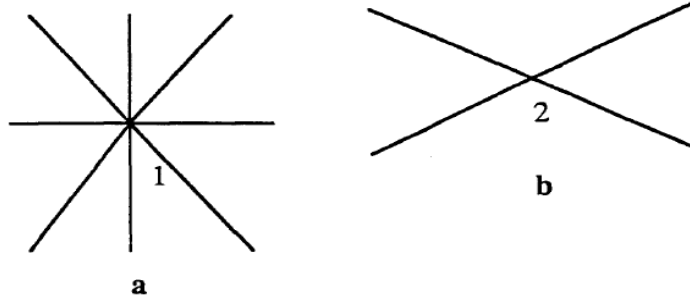
האם מושגים צורניים הם תוצר טבעי של החשיבה האנושית כמו מושגים ודימויים, או שהם מתפתחים רק לאחר אימון שיטתי?

קשה לענות על שאלה זו מכיוון שבסיטואציות רבות ההתגשמות החומרית והפרשנות המושגית הטהורה מניבים תשובה דומה. כאשר מבקשים מהיחיד לפרוס קובייה (בין אם היא מיוצגת באופן מנטלי או באופן קונקרטי) השרטוט המתקבל זהה בין אם הוא חושב במונחים מושגיים ובין אם מתייחס לקובייה קונקרטית. נדרשות סיטואציות ניסוייות ייחודיות כדי להצליח לבצע הבחנה זו.

במחקר קודם יצרנו סיטואציות ניסוייות כאלה. למשל תלמידים בכיתות ב'-ו' עומתו עם השאלה הבאה (תרשים 3):

בתרשים a 3 משורטטים ארבעה קווים נחתכים (נקודה 1). בתרשים b 3 ישנם שני קווים נחתכים (נקודה 2). השוו בין נקודות 1 ו-2. האם נקודות אלה שונות? האם אחת מהן גדולה יותר? אם כן איזו מהן? האם אחת מהן כבדה יותר? אם כן, איזו? האם לשתי הנקודות צורה זהה?

השאלה נוסחה באופן רב משמעי בכוונה. אפשר להתייחס אליה מהיבט גאומטרי או מוחשי (גרפי). מטרתנו הייתה לזהות את התפתחות הפרשנויות שמציעים המשתתפים עם הגיל, ואת ההתפתחות האפשרית של המושגים הצורניים (נקודה, קו).



תרשים 3

הממצאים מראים התפתחות שיטתית באופן יחסי של תשובות, מייצוג קונקרטי לייצוג מושגי-מופשט. בכיתה ב' 68% מהתלמידים לא ענו כלל על שאלה שהתייחסה לגודל הנקודות, 13% ענו שנקודה 1 גדולה יותר, 6% ענו שנקודה 2 גדולה יותר ורק 7% ענו שהנקודות זהות. 2% ענו, באופן כללי, שהנקודות שונות.

בכיתה ג' 40% לא השיבו אבל 45.7% טענו שנקודה 1 גדולה יותר. רק 2% אישרו שהנקודות זהות. בכיתה ד' זיהינו תופעה של קוטביות תשובות: 50.9% טענו שנקודה 1 גדולה יותר, 27.3% טענו שהנקודות זהות ורק 12.3% לא ענו.

בכיתה ה' היחס בין תשובות קונקרטיות למושגיות החל לרדת: 40% טענו שנקודה 1 גדולה יותר, 28.8% טענו שהנקודות זהות ו-20% לא ענו.

בכיתה ו' המצב היה שונה. 20% עדיין סבורים שנקודה 1 גדולה יותר בעוד ש-45.4% מהמשתתפים ענו שהנקודות זהות.

נצטט כמה הסברים אשר ניתנו על-ידי התלמידים החל מכיתה ד' החושפים את הפרשנויות הסותרות שלהם:

ש.א.: "נקודה 1 גדולה יותר כי זה החיתוך של יותר קווים. לנקודות אין משקל. יש להן צורה דומה" (Fischbein, 1963, p. 222).

מ.ג.: "נקודה 1 גדולה יותר כי יותר קווים נחתכים. בגלל שלנקודה 1 יש נפח גדול יותר אז היא גדולה יותר. לנקודות יש אותה צורה כי הן אותו דבר" (Fischbein, ibid, p. 223).

הילד לא מצליח לארגן את המידע במבנה קוהרנטי. מצד אחד, נקודה 1 נחשבת גדולה יותר בגלל שתפיסתית היא מייצגת חיתוך של ארבעה קווים. אבל מצד אחר, אותה נקודה היא בדרכה להפוך ליישות אוטונומית המנותקת מכל הקשר, כהכנה להתפתחות המושג הגאומטרי – "נקודה".

מ.ג.: "הנקודות כמעט זהות. יש להן אותו משקל. לנקודות יש את אותה צורה כי שתיהן משולשים" (cf. Fischbein, 1963, p. 224).

אפשר לראות את העירוב הלא מתואם של פרשנויות תפיסתיות וגאומטריות. המושג הצורני (הנקודה המופשטת מממד אפס הנוצרת על-ידי קווים חד-ממדיים מופשטים) עדיין אינו קיים.

פ.ש.: "לנקודות יש את אותו גודל ומשקל. יש להן צורות שונות. הנקודות הן באותו גודל לא משנה כמה קווים נחתכים" (cf. Fischbein, ibid, p. 225).

מצד אחד נראה שהפירוש הפורמלי הנכון כבר קיים: "מספר הקווים הנחתכים אינו משפיע על גודל נקודת החיתוך (משתמע מכך באופן סמוי שהקווים הם חד-ממדיים והנקודות מממד אפס)". אבל מצד אחר, הצורות עדיין נתפסת כשונות זו מזו: הגורם התפיסתי המסגיר את האוריינטציה המוחשית עדיין פעיל.

בכיתה ה' אין הבדלים משמעותיים בהשוואה לכיתה ד'. אפשר לזהות עירוב דומה של פרשנויות תפיסתיות וגאומטריות-פורמליות (שנלמדו).

א.פ.: "נקודה 1 גדולה יותר מכיוון שיש לה שטח גדול יותר. נקודה 1 גם כבדה יותר כי יש לה שטח גדול יותר" (cf. Fischbein, ibid, p. 228).

ק.ו.: "שתי הנקודות אינן באותו גודל. אחת גדולה יותר, האחרת קטנה יותר. לשתי הנקודות יש אותה צורה כי הן שתיהן עגולות" (cf. Fischbein, ibid, p. 228).

מצד אחד לנקודות גדלים שונים, כלומר, הן תלויות בקווים (הנחה סמויה שעוביין שונה) אשר יוצרים אותן, ומצד אחר, הנקודות זהות, עגולות, מכיוון שמתייחסים אליהן כאל ישויות גרפיות בלתי תלויות

(הנקודות הגרפיות נראות כעגולות).

בכיתה ו' התמונה משתנה באופן מוחלט. הקווים והנקודות המופשטים מתגלים. נראה שקיימים מושגים צורניים אמיתיים.

ד.נ.: "אין לנקודת החיתוך של הקווים כל משקל, גודל או צורה, אין להם כל מסד" (Fischbein, ibid, p. 230).

ר.ר.: "לנקודות אין מסד. דרך נקודה עוברים אין סוף קווים. לנקודות אין צורה" (Fischbein, ibid, p. 230).

ל.ק.: "לנקודות אין גודל, אין משקל, אבל הן מיוצגות על-ידי עיגולים קטנים" (Fischbein, ibid, p. 230).

המשתתפים התבקשו גם להשוות נקודה ששורטטה על הלוח עם נקודה במחברת הלימוד. באופן כללי, אפשר לזהות את אותה התפתחות. אך חשוב לציין כי במקרים מסוימים הופיעו סתירות מעניינות. אצטט מספר דגמאות מכיתה ו'. ההשוואה בין נקודה על הלוח לבין נקודה במחברת:

ר.א.: "אף אחת מהנקודות אינה כבדה יותר. אף אחת אינה גדולה יותר. כי לנקודה אין מסדים" (Fischbein, ibid, p. 232).

אותו תלמיד (ר.א.) (בעבור השאלה המתייחסת לקווים הנחתכים):

"נקודה 1 גדולה יותר כי יותר קווים נחתכים. נקודה 2 קטנה יותר כי פחות קווים נחתכים. לנקודות יש משקל זהה" (Fischbein, ibid, p. 232).

התלמיד (ר.א.) מאשר שלנקודות אין ממד ולכן אף אחת אינה גדולה או כבדה יותר. אותו תלמיד, כשהתייחס לקווים הנחתכים, טען שנקודה אחת גדולה יותר כי היא החיתוך של מספר קווים. הקונפליקט המתואר כאן נוצר בשל העובדה ששתי המערכות – הצורנית והמושגית, טרם מוזגו כמושגים צורניים אמיתיים. התלמיד יודע שלנקודות אין ממד, והוא משתמש בידע זה כאשר הוא מתייחס לנקודה המצוירת על גבי הלוח ולנקודה המשורטטת במחברתו. בו בזמן, כאשר הוא מתייחס לנקודות אשר נוצרו על-ידי חיתוך הקווים, ההשפעה הצורנית חזקה מדי ונראה שהיא מבטלת את האילוצים המושגיים.

להלן דוגמה נוספת מאותו סוג:

ג.מ.: "הנקודה שעל הלוח והנקודה שבמחברת זהות כי אנחנו יודעים שלנקודות אין מסד" (Fischbein, ibid, p. 232).

אותו תלמיד (ג.מ.):

"לשתי הנקודות (שנוצרו על-ידי הקווים הנחתכים) אין את אותו גודל. המשקל של נקודה 1 גדול יותר וגם הגודל שלה, ואין להן את אותה צורה."

כיצד זה ייתכן שאותו משתתף, שמאשר שהנקודה על הלוח והנקודה במחברת זהות מכיוון שאין להן ממד, טוען ששתי הנקודות אשר נוצרו על-ידי חיתוך הן שונות?

התלמיד בן ה-11 (כיתה ו') מודע לעובדה ששני הסמלים הגרפיים מייצגים ישויות גאומטריות ללא ממד. העובדה שאחת נוצרה על-ידי גיר והאחרת על-ידי עפרון תורמת לניטרול החשיבות של ההתגשמות המוחשית. אך במקרה של הקווים הנחתכים, התלמיד עוסק רק בייצוגים גרפיים. נראה שבמקרה זה ההשפעה של הייצוג הצורני עדינה הרבה יותר ומצליחה לתפוס בעצמה את כלל המשמעות של המושגים "נקודה" ו"קו".

דוגמאות אלה מראות את המורכבות של הקשרים שבין ההיבטים הצורניים והמושגיים בארגון של המושגים הצורניים והשבירות של ארגון זה במוחם של התלמידים.

ההגדרה, הדימוי והמושג הצורני

לפיכך, כאשר מתייחסים לצורות גאומטריות יש להתייחס לשלוש קטגוריות של ישויות מנטליות: ההגדרה, הדימוי (המתבסס על התנסות תפיסתית-חושית כמו דימוי של ציור) והמושג הצורני. המושג הצורני הוא מציאות מנטלית, זהו המבנה שעוסקים בו בחשיבה מתמטית בתחום הגאומטרי. הוא נטול כל תכונות קונקרטיות-חושיות (כמו צבע, משקל, צפיפות וכיו"ב), אך הוא בעל תכונות צורניות. מבנה צורני זה נשלט ומופעל על-ידי כללים לוגיים ופרוצדורות בעולם של מערכת אקסיומטית מסוימת. הקושי לקבל את קיומו של סוג שלישי זה של ישויות מנטליות נקבע על-ידי העובדה שאנו מודעים באופן ישיר רק לייצוג המנטלי (כולל תכונות חושיות כמו צבע) ולמושג המתאים. יש לנו צורך במאמץ אינטלקטואלי כדי להבין שפעולות מתמטיות-לוגיות עושות מניפולציה רק על גרסה מזוקקת של הדימוי, התוכן המרחבי-צורני של הדימוי. כאשר אנו עושים מניפולציה על מילים בפעילות מילולית, הצלילים (הנשמעים או מבוטאים) הם המייצגים החומריים החיצוניים של המשמעות. המשמעות היא מעבר לחומריות של המילה המבוטאת: המשמעות היא רעיון הנקבע על-ידי מארג של קשרים. המושג הצורני גם הוא משמעות. הייחוד בסוג זה של משמעות הוא שהיא כוללת צורה כתכונה אינהרנטית. המשמעות האמיתית של המילה מעגל בגאומטריה, כפי שהיא מתופעלת על-ידי תהליכי החשיבה שלנו, אינה ניתנת להפחתה להגדרה פורמלית טהורה. זהו מושג אשר נשלט באופן מוחלט על-ידי הגדרה. בלא סוג זה של דימויים מרחביים, הגאומטריה לא היתה קיימת כענף של המתמטיקה.

המונח "צורה" הוא רב משמעי ויכול לציין מגוון של משמעויות. בטקסט הנוכחי "צורה" מתייחסת רק לדימויים מרחביים. בדרך כלל יש לצורה (figure) מבנה מסוים, צורה (Shape) או "גשטאלט". צורות גאומטריות מתאימות לתיאור זה, אך יש להוסיף כמה הבחנות: (א) צורה גאומטרית היא דימוי מנטלי שתכונותיו נשלטות באופן מוחלט על-ידי הגדרה; (ב) שרטוט אינו צורה גאומטרית כשלעצמו אלא התגשמות מוחשית גרפית שלה; (ג) הדימוי המנטלי של צורה גאומטרית הוא בדרך כלל הייצוג של המודל החומרי שלה. הצורה הגאומטרית כשלעצמה היא רק הרעיון המתאים אשר הוא היישות המופשטת, האידיאלית הטהורה אשר נקבעת באופן מוחלט על-ידי הגדרה.

כפי שכבר ציינו, צורות גאומטריות אינן הדימויים היחידים אשר נשלטים על-ידי מושגים מתאימים. למעשה, זהו המצב המקובל במיוחד בחשיבה מדעית. בעבור הביולוג למשל, מושגים כמו בעלי

חוליות, דו-חיים, יונקים וכדומה מציינים משפחות של חיות, אשר המשמעות שלהן היא מיזוג של מושגים מצד אחד, ואשר הן קשורות במוחו של המדען עם דימויים מסוימים מצד אחר. כאשר חושבים על קטגוריות אלה של חיות, המדען עושה מניפולציה על הדימויים בהתאם למושגים המתאימים.

ההבדל בין מדעים אמפיריים וגאומטריה בהקשר זה, הוא שבגאומטריה הדימויים עשויים להיות נשלטים באופן מוחלט על-ידי מושגים בעוד שבמדעים אמפיריים הם אינם נשלטים.

במדעים אמפיריים המושג נוטה לעשות קירוב למציאות הקיימת המתאימה בעוד שמתמטיקה זהו המושג, דרך הגדרתו, אשר מכתוב את תכונות הצורות המתאימות.

דבר זה מוביל לתוצאה מהותית. המתמטיקאי יכול לבצע את תהליך החקר כולו באופן מנטלי בהתאם למערכת אקסיומטית מסוימת, בעוד שהמדען האמפירי חייב, במוקדם או במאוחר, לחזור למקורות אמפיריים. בעבור המתמטיקאי, המציאות עשויה להיות מקור של השראה אך היא לעולם אינה אובייקט למחקר המוביל לאמיתות מתמטיות וודאי שלא ערכאה סופית להוכחת אמת מתמטית.

המתמטיקאי, כמו הפיסיקאי או הביולוג, משתמש בתצפית, ניסוי, אינדוקציה, השוואות, הכללות, אך האובייקטים של החקירה שלו הם מנטליים במלואם. המעבדה שלו תחומה על-ידי מוחו. ההוכחות שלו הן לעולם אינן בעלות אופי אמפירי אלא לוגי בלבד.

קונפליקטים

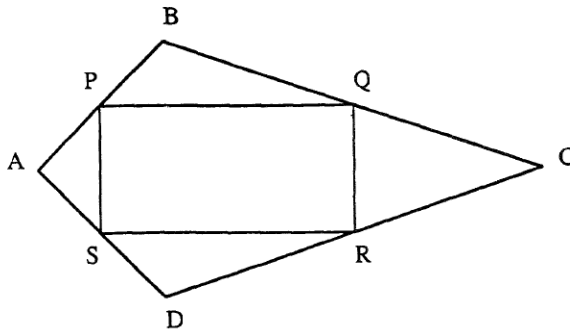
כפי שצינו, מושגים צורניים מהווים את הגבול האידאלי של תהליך מיזוג ואינטגרציה בין ההיבטים הלוגיים והצורניים.

רעיון דומה ביטאו טול ווינר אשר הבחינו בין "דימוי למושג" (concept image) ובין "הגדרת המושג" (concept definition). בעוד שהמונח "הגדרת המושג" מתייחס למשמעות המתמטית, כפי שהיא מוגדרת באופן פורמלי, המונח "דימוי למושג" מתאר את "המבנה הקוגניטיבי כולו המקושר למושג, הכולל את כל התמונות המנטליות וכן התכונות והתהליכים הקשורים למושג. הוא נבנה במהלך השנים דרך התנסויות מסוגים שונים, משתנה כאשר היחיד פוגש בגירויים חדשים ומתבגר" (cf. Tall, 1991, p. 7). בגאומטריה, המושג הצורני האידאלי מתקשר עם הגדרת המושג בעוד שההשתקפות המנטלית שלו על כל הקונוטציות ורב-המשמעויות שלה מתקשרות עם מה שטול ווינר כינו בשם "דימוי למושג". "דימוי", בטרמינולוגיה שלהם, אין משמעו "תמונה" במובן החושי, אלא בנייה מנטלית, סובייקטיבית, מחדש של ישות מתמטית הנתונה באופן פורמלי.

נחזור למושג הצורני. תחת תנאים פסיכולוגים רגילים, המאפיינים הצורניים והמושגיים של המושג הצורני נשארים תלויים, בדרך כלל, בשתי המערכות, עם האילוצים של כל אחת מהן. עובדה בסיסית זו מובילה לעתים לסתירות, קונפליקטים, מתחים פנימיים, עד להתפרקות המוחלטת של המושג הצורני לשני מרכיביו הבסיסיים.

אציג מספר דוגמאות. בניסוי שערכנו לפני מספר שנים, הצגנו את המשפט הבא:

"ABCD הוא מרובע ו-PQRS הן נקודות האמצע של כל אחת מצלעותיו. הוכיחו כי PQRS היא מקבילית" (תרשים 4).



תרשים 4

למשתתפים הוצגה הוכחה של המשפט והם נשאלו אם הם מסכימים עם נכונות הטענה. כדי לבדוק

האם המשתתפים מבינים שההוכחה מהווה ערובה לתקפות אוניברסלית של המשפט, נשאלו מספר שאלות נוספות. אחת מהשאלות הייתה: "V הוא ספקן. הוא סבור שיש לבדוק לפחות

100 מרובעים כדי להיות בטוחים ש-PQRS היא מקבילית. מה דעתך? הסבר את תשובתך."

נמצא כי כ-40% מהמשתתפים (N=396) הסכימו עם ההוכחה, אך רק כ-10% דחו כל צורך בבדיקות אמפיריות נוספות (Fischbein & Kedem, 1982, pp. 128-131).

ההסבר של חלק מהתלמידים היה מהסוג הבא: יש לבדוק מספר קטגוריות של מרובעים (מקביליות, מלבנים, ריבועים ועוד).

כפי שכבר טענו, המושג הצורני הוא מבנה מנטלי המאפיין על-ידי כל התכונות של מושג (כלליות, הכרחיות, מופשטות, אידאליזציה), אך אשר משמר, בזמן, תכונות צורניות (צורה, מרחקים, מיקום). בעיקרון, ההיתוך שבין הצורה והמושג אמור להיות מושלם, אך זהו הארגון המושגי אשר אמור להכתיב, באופן מוחלט, את התכונות והקשרים הצורניים. למעשה, כפי שכבר ציינו, זוהי סיטואציה אידאלית שאפשר להשיג אותה במוחו המיומן של המתמטיקאי.

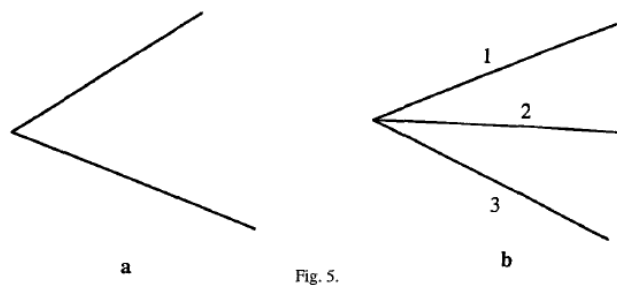
התכונות המושגיות והצורניות נשארות תחת ההשפעה של כל אחת משתי המערכות התואמות, המושגית והצורנית. לעתים קרובות, האילוצים הצורניים – על פי רוב לפי חוקי הגשטלט – עלולים לחמוק מהשליטה המושגית ולכפות, על קו המחשבה, פרשנויות אשר הן עקביות עם ההיבט הצורני אך אינן כפופות יותר לאילוצים מושגיים.

על אף שהתלמיד יודע את הגדרת המקבילית (מרובע אשר צלעותיו הנגדיות מקבילות), הוא עלול להתקשות לראות את ההתאמה להגדרה זו בצורות השונות, את הגשטלט הזוהה, את הקטגוריה הדומה של הצורות. מקבילית מוטה, מלבן, ריבוע הם כה שונים מהבחינה הצורנית, עד שההשפעה המאחדת של המושג המשותף, נעלמת. היחיד אשר מקבל את נכונותה של ההוכחה הנתונה כתמיכה בתקפותו של המשפט, עשוי לטעון שנדרשות בדיקות נוספות בעבור כל קטגוריה של מרובעים, כדי להגיע לוודאות.

אלסנדרה מריאטי (Alessandra Mariotti) הביאה את הדוגמה הבאה: אליסיה (בת 16, כיתה י"א) פתרה את הבעיה הבאה:

כמה זוויות את רואה בתרשימים a ו-b? (ראו תרשים 5).

אליסיה: "בכל פעם שאני רואה שני קווים נחתכים, אני יודעת שהמרחב בין שני הקווים הוא זווית. אני חושבת שבשתי הצורות יש רק זווית אחת למרות שבהתחלה חשבתי שבתרשים השני יש שתי זוויות. אני יכולה להסביר את הטענה שלי. בהתחלה חשבתי שבייצוג הזה (תרשים bs) קו 1 וקו 2 יוצרים זווית אחת וקו 2 וקו 3 יוצרים זווית שנייה. אבל עכשיו אני חושבת שנוצרת רק זווית אחת על-ידי הקווים הנחתכים (קווים 1, 2 וקו 3) וקו 2 הוא חוצה הזווית של זווית זו." (Mariotti, 1992, p. 875).



תרשים 5

הקושי של אליסיה נוצר על-ידי העובדה שהמושג אינו מצליח להשתלט על השרטוט. זה קורה לא מכיוון שאליסיה אינה תופסת את המושג נכונה, אלא מכיוון שלשרטוט עדיין יש מאפיינים גשטלטיים אשר התעוררו לאחר התנסויות קודמות. למעשה, הסימביוזה המושלמת שדיברנו עליה עדיין אינה קיימת. אם תחתוך חתיכה של עוגה לשני חצאים, יתקבלו שתי חתיכות של עוגה, לא שלוש (הפרשנות הראשונה של אליסיה). אם קו 2 הוא חוצה-זווית, הוא אינו יכול להשתייך, בו בזמן, לשתי הזוויות האחרות (הפרשנות השנייה).

המושג "זווית" לא שולט באופן מוחלט בצורה. הפרשנות של הצורה עדיין מסתמכת חלקית על אילוצים לא-פורמליים.

השלכות תאורטיות

אפשר להבחין בשתי תאוריות המתייחסות לקשרים שבין מושגים ודימויים. שתי נקודות מבט אלה הודגשו בתחום של הגישה של עיבוד מידע.

א. תאוריית הקוד הדואלי (The dual code theory)

פאיוו (Paivio) הקדיש מספר מחקרים לבחון את תפקידם של הדימויים המנטליים, בעיקר בתהליך הלמידה. בדומה לתאוריה של פיאז'ה ואינהלדר (Piaget & Inhelder, 1966), הוא הדגיש את האופי הסימבולי של הדימויים, ובאותו כיוון חשיבה, גם הוא הבחין אותם מתהליכים מילוליים:

ניתן לקשר את הגישה האמפירית הכוללת קבוצות שונות של פעולות מתכנסות אשר תוארה קודם לכן, למסגרת מחקרית שבה התפקידים המיוחדים לדימויים בלמידה וזיכרון מובחנים באופן ברור מאלה המיוחדים לתהליכים מילוליים. ללא הבחנה זו, יהיה זה מיותר לשמור על שני התהליכים - הדימויים והמילוליים, כמבנים תאורטיים. הבחנה אחת כזו היא שהדימוי קשור באופן פונקציונאלי לגירוי או למשימה קונקרטית, בעוד שתהליכים מילוליים הם יותר בלתי-תלויים במסד זה. כלומר, נראה שדימויים הם שימושיים יותר כאשר עוסקים בסיטואציות קונקרטיות מאשר בסיטואציות מופשטות. הבחנה תאורטית נוספת היא שהדימוי נדרש במיוחד לעיבוד של מידע מרחבי בעוד שהמערכת המילולית מתאפיינת יותר ביכולת שלה לעיבוד סדרתי (Paivio, 1970, pp. 386-387).

ב. התאוריה הטענתית (The propositional theory)

תאוריית הקוד הדואלי עמדה תחת ביקורת. כותבים שונים טענו שדימוי, כמו מידע מילולי, מקודד בפורמט טענתי מופשט (לסקירה, ראו Anderson, 1978). אנדרסון תיאר שלושה מאפיינים המגדירים טענה: היא מופשטת, יש לה ערך של נכונות ויש לה את כללי ההיווצרות שלה (Anderson, 1978, p. 250). "טענה אינה רק משפט. רעיון המופשטות קשור למושג של שימור תחת פרפרזה", טוען אנדרסון (ibid, p. 250). כלומר, יינתן אותו ייצוג טענתי למספר פרפרזות בלשניות ולכמה תרגומים בין-שפות.

התומכים בתאוריה הטענתית טוענים שאי אפשר להסביר את התהליכים הקשורים בדימויים מנטליים ולזיכרון מילולי בעזרת תאוריית הקוד הדואלי.

פילישיין (Pylyshyn, 1973) מתייחס לעובדה שאנשים יכולים לתאר תמונות בעזרת מילים או ליצור תמונות כדי לתאר רעיונות המבוטאים באופן מילולי. "הקוד הטענתי המופשט ישמש כפורמט מנטלי אשר לתוכו ומתוכו אפשר לתרגם מידע תמונתי ומילולי. הוא משמש כ"בית חצי-הדרך" לתהליך התרגום בין שני הקודים הפריפריאליים" (Anderson, ibid, p. 256).

אנדרסון ובאוור (Anderson & Bower, 1973) ופילישיין (Pylyshyn, 1973) מאשרים שיש צורך בקוד טענתי כדי לייצג משמעויות.

אנדרסון טען שהתאוריה של קוד טענתי מופשט ומקובל נפגמת על-ידי השיקול הבא: אם כדי לתרגם מקוד 1 לקוד 2 יש לתרגם תחילה מקוד 1 לקוד 3 משמע הדבר שכדי לתרגם מקוד 1 לקוד 3 יש צורך בקוד חדש, קוד 4, ודבר זה יוביל לרגרסיה אינסופית (Anderson, 1978, p. 256).

בקצרה, קשה לקבוע על סמך הנתונים שיש בידנו כיום, איזו משתי התאוריות – תאוריית הקוד הדואלי או התאוריה הטענתית, מספקת הסבר מתאים יותר לאחסון ולדינמיות של ייצוגים מילוליים

ודימויים. ישנם טיעונים חזקים בעד ונגד כל אחת מהן (לדיון מקיף בנושא זה ראו Anderson, 1978).

המושגים הצורניים והתאוריה הטענית

עצם הקיום של מושגים צורניים, נוסף על הדימויים והמושגים הטהורים, מהווה טיעון חזק לטובת רמה מנטלית מרכזית, מאחדת שהיא אוטונומית באופן יחסי שלא רק מסייעת לתקשורת שבין מידע מילולי ותמונתי, אלא גם מאפשרת מבנים מנטליים המאופיינים בו בזמן על-ידי תכונות מושגיות (כלליות, אידאליות, הכרחיות) ועל-ידי תכונות תמונתיות (בעיקר מרחביות).

אם היו קיימים רק שני קודים בלתי תלויים זה בזה לא היה אפשר לבצע מניפולציה על דימוי, על ייצוג מרחבי תחת השליטה האינטרינזית והקפדנית של ההגדרה. כאשר אנו פותרים בעיה בגאומטריה, אנו מבצעים מניפולציות על צורות גאומטריות כאילו הן היו ישויות מנטליות הומוגניות ולא צירופים של שתי קטגוריות של מבנים מנטליים הטרונגיים. זהו, בלי ספק, המקרה האידאלי אך האפשרי.

כפי שראינו, לעתים קרובות, תחת ההשפעה של כללים צורניים, הדימוי עשוי להפריד את עצמו ולברוח מכל שליטה פורמלית-מושגית.

פיאז'ה ואינהלדר

פיאז'ה ואינהלדר הקדישו מחקר מקיף לקשרים שבין דימויים ופעולות (כלומר, מבנים לוגיים) (Piaget & Inhelder, 1966). לדעתם, למרות שדימויים ומושגים מייצגים שתי קטגוריות נפרדות, ישנה אינטראקציה מוחלטת ביניהם. באינטראקציה זו, האופרציות ממלאות תפקיד מוביל אשר גדל עם הגיל.

לדעתם, במקרה של גאומטריה מתרחשת סיטואציה ייחודית:

...במקרה המיוחד של פעולות גאומטריות, אשר תפקידן רק לתאר את הצורות המרחביות ואת הטרנספורמציות שלהן, ישנה הומוגניות בין המסומל (le symbolisé) הכלול בפעולות מרחביות והסמל המייצג (le symbolisant image) אשר הוא עצמו בעל אופי מרחבי: הוא עוקב אחרי הסיטואציה המועדפת של האינטואיציה הגאומטרית, אשר האופי הכפול שלה - זה של הפעולות וזה של הדמיון, מגיע לסינתזה פנימית יותר מאשר בכל תחום אחר... האינטואיציה הגאומטרית, מגיעה לסינתזה הולמת זו רק על-ידי שיעבוד של המרכיבים המדומיינים לגרעין האופרציוני. שיעבוד זה מרמז על התפתחות (Piaget & Inhelder, 1966, pp. 394-395).

נראה שגם לפיאז'ה וגם לאינהלדר הייתה את האינטואיציה לגבי המיזוג המוחלט בין ההיבטים המושגיים והצורניים במקרה המיוחד של חשיבה גאומטרית. העובדה שהם הגיעו למסקנה זו לאחר עדויות רבות מהווה תמיכה חזקה לתאוריה שלנו. מצד אחר, הם לא ניסחו את ההשלכות הכלליות, התאורטיות או הדידקטיות של ממצא זה. בעבודתם זה נשאר כהערת אגב.

השלכות דידקטיות

נציין מספר היבטים דידקטיים המרומזים על-ידי התאוריה של המושגים הצורניים. חלקם אמנם כבר מוכרים למורים מניסיון ההוראה שלהם, אך הם אינם קשורים לתאוריה כללית.

דימוי והגדרה

כפי שכבר הדגשנו, הקשר בין אובייקט להגדרה שונה במהותו במדעים המדויקים ובמתמטיקה. בעוד שבמדעים האמפיריים ההגדרה מוכתבת באופן מוחלט על-ידי התכונות של קטגוריית האובייקטים המתאימה, במתמטיקה זו ההגדרה אשר כופה באופן ישיר או בדרך של דדוקציה, את התכונות של קטגוריית האובייקטים המתאימה. לפיכך, התרגום של המרכיב הצורני של הצורה הגאומטרית אמור להישאר כולו תחת אילוצים פורמליים. רעיון זה אינו תמיד מובן, ולעתים קרובות הוא נשכח על-ידי התלמיד. המרכיב הצורני נוטה לשחרר את עצמו מהשליטה הפורמלית ולהתנהג באופן אוטונומי על פי המקובל בדפוסים של גשטלט (כמו למשל, העובדה שתלמידים רבים, גם לאחר שקיבלו את ההוכחה כאישור מוחלט לתקפותו של משפט, דורשים בדיקות נוספות לכל תת-קטגוריה של קטגוריית הצורות הנדונה). קושי זה בביצוע מניפולציות על מושגים צורניים, כלומר, הנטייה להזניח את ההגדרה תחת הלחץ של האילוצים הצורניים, מייצגת מכשול גדול מאוד בחשיבה הגאומטרית.

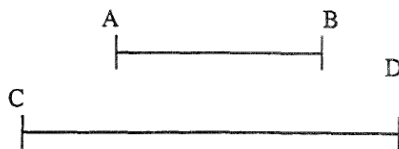
מנקודת הראות הדידקטית נובע שחשוב שהתלמיד יהיה מיומן בהתמודדות עם מצבי קונפליקט כאלה.

ייתכן שתלמידים לא יהיו מסוגלים לשרטט נכונה את הגובה מקדקוד B ובמקום זאת, יציירו את הקטע BD על אף שהם יודעים את ההגדרה של גובה לצלע במשולש (תרשים 6).

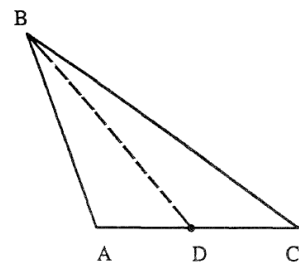
חשוב שהם יהיו מודעים להגדרה ושהם יתבקשו לבצע את המשימה נכונה על פי ההגדרה ולא על פי מה שנראה שנכפה עליהם על-ידי הדימוי.

זוהי בלי ספק דוגמה טריוויאלית, אך כדאי להשתמש בדוגמאות רבות כאלה של קונפליקט באופן שיטתי בכיתה, כדי להדגיש את השליטה של ההגדרה על הצורה בשימוש ובמתן המשמעות למושג הצורני.

דוגמה נוספת: כדי להשוות בין קבוצות הנקודות בקטעים AB ו-CD יש להתמודד עם הקונפליקט שבין הטענה שבקטע CD יש יותר נקודות והטענה ששתי הקבוצות הן שקולות (תרשים 7).



תרשים 7



תרשים 6

הפירוש הנכון של הרעיון של נקודה הוא שזהו מושג צורני. אם נדבר באופן מושגי, נקודה היא ישות אפס-ממדית. באופן צורני (מרחבי), נקודה מציינת מיקום. אך כיוון שאי אפשר לייצג מיקום בדרך אחרת מאשר בעזרת דימוי, הנקודות מקבלות ממדים (ייצוג דו-ממדי). כך המושג הצורני מאבד מהטוהר האידאלי שלו ודבר זה יוצר קונפליקט. כאשר אנו מאשרים שקטע כולל אינסוף נקודות, אנו מתייחסים לאינסוף של ישויות אפס-ממדיות. לביטוי "אינסוף של ישויות אפס-ממדיות" יש משמעות אידאלית: היא עוסקת במושג צורני טהור. בו בזמן, המרכיב הצורני (המיקום) נוטה לקבל אוטומטית מימוש תמונתי מסוים המוביל לאמונה הסמויה לגבי אי השקילות של שתי קבוצות הנקודות.

חשוב שתלמיד תיכון יהיה מודע לקונפליקט ולמקור של קונפליקטים מסוג זה כדי שהוא יוכל להדגיש, במוחו, את הצורך לבסס באופן מוחלט את החשיבה המתמטית על אילוצים פורמליים.

כל אלה מובילים למסקנה שאין להתייחס לתהליכים של בניית מושגים צורניים במוחו של התלמיד כאל תוצאה טבעית וספונטנית של לימודי הגאומטריה.

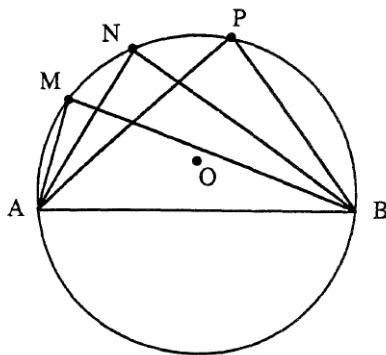
תהליך המיזוג בין תכונות מושגיות וצורניות ליצירת מבנים מנטליים בודדים, אשר בהם שולטים אילוצים מושגיים על פני האילוצים הצורניים, אינו תהליך טבעי. חשוב שהוא יהיה עיסוק מרכזי, רציף ושיטתי בשיעורי הגאומטריה.

המושג של מקום גאומטרי

לפני כן טענו שכדי ליצור אינטגרציה הולמת בין הצורה והמושג בחשיבה הגאומטרית, עם שליטה מוחלטת של אילוצים פורמליים, כדאי להתייחס לסיטואציות של קונפליקט: חשוב שהתלמיד יתאמן בבחינה של דרישות ההגדרה, אשר הן לעתים סותרות את אלה העולות מהצורה. היבט נוסף שחשוב לציין ביחס להתגבשות של המושג הצורני הוא השימוש המפורש במקומות גאומטריים. במקרים אלה של מקומות גאומטריים באים לידי ביטוי באופן מפורש קשרים אינטימיים ועמוקים אלה שבין ההיבט הלוגי והצורני. מקום גאומטרי הוא צורה (קו או מישור) אשר כל נקודותיה מקיימות תנאי גאומטרי מסוים, ואוסף כל הנקודות המקיימות תנאי זה שייכות לצורה זו.

כך למשל, התכונה של מעגל כמושג צורני נקבעת על-ידי ההתאמה המוחלטת בין הנקודות שלו לבין קשר מסוים המוגדר באופן אלגברי או מטרי. כל נקודות המעגל הן שוות-מרחק (הרדיוס r) מנקודה C (מרכז המעגל) וכל הנקודות שהן שוות מרחק מנקודה C נמצאות על המעגל. באופן אלגברי, מתקיים $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. אי אפשר להמציא (או לגלות) תכונות של מעגל אשר אינן נגזרות מהגדרתו. על אף שהמעגל הוא דימוי, ייצוג מרחבי, הקיום שלו, כמו גם התכונות שלו, נכפות באופן מוחלט על-ידי ההגדרה הפורמלית המופשטת. אין דבר שהוא נכון מבחינה צורנית אשר אינו נכון וניתן להוכחה באופן מושגי, ולהפך.

בקצרה, השימוש השיטתי במקומות גאומטריים עם האופי הכפול המוצהר במפורש מייצגים בעינינו כלי דידקטי חשוב המאפשר העמקה בהבנת אופי המושגים הצורניים.



תרשים 8

נתייחס לדוגמה נוספת: נתייחס למעגל עם מרכז O . נבחר שתי נקודות A ו- B כלשהן על המעגל ונשרטט מספר זוויות אשר שוקייהן עוברות דרך A ו- B ואשר קדקודיהן על המעגל (תרשים 8). נשווה בין זוויות M, N, P .

קשה להשוות בין זוויות אלה מבחינה צורנית באופן ישיר. נראה שהן בעלות גדלים שונים. אך אנו יודעים שמידתה של זווית אשר קדקודה על המעגל שווה למחצית הקשת הנקבעת על-ידי שוקיה. לפיכך, שלוש הזוויות M, N, P שוות בגודלן.

אנו דנים כאן במושגים צורניים מכיוון שכל חלק מהדימוי (זוויות, שוקיים, נקודות, המעגל, הקשת) הם בו בזמן דימויים ומושגים, כאשר הדימויים נשלטים באופן מוחלט על-ידי ההגדרות המתאימות. אבל במהלך הדינמי של תהליך החשיבה נראה שאי אפשר לענות על השאלה בהתבסס על הדימוי עצמו. שוויון הזוויות נקבע דרך המשפט המתאים.

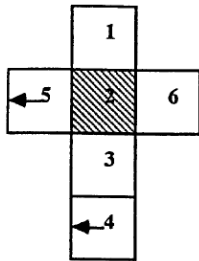
מכיוון הפוך: כל קדקודי הזוויות אשר שוקיהן עוברות דרך נקודות זהות על המעגל (ושהן בעלות גודל זהה עם זווית אשר הקדקוד שלה על המעגל) נמצאות על אותו המעגל. אנו מאמינים שבדרך של עימות בין הרושם הצורני והאילוצים הפורמליים, אפשר לשפר את השליטה המושגית ובו בזמן לפתח את הסימביוזה שבין האילוצים הצורניים והמושגיים.

בעיות הקשורות למקומות גאומטריים מבליטות באופן יפהפה ומפורש מדוע חשוב שלא להפריד בין הלוגיקה והדימוי בחשיבה הגאומטרית. המרכיבים הצורניים נהיים חלק בלתי נפרד מתהליך החשיבה הלוגית כאילו הם מושגים אמיתיים לכשעצמם. מקרים של סתירה הם בדרך כלל תוצאה של "אי הקשבה" של הצורני, תוצאה של כוחות צורניים בנוסף ללוגיים.

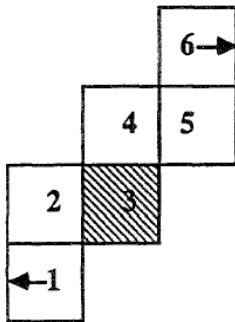
הערות

הערה אחרונה מתייחסת לכך שתרגול, עם התלמידים, של פעולות מנטליות שבהן נדרש מאמץ מיוחד כדי לקשר בין הצורני והמושגי, דורש מאמץ מיוחד. בפעולות כאלה, התלמיד צריך ללמוד לבצע מניפולציות מנטליות על עצמים גאומטריים תוך שהוא פונה בו בזמן לפעולות עם צורות ולתנאים ופעולות לוגיים.

סוג זה של פעילויות שכבר התייחסנו אליהן במאמר זה כולל: (א) בקשה מהתלמידים לשרטט את הדימוי המתקבל על-ידי פריסתו של גוף גאומטרי (הנתון באופן פסי או מיוצג מנטלית); (ב) בקשה מהתלמידים לזהות את הגוף הגאומטרי אשר יכול להתקבל כתוצאה מדמיון של הקיפול מחדש של השרטוט הדו-ממדי; (ג) בקשה מתלמידים לציין את הקצוות אשר יתחברו לאחר בניית הגוף התלת-ממדי.



תרשים 9



תרשים 10

חלק ממשמיות אלה פשוטות למדי, אך חלקן מסובכות. למשל, די פשוט לקבוע שהשרטוט בתרשים 9 מייצג קיפול של קובייה. הסימטריה של הדימוי מסייע מאוד והקיפול של פאות 1, 3, 4, 5 ו-6 נעשה באופן מנטלי כמשימה ייחודית (כאשר פאה 2 מייצגת את בסיס הקובייה). במקרה זה, המרכיבים הצורני והמושגי משולבים באופן טבעי ובשל כך היחיד מבצע מניפולציה על מושג צורני ומרכיבו. התאמה של הקצוות המתאימים גם היא אינה משימה מסובכת במקרה של קצוות סמוכים (בשרטוט). קשה יותר לראות שהקצוות המסומנים (בעזרת חצים) יתלכדו גם הם בקובייה שתתקבל לאחר הקיפול.

משימה מורכבת יותר תהיה לזהות את השרטוט בתרשים 10 כפריסה של קובייה. כמו כן, די קשה לראות שהקצוות המסומנים יתלכדו בקובייה שלאחר קיפול. בפעילויות מנטליות מסוג זה, אין די בחיקוי חיצוני של פעולות מניפולציה על האובייקטים. זוהי בנייה מנטלית הדורשת לא רק "לראות" צורות, אלא גם להתאים את המיקומים שלהם; לדמיין את המיקומים שלהם לאחר הטרנספורמציה; לדמיין את ההשפעה של הטרנספורמציה על צורות סמוכות. כך למשל, בעת הרמתו של ריבוע 4 כך שהוא נהיה מאונך לריבוע 3 (שנבחר כבסיס), משתנה מקומם גם של ריבועים 5 ו-6. כעת מקומו של ריבוע 4 נשמר ומקפלים את

ריבוע 5 וכך הלאה. היחיד נדרש לשמור במוחו את ההשפעות של טרנספורמציות עוקבות אלה לבנייתו המלאה של הגוף המקורי.

מהי תרומתן של המניפולציות הצורניות והתרומה של הפעולות הלוגיות? הספרות העכשווית אינה משיבה על שאלה מהותית זו מהסיבה הפשוטה שההתייחסות לדימויים ולמושגים היא כאל שתי קטגוריות נפרדות של פעולות מנטליות. כאשר חוקרים סוגים שונים של טרנספורמציות מנטליות על אובייקטים תלת-ממדיים (כמו סיבוב או פריסה וקיפול מחדש), מתייחסים לפעולות אלה כאילו היו בעלי אופי תמונתי בלבד.

למעשה, הדברים אינם ולא יכולים להיות כאלה. מהסיבה שאנו עוסקים בפאות של קובייה (בדוגמה למעלה) נובע שהקצוות שווים, שהפאות הן ריבועים, שאנו עוסקים בזוויות ישרות ועוד. זהו ידע סמוי המרומוז על-ידי הפעולות המנטליות. בלי שליטה מושגית סמויה זו הפעולה כולה תהיה חסרת משמעות.

אנו טוענים שסוג זה של פעולות מנטליות מורכבות, אשר לעתים מכביד על התהליך האינטלקטואלי, מהווה הזדמנות מצוינת לתרגול של היכולת להתמודד עם מושגים צורניים בחשיבה הגאומטרית.

מטרתו של תרגול כזה הוא לשפר את היכולות הבאות: (א) שילוב ההיבטים הצורני והמושגי בעת פעילות של פתרון בעיות בגאומטריה; (ב) היכולת להתייחס לכמה שיותר מושגים צורניים ולתאם

ביניהם; (ג) היכולת לארגן את התהליך המנטלי בתת-יחידות בעלות משמעות אשר מאפשרות להפחית את העומס מהזיכרון; (ד) היכולת לנבא ולשלב את ההשפעה של כל טרנספורמציה בדרך לפתרון.

סיכום ומסקנות

נעשה כאן ניסיון לפרש צורות גאומטריות כישויות מנטליות שהן בעלות תכונות מושגיות וצורניות בזמן.

מושגים צורניים הם ישויות מופשטות, כלליות, אידאליות, טהורות, הנקבעות באופן לוגי, למרות שהם עדיין משקפים ומבצעים מניפולציות על ייצוגים מנטליים של תכונות מרחביות (כמו צורה, מיקום, גדלים המבוטאים על-ידי מדידה). לעתים קרובות, הצורות נוטות לשמור ולכפות את התכונות הבולטות לעין שלהן על תהליך החשיבה בהתאם לאילוצים גרפים או גשטלט. בהתאמה, השליטה המושגית (אקסיומטית-דדוקטיבית) נחלשת ותהליך הפתרון או הפרשנות נפגם.

היות שבעקרון הצורה הגאומטרית נשלטת באופן מוחלט על-ידי אילוצים מושגיים, היא יכולה להשתתף באופן פעיל בהוכחה מתמטית פורמלית מדויקת.

המונח "מושג צורני" אשר הצגנו מיועד להדגיש את העובדה שאנו עוסקים בישויות מנטליות מסוג מסוים שאי אפשר להפחית אותו לדימויים רגילים או למושגים אמיתיים. אנו עוסקים בצורות, אשר התכונות שלהן נקבעות באופן מוחלט, בין אם ישירות או באופן לא-ישיר, על-ידי הגדרות במסגרת של מערכת אקסיומות מסוימת. לפי הפרשנות שלנו, באופן אידאלי, השליטה המושגית אמורה להיות מהותית (אינהרנטית) ולפיכך הדימוי והמושג אמורים להתמזג כאובייקט מנטלי ייחודי. בתהליך החשיבה המתמטית אנו פונים מפורשות להגדרות ולמשפטים כדי לכוון את החשיבה שלנו או כדי לבחון את ההשערות והמסקנות שהגענו אליהן. אבל, לעתים קרובות בתהליך החשיבה אנו מנסים, מתנסים, פונים לאנלוגיות ולתהליכים אינדוקטיביים על-ידי ביצוע מניפולציות לא על דימויים גולמיים או על מושגים טהורים, אלא על מושגים צורניים שהם דימויים הנשלטים באופן מהותי על-ידי מושגים. בלי הרעיון של מושגים צורניים, אי אפשר לתאר ולהסביר את התהליך של פתרון בעיות ושל המצאה בגאומטריה באופן מספק.

במהלך תהליך ההמצאה, מקורה של ההשראה הוא בעיקר האינטואיציה ולא שרשרת של שיקולים פורמליים. חיפוש מתמיד אחר הצדקות פורמליות ואנליטיות כמו משפטים והגדרות יפגע ואף ימנע את זרימתם של רעיונות פוריים.

ההתייחסות שלנו בעיקר לצורות אשר נשלטות באופן מהותי על-ידי אילוצים מושגיים היא זו שמאפשרת את ההתקדמות היצירתית של תהליך ההמצאה בגאומטריה. בלי ספק, יש לחזור למסגרת הפורמלית המיוצגת על-ידי אקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות מפעם לפעם כדי לבחון את צעדינו. הסיבה העיקרית לכך היא שמבחינה פסיכולוגית, הסימביוזה בין המרכיבים הצורניים והמושגיים, בדרך כלל אינה שלמה.

למרות שמושג צורני כולל ישות בדידה (מושג המתואר באופן צורני) יש לו את הפוטנציאל להישאר תחת ההשפעה הכפולה, לעתים סותרת, של שתי המערכות שהוא מקושר אליהן – המושגית והצורנית. באופן אידאלי, המערכת המושגית היא זו אשר אמורה לשלוט באופן מוחלט במשמעות, בקשרים ובתכונותיה של הצורה. למעשה, לעתים קרובות הצורה מפרה את האילוצים המושגיים ואז הפרשנות של התכונות מעוצבת על-ידי דפוס גשטלט צורניים.

אפשר להסביר שגיאות רבות של תלמידים בהנמקות בגאומטריה על-ידי פיצול זה (או היעדר שילוב) בין ההיבטים המושגיים והצורניים של המושגים הצורניים. המבנה הצורני עשוי לשלוט בדינמיות של החשיבה במקום שהיא תהיה נשלטת על-ידי אילוצים פורמליים מתאימים. בשל כך, תלמידים רבים אינם מבינים את האופי האמיתי של הוכחה גאומטרית והם נוטים לחוות את הצורך באישורים אמפיריים כמשלימים להוכחה.

האינטראקציה בין דימויים ומושגים בפעילות הקוגניטיבית של היחיד (ילד או מבוגר) לעתים משלבת ובמקרים אחרים – יוצרת קונפליקט. אך ההתפתחות של מושגים צורניים אינה תהליך טבעי בדרך כלל. אחת הסיבות המרכזיות שגאומטריה נחשבת למקצוע כל כך קשה בבית-הספר היא שהמושגים הצורניים אינם מתפתחים באופן טבעי לקראת האופן האידאלי שלהם.

בשל כך, אחת המשימות המרכזיות של החינוך המתמטי (בתחום הגאומטריה) היא ליצור סוגים של סיטואציות דידקטיות אשר בהן יידרש, באופן שיטתי, שיתוף פעולה מוקפד בין שני ההיבטים, עד למיזוג שלהם כישויות מנטליות שלמות. לפני כן ציינו מספר סוגים של פעילויות מסוג זה: דגש גדול יותר במקומות גאומטריים ובבעיות המתייחסות לישויות אלה, ומנגד, בעיות שבהן הדפוסים הצורניים בדרך כלל נוטים להפר את האילוצים המושגים (וכך מביאים לקונפליקט) או בעיות של פריסה ובנייה מחדש, אשר בהן שיתוף הפעולה בין הדרישות הלוגיות והייצוגים הצורניים הוא כה מורכב. ישנן סיטואציות רבות אחרות אך עדיין אין בידנו די עדויות המתייחסות לכלל הנושא.

קיומם של מושגים צורניים, נוסף לדימויים ולמושגים, הוא רלוונטי גם לצורך פרשנות עיבוד המידע של קוגניציה. האפשרות של חפיפה מוחלטת בין אילוצים לוגיים וצורניים בקטגוריה מסוימת של ישויות מנטליות מייצגת טיעון חזק לטובת התאוריה הטענתית: יש להניח מראש מבנה פרשני מקובל אשר יהפוך חפיפה זו לאפשרית.

רשימת מקורות

- Anderson, J. R. (1978). Arguments concerning representations for mental imagery. *Psychological Review*, 85(4), 249-277.
- Anderson, J. R. (1990). *Cognitive psychology and its implications* (3rd ed.). New York: W. H. Freeman and Company.
- Anderson, J. R., & Bower, G. H. (1973). *Human associative memory*. Washington DC: Hemisphere Press.
- Blanc-Garin, J. (1974). Recherches recentes sur les images mentales: Leur rôle dans les processus de traitement perceptif et cognitive. *Année Psychologique*, 74, 533-564.
- Denis, M., & Dubois, D. (1976). La représentation cognitive. *Année Psychologique*, 76, 541-562.
- Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale*. Bucuresti: Editura Academiei RPR. (in Rumanian)
- Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the sixth international conference for the psychology of mathematical education* (pp. 128-131). Antwerp, Belgium: Organizing Committee of the VIth Conference PME.
- Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certaint*. New York: Oxford University Press.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine: Creating and using images in the brain*. New York : Norton.
- Mariotti, A. (1992). Imagini e concetti in geometria. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrata*, 15(9), 863-885.
- Paivio, A. (1970). On the functional significance of imagery. *Psychological Bulletin*, 73(6), 385-392.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processe*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *L'Image mentale chez l'enfant. etude sur le développement des representations imagées*. Paris: PUF.
- Piéron, H. (1957). *Vocabulaire de la psychologic*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pylyshyn, Z. W. (1973). What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery. *Psychological Bulletin*, 80, 1-24.
- Rohwer, W. D., Jr. (1970). Images and pictures in children's learning. *Psychological Bulletin*, 73(6), 393-403.
- Shepard, R. N. (1978). Externalization of mental images and the act of creation. In B. S. Randhawa & W. E. Coffman (Eds.), *Visual learning, thinking and communication* (pp. 133-189). New York: Academic Press.
- Shepard, R. N., & Cooper, L. A. (1982). *Mental images and their transformations*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

מקורות לקריאה נוספת על עבודתו של אפרים פישבין

- מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי. (2000). עלה, 26 (גיליון מיוחד המוקדש לאפרים פישבין). אוהור מתוך http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=blogcategory&id=90&Itemid=98
- ספרד, א' (1993). פסיכולוגיה של החינוך המתמטי: בין תיאוריה לבין מעשה – שיחה עם פרופסור אפרים פישבין. עלה, 13, 20-15. אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle13/alle13-2.pdf>
- פישבין, א' (1995). מודלים סמויים וחשיבה מתמטית. עלה, 16, 38-32. אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle16/alle16-6.pdf>
- פישבין, א' (2004). קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית. עלה, 32, 13-5. אוהור מתוך http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale32-pdf/ale32-2.pdf
- פישבין, א' ובלצן, מ' (2000). המושג המתמטי 'קבוצה' ו'מודל האוסף'. עלה, 26, 65-50. אוהור מתוך

http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale26-pdf/ale26-9.pdf

פישביין, א' וקדם, א' (1996). ודאות והוכחה בפיתוח החשיבה המתמטית. ע"ה, 18, 25-26. אוחר מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle18/alle18-4.pdf>

פישביין, א', יחיעם, ר' וכהן, ד' (1996). המושג "מספר אי-רציונלי" אצל תלמידי תיכון ופרחי הוראה. ע"ה, 19, 39-46. אוחר מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle19/alle19-7.pdf>

פישביין, א', תירוש, ד' וברש, א' (1998). ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית. ע"ה, 22, 12-28. אוחר מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle22/alle22-3.pdf>



ד"ר טלי נחליאלי

ראש התכנית "הוראה ולמידה" לתואר שני במכללת לוינסקי לחינוך וראש תכנית "דלתא" להכשרת מורים מצטיינים למתמטיקה ומדעים. תחומי המחקר שלה מתמקדים בשיח המתמטי המתפתח בשיעורי המתמטיקה, וכן בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.

מדור חוויות מכנס 2014

שרה הרשקוביץ ויניב ביטון, מכללת שאנן

בקיץ 2014 נסענו לשני כנסים בוונקובר שבקנדה. רחוק. ואפילו רחוק מאוד, האם לנסוע? לוותר? זה ממש לא פשוט. ובכל זאת, זה הזמן לעצור להיחשף ולהתעדכן על הנעשה בעולם. זה הזמן להשאיר מאחור את כל הדברים הדחופים (ותמיד יש כאלה), את כל שגרת היום-יום, ולהתמסר בהנאה מרובה ללמידה. אבל... לנסוע כל-כך רחוק?

וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

בקיץ 2014 נסענו לשני כנסים בוונקובר שבקנדה. רחוק. ואפילו רחוק מאוד, האם לנסוע? לוותר? זה ממש לא פשוט. ובכל זאת, זה הזמן לעצור להיחשף ולהתעדכן על הנעשה בעולם. זה הזמן להשאיר מאחור את כל הדברים הדחופים (ותמיד יש כאלה), את כל שגרת היום-יום, ולהתמסר בהנאה מרובה ללמידה. אבל... לנסוע כל-כך רחוק?

וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

בקיץ 2014 נסענו לשני כנסים בוונקובר שבקנדה. רחוק. ואפילו רחוק מאוד, האם לנסוע? לוותר? זה ממש לא פשוט. ובכל זאת, זה הזמן לעצור להיחשף ולהתעדכן על הנעשה בעולם. זה הזמן להשאיר מאחור את כל הדברים הדחופים (ותמיד יש כאלה), את כל שגרת היום-יום, ולהתמסר בהנאה מרובה ללמידה. אבל... לנסוע כל-כך רחוק?

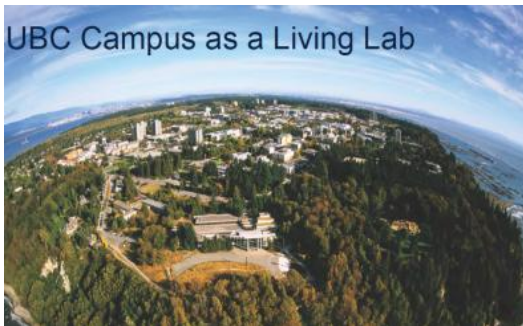
וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

וונקובר באמת נמצאת בסוף העולם. אז, מה קרה? ובכן, סיפור המעשה מתחיל כמעט שנה קודם. השתתפנו בכנס בינלאומי בהערכה שהתקיים בארץ (IAEA - International Association for Educational Assessment). בכנס זה הצגנו עבודה על הערכה באמצעות טכנולוגיה.¹ אחת מהמאזינות (Dr. Marina Milner-Bolotin) שהייתה מוונקובר (ישראלית לשעבר), שמעה את ההרצאה וגם התעניינה בהיבטים אחרים של עבודתנו באמצעות טכנולוגיה. היא זו שהפנתה את תשומת לבנו לשני כנסים המתקיימים ברצף

1. Freund, T., HersHKovitz, S., & Biton, Y. (2013). *Computer based interactive items: A new approach in math evaluation*. Paper presented at 39th annual conference IAEA - International Association for Educational Assessment, Tel-Aviv. Abstract retrieved from <http://www.iaea.info/papers.aspx?id=81>



העולם. הכנס הנוסף PME היה השנה יחד עם כנס הבת שלו PME-NA הכנס האמריקאי. צירוף זה הביא לכנס כ-850 אנשי אקדמיה מ-57 מדינות רחבי העולם.

בכנס רחב היקף כל-כך גם אם היית בהרצאה מרתקת, דיון וסדנה אחת, הפסדת 20 פעילויות אחרות (לפחות). ולכן קשה יהיה לומר שאפשר למצות את הכנס.

נציין כאן כמה רעיונות שלמדנו בכנס זה (בבחינת דוגמיות).

נחשפנו להרצאות מליאה מרתקות בתחום מתמטיקה ואמנות, ובעקבות הרצאה זו גם התקיימה סדנת יצירה לכל המעוניין.

הרצאות מליאה אחרות עסקו בידע המקצועי הנדרש למורה המתמטיקה, למידה מדוגמאות והיבטים אתיים שבין מורה לתלמידיו.

האוניברסיטה המארחת היא אחת האוניברסיטאות היחידות בעולם המקיימת גם לימוד, גם מחקר, גם יצירה וגם השפעה על הקהילה ביצירת עולם ירוק. דבר שבא לידי ביטוי הן במבנים, הן בשימוש באנרגיה והן בקשר עם העיר הגדולה ונוקובר, בהשפעה עליה מצד אחד ומחקר בה מצד אחר.

ואם בעולם ירוק עסקינו, אוניברסיטה זו, שגודלה כמעט כמו כל תל-אביב ושוכנת על חצי אי מדהים בצפון מערב קנדה, ירוקה במלוא מובן המילה.

היבט אחר של חשיבות מכלול נושאים מדעיים אלו עלה דרך כיווני החשיבה המתפתחים בלימוד מקצועות אלו:

Science – empirical consistency	
Technology – tool utility	
Engineering – built viability	
Mathematics – logical coherence	
מדעים –	לפיתוח יכולת החקירה של העולם באופן שיטתי.
טכנולוגיה –	לפיתוח כלים שימושיים.
הנדסה –	לבנייה וישומות.
מתמטיקה –	לחשיבה לוגית וקוהרנטית.

בכנס זה היה עיסוק רב מאוד בשימוש הטכנולוגיה ללמידה: למשל חקר חיי הדגה בתנאים אותנטיים. הטמינו מצלמות וידאו במעמקי הים, במקום מושבם של הדגים הנחקרים, ועל-ידי שידור ישיר של הצילום, אפשר לחקור את תנאי המחיה ופעילות הדגים.

להוראה וחינוך – הוראה מרחוק היא נושא שמטריד רבים בבואם להיענות לצורכי כל התלמידים גם אלה הגרים באזורים פריפריאליים ובקבוצות קטנות.

בכנס זה השתתפו כ-200 אנשי אקדמיה מכל

שבת באווירה של בית. ואכן, גם בקצה העולם מגלים כמה אנחנו כל-כך קטנים. פוגשים אנשים שאחרי שני משפטים כבר מדברים על החברים המשותפים בארץ.



וביום ראשון שהוא יום חופשי, אף הוזמנו על-ידי איש מהקהילה היהודית לסיור בנפלאות הטבע של וונקובר. ויש כאלה.

הרצאות רבות עסקו בנושאים ספציפיים בחינוך מתמטי, כמו למשל שימוש בבעיות מתמטיות לפיתוח חשיבה ביקורתית, דרכים וכלים לתגבור תלמידים מתקשים.

התקיימו פורומים ודיונים בנושאים רחבי היקף כמו דרכים בהכשרת מורים, הוראת מתמטיקה בסביבה דיגיטלית, שימוש בכלי הערכה מגוונים.

בשני הכנסים הצגנו את עבודתנו בארץ ב-4 הרצאות המשקפות את התחומים ששנינו עוסקים בהם: הכשרת פרחי הוראה, הכשרת מורים והוראה עם טכנולוגיה.

ולסיום, מבט קצר על העולם היהודי בוונקובר. מצאנו קהילה יהודית גדולה, חמה ומארחת בשמחה רבה. השתתפנו בתפילות ובארוחות שבת. זכינו לפגוש מבני הקהילה ואורחים נוספים מכל קצות העולם שהתכנסו יחד לארוחת



ד"ר שרה הרשקוביץ

בעלת תואר ראשון ושני מאוניברסיטת תל אביב ותואר שלישי מאוניברסיטת חיפה. עומדת בראש צוות המתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח) וראש התמחות מתמטיקה במסלול לבי"ס היסודי במכללה האקדמית הדתית שאנן. עוסקת בפיתוח חומרי לימוד כתובים וממוחשבים, במחקר, בפיתוח מקצועי ובהכשרה של מורים. תחום מחקרה העיקרי הוא ניתוח בעיות מילוליות המתאימות לבית-הספר היסודי ודרכי הפתרון שלהן.



ד"ר יניב ביטון

בוגר הטכניון במחלקה לחינוך מדע וטכנולוגיה. מרצה לחינוך מתמטי במכללת שאנן ובמחלקה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי. חבר בצוות מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח) ומלמד מתמטיקה בתיכון הווירטואלי.

מדור המלצה על ספר

"שימור ושינוי"

דוד בן-חיים, מכללת שאנן ומוסד הטכניון

אלגברה ו'טרומ אלגברה', כמו גם לקורסים שמתמקדים בפיתוח החשיבה של הלומדים (סטודנטים או תלמידים). הוא יכול לשמש כדי להרחיב ולהעמיק את ידע התוכן של המורים, כחלק מהתפתחותם המקצועית. סטודנטים, מורים ושאר המתעניינים בבעיות של מתמטיקה אלמנטרית יכולים ליהנות משפע של רעיונות לפתרון בעיות, להתעשר בכלים רבים לפתרון בעיות וללמוד לעשות שימוש שיטתי בגישה של שימור ושינוי כמאפיין מתמטי כללי. החומר המוצג בספר מספק מגוון רחב של פעילויות התומכות בטיפוח הרעיון העיקרי ומאפשר לכל מרצה לבחור את הפעילויות הנראות לו. הודות לכך ספר זה יכול לתרום להתפתחות מתמטית ודידקטית של פרחי הוראה בתחום החשיבה האלגברית ולסייע בשיפור תהליכים של הבניית ידע מתמטי בבית הספר.



הספר "שימור ושינוי" נכתב על-ידי פרופ' איליה סיניצקי וד"ר בת-שבע אילני ויצא לאור בהוצאת מכון מופ"ת. לשני המחברים ניסיון עשיר בהכשרת פרחי הוראה, ובבנייה והוראה של השתלמויות מורים. כמו כן, לאיליה ובת שבע ניסיון מוכח בכתיבת חומרי למידה וחומרי העשרה, וזאת נוסף לפרסום מאמרים מחקרניים.

הספר "שימור ושינוי" הוא ספר המכסה נושאים נרחבים בהוראת המתמטיקה לפרחי הוראה תוך כדי הכשרתם, בהשתלמויות מורים למתמטיקה המלמדים בפועל במערכת החינוך ברמות השונות (בעיקר בבתי-הספר היסודיים ובחטיבות הביניים) ויכול גם לשמש כמקור לפעילויות בחוגי העשרה לתלמידים.

ב"פתח דבר" של הספר בעמוד 10 מצהירים המחברים כי:

ספר זה אינו עוסק בנושא מסוים. מוצגים בו רעיונות מגוונים להבניית ידע מתמטי בעזרת ראיות היחסים בין שימור לשינוי. הספר מיועד למורי מורים העוסקים בהכשרת מורים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים, כמו גם לכל המתעניינים במתמטיקה ובהוראתה. הספר רלוונטי לקורסים שעניינם

המתמטיקה המוצגת בספר מוצגת מנקודת ראות אלמנטרית, אולם בהרבה הזדמנויות, הפעילויות הפוכות להיות פעילויות חקר והתוצאות הסופיות מפתיעות לעתים את הקורא. אתגר נוסף המעורר חשיבה מתהווה בניסיון לגלות היכן ה"שימור" והיכן ה"שינוי" ומה הם יחסי הגומלין ביניהם. אין ספק כי הספר מעודד את הקורא, לחשוב כיצד לתת הסברים דידקטיים בדרכים אחרות מאלו שקיימות בספרות המקצועית ומעבר לאלו המוצגים בספר, מאחר ויש לשלב בהסברים את מושגי ה"שימור" ו"שינוי".

הספר עשיר מאוד בחומרים לשימוש בהכשרת מורים ואפשר באמצעותו לבנות יחידות הוראה שלמות שמבססות הן את הידע המתמטי והן את הידע הדידקטי הנדרש למורה בשדה. הספר מכיל שישה פרקים היכולים להיות מודולריים. הפרק הראשון מבסס את הרעיון הכללי של הספר ולעומתם הפרק השני והפרק השלישי עוסקים בשימור כמות (כדוגמה חשובה לשימור שנקבע מראש) ובשינוי והשפעתו תוך כדי התמקדות בעיקר בבעיות אומדן והשוואת גדלים בעת ביצוע פעולות חשבון. הפרק השלישי מתמקד בהשפעת שינוי שנעשה בכמויות ודן בדרכים להשוות בין הכמויות המתקבלות. הפרק הרביעי והפרק החמישי עוסקים בהבניית שינוי לצורך שימור מצד אחד וגילוי שימור סמוי מצד אחר. בפרקים אלו נעשה קישור מתמיד המבהיר את הקשר והדרך להשתמש ב"שימור" וב"שינוי". הפרק השישי והאחרון הוא, לדעתי, אחד הפנינים של הספר. בפרק זה מומחשת הגישה של שימור ושינוי בעיקר

ואכן, לאחר קריאה ועיון מעמיק בספר, אני סבור שהספר יכול בהחלט להשיג את המטרות הנזכרות לעיל שהוצבו ועוצבו על-ידי המחברים. מורי מורים רבים, ובעיקר אלו המלמדים במכללות, מדווחים לעתים תכופות על חוסר בחומרי הוראה ומקורות לחיזוק של הידע המתמטי מצד אחד והידע הדידקטי מצד אחר של פרחי ההוראה שהם מלמדים. הספר "שימור ושינוי" מספק לא רק חומרים תאורטיים, אלא גם פעילויות אותנטיות מתוך חומר הלימוד, בליווי שאלות מפורטות והתייחסות לתשובות מגוונות, היכולות להיות לעזר הן למורי המורים והן למורים עצמם. אמנם הנושא המרכזי של הספר הוא המושגים "שימור" ו"שינוי", אולם המחברים השכילו לשזור פעילויות והצגת חומרים רלוונטיים המאפשרים כיסוי די נרחב של ידע פדגוגי הנדרש הן למורי המורים בהכשרת מורים והן למורי המתמטיקה בעת ההוראה בפועל בשדה.

הספר מעורר עניין מהבחינה של ניסיון המחברים להציג רעיונות חדשניים בקישור נושאים ופעילויות למושגים של "שימור" ו"שינוי". המחברים מצליחים להראות שלמושגים הללו יש "נוכחות" כמעט בכל נושא מתמטי הנלמד ברמות בית-הספר היסודי וחיטבות הביניים. כמו כן, אפשר להתרשם שיש מקום לשימוש במושגים הללו גם בנושאים מתקדמים יותר במתמטיקה, כגון זו הנלמדת בחטיבה העליונה ובמקרים מסוימים אף למעלה מזה. כקורא של הספר, עניין אותי לכל אורכו לגלות את העקרונות של "שימור" ו"שינוי" בנושאים שהוצגו ובעיקר תוך כדי הפעילויות הנרחבות המוצגות לכל נושא. זו גישה חדשה שהנה מקורית ומעניינת.

באמצעות פעילויות משדה הגאומטריה הדו-ממדית.

החלק הארי של הנושאים המתמטיים והפעילויות הנלוות אליהם בספר מתאים בהחלט לרמות בית-הספר היסודי וחיטבות הביניים. אפשר ללמוד הרבה חומר מתמטי מעיסוק בפעילויות ובניסיון לקישור וגילוי ה"שימור" וה"שינוי" בהן. למעשה, למעלה משמונים אחוז של הספר מוקדש להפעלות דידקטיות באמצעות פעילויות שונות. הצגת הפעילויות במלואן בדרך מפורטת מאוד כוללת שאלות מדורגות, התפתחות מדורגת של הפעילות והרחבות ראיות המלוות בהסברים מפורטים של כל סעיף.

אף שהאופי המוצהר של הספר הוא יותר דידקטי, קיים בספר איזון בין ההיבט התאורטי לבין ההיבט הדידקטי. כראייה לכך, כמעט כל פרק מגובה בחלק תאורטי לפני הצגת הפעילויות הדידקטיות וגם בתוך הפעילויות עצמן. בנוסף, גם בחלק ההערות וההסברים משולב לעתים היבט תאורטי.

לכל חלק ולכל פרק של הספר יש רשימת מקורות נפרדת. המקורות כוללים מאמרים וספרים הן בעברית והן באנגלית, ומגוונים מאוד מבחינת זמן הפרסום שלהם, חלקם הולכים עשרות שנים אחורה בעוד אחרים

יותר עדכניים. מניסיון, אוסף כזה של מקורות יכול, בין היתר, לעזור רבות לסטודנטים ולמורים שנדרש מהם לכתוב עבודות סמינריות אקדמיות ומחקריות במסגרת לימודים לתארים מתקדמים בחינוך מתמטי.

מעבר להכשרת מורים למתמטיקה, הספר יכול להתאים גם לקהלי יעד נוספים, כגון סטודנטים לתואר שני המעוניינים לחקור את נושא ה"שימור" ו"שינוי" במתמטיקה, מפעילי חוגי העשרה במתמטיקה וגם להוראה של תלמידים מחוננים.

לסיכום: הספר מציג גישה די חדשנית מבחינה דידקטית-פדגוגית להצגת נושאים מתמטיים בסיסיים תוך כדי קישור למושגי ה"שימור" ו"שינוי" במתמטיקה. יש לספר פוטנציאל טוב להיות בשימוש במסגרות חינוכיות שונות ובמיוחד בהכשרת מורים למתמטיקה לבתי-הספר היסודיים וחיטבות הביניים.

אני מברך את המחברים של הספר פרופ' איליה סיניצקי וד"ר בת-שבע אילני על היוזמה לחבר ספר כזה, שבלי ספק יכול לתרום תרומה חשובה לחינוך המתמטי בארץ ובהמשך בזירה הבינלאומית, אם על-ידי תרגום חלקים ממנו או בשלמותו ואם על-ידי הצגת הרעיונות שבו בכנסים בינלאומיים ומאמרים בעיתונות המקצועית הבינלאומית.

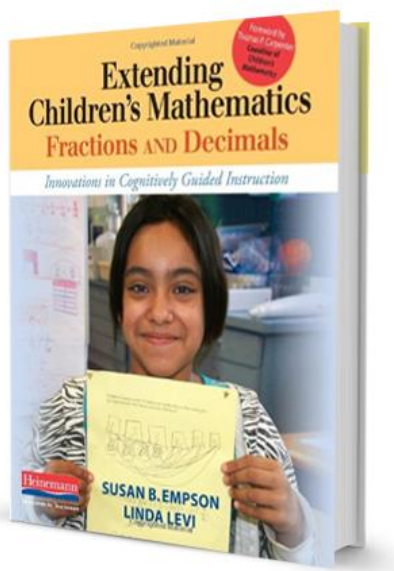


פרופ' זוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי (Michigan State University) בחינוך מתמטי. ראש מנהלת מל"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.

Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals

רותי שטיינברג, מכללת סמינר הקיבוצים



הספר יצא בהוצאת Heinemann ב-2011. מחברות הספר, Susan Empson ו-Linda Levi צמחו מהפרויקט המחקרי CGI (Cognitively Guided Instruction) הברית (Carpenter, Fennema & Franke, 1999; Empson & Levi, 2011; Fennema et al., 1996).

לדעתי, הספר המתואר הוא שילוב יפה של מחקר על חשיבת ילדים בנושא שברים והצעות לדרכי הוראה. הספר מכיל דוגמאות רבות של דרכי פתרון של תלמידים והוא מתאים למורים שרוצים ללמד בכיתתם בדרך שתהפוך את לימוד השברים לחווייתית ומשמעותית תוך כדי פיתוח תובנה מתמטית. בספר מוצגות דוגמאות רבות לדרכי עבודה בכיתה ובנוסף הוא מתאים להכשרת מורים למתמטיקה לבית-הספר היסודי.

בספר מוצגת הצעה להתחיל את נושא השברים בדרך אחרת מהמקובל. הצעה זו נבדקה כמה שנים באופן מעשי, בהצלחה רבה, בכיתות רבות ולוותה במחקר. במקום להתחיל את הוראת השברים רק עם זיהוי של חלק משלם בציור או מספר חלקים משלם, המחברות מתחילות עם שאלות "חילוק לחלקים" שנותנות תוצאה של שבר (Equal sharing). דרך שאלות אלו לומדים רעיונות רבים של שברים. להלן דוגמה לסוג כזה של שאלה, אשר עמה אפשר לפתוח את הנושא:

"4 ילדים מחלקים ביניהם שווה בשווה 10 כריכים. כמה כריכים יקבל כל ילד?"

התלמידים מכירים סיטואציות של חילוק לחלקים מחיי היום-יום. הרעיון הוא לבנות על ידע לא פורמלי זה, אשר נבנה אצל הילדים לאורך השנים, כדי לבנות את ההבנה של המושג "שבר".

הספר מראה דוגמאות רבות של דרכי פתרון של תלמידים לסוג הבעיות של "חלוקה שווה" ואיך הם מפתחים דרך פתרון השאלות את הבנייה של מושג ה"שבר". לאחר התנסות רבה בשאלות מסוג "חלוקה שווה" בשברים, כותבות הספר מציעות לתת לתלמידים שאלות

דוגמה לפתרון של תלמידה בכיתה א' שעסקה בחיבור של השברים $1/2$ ו- $3/4$. התלמידה פירקה את $3/4$ לחצי ועוד רבע. אז חיברה חצי וחצי וקיבלה שלם ועוד רבע זה אחד ורבע. החוקרות הראו איך התלמידה למעשה השתמשה בחוק הקיבוץ.

נוסף לנאמר לעיל, הספר גם מרחיב איך הידע מעיסוק ממושך בפתרון בעיות בשברים, תורם ללימוד חיבור, חיסור, כפל וחילוק שברים ומספרים עשרוניים. החוקרות מראות שמתפתחת הבנה עמוקה ומשמעותית של התלמידים בהבנת שברים בשעת למידה על חוקי פעולה ורעיונות מתמטיים שעוזרים לפתח חשיבה הקשרית והכנה לאלגברה.

מקורות

- Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1999). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, 97(1), 3-20.
- Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403-434.



ד"ר רותי שטיינברג

חברת סגל במכללת סמינר קיבוצים בתחום של חינוך מתמטי לבית-הספר היסודי ובתכנית לתואר שני בחינוך מתמטי. הייתה חלק מוועדת תכנית הלימודים במתמטיקה לבתי-הספר היסודיים, וועדת תוכנית הלימודים במתמטיקה לגני הילדים. עוסקת, בין היתר, בהשתלמויות למורים חדשים וותיקים, ובנוסף בכתיבה וייעוץ מדעי לספרי לימוד במתמטיקה לבתי-הספר היסודיים.

שמערכות קבוצות שוות, או כפל. לדוגמה, שאלה כמו:

"קנו 10 חבילות שבכל אחת $1/4$ פאונד גבינה. כמה פאונד גבינה קנו?"

עם ההתנסות בפתרון בעיות כאלה ואחרות, התלמידים מתחילים להבין את הקשרים / היחסים בשברים.

הספר וגישת ההוראה המתוארת בו מעודדים מאוד לפתח "חשיבה הקשרית" (Relational thinking). לטענת מחברות הספר, הבנה עמוקה של חוקי הפעולה ושימוש בהם בפתרון בעיות במצבים מגוונים כולל שאלות שברים, מכין את התלמידים לקראת הבנה של פתרון משוואות באלגברה. לדוגמה, ילדים צעירים כבר בכיתה ב' פותרים תרגיל כמו 5×14 בעזרת חוק הפילוג (distributive) על-ידי חשיבה על 5 פעמים 10 ועוד 5 פעמים 4. ילדים אלו די בקלות משתמשים בחוק הפילוג גם במצבי שברים בלי הוראה מוקדמת בנושא. אם הם צריכים לבצע 12 פעמים $3/4$ הם פותרים:

$$12 \times 6 \frac{3}{4} = 12 \times 6 + 12 \times \frac{3}{4}$$

יש לקוות שילדים אלו לא יתקשו לבצע סוג פעולה כזו גם כשיגיעו ללמוד אלגברה ויצטרכו לפתור: $4(X + Y)$ ויחשבו על 4 פעמים X ועוד 4 פעמים Y. המחברות נותנות