

מורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל

התאוריה של המושגים הצורניים*

אפרים פישבין

מציגה: טלי נחליאלי



אפרים פישבין (1998-1920)

מייסדי החוג להוראת המדעים בבית-הספר לחינוך באוניברסיטת תל-אביב ומייסדי האגודה הבינלאומית לפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה (PME).

פרופ' אפרים פישבין היה מהחוקרים המובילים בעולם בתחום הפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה. פישבין התעניין במיוחד בקשרים שבין חשיבה אינטואיטיבית לבין חשיבה לוגית, הגדיר סוגים שונים של אינטואיציה והתייחס להשפעות שיש לחשיבה האינטואיטיבית על תהליך הלמידה. פישבין האמין כי הנחלת הידע המחקרי שהצטבר בתחום המחקר המתמטי למורים תשפר את איכות ההוראה. לפיכך, הדגיש את ההשלכות הדידקטיות של מחקריו והקדיש מאמצים רבים לפיתוח יחידות הוראה במתמטיקה לפרחי הוראה ולמורים בבית-הספר היסודי.

הקדמה

מאמר זה מהווה חלק אחד מתוך עבודתו הענפה של פרופ' אפרים פישבין (1998-1920), אשר היה מחלוצי החוקרים בתחום הפסיכולוגיה של החינוך המתמטי ומהחוקרים המובילים בעולם בתחום זה. עבודתו התמקדה בנושאים שונים הקשורים לחשיבה המתמטית ולהתפתחותה. פישבין הבחין בין שלושה מרכיבים של החשיבה המתמטית: הפורמלי, האלגוריתמי והאינטואיטיבי וחקר את טבעה של האינטואיציה בחשיבה. הוא זיהה סוגים שונים של אינטואיציה וכן חקר את מקורותיה ואת השפעתה על תהליכי הלמידה. נוסף על כך, התמקדה עבודתו בנושא של מודלים מנטליים, סמויים ברובם, בתהליך החשיבה המתמטית. בסוף המאמר המתורגם מופיעים קישורים למאמרים נוספים של פישבין אשר תורגמו לעברית או נכתבו במקור בעברית.

בשנת 1993 פרסם פישבין את התאוריה שהוא פיתח בנוגע למושגים צורניים (figural concepts), תאוריה אשר הסתמכה על מחקר עשיר, על תאוריות פסיכולוגיות בנוגע למושגים ולצורות כמו זו של פיאז'ה ואינהלדר (Piaget & Inhelder, 1966) ושל פאיוו (Paivio, 1970), ועל תאוריות מהחינוך המתמטי בנוגע להגדרת המושג והדימוי למושג שפורסמו על-ידי טול ווינר (למשל, Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991).

* מאמר זה תורגם לעברית מתוך מאמרו של אפרים פישבין: Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

גאומטריה בית-ספרית מתמקדת בצורות גאומטריות אשר חלקן מוכרות לנו מגיל צעיר מאוד. במאמרו זה, דן פישביין בשאלה – מהי הצורה הגאומטרית? האם היא מושג (ישות מופשטת הנשלטת באופן מוחלט על-ידי הגדרתה)? האם היא דימוי (ייצוג חושי של עצם או תופעה בעלת תכונות כמו גודל וצבע)? או אולי מדובר בישות אחרת.

בעוד שתאוריות קוגניטיביות שונות מתייחסות בנפרד למושגים ולדימויים, מצביע פישביין על קיומו של סוג שלישי של ישות מנטלית – המושג הצורני (figural concept). לטענת פישביין, המושג הצורני הוא בעל אופי מושגי (קונספטואלי) וצורני בו בזמן. בסימביוזה זו, בין המושגי והצורני, הצורה היא זו אשר מעוררת דרכי חשיבה חדשות, והאילוצים המושגיים (הלוגיים) הם אלה ששולטים בדיוק הפורמלי של התהליך. פישביין טוען שהצורות הגאומטריות שייכות לסוג שלישי זה.

מטרתו של המונח "מושג צורני" היא להדגיש את העובדה שמדובר בישות מתמטית שאליה אי אפשר להתייחס כאל מושג בלבד או כאל צורה/דימוי בלבד. מדובר בצורות הנשלטות באופן בלעדי על-ידי הגדרות או מערכת אקסיומות. לטענת פישביין, הדימוי/צורה והמושג אמורים להתמזג לעצם מנטלי אחד. בלא הרעיון של מושגים צורניים אי אפשר לתאר או להסביר באופן מספק תהליכים של פתרון בעיות ושל יצירתיות בגאומטריה.

להלן השאלות שמעלה פישביין במאמרו:

1. האם המסלול של תהליך החשיבה המתמטית נקבע בעיקרו על-ידי מבנים מושגיים (המתווכים או מסומלים על-ידי אמצעים דימויים), או להפך: האם הדימויים (ההיבט הצורני) הם אלה אשר מאפשרים יצירתיות מחשבתית ובכך מקדמים את תהליך החשיבה?
2. האם מושגים צורניים הם תוצר טבעי של מוח האדם כמו המושגים והדימויים, או שהם מתפתחים רק כתוצאה מאימון שיטתי?

התייחסותו של פישביין לשאלות אלה מלווה בדוגמאות מרתקות אשר מבהירות את הבעייתיות של התייחסות לצורה הגאומטרית כאל מושג אן כאל צורה. פישביין טוען כי התפתחות הסימביוזה בין המושגי והצורני לא נעשית בדרך כלל בטבעיות וכי אחד התפקידים המרכזיים בהוראת הגאומטריה הוא ליצור מצבים דידקטיים שבהם נדרש יהיה למזג בין ההיבטים המושגי והצורני כדי לעזור ללומדים למזג בין שתי מערכות אלה.

ובנימה אישית, שיעורי הראשון בתואר השני בחינוך מתמטי באוניברסיטת תל-אביב היה סמינריון עם פרופ' פישביין. בשיעור זה, בעקבות שאלה שהעליתי, הפנה אותי פישביין למאמרו זה, *התאוריה של המושגים הצורניים*. מאמר זה היווה את כניסתי לעולם המחקר בחינוך מתמטי. בעקבות מאמר זה בחרתי נושא לתזה בהנחייתו של פרופ' פישביין. מעבר להנאה מהמחקר עצמו, למדתי רבות מהשיחות הרבות עם פרופ' פישביין, אשר זכיתי בהן בצהרי ימי שני – שיחות בנוגע לאינטואיציה, למאבק שבין הצורני והמושגי, לקשיים של תלמידים ולמחקר בחינוך מתמטי בכלל.

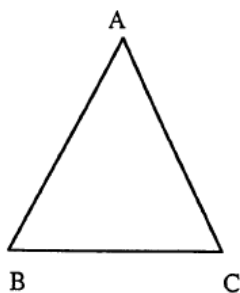
תקציר

הרעיון המרכזי במאמר זה הוא שגאומטריה עוסקת ביישיות מנטליות (הנקראות צורות גאומטריות) אשר הן בעלות מאפיינים מושגיים וצורניים בו זמנית. כדור גאומטרי (sphere), למשל, הוא ישות מופשטת אידאלית אשר נקבעת באופן פורמלי כמו כל מושג. בו בזמן, יש לה תכונות צורניות, כשהראשונה בהן היא – צורה מסוימת. אי אפשר למצוא כדור גאומטרי מושלם במציאות. בסימביוזה זו שבין המושג והצורה, כפי שזה נחשף ביישיות גאומטריות, המרכיב של הדימוי (הצורה) הוא אשר מעורר כיוונים חדשים של חשיבה, אך ישנם אילוצים לוגיים, מושגיים אשר שולטים בדיוק הפורמלי של התהליך. קראנו לצורות הגאומטריות מושגים צורניים בשל אופי דואלי זה. מאמר זה מנתח את המתחים הפנימיים אשר עשויים לעלות בהקשר של המושגים הצורניים בשל אופי דואלי זה, וכן היבטים התפתחותיים והשלכות דידקטיות הקשורים לתאוריה זו.

הרעיון של מושג צורני

תאוריות פסיכולוגיות עכשוויות מבחינות, בדרך כלל, בין מושגים¹ ודימויים מנטליים. בספרו "Vocabulaire de la Psychologie", פירו (Piéron) מגדיר מושג באופן הבא: "יצוג סימבולי (כמעט תמיד מילולי) אשר בו משתמשים בתהליך של חשיבה מופשטת אשר יש לו משמעות כללית המתאימה לאוסף של יצוגים מוחשיים ביחס למשותף להם" (cf. Piéron, 1957, p. 72). אם כך, המאפיין העיקרי של מושג הוא שהוא מבטא רעיון,² ייצוג כללי, אידאלי של אוסף של עצמים על בסיס תכונות משותפות.

לעומת זאת, דימוי (נתייחס כאן לדימויים מנטליים) הוא ייצוג חושי של עצם או תופעה. המושג של מתכת הוא הרעיון הכללי של אוסף של יסודות שיש להם מספר תכונות משותפות: הולכה חשמלית, ועוד. הדימוי של עצם מתכתי הוא הייצוג החושי של העצם המיוחד (כולל צבע, גודל ועוד).



תרשים 1

בכל התאוריות הקוגניטיביות הממשיות, מושגים ודימויים נחשבים כשתי קטגוריות נפרדות של ישויות מנטליות. אפילו התאוריה הטענתית (propositional theory), אשר לפיה שני סוגי המידע מקודדים לבסוף באותו פורמט של טענות (propositional), מתייחסת למושגים ולדימויים כאל שני סוגים שונים של ישויות מנטליות.

נתייחס לדוגמה הבאה: נתון משולש שווה שוקיים ABC, אשר בו $AB = AC$ (תרשים 1). ברצוננו להוכיח ש $\angle B = \angle C$. אפשר לדמיין את ההוכחה הבאה: נניח שהיחיד מנתק את המשולש מעצמו,

1. בתרגום המאמר השתמשתי במילה "מושג" כתרגום למילה "concept", שבה השתמש פישבין במאמרו. באותו אופן, השימוש במילה "מושג" תואם את המילה "conceptual" (הערת המתרגמת).
2. ההטיות המופיעות בתרגום זה תואמות את ההטיות במקור.

הופך אותו כך ש-AC בצד שמאל ו-AB בצד ימין ואז מניח את המשולש שעבר היפוך על המשולש המקורי. זויות A תישאר כפי שהייתה, והיות שאורכן של צלעות AB ו-AC שווה, AC תתלכד באופן מושלם עם AB בצד שמאל, ו-AB תתלכד באופן מושלם עם AC בצד ימין. כך המשולש ההפוך והמשולש המקורי יתלכדו באופן מושלם. בשל כך, זויות B ו-C חייבות להיות שוות. מ.ש.ל.

בהוכחה זו נעשה שימוש בידע המבוטא באופן מושגי: הוצהר כי הצלעות AC ו-AB הן שוות. נעשה שימוש במושגים: נקודה, צלע, זויות ומשולש. דובר על תהליך של היפוך. אך בו בזמן נעשה שימוש הן במידע על צורות והן בפעולות המיוצגות על-ידי צורות – בעיקר הרעיון של ניתוק משולש ABC מעצמו, היפוכו והנחתו על המשולש המקורי.

האם אנו עוסקים כאן בעירוב של שתי ישויות בלתי תלויות ומוגדרות שהן רעיונות מופשטים (מושגים) מצד אחד, וייצוגים חושיים המשקפים פעולות קונקרטיות מצד אחר?

נתייחס ללב ההוכחה, כלומר, לפעולה של ניתוק משולש ABC מעצמו והיפוכו. אי אפשר לנתק, להפוך או להתאים מושגים. אנו עוסקים כאן בתיאורים של פעולות שהן פרקטיות לכאורה. אך במציאות, האם אפשר לנתק עצם מעצמו? ברור שלא. לפעולה שכזו אין משמעות קונקרטית. אנו עוסקים בעולם אידאלי, עם משמעויות אידאליות. לעצמים שאנו מתייחסים אליהם – לנקודות, צלעות, זויות ולפעולות שאנו מבצעים אתם, יש קיום אידאלי בלבד. יש להם אופי מושגי. בו בזמן, יש להם אופי צורני אינהרנטי (מהותי): רק כשמתייחסים לדימויים אפשר להתייחס לפעולות כמו ניתוק, היפוך או התאמה. למעשה, אי אפשר להתייחס למשולש ולמרכיבים שלו כאל מושגים טהורים או כאל דימויים בלבד. לא היה אפשר לבצע את הפעולות שהתייחסנו אליהן קודם עם מושגים טהורים או עם עצמים אמיתיים. עם זאת, ישויות ופעולות אלה השתתפו בהוכחה לוגית, פורמלית, בעלת תוקף מתמטי, ועם זאת, את המסקנה שהתקבלה, שוויון הזויות B ו-C אפשר לבדוק באופן מעשי.

לישויות שהתייחסנו אליהן למעלה – לנקודות, לצלעות (קטעים), לזוויות, למשולש עצמו ולפעולות שביצענו איתם, יש תכונות מושגיות. בחשיבה המתמטית³ לא מתייחסים אליהם כאל עצמים מוחשיים או כאל שרטוטים. העצמים המוחשיים – גופים או שרטוטים – אלה הם רק המודלים המוחשיים של הישויות המנטליות שבהן עוסק המתמטיקאי. שנית, אפשר להתייחס לשלמות המוחלטת של הישויות הגאומטריות: קווים ישרים, מעגלים, ריבועים, קוביות ועוד, רק אם מתייחסים אליהן כאל מושגים.

שלישית, לישויות גאומטריות אלה לא קיימים מתאימים מוחשיים אמיתיים. נקודות (עצמים אפס-ממדיים), קווים (עצמים חד-ממדיים) ומישורים (עצמים דו-ממדיים) לא קיימים ואינם יכולים להתקיים במציאות. העצמים האמיתיים השייכים לחוויה הפרקטית שלנו הם בהכרח תלת-ממדיים. אך אפילו הקובייה או הכדור הגאומטרי (sphere), שהמתמטיקאי מתייחס אליהם לא קיימים במציאות, למרות שהם תלת-ממדיים. גם הם מבנים מנטליים שלא אמורים להיות בעלי מציאות כלשהי.

3 המילים "חשיבה מתמטית" הן המילים שבהן בחרתי כתרגום למילים "mathematical reasoning" אשר בהן השתמש פישבין במאמר. אמנם המילים "הנמקה מתמטית" נכונים יותר מבחינה מילולית, אך נראה שפישבין משתמש במילה "reasoning" באופן רחב יותר, הכולל גם תהליכים של הנמקה והוכחה.

רביעית, כל המבנים האלה הם ייצוגים כלליים, כמו כל מושג, ולעולם אינם העתקים מנטליים של עצמים מוחשיים מסוימים. כאשר מציירים משולש ABC מסוים על דף נייר במטרה לבחון תכונות מסוימות שלו (למשל, את התכונה שהגבהים שלו נפגשים בנקודה אחת) לא מתייחסים לשרטוט המסוים, אלא לצורה מסוימת אשר עשויה להיות הצורה של קבוצה אינסופית של עצמים. למעשה, אנו עוסקים בהיררכיה של צורות, החל בצורה שהיא מסוימת לכאורה, אך למעשה היא מתאימה לאינסוף עצמים אפשריים, ועד לקטגוריה האוניברסלית של משולשים. אידאליזציה, מופשטות, מושלמות מוחלטת ואוניברסליות – אלה הן תכונות שיש להן משמעות בעולם של מושגים.

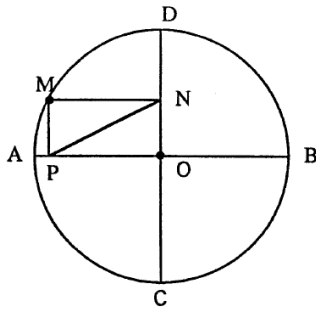
אך ישנה גם תכונה חמישית אשר מאפיינת את הצורות הגאומטריות ואשר מתייחסת גם היא לאופי המושגי שלהן. התכונות של הצורות הגאומטריות נאכפות על-ידי, או נגזרות מהגדרות בתחום של מערכת אקסיומות מסוימת. גם מנקודת מבט זו, יש לצורה הגאומטרית אופי מושגי. ריבוע אינו דימוי המצויר על נייר. זוהי צורה הנשלטת על-ידי הגדרתה (אם כי ייתכן שההשראה לכך התקבלה מעצם אמיתי). ריבוע הוא מלבן בעל צלעות שוות. כשיוצאים מתכונות אלה, אפשר להמשיך ולגלות תכונות אחרות של הריבוע (שוויון זוויות אשר כולן ישרות, שוויון אלכסונים ועוד).

לפיכך, אפשר לתאר צורה גאומטרית כבעלת תכונות מושגיות אינהרנטיות. עם זאת, הצורה הגאומטרית אינה רק מושג. היא דימוי, דימוי ויזואלי. יש לה תכונה שאין למושגים, היא כוללת ייצוג מנטלי של מאפייני המרחב.

כאשר ממשיגים, למשל, גלגל כדי לתאר את המעגליות שלו, אנו יכולים לקבל לא רק את הרעיון של המעגליות, לא רק את הדימוי של הגלגל המתקשר לכך, אלא גם מבנה מסוג שלישי שהוא הצורה הגאומטרית הנקראת "מעגל". כשנדרשים, למשל, לפתור בעיה הכוללת את הצורך בחישוב המרחק שעובר כלי רכב, בהינתן רדיוס הגלגלים, מספר הסיבובים ליחידת זמן והזמן שעבר, החישוב מתבצע על פי מודל מופשט של גלגל שהוא אינו דימוי טהור או מושג טהור. מושגים אינם מסתובבים, אינם זזים ולדימויים אין את תכונות המושלמות, הכלליות, המופשטות, הטהור שמניחים אותן בעת ביצוע החישובים.

המשולש, העיגול, הריבוע, הנקודה, הקו, המישור אשר הוזכרו בדוגמאות לעיל, ובאופן כללי, כל הצורות הגאומטריות, מייצגות מבנים מנטליים שיש להם, בו בזמן, תכונות מושגיות וצורניות.

כמובן שכאשר אנו מדמיינים מעגל, אנו מדמיינים מעגל מצויר (כולל, למשל, צבע הדיו) ולא את המעגל האידאלי, המושלם. אך למעגל המתמטי, העומד בלב החשיבה המתמטית, אין צבע, אין בסיס חומרי, אין מסה וכך הלאה, והוא מושלם ואידאלי לכאורה. יש לו את כל התכונות של מושג והוא יכול להשתתף כפי שהוא בהנמקה המתמטית וזאת על אף העובדה שיש לו ייצוג של תכונות מרחביות.



תרשים 2

נחשוב על הדוגמה הבאה: "במעגל עם מרכז C נשרטט שני קטרים מאונכים זה לזה AB ו-CD. נבחר נקודה כלשהי M ונשרטט את האנכים MN ו-MP לקטרים הנתונים. מהו אורכו של PN?" (תרשים 2).

במבט ראשון, נראה שהבעיה אינה ניתנת לפתרון שכן אורכי הקטעים MN ו-MP תלויים במיקומה של הנקודה M. אך לפתע שמים לב ש-MPON הוא מלבן ושהקטע MO הוא אלכסון של מלבן זה. מכך נובע ש $PN = MO$, ו-MO הוא רדיוס המעגל. שוויון האלכסונים אינו מוטל בספק, שוויון הרדיוסים גם הוא אינו מוטל בספק. יחסים אלה אינם תלויים

בשרטוט המסוים. הם נכפים על-ידי הגדרות ומשפטים. העניין המרכזי שברצוננו להדגיש הוא שהמסקנה אינה נגזרת מהתייחסות נפרדת לדימוי ולאילו ציגים הפורמלים, אלא על-ידי תהליך ייחודי שבו ההתייחסות לצורה מזוקקת חושפת קשרים לוגיים. איננו צריכים להתאמץ כדי "להבריק" או לטהר את הצורה, מנטלית, מאי-הסדיריות שלה. תהליך האידאליזציה של הצורה נעשה מיד ואוטומטי כאילו כדי להופכו למרכיב אינטגרלי פעיל של הנמקה לוגית קשיחה.

העובדה שאנו קופצים לפתע למסקנה: $PN = MO$ אשר שווה לרדיוס השווה לקבוע, ברגע שזיהינו את PONM כמלבן, בלי התערבות של פעולת חקירה, תומכת ברעיון שהצורה שאנחנו מתייחסים אליה היא, מלכתחילה, לא דימוי רגיל אלא מבנה הנשלט באופן לוגי. המיזוג בין מושג לצורה, במקרה זה, נוטה להיות מושלם.

העצמים שהם תחת חקירה ומניפולציה בתהליך החשיבה הגאומטרית, הם אם כך ישויות מנטליות, אשר להן אנו קוראים מושגים צורניים. המושגים הצורניים משקפים תכונות מרחביות (צורה, מיקום, גודל), ואשר הם, בזמן, בעלי תכונות מושגיות כמו אידאליות, מופשטות, כלליות ומושלמות.

איני מתכוון לטעון שכאשר אנו מדמיינים צורה גאומטרית, הייצוג במוחנו הוא נטול תכונות חושיות (כמו צבע) פרט לתכונות מרחביות. אך אני טוען שכאשר אנו פועלים עם צורה גאומטרית, אנו פועלים כאילו כל תכונה אחרת אינה נחשבת.

אני שואל את עצמי: איזו צורה אקבל כתוצאה מחיתוך של קובייה על-ידי מישור דרך האלכסונים של שתי פאות נגדיות? קל לדמיון את הפעולה. אך לשם כך יש להתייחס לשתי מציאויות מנטליות נפרדות. האחת היא הייצוג של קובייה אמיתית (משהו כמו קובייה מעץ) ופעולת החיתוך שלה. זהו דימוי חושי כמו דימויים רבים העולים במוחנו בשל הניסיון הפרקטי שלנו: הבית שאני גר בו, החדר שאני עובד בו, ייצוגים של קרובים, חברים, סטודנטים ועוד.

מעבר לדימוי זה ישנו דימוי נוסף אשר אינו מתקבל על-ידי החושים, אלא על-ידי מחשבה, העצם האמיתי של החשיבה הגאומטרית שלנו. זהו הדימוי שאנחנו מתייחסים אליו כאשר אנו מבצעים פעולה מתמטית.

אנו כה רגילים להבחין בין דימויים, כמו "תמונות במוח" לבין מושגים, כמו רעיונות כלליים שאינם חושיים, שקשה לנו מאוד לקבל מבנה אשר יכלול בו זמן תכונות שהן גם מושגיות וגם דמיוניות-מרחביות.

חשוב להבהיר שמיזוג זה בין מושג וצורה בחשיבה הגאומטרית מבטאים מצב שהוא אידאלי וקיצוני שבדרך כלל לא מגיעים אליו באופן מוחלט בשל אילוצים פסיכולוגיים. ההיסטוריה של המתמטיקה עדה למורכבות הדינמיות של התהליך של המשגה והאקסיומטיות של המידע הצורני. אקסיומות רבות שבהן השתמש אויכלידס בספריו "היסודות" מעולם לא נוסחו על-ידו בפירוש:

כפי שציין גאוס, אויכלידס דיבר על נקודות הנמצאות בין נקודות אחרות וקווים הנמצאים בין קווים אחרים, אך הוא מעולם לא התייחס לרעיון של הביניים (betweenness) ולתכונות שלו (Kline, 1980, p. 102).

היה זה מוריץ פש (Moritz Pasch) אשר העניק, במאה התשע-עשרה, סטטוס פורמלי ל"ביניים" אשר עד אז התקבל כמידע המבוסס על היבטים צורניים.

בעמודים הבאים, נפגוש בדוגמאות של תופעות המעוררות אצל היחיד קונפליקט הקשור לראשית התפתחות הרעיון של המושגים הצורניים בקרב היחיד.

האינטראקציה בין דימויים ומושגים

מקובל לקבל את התופעה שבמהלך תהליך יעיל של הנמקה יש אינטראקציה בין דימויים ומושגים. שפרד (Shepard) ציטט דוחות אינטרוספקטיביים רבים של מדענים שמתארים את הדרכים אשר בהן גילוי של רעיון חדש התבסס על דמיון שהתעורר על-ידי חקירה תאורטית (Shepard, 1978). למשל, בקשר לעבודתו של איינשטיין, כתב שפרד:

לאורך כל הדרך, עבודתו של איינשטיין בפיסיקה תאורטית התבלטה באינטראקציה בין ויזואליזציה תפיסתית קונקרטית מחד, ודחף נחוש לשימוש בעקרונות מופשטים ואסתטיים של סימטריה או שימור, מאידך. נראה שאינטראקציה זו הייתה מתווכת, לא על-ידי דדוקציה מילולית, גשרים לוגיים או פורמליות מתמטית, אלא על-ידי זינוק מרקיע של אינטואיציה פיסיקלית ומרחבית (Shepard, 1978, p. 135).

שפרד מזכיר את החוויה המנטלית המפורסמת של Kékulé, אשר הובילה אותו לגילוי של מבנה משושה דמוי-טבעת של מולקולת הבנזין, בעודו מנמנם מול האח אחר צהריים אחד (1865):

האטומים ליהטטו לפני עיני [...] לפני עיני מוחי, מחוזדים על-ידי מראות חוזרים מאותו סוג, אפשר היה להבחין כעת במבנים גדולים יותר של תצורות שונות, בשרשראות ארוכות, רבים מהם קרובים: הכל התפתל באופן דמוי-נחש. לפתע, מה זה היה? אחד מהנחשים תפס את זנבו והמבנה כולו התפתל בפני עיני כאילו מלגלג. כמוכה ברק, התעוררתי (Shepard, 1978, p. 147).

הקורא יכול למצוא עשרות דוגמאות מסוג זה במאמרו של שפרד.

הרעיון המרכזי, החוזר בספרות העדכנית, הוא שחשיבה יעילה הן בהקשרים יומיומיים והן בסיטואציות מדעיות, כוללת אינטראקציה קבועה בין דינמיות מושגית ודימויית. האם מהלך החשיבה נקבע בעיקרו על-ידי מבנים מושגיים (המסומלים או מתווכים בעזרת אמצעים דימויים), או להפך: האם אלה הדימויים המעודדים את היצירתיות המקדמת את מהלך החשיבה? התופעות כה מורכבות שלא נראה שקיימת תשובה החלטית לשאלה זו. נראה שההשערה הסבירה ביותר היא שלמעשה אנו עוסקים במשחק אחד שבו רשתות מושגיות פעילות נמצאות באינטראקציה עם מקורות דימויים. מעבר לכך, יש לנו סיבות להודות שבמהלך אינטראקציה זו, משמעויות נעות מקטגוריה אחת לאחרת, הדימויים נעשים בעלי חשיבות כללית יותר והמושגים מעשירים את מארג הקונוטציות והשילובים שלהם.

יש עדויות ניסיוניות רבות בקשר לאינטראקציה שבין הדימויים והמושגים בלמידה ובפתרון בעיות (לסקירות ולתאוריות כלליות, ראו למשל, Anderson, 1978, 1990; Blanc-Garin, 1974; Denis & (Dubois, 1976; Kosslyn, 1980, 1983; Paivio, 1970, 1971; Rohwer, 1970).

אך באינטראקציה זו דימויים ומושגים נחשבים לקטגוריות נפרדות של ישויות מנטליות. אנו מניחים שבמקרה הייחודי של חשיבה גאומטרית, היחיד עוסק בסוג שלישי של אובייקטים מנטליים שלהם יש תכונות מושגיות וצורניות בו בזמן.

הסיבה לסמביוזה החזקה בין האילוצים האנליטיים, סימבולים לבין התכונות הצורניות בחשיבה הגאומטרית היא שאנו עוסקים למעשה במערכות אקסיומטיות. לפיכך, עלינו להבחין בין תקפות מתמטית פורמלית לבין תקפות אמפירית. כל עוד מתייחסים לצורה הגאומטרית בסביבה של מבנה אקסיומטי מסוים, התכונות שלה והמשפטים הרלוונטיים מוכתבים באופן ישיר או שאינו ישיר על-ידי הגדרות סמויות או מפורשות. החקירה של תכונות אלה תחומה למאמץ אינטלקטואלי, ואנו עוסקים בסוג פורמלי של תקפות. אם אנו מעוניינים בתקפות האמפירית של התכונות או המשפטים, הדברים משתנים באופי בסיסי ועל היחיד לעמת את הטענות המתמטיות המתאימות עם העובדות האמפיריות.

כפי שכבר ציינו, ההמשגה המוחלטת של דימויים מרחביים בחשיבה הגאומטרית מייצגת, למעשה, תופעה אידאלית. המרכיב הצורני בדרך כלל מושפע מכוחות צורניים-גשטלט והמרכיבים המושגיים עשויים להיות מושפעים מכשלים לוגיים. עם הגיל, וכתוצאה מהוראה מתאימה, כפי שנראה בהמשך, המיזוג בין הצורני והמושגי נוטה להשתפר.

במחקרים העוסקים בייצוגים מרחביים אשר התבצעו עד כה, לא התייחסו לסטטוס המסוים שלהם. אפילו שפרד אשר הקדיש מחקר רב למניפולציות המנטליות של צורות גאומטריות (כמו סיבוב ופריסה), אינו מדגיש היבט זה של הבעיה (ראו Shepard & Cooper, 1982). רק פיאז'ה ואינהלדר ציינו את הסטטוס של דימויים מרחביים, אך גם הם לא התייחסו להשלכות שיש לקשר שבין הצורני לבין האילוצים הלוגיים בתחום זה (Piaget & Inhelder, 1966, pp. 373-412).

היבטים התפתחותיים

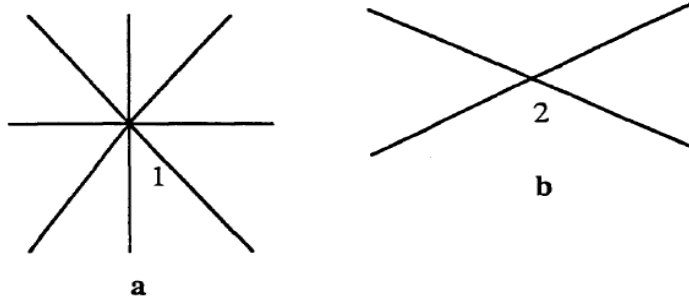
האם מושגים צורניים הם תוצר טבעי של החשיבה האנושית כמו מושגים ודימויים, או שהם מתפתחים רק לאחר אימון שיטתי?

קשה לענות על שאלה זו מכיוון שבסיטואציות רבות ההתגשמות החומרית והפרשנות המושגית הטהורה מניבים תשובה דומה. כאשר מבקשים מהיחיד לפרוס קובייה (בין אם היא מיוצגת באופן מנטלי או באופן קונקרטי) השרטוט המתקבל זהה בין אם הוא חושב במונחים מושגיים ובין אם מתייחס לקובייה קונקרטית. נדרשות סיטואציות ניסוייות ייחודיות כדי להצליח לבצע הבחנה זו.

במחקר קודם יצרנו סיטואציות ניסוייות כאלה. למשל תלמידים בכיתות ב'-ו' עומתו עם השאלה הבאה (תרשים 3):

בתרשים 3 a משורטטים ארבעה קווים נחתכים (נקודה 1). בתרשים 3 b ישנם שני קווים נחתכים (נקודה 2). השוו בין נקודות 1 ו-2. האם נקודות אלה שונות? האם אחת מהן גדולה יותר? אם כן איזו מהן? האם אחת מהן כבדה יותר? אם כן, איזו? האם לשתי הנקודות צורה זהה?

השאלה נוסחה באופן רב משמעי בכוונה. אפשר להתייחס אליה מהיבט גאומטרי או מוחשי (גרפי). מטרתנו הייתה לזהות את התפתחות הפרשנויות שמציעים המשתתפים עם הגיל, ואת ההתפתחות האפשרית של המושגים הצורניים (נקודה, קו).



תרשים 3

הממצאים מראים התפתחות שיטתית באופן יחסי של תשובות, מייצוג קונקרטי לייצוג מושגי-מופשט. בכיתה ב' 68% מהתלמידים לא ענו כלל על שאלה שהתייחסה לגודל הנקודות, 13% ענו שנקודה 1 גדולה יותר, 6% ענו שנקודה 2 גדולה יותר ורק 7% ענו שהנקודות זהות. 2% ענו, באופן כללי, שהנקודות שונות.

בכיתה ג' 40% לא השיבו אבל 45.7% טענו שנקודה 1 גדולה יותר. רק 2% אישרו שהנקודות זהות. בכיתה ד' זיהינו תופעה של קוטביות תשובות: 50.9% טענו שנקודה 1 גדולה יותר, 27.3% טענו שהנקודות זהות ורק 12.3% לא ענו.

בכיתה ה' היחס בין תשובות קונקרטיות למושגיות החל לרדת: 40% טענו שנקודה 1 גדולה יותר, 28.8% טענו שהנקודות זהות ו-20% לא ענו.

בכיתה ו' המצב היה שונה. 20% עדיין סבורים שנקודה 1 גדולה יותר בעוד ש-45.4% מהמשתתפים ענו שהנקודות זהות.

נצטט כמה הסברים אשר ניתנו על-ידי התלמידים החל מכיתה ד' החושפים את הפרשנויות הסותרות שלהם:

ש.א.: "נקודה 1 גדולה יותר כי זה החיתוך של יותר קווים. לנקודות אין משקל. יש להן צורה דומה" (Fischbein, 1963, p. 222).

מ.נ.: "נקודה 1 גדולה יותר כי יותר קווים נחתכים. בגלל שלנקודה 1 יש נפח גדול יותר אז היא גדולה יותר. לנקודות יש אותה צורה כי הן אותו דבר" (Fischbein, ibid, p. 223).

הילד לא מצליח לארגן את המידע במבנה קוהרנטי. מצד אחד, נקודה 1 נחשבת גדולה יותר בגלל שתפיסתית היא מייצגת חיתוך של ארבעה קווים. אבל מצד אחר, אותה נקודה היא בדרכה להפוך ליישות אוטונומית המנותקת מכל הקשר, כהכנה להתפתחות המושג הגאומטרי – "נקודה".

מ.נ.: "הנקודות כמעט זהות. יש להן אותו משקל. לנקודות יש את אותה צורה כי שתיהן משולשים" (cf. Fischbein, 1963, p. 224).

אפשר לראות את העירוב הלא מתואם של פרשנויות תפיסתיות וגאומטריות. המושג הצורני (הנקודה) המופשט מממד אפס הנוצרת על-ידי קווים חד-ממדיים מופשטים) עדיין אינו קיים.

פ.ש.: "לנקודות יש את אותו גודל ומשקל. יש להן צורות שונות. הנקודות הן באותו גודל לא משנה כמה קווים נחתכים" (cf. Fischbein, ibid, p. 225).

מצד אחד נראה שהפירוש הפורמלי הנכון כבר קיים: "מספר הקווים הנחתכים אינו משפיע על גודל נקודת החיתוך (משתמע מכך באופן סמוי שהקווים הם חד-ממדיים והנקודות מממד אפס)". אבל מצד אחר, הצורות עדיין נתפסת כשונות זו מזו: הגורם התפיסתי המסגיר את האוריינטציה המוחשית עדיין פעיל.

בכיתה ה' אין הבדלים משמעותיים בהשוואה לכיתה ד'. אפשר לזהות עירוב דומה של פרשנויות תפיסתיות וגאומטריות-פורמליות (שנלמדו).

א.פ.: "נקודה 1 גדולה יותר מכיוון שיש לה שטח גדול יותר. נקודה 1 גם כבדה יותר כי יש לה שטח גדול יותר" (cf. Fischbein, ibid, p. 228).

ק.ו.: "שתי הנקודות אינן באותו גודל. אחת גדולה יותר, האחרת קטנה יותר. לשתי הנקודות יש אותה צורה כי הן שתיהן עגולות" (cf. Fischbein, ibid, p. 228).

מצד אחד לנקודות גדלים שונים, כלומר, הן תלויות בקווים (הנחה סמויה שעוביין שונה) אשר יוצרים אותן, ומצד אחר, הנקודות זהות, עגולות, מכיוון שמתייחסים אליהן כאל ישויות גרפיות בלתי תלויות

(הנקודות הגרפיות נראות כעגולות).

בכיתה ו' התמונה משתנה באופן מוחלט. הקווים והנקודות המופשטים מתגלים. נראה שקיימים מושגים צורניים אמיתיים.

ז.נ.: "אין לנקודת החיתוך של הקווים כל משקל, גודל או צורה, אין להם כל מסד" (Fischbein, ibid, p. 230).

ר.ר.: "לנקודות אין מסד. דרך נקודה עוברים אין סוף קווים. לנקודות אין צורה" (Fischbein, ibid, p. 230).

ל.ק.: "לנקודות אין גודל, אין משקל, אבל הן מיוצגות על-ידי עיגולים קטנים" (Fischbein, ibid, p. 230).

המשתתפים התבקשו גם להשוות נקודה ששורטטה על הלוח עם נקודה במחברת הלימוד. באופן כללי, אפשר לזהות את אותה התפתחות. אך חשוב לציין כי במקרים מסוימים הופיעו סתירות מעניינות. אצטט מספר דגמאות מכיתה ו'. ההשוואה בין נקודה על הלוח לבין נקודה במחברת:

ר.א.: "אף אחת מהנקודות אינה כבדה יותר. אף אחת אינה גדולה יותר. כי לנקודה אין מסדים" (Fischbein, ibid, p. 232).

אותו תלמיד (ר.א.) (בעבור השאלה המתייחסת לקווים הנחתכים):

"נקודה 1 גדולה יותר כי יותר קווים נחתכים. נקודה 2 קטנה יותר כי פחות קווים נחתכים. לנקודות יש משקל זהה" (Fischbein, ibid, p. 232).

התלמיד (ר.א.) מאשר שלנקודות אין ממד ולכן אף אחת אינה גדולה או כבדה יותר. אותו תלמיד, כשהתייחס לקווים הנחתכים, טען שנקודה אחת גדולה יותר כי היא החיתוך של מספר קווים. הקונפליקט המתואר כאן נוצר בשל העובדה ששתי המערכות – הצורנית והמושגית, טרם מוזגו כמושגים צורניים אמיתיים. התלמיד יודע שלנקודות אין ממד, והוא משתמש בידע זה כאשר הוא מתייחס לנקודה המצוירת על גבי הלוח ולנקודה המשורטטת במחברתו. בו בזמן, כאשר הוא מתייחס לנקודות אשר נוצרו על-ידי חיתוך הקווים, ההשפעה הצורנית חזקה מדי ונראה שהיא מבטלת את האילוצים המושגיים.

להלן דוגמה נוספת מאותו סוג:

ג.מ.: "הנקודה שעל הלוח והנקודה שבמחברת זהות כי אנחנו יודעים שלנקודות אין מסד" (Fischbein, ibid, p. 232).

אותו תלמיד (ג.מ.):

"לשתי הנקודות (שנוצרו על-ידי הקווים הנחתכים) אין את אותו גודל. המשקל של נקודה 1 גדול יותר וגם הגודל שלה, ואין להן את אותה צורה."

כיצד זה ייתכן שאותו משתתף, שמאשר שהנקודה על הלוח והנקודה במחברת זהות מכיוון שאין להן ממד, טוען ששתי הנקודות אשר נוצרו על-ידי חיתוך הן שונות?

התלמיד בן ה-11 (כיתה ו') מודע לעובדה ששני הסמלים הגרפיים מייצגים ישויות גאומטריות ללא ממד. העובדה שאחת נוצרה על-ידי גיר והאחרת על-ידי עפרון תורמת לניטרול החשיבות של ההתגשמות המוחשית. אך במקרה של הקווים הנחתכים, התלמיד עוסק רק בייצוגים גרפיים. נראה שבמקרה זה ההשפעה של הייצוג הצורני עדינה הרבה יותר ומצליחה לתפוס בעצמה את כלל המשמעות של המושגים "נקודה" ו"קו".

דוגמאות אלה מראות את המורכבות של הקשרים שבין ההיבטים הצורניים והמושגיים בארגון של המושגים הצורניים והשכירות של ארגון זה במוחם של התלמידים.

ההגדרה, הדימוי והמושג הצורני

לפיכך, כאשר מתייחסים לצורות גאומטריות יש להתייחס לשלוש קטגוריות של יישויות מנטליות: ההגדרה, הדימוי (המתבסס על התנסות תפיסתית-חושית כמו דימוי של ציור) והמושג הצורני. המושג הצורני הוא מציאות מנטלית, זהו המבנה שעוסקים בו בחשיבה מתמטית בתחום הגאומטרי. הוא נטול כל תכונות קונקרטיות-חושיות (כמו צבע, משקל, צפיפות וכיו"ב), אך הוא בעל תכונות צורניות. מבנה צורני זה נשלט ומופעל על-ידי כללים לוגיים ופרוצדורות בעולם של מערכת אקסיומטית מסוימת. הקושי לקבל את קיומו של סוג שלישי זה של ישויות מנטליות נקבע על-ידי העובדה שאנו מודעים באופן ישיר רק לייצוג המנטלי (כולל תכונות חושיות כמו צבע) ולמושג המתאים. יש לנו צורך במאמץ אינטלקטואלי כדי להבין שפעולות מתמטיות-לוגיות עושות מניפולציה רק על גרסה מזוקקת של הדימוי, התוכן המרחבי-צורני של הדימוי. כאשר אנו עושים מניפולציה על מילים בפעילות מילולית, הצלילים (הנשמעים או מבוטאים) הם המייצגים החומריים החיצוניים של המשמעות. המשמעות היא מעבר לחומריות של המילה המבוטאת: המשמעות היא רעיון הנקבע על-ידי מארג של קשרים. המושג הצורני גם הוא משמעות. הייחוד בסוג זה של משמעות הוא שהוא כוללת צורה כתכונה אינהרנטית. המשמעות האמיתית של המילה מעגל בגאומטריה, כפי שהיא מתופעלת על-ידי תהליכי החשיבה שלנו, אינה ניתנת להפחתה להגדרה פורמלית טהורה. זהו מושג אשר נשלט באופן מוחלט על-ידי הגדרה. בלא סוג זה של דימויים מרחביים, הגאומטריה לא היתה קיימת כענף של המתמטיקה.

המונח "צורה" הוא רב משמעי ויכול לציין מגוון של משמעויות. בטקסט הנוכחי "צורה" מתייחסת רק לדימויים מרחביים. בדרך כלל יש לצורה (figure) מבנה מסוים, צורה (Shape) או "גשטאלט". צורות גאומטריות מתאימות לתיאור זה, אך יש להוסיף כמה הבחנות: (א) צורה גאומטרית היא דימוי מנטלי שתכונותיו נשלטות באופן מוחלט על-ידי הגדרה; (ב) שרטוט אינו צורה גאומטרית כשלעצמו אלא התגשמות מוחשית גרפית שלה; (ג) הדימוי המנטלי של צורה גאומטרית הוא בדרך כלל הייצוג של המודל החומרי שלה. הצורה הגאומטרית כשלעצמה היא רק הרעיון המתאים אשר הוא היישות המופשטת, האידיאלית הטהורה אשר נקבעת באופן מוחלט על-ידי הגדרה.

כפי שכבר ציינו, צורות גאומטריות אינן הדימויים היחידים אשר נשלטים על-ידי מושגים מתאימים. למעשה, זהו המצב המקובל במיוחד בחשיבה מדעית. בעבור הביולוג למשל, מושגים כמו בעלי

חוליות, דו-חיים, יונקים וכדומה מציינים משפחות של חיות, אשר המשמעות שלהן היא מיזוג של מושגים מצד אחד, ואשר הן קשורות במוחו של המדען עם דימויים מסוימים מצד אחר. כאשר חושבים על קטגוריות אלה של חיות, המדען עושה מניפולציה על הדימויים בהתאם למושגים המתאימים.

ההבדל בין מדעים אמפיריים וגאומטריה בהקשר זה, הוא שבגאומטריה הדימויים עשויים להיות נשלטים באופן מוחלט על-ידי מושגים בעוד שבמדעים אמפיריים הם אינם נשלטים.

במדעים אמפיריים המושג נוטה לעשות קירוב למציאות הקיימת המתאימה בעוד שמתמטיקה זהו המושג, דרך הגדרתו, אשר מכתוב את תכונות הצורות המתאימות.

דבר זה מוביל לתוצאה מהותית. המתמטיקאי יכול לבצע את תהליך החקר כולו באופן מנטלי בהתאם למערכת אקסיומטית מסוימת, בעוד שהמדען האמפירי חייב, במקדם או במאוחר, לחזור למקורות אמפיריים. בעבור המתמטיקאי, המציאות עשויה להיות מקור של השראה אך היא לעולם אינה אובייקט למחקר המוביל לאמיתות מתמטיות וודאי שלא ערכאה סופית להוכחת אמת מתמטית.

המתמטיקאי, כמו הפיסיקאי או הביולוג, משתמש בתצפית, ניסוי, אינדוקציה, השוואות, הכללות, אך האובייקטים של החקירה שלו הם מנטליים במלואם. המעבדה שלו תחומה על-ידי מוחו. ההוכחות שלו הן לעולם אינן בעלות אופי אמפירי אלא לוגי בלבד.

קונפליקטים

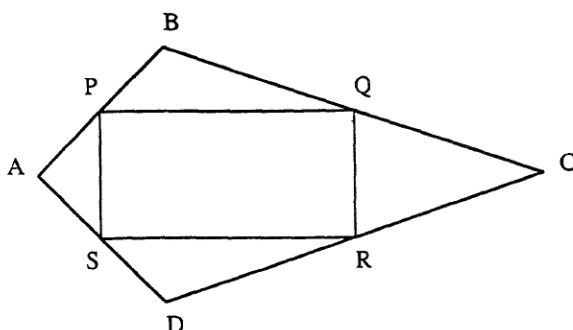
כפי שצינו, מושגים צורניים מהווים את הגבול האידאלי של תהליך מיזוג ואינטגרציה בין ההיבטים הלוגיים והצורניים.

רעיון דומה ביטא טול ווינר אשר הבחינו בין "דימוי למושג" (concept image) ובין "הגדרת המושג" (concept definition). בעוד שהמונח "הגדרת המושג" מתייחס למשמעות המתמטית, כפי שהיא מוגדרת באופן פורמלי, המונח "דימוי למושג" מתאר את "המבנה הקוגניטיבי כולו המקושר למושג, הכולל את כל התמונות המנטליות וכן התכונות והתהליכים הקשורים למושג. הוא נבנה במהלך השנים דרך התנסויות מסוגים שונים, משתנה כאשר היחיד פוגש בגירויים חדשים ומתבגר" (cf. Tall, 1991, p. 7). בגאומטריה, המושג הצורני האידאלי מתקשר עם הגדרת המושג בעוד שההשתקפות המנטלית שלו על כל הקונוטציות ורב-המשמעויות שלה מתקשרות עם מה שטול ווינר כינו בשם "דימוי למושג". "דימוי", בטרמינולוגיה שלהם, אין משמעו "תמונה" במובן החושי, אלא בנייה מנטלית, סובייקטיבית, מחדש של ישות מתמטית הנתונה באופן פורמלי.

נחזור למושג הצורני. תחת תנאים פסיכולוגים רגילים, המאפיינים הצורניים והמושגיים של המושג הצורני נשארים תלויים, בדרך כלל, בשתי המערכות, עם האילוצים של כל אחת מהן. עובדה בסיסית זו מובילה לעתים לסתירות, קונפליקטים, מתחים פנימיים, עד להתפרקות המוחלטת של המושג הצורני לשני מרכיביו הבסיסיים.

אציג מספר דוגמאות. בניסוי שערכנו לפני מספר שנים, הצגנו את המשפט הבא:

"ABCD הוא מרובע ו-PQRS הן נקודות האמצע של כל אחת מצלעותיו. הוכיחו כי PQRS היא מקבילית" (תרשים 4).



תרשים 4

למשתתפים הוצגה הוכחה של המשפט והם נשאלו אם הם מסכימים עם נכונות הטענה. כדי לבדוק

האם המשתתפים מבינים שההוכחה מהווה ערובה לתקפות אוניברסלית של המשפט, נשאלו מספר שאלות נוספות. אחת מהשאלות הייתה: "V הוא ספקן. הוא סבור שיש לבדוק לפחות

100 מרובעים כדי להיות בטוחים ש-PQRS היא מקבילית. מה דעתך? הסבר את תשובתך."

נמצא כי כ-40% מהמשתתפים (N=396) הסכימו עם ההוכחה, אך רק כ-10% דחו כל צורך בבדיקות אמפיריות נוספות (Fischbein & Kedem, 1982, pp. 128-131).

ההסבר של חלק מהתלמידים היה מהסוג הבא: יש לבדוק מספר קטגוריות של מרובעים (מקביליות, מלבנים, ריבועים ועוד).

כפי שכבר טענו, המושג הצורני הוא מבנה מנטלי המאפיין על-ידי כל התכונות של מושג (כלליות, הכרחיות, מופשטות, אידאליזם), אך אשר משמר, בו בזמן, תכונות צורניות (צורה, מרחקים, מיקום). בעיקרון, ההיתוך שבין הצורה והמושג אמור להיות מושלם, אך זהו הארגון המושגי אשר אמור להכתיב, באופן מוחלט, את התכונות והקשרים הצורניים. למעשה, כפי שכבר ציינו, זוהי סיטואציה אידאליזם שאפשר להשיג אותה במוחו המיומן של המתמטיקאי.

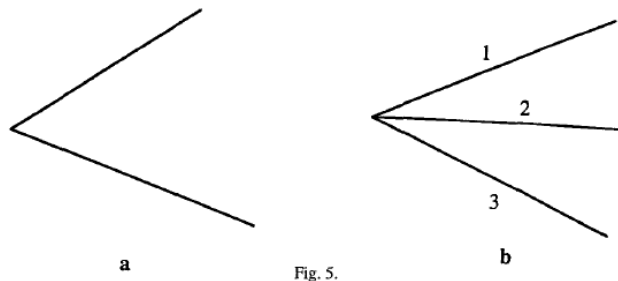
התכונות המושגיות והצורניות נשארות תחת ההשפעה של כל אחת משתי המערכות התואמות, המושגית והצורנית. לעתים קרובות, האילוצים הצורניים – על פי רוב לפי חוקי הגשטלט – עלולים לחמוק מהשליטה המושגית ולכפות, על קו המחשבה, פרשנויות אשר הן עקביות עם ההיבט הצורני אך אינן כפופות יותר לאילוצים מושגיים.

על אף שהתלמיד יודע את הגדרת המקבילית (מרובע אשר צלעותיו הנגדיות מקבילות), הוא עלול להתקשות לראות את ההתאמה להגדרה זו בצורות השונות, את הגשטלט הזוהה, את הקטגוריה הדומה של הצורות. מקבילית מוטת, מלבן, ריבוע הם כה שונים מהבחינה הצורנית, עד שההשפעה המאחדת של המושג המשותף, נעלמת. היחיד אשר מקבל את נכונותה של ההוכחה הנתונה כתמיכה בתקפותו של המשפט, עשוי לטעון שנדרשות בדיקות נוספות כעבור כל קטגוריה של מרובעים, כדי להגיע לוודאות.

אלסנדרה מריאטי (Alessandra Mariotti) הביאה את הדוגמה הבאה: אליסיה (בת 16, כיתה י"א) פתרה את הבעיה הבאה:

כמה זוויות את רואה בתרשימים a ו-b? (ראו תרשים 5).

אליסיה: "בכל פעם שאני רואה שני קווים נחתכים, אני יודעת שהמרחב בין שני הקווים הוא זווית. אני חושבת שבשתי הצורות יש רק זווית אחת למרות שבהתחלה חשבתי שבתרשים השני יש שתי זוויות. אני יכולה להסביר את הטענה שלי. בהתחלה חשבתי שבניצוג הזה (תרשים b5) קו 1 וקו 2 יוצרים זווית אחת וקו 2 וקו 3 יוצרים זווית שנייה. אבל עכשיו אני חושבת שנוצרת רק זווית אחת על-ידי הקווים הנחתכים (קווים 1, 3) וקו 2 הוא חוצה הזווית של זווית זו." (Mariotti, 1992, p. 875).



תרשים 5

הקושי של אליסיה נוצר על-ידי העובדה שהמושג אינו מצליח להשתלט על השרטוט. זה קורה לא מכיוון שאליסיה אינה תופסת את המושג נכונה, אלא מכיוון שלשרטוט עדיין יש מאפיינים גשטלטיים אשר התעוררו לאחר התנסויות קודמות. למעשה, הסימביוזה המושלמת שדיברנו עליה עדיין אינה קיימת. אם תחתוך חתיכה של עוגה לשני חצאים, יתקבלו שתי חתיכות של עוגה, לא שלוש (הפרשנות הראשונה של אליסיה). אם קו 2 הוא חוצה-זווית, הוא אינו יכול להשתייך, בו בזמן, לשתי הזוויות האחרות (הפרשנות השנייה).

המושג "זווית" לא שולט באופן מוחלט בצורה. הפרשנות של הצורה עדיין מסתמכת חלקית על אילוצים לא-פורמליים.

השלכות תאורטיות

אפשר להבחין בשתי תאוריות המתייחסות לקשרים שבין מושגים ודימויים. שתי נקודות מבט אלה הודגשו בתחום של הגישה של עיבוד מידע.

א. תאוריית הקוד הדואלי (The dual code theory)

פאיוו (Paivio) הקדיש מספר מחקרים לבחון את תפקידם של הדימויים המנטליים, בעיקר בתהליך הלמידה. בדומה לתאוריה של פיאז'ה ואינהלדר (Piaget & Inhelder, 1966), הוא הדגיש את האופי הסימבולי של הדימויים, ובאותו כיוון חשיבה, גם הוא הבחין אותם מתהליכים מילוליים:

ניתן לקשר את הגישה האמפירית הכוללת קבוצות שונות של פעולות מתכנסות אשר תוארה קודם לכן, למסגרת מחקרית שבה התפקידים המיוחדים לדימויים בלמידה וזיכרון מובחנים באופן ברור מאלה המיוחדים לתהליכים מילוליים. ללא הבחנה זו, יהיה זה סיוטר לשמור על שני התהליכים - הדימויים והמילוליים, כמבנים תאורטיים. הבחנה אחת כזו היא שהדימוי קשור באופן פונקציונאלי לגירוי או למשימה קונקרטית, בעוד שתהליכים מילוליים הם יותר בלתי-תלויים בממד זה. כלומר, נראה שדימויים הם שימושיים יותר כאשר עוסקים בסיטואציות קונקרטיות מאשר בסיטואציות מופשטות. הבחנה תאורטית נוספת היא שהדימוי נדרש במיוחד לעיבוד של מידע מרחבי בעוד שהמערכת המילולית מתאפיינת יותר ביכולת שלה לעיבוד סדרתי (Paivio, 1970, pp. 386-387).

ב. התאוריה הטענתית (The propositional theory)

תאוריית הקוד הדואלי עמדה תחת ביקורת. כותבים שונים טענו שדימוי, כמו מידע מילולי, מקודד בפורמט טענתי מופשט (לסקירה, ראו Anderson, 1978). אנדרסון תיאר שלושה מאפיינים המגדירים טענה: היא מופשטת, יש לה ערך של נכונות ויש לה את כללי ההיווצרות שלה (Anderson, 1978, p. 250). "טענה אינה רק משפט. רעיון המופשטות קשור למושג של שימור תחת פרפרזה", טוען אנדרסון (ibid, p. 250). כלומר, יינתן אותו ייצוג טענתי למספר פרפרוזות בלשוניות ולכמה תרגומים בין-שפות.

התומכים בתאוריה הטענתית טוענים שאי אפשר להסביר את התהליכים הקשורים בדימויים מנטליים ולזיכרון מילולי בעזרת תאוריית הקוד הדואלי.

פילישיין (Pylyshyn, 1973) מתייחס לעובדה שאנשים יכולים לתאר תמונות בעזרת מילים או ליצור תמונות כדי לתאר רעיונות המבוטאים באופן מילולי. "הקוד הטענתי המופשט ישמש כפורמט מנטלי אשר לתוכו ומתוכו אפשר לתרגם מידע תמונתי ומילולי. הוא משמש כ"בית חצי-הדרך" לתהליך התרגום בין שני הקודים הפריפריאליים" (Anderson, ibid, p. 256).

אנדרסון ובאוור (Anderson & Bower, 1973) ופילישיין (Pylyshyn, 1973) מאשרים שיש צורך בקוד טענתי כדי לייצג משמעויות.

אנדרסון טען שהתאוריה של קוד טענתי מופשט ומקובל נפגמת על-ידי השיקול הבא: אם כדי לתרגם מקוד 1 לקוד 2 יש לתרגם תחילה מקוד 1 לקוד 3 משמע הדבר שכדי לתרגם מקוד 1 לקוד 3 יש צורך בקוד חדש, קוד 4, ודבר זה יוביל לרגרסיה אינסופית (Anderson, 1978, p. 256).

בקצרה, קשה לקבוע על סמך הנתונים שיש בידנו כיום, איזו משתי התאוריות – תאוריית הקוד הדואלי או התאוריה הטענתית, מספקת הסבר מתאים יותר לאחסון ולדינמיות של ייצוגים מילוליים

ודימויים. ישנם טיעונים חזקים בעד ונגד כל אחת מהן (לדיון מקיף בנושא זה ראו Anderson, 1978).

המושגים הצורניים והתאוריה הטענתית

עצם הקיום של מושגים צורניים, נוסף על הדימויים והמושגים הטהורים, מהווה טיעון חזק לטובת רמה מנטלית מרכזית, מאחדת שהיא אוטונומית באופן יחסי שלא רק מסייעת לתקשורת שבין מידע מילולי ותמונתי, אלא גם מאפשרת מבנים מנטליים המאופיינים בו בזמן על-ידי תכונות מושגיות (כלליות, אידאליזם, הכרחיות) ועל-ידי תכונות תמונתיות (בעיקר מרחביות).

אם היו קיימים רק שני קודים בלתי תלויים זה בזה לא היה אפשר לבצע מניפולציה על דימוי, על ייצוג מרחבי תחת השליטה האינטרינזית והקפדנית של ההגדרה. כאשר אנו פותרים בעיה בגאומטריה, אנו מבצעים מניפולציות על צורות גאומטריות כאילו הן היו ישויות מנטליות הומוגניות ולא צירופים של שתי קטגוריות של מבנים מנטליים הטרונגיים. זהו, בלי ספק, המקרה האידאלי אך האפשרי.

כפי שראינו, לעתים קרובות, תחת ההשפעה של כללים צורניים, הדימוי עשוי להפריד את עצמו ולברוח מכל שליטה פורמלית-מושגית.

פיאז'ה ואינהלדר

פיאז'ה ואינהלדר הקדישו מחקר מקיף לקשרים שבין דימויים ופעולות (כלומר, מבנים לוגיים) (Piaget & Inhelder, 1966). לדעתם, למרות שדימויים ומושגים מייצגים שתי קטגוריות נפרדות, ישנה אינטראקציה מוחלטת ביניהם. באינטראקציה זו, האופרציות ממלאות תפקיד מוביל אשר גדל עם הגיל.

לדעתם, במקרה של גאומטריה מתרחשת סיטואציה ייחודית:

...במקרה המיוחד של פעולות גאומטריות, אשר תפקידן רק לתאר את הצורות המרחביות ואת הטרנספורמציות שלהן, ישנה הומוגניות בין המסומל (le symbolisé) הכלול בפעולות מרחביות והסמל המייצג (le symbolisant image) אשר הוא עצמו בעל אופי מרחבי: הוא עוקב אחרי הסיטואציה המועדפת של האינטואיציה הגאומטרית, אשר האופי הכפול שלה - זה של הפעולות וזה של הדמיון, מגיע לסינתזה פנימית יותר מאשר בכל תחום אחר... האינטואיציה הגאומטרית, מגיעה לסינתזה הולמת זו רק על-ידי שיעבוד של המרכיבים המדומיינים לגרעין האופרציוני. שיעבוד זה מרמז על התפתחות (Piaget & Inhelder, 1966, pp. 394-395).

נראה שגם לפיאז'ה וגם לאינהלדר הייתה את האינטואיציה לגבי המיזוג המוחלט בין ההיבטים המושגיים והצורניים במקרה המיוחד של חשיבה גאומטרית. העובדה שהם הגיעו למסקנה זו לאחר עדויות רבות מהווה תמיכה חזקה לתאוריה שלנו. מצד אחר, הם לא ניסחו את ההשלכות הכלליות, התאורטיות או הדידקטיות של ממצא זה. בעבודתם זה נשאר כהערת אגב.

השלכות דידקטיות

נציין מספר היבטים דידקטיים המרומזים על-ידי התאוריה של המושגים הצורניים. חלקם אמנם כבר מוכרים למורים מניסיון ההוראה שלהם, אך הם אינם קשורים לתאוריה כללית.

דימוי והגדרה

כפי שכבר הדגשנו, הקשר בין אובייקט להגדרה שונה במהותו במדעים המדויקים ובמתמטיקה. בעוד שבמדעים האמפיריים ההגדרה מוכתבת באופן מוחלט על-ידי התכונות של קטגוריית האובייקטים המתאימה, במתמטיקה זו ההגדרה אשר כופה באופן ישיר או בדרך של דדוקציה, את התכונות של קטגוריית האובייקטים המתאימה. לפיכך, התרגום של המרכיב הצורני של הצורה הגאומטרית אמור להישאר כולו תחת אילוצים פורמליים. רעיון זה אינו תמיד מובן, ולעתים קרובות הוא נשכח על-ידי התלמיד. המרכיב הצורני נוטה לשחרר את עצמו מהשליטה הפורמלית ולהתנהג באופן אוטונומי על פי המקובל בדפוסים של גשטלט (כמו למשל, העובדה שתלמידים רבים, גם לאחר שקיבלו את ההוכחה כאישור מוחלט לתקפותו של משפט, דורשים בדיקות נוספות לכל תת-קטגוריה של קטגוריית הצורות הנדונה). קושי זה בביצוע מניפולציות על מושגים צורניים, כלומר, הנטייה להזניח את ההגדרה תחת הלחץ של האילוצים הצורניים, מייצגת מכשול גדול מאוד בחשיבה הגאומטרית.

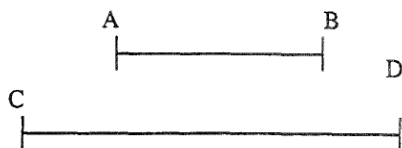
מנקודת הראות הדידקטית נובע שחשוב שהתלמיד יהיה מיומן בהתמודדות עם מצבי קונפליקט כאלה.

ייתכן שתלמידים לא יהיו מסוגלים לשרטט נכונה את הגובה מקדקוד B ובמקום זאת, יציירו את הקטע BD על אף שהם יודעים את ההגדרה של גובה לצלע במשולש (תרשים 6).

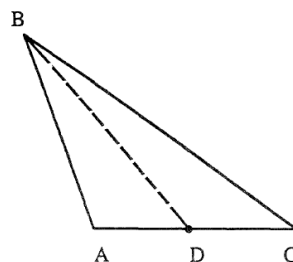
חשוב שהם יהיו מודעים להגדרה ושהם יתבקשו לבצע את המשימה נכונה על פי ההגדרה ולא על פי מה שנראה שנכפה עליהם על-ידי הדימוי.

זוהי בלי ספק דוגמה טריוויאלית, אך כדאי להשתמש בדוגמאות רבות כאלה של קונפליקט באופן שיטתי בכיתה, כדי להדגיש את השליטה של ההגדרה על הצורה בשימוש ובמתן המשמעות למושג הצורני.

דוגמה נוספת: כדי להשוות בין קבוצות הנקודות בקטעים AB ו-CD יש להתמודד עם הקונפליקט שבין הטענה שבקטע CD יש יותר נקודות והטענה ששתי הקבוצות הן שקולות (תרשים 7).



תרשים 7



תרשים 6

הפירוש הנכון של הרעיון של נקודה הוא שזהו מושג צורני. אם נדבר באופן מושגי, נקודה היא ישות אפס-ממדית. באופן צורני (מרחבי), נקודה מציינת מיקום. אך כיוון שאי אפשר לייצג מיקום בדרך אחרת מאשר בעזרת דימוי, הנקודות מקבלות ממדים (ייצוג דו-ממדי). כך המושג הצורני מאבד מהטוהר האידאלי שלו ודבר זה יוצר קונפליקט. כאשר אנו מאשרים שקטע כולל אינסוף נקודות, אנו מתייחסים לאינסוף של ישויות אפס-ממדיות. לביטוי "אינסוף של ישויות אפס-ממדיות" יש משמעות אידאלית: היא עוסקת במושג צורני טהור. בו בזמן, המרכיב הצורני (המיקום) נוטה לקבל אוטומטית מימוש תמונתי מסוים המוביל לאמונה הסמויה לגבי אי השקילות של שתי קבוצות הנקודות.

חשוב שתלמיד תיכון יהיה מודע לקונפליקט ולמקור של קונפליקטים מסוג זה כדי שהוא יוכל להדגיש, במוחו, את הצורך לבסס באופן מוחלט את החשיבה המתמטית על אילוצים פורמליים.

כל אלה מובילים למסקנה שאין להתייחס לתהליכים של בניית מושגים צורניים במוחו של התלמיד כאל תוצאה טבעית וספונטנית של לימודי הגאומטריה.

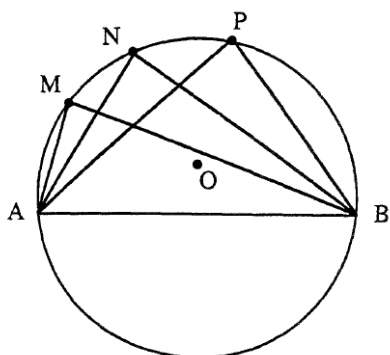
תהליך המיזוג בין תכונות מושגיות וצורניות ליצירת מבנים מנטליים בודדים, אשר בהם שולטים אילוצים מושגיים על פני האילוצים הצורניים, אינו תהליך טבעי. חשוב שהוא יהיה עיסוק מרכזי, רציף ושיטתי בשיעורי הגאומטריה.

המושג של מקום גאומטרי

לפני כן טענו שכדי ליצור אינטגרציה הולמת בין הצורה והמושג בחשיבה הגאומטרית, עם שליטה מוחלטת של אילוצים פורמליים, כדאי להתייחס לסיטואציות של קונפליקט: חשוב שהתלמיד יתאמן בבחינה של דרישות ההגדרה, אשר הן לעתים סותרות את אלה העולות מהצורה. היבט נוסף שחשוב לציין ביחס להתגבשות של המושג הצורני הוא השימוש המפורש במקומות גאומטריים. במקרים אלה של מקומות גאומטריים באים לידי ביטוי באופן מפורש קשרים אינטימיים ועמוקים אלה שבין ההיבט הלוגי והצורני. מקום גאומטרי הוא צורה (קו או מישור) אשר כל נקודותיה מקיימות תנאי גאומטרי מסוים, ואוסף כל הנקודות המקיימות תנאי זה שייכות לצורה זו.

כך למשל, התכונה של מעגל כמושג צורני נקבעת על-ידי ההתאמה המוחלטת בין הנקודות שלו לבין קשר מסוים המוגדר באופן אלגברי או מטרי. כל נקודות המעגל הן שוות-מרחק (הרדיוס r) מנקודה C (מרכז המעגל) וכל הנקודות שהן שוות מרחק מנקודה C נמצאות על המעגל. באופן אלגברי, מתקיים $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. אי אפשר להמציא (או לגלות) תכונות של מעגל אשר אינן נגזרות מהגדרתו. על אף שהמעגל הוא דימוי, ייצוג מרחבי, הקיום שלו, כמו גם התכונות שלו, נכפות באופן מוחלט על-ידי ההגדרה הפורמלית המופשטת. אין דבר שהוא נכון מבחינה צורנית אשר אינו נכון וניתן להוכחה באופן מושגי, ולהפך.

בקצרה, השימוש השיטתי במקומות גאומטריים עם האופי הכפול המוצהר במפורש מייצגים בעינינו כלי דידקטי חשוב המאפשר העמקה בהבנת אופי המושגים הצורניים.



תרשים 8

נתייחס לדוגמה נוספת: נתייחס למעגל עם מרכז O . נבחר שתי נקודות A ו- B כלשהן על המעגל ונשרטט מספר זוויות אשר שוקיהן עוברות דרך A ו- B ואשר קדקודיהן על המעגל (תרשים 8). נשווה בין זוויות M, N, P .

קשה להשוות בין זוויות אלה מבחינה צורנית באופן ישיר. נראה שהן בעלות גדלים שונים. אך אנו יודעים שמידתה של זווית אשר קדקודה על המעגל שווה למחצית הקשת הנקבעת על-ידי שוקיה. לפיכך, שלוש הזוויות M, N, P שוות בגודלן.

אנו דנים כאן במושגים צורניים מכיוון שכל חלק מהדימוי (זוויות, שוקיים, נקודות, המעגל, הקשת) הם בו בזמן דימויים ומושגים, כאשר הדימויים נשלטים באופן מוחלט על-ידי ההגדרות המתאימות. אבל במהלך הדינמי של תהליך החשיבה נראה שאי אפשר לענות על השאלה בהתבסס על הדימוי עצמו. שוויון הזוויות נקבע דרך המשפט המתאים.

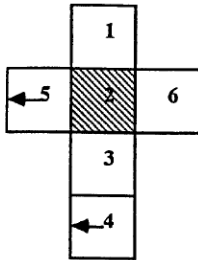
מכיוון הפוך: כל קדקודי הזוויות אשר שוקיהן עוברות דרך נקודות זהות על המעגל (ושהן בעלות גודל זהה עם זווית אשר הקדקוד שלה על המעגל) נמצאות על אותו המעגל. אנו מאמינים שבדרך של עימות בין הרושם הצורני והאילוצים הפורמליים, אפשר לשפר את השליטה המושגית ובו בזמן לפתח את הסימביוזה שבין האילוצים הצורניים והמושגיים.

בעיות הקשורות למקומות גאומטריים מבליטות באופן יפהפה ומפורש מדוע חשוב שלא להפריד בין הלוגיקה והדימוי בחשיבה הגאומטרית. המרכיבים הצורניים נהיים חלק בלתי נפרד מתהליך החשיבה הלוגית כאילו הם מושגים אמיתיים לכשעצמם. מקרים של סתירה הם בדרך כלל תוצאה של "אי הקשבה" של הצורני, תוצאה של כוחות צורניים בנוסף ללוגיים.

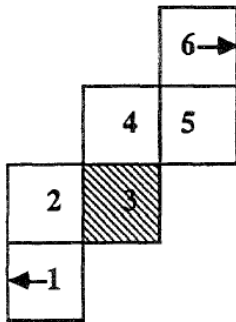
הערות

הערה אחרונה מתייחסת לכך שתרגול, עם התלמידים, של פעולות מנטליות שבהן נדרש מאמץ מיוחד כדי לקשר בין הצורני והמושגי, דורש מאמץ מיוחד. בפעולות כאלה, התלמיד צריך ללמוד לבצע מניפולציות מנטליות על עצמים גאומטריים תוך שהוא פונה בו בזמן לפעולות עם צורות ולתנאים ופעולות לוגיים.

סוג זה של פעילויות שכבר התייחסנו אליהן במאמר זה כולל: (א) בקשה מהתלמידים לשרטט את הדימוי המתקבל על-ידי פריסתו של גוף גאומטרי (הנתון באופן פסי או מיוצג מנטלית); (ב) בקשה מהתלמידים לזהות את הגוף הגאומטרי אשר יכול להתקבל כתוצאה מדמיון של הקיפול מחדש של השרטוט הדו-ממדי; (ג) בקשה מתלמידים לציין את הקצוות אשר יתחברו לאחר בניית הגוף התלת-ממדי.



תרשים 9



תרשים 10

חלק ממשיות אלה פשוטות למדי, אך חלקן מסובכות. למשל, די פשוט לקבוע שהשרטוט בתרשים 9 מייצג קיפול של קובייה. הסימטריה של הדימוי מסייע מאוד והקיפול של פאות 1, 3, 4, 5 ו-6 נעשה באופן מנטלי כמשימה ייחודית (כאשר פאה 2 מייצגת את בסיס הקובייה). במקרה זה, המרכיבים הצורני והמושגי משולבים באופן טבעי ובשל כך היחיד מבצע מניפולציה על מושג צורני ומרכיביו. התאמה של הקצוות המתאימים גם היא אינה משימה מסובכת במקרה של קצוות סמוכים (בשרטוט). קשה יותר לראות שהקצוות המסומנים (בעזרת חצים) יתלכדו גם הם בקובייה שתתקבל לאחר הקיפול.

משימה מורכבת יותר תהיה לזהות את השרטוט בתרשים 10 כפריסה של קובייה. כמו כן, די קשה לראות שהקצוות המסומנים יתלכדו בקובייה שלאחר קיפול. בפעילויות מנטליות מסוג זה, אין די בחיקוי חיצוני של פעולות מניפולציה על האובייקטים. זוהי בנייה מנטלית הדורשת לא רק "לראות" צורות, אלא גם להתאים את המיקומים שלהם; לדמיון את המיקומים שלהם לאחר הטרנספורמציה; לדמיון את ההשפעה של הטרנספורמציה על צורות סמוכות. כך למשל, בעת הרמתו של ריבוע 4 כך שהוא נהיה מאונך לריבוע 3 (שנבחר כבסיס), משתנה מקומם גם של ריבועים 5 ו-6. כעת מקומו של ריבוע 4 נשמר ומקפלים את

ריבוע 5 וכך הלאה. היחיד נדרש לשמור במוחו את ההשפעות של טרנספורמציות עוקבות אלה לבנייתו המלאה של הגוף המקורי.

מהי תרומתן של המניפולציות הצורניות והתרומה של הפעולות הלוגיות? הספרות העכשווית אינה משיבה על שאלה מהותית זו מהסיבה הפשוטה שההתייחסות לדימויים ולמושגים היא כאל שתי קטגוריות נפרדות של פעולות מנטליות. כאשר חוקרים סוגים שונים של טרנספורמציות מנטליות על אובייקטים תלת-ממדיים (כמו סיבוב או פריסה וקיפול מחדש), מתייחסים לפעולות אלה כאילו היו בעלי אופי תמונתי בלבד.

למעשה, הדברים אינם ולא יכולים להיות כאלה. מהסיבה שאנו עוסקים בפאות של קובייה (בדוגמה למעלה) נובע שהקצוות שווים, שהפאות הן ריבועים, שאנו עוסקים בזוויות ישרות ועוד. זהו ידע סמוי המרומוז על-ידי הפעולות המנטליות. בלי שליטה מושגית סמויה זו הפעולה כולה תהיה חסרת משמעות.

אנו טוענים שסוג זה של פעולות מנטליות מורכבות, אשר לעתים מכביד על התהליך האינטלקטואלי, מהווה הזדמנות מצוינת לתרגול של היכולת להתמודד עם מושגים צורניים בחשיבה הגאומטרית.

מטרתו של תרגול כזה הוא לשפר את היכולות הבאות: (א) שילוב ההיבטים הצורני והמושגי בעת פעילות של פתרון בעיות בגאומטריה; (ב) היכולת להתייחס לכמה שיותר מושגים צורניים ולתאם

ביניהם; (ג) היכולת לארגן את התהליך המנטלי בתת-יחידות בעלות משמעות אשר מאפשרות להפחית את העומס מהזיכרון; (ד) היכולת לנבא ולשלב את ההשפעה של כל טרנספורמציה בדרך לפתרון.

סיכום ומסקנות

נעשה כאן ניסיון לפרש צורות גאומטריות כישויות מנטליות שהן בעלות תכונות מושגיות וצורניות בזמן.

מושגים צורניים הם ישויות מופשטות, כלליות, אידאליות, טהורות, הנקבעות באופן לוגי, למרות שהם עדיין משקפים ומבצעים מניפולציות על ייצוגים מנטליים של תכונות מרחביות (כמו צורה, מיקום, גדלים המבוטאים על-ידי מדידה). לעתים קרובות, הצורות נוטות לשמור ולכפות את התכונות הבולטות לעין שלהן על תהליך החשיבה בהתאם לאילוצים גרפים או גשטלט. בהתאמה, השליטה המושגית (אקסיומטית-דדוקטיבית) נחלשת ותהליך הפתרון או הפרשנות נפגם.

היות שבעקרון הצורה הגאומטרית נשלטת באופן מוחלט על-ידי אילוצים מושגיים, היא יכולה להשתתף באופן פעיל בהוכחה מתמטית פורמלית מדויקת.

המונח "מושג צורני" אשר הצגנו מיועד להדגיש את העובדה שאנו עוסקים בישויות מנטליות מסוג מסוים שאי אפשר להפחית אותו לדימויים רגילים או למושגים אמיתיים. אנו עוסקים בצורות, אשר התכונות שלהן נקבעות באופן מוחלט, בין אם ישירות או באופן לא-ישיר, על-ידי הגדרות במסגרת של מערכת אקסיומות מסוימת. לפי הפרשנות שלנו, באופן אידאלי, השליטה המושגית אמורה להיות מהותית (אינהרנטית) ולפיכך הדימוי והמושג אמורים להתמזג כאובייקט מנטלי ייחודי. בתהליך החשיבה המתמטית אנו פונים מפורשות להגדרות ולמשפטים כדי לכוון את החשיבה שלנו או כדי לבחון את ההשערות והמסקנות שהגענו אליהן. אבל, לעתים קרובות בתהליך החשיבה אנו מנסים, מתנסים, פונים לאנלוגיות ולתהליכים אינדוקטיביים על-ידי ביצוע מניפולציות לא על דימויים גולמיים או על מושגים טהורים, אלא על מושגים צורניים שהם דימויים הנשלטים באופן מהותי על-ידי מושגים. בלי הרעיון של מושגים צורניים, אי אפשר לתאר ולהסביר את התהליך של פתרון בעיות ושל המצאה בגאומטריה באופן מספק.

במהלך תהליך ההמצאה, מקורה של ההשראה הוא בעיקר האינטואיציה ולא שרשרת של שיקולים פורמליים. חיפוש מתמיד אחר הצדקות פורמליות ואנליטיות כמו משפטים והגדרות יפגע ואף ימנע את זרימתם של רעיונות פוריים.

ההתייחסות שלנו בעיקר לצורות אשר נשלטות באופן מהותי על-ידי אילוצים מושגיים היא זו שמאפשרת את ההתקדמות היצירתית של תהליך ההמצאה בגאומטריה. בלי ספק, יש לחזור למסגרת הפורמלית המיוצגת על-ידי אקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות מפעם לפעם כדי לבחון את צעדינו. הסיבה העיקרית לכך היא שמבחינה פסיכולוגית, הסימביוזה בין המרכיבים הצורניים והמושגיים, בדרך כלל אינה שלמה.

למרות שמושג צורני כולל ישות בדידה (מושג המתואר באופן צורני) יש לו את הפוטנציאל להישאר תחת ההשפעה הכפולה, לעתים סותרת, של שתי המערכות שהוא מקושר אליהן – המושגית והצורנית. באופן אידאלי, המערכת המושגית היא זו אשר אמורה לשלוט באופן מוחלט במשמעות, בקשרים ובתכונותיה של הצורה. למעשה, לעתים קרובות הצורה מפרה את האילוצים המושגיים ואז הפרשנות של התכונות מעוצבת על-ידי דפוס גשטלט צורניים.

אפשר להסביר שגיאות רבות של תלמידים בהנמקות בגאומטריה על-ידי פיצול זה (או היעדר שילוב) בין ההיבטים המושגיים והצורניים של המושגים הצורניים. המבנה הצורני עשוי לשלוט בדינמיות של החשיבה במקום שהיא תהיה נשלטת על-ידי אילוצים פורמליים מתאימים. בשל כך, תלמידים רבים אינם מבינים את האופי האמיתי של הוכחה גאומטרית והם נוטים לחוות את הצורך באישורים אמפיריים כמשלימים להוכחה.

האינטראקציה בין דימויים ומושגים בפעילות הקוגניטיבית של היחיד (ילד או מבוגר) לעתים משלבת ובמקרים אחרים – יוצרת קונפליקט. אך ההתפתחות של מושגים צורניים אינה תהליך טבעי בדרך כלל. אחת הסיבות המרכזיות שגאומטריה נחשבת למקצוע כל כך קשה בבית-הספר היא שהמושגים הצורניים אינם מתפתחים באופן טבעי לקראת האופן האידאלי שלהם.

בשל כך, אחת המשימות המרכזיות של החינוך המתמטי (בתחום הגאומטריה) היא ליצור סוגים של סיטואציות דידקטיות אשר בהן יידרש, באופן שיטתי, שיתוף פעולה מוקדם בין שני ההיבטים, עד למיזוג שלהם כישויות מנטליות שלמות. לפני כן ציינו מספר סוגים של פעילויות מסוג זה: דגש גדול יותר במקומות גאומטריים ובבעיות המתייחסות לישויות אלה, ומנגד, בעיות שבהן הדפוסים הצורניים בדרך כלל נוטים להפר את האילוצים המושגים (וכך מביאים לקונפליקט) או בעיות של פריסה ובנייה מחדש, אשר בהן שיתוף הפעולה בין הדרישות הלוגיות והייצוגים הצורניים הוא כה מורכב. ישנן סיטואציות רבות אחרות אך עדיין אין בידנו די עדויות המתייחסות לכלל הנושא.

קיומם של מושגים צורניים, נוסף לדימויים ולמושגים, הוא רלוונטי גם לצורך פרשנות עיבוד המידע של קוגניציה. האפשרות של חפיפה מוחלטת בין אילוצים לוגיים וצורניים בקטגוריה מסוימת של ישויות מנטליות מייצגת טיעון חזק לטובת התאוריה הטענתית: יש להניח מראש מבנה פרשני מקובל אשר יהפוך חפיפה זו לאפשרית.

רשימת מקורות

- Anderson, J. R. (1978). Arguments concerning representations for mental imagery. *Psychological Review*, 85(4), 249-277.
- Anderson, J. R. (1990). *Cognitive psychology and its implications* (3rd ed.). New York: W. H. Freeman and Company.
- Anderson, J. R., & Bower, G. H. (1973). *Human associative memory*. Washington DC: Hemisphere Press.
- Blanc-Garin, J. (1974). Recherches recentes sur les images mentales: Leur rôle dans les processus de traitement perceptif et cognitive. *Année Psychologique*, 74, 533-564.
- Denis, M., & Dubois, D. (1976). La représentation cognitive. *Année Psychologique*, 76, 541-562.
- Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale*. Bucuresti: Editura Academiei RPR. (in Rumanian)
- Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the sixth international conference for the psychology of mathematical education* (pp. 128-131). Antwerp, Belgium: Organizing Committee of the VIth Conference PME.
- Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certain*. New York: Oxford University Press.
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine: Creating and using images in the brain*. New York : Norton.
- Mariotti, A. (1992). Immagini e concetti in geometria. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrata*, 15(9), 863-885.
- Paivio, A. (1970). On the functional significance of imagery. *Psychological Bulletin*, 73(6), 385-392.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processe*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *L'Image mentale chez l'enfant. etude sur le développement des representations imagées*. Paris: PUF.
- Piéron, H. (1957). *Vocabulaire de la psychologic*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pylyshyn, Z. W. (1973). What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery. *Psychological Bulletin*, 80, 1-24.
- Rohwer, W. D., Jr. (1970). Images and pictures in children's learning. *Psychological Bulletin*, 73(6), 393-403.
- Shepard, R. N. (1978). Externalization of mental images and the act of creation. In B. S. Randhawa & W. E. Coffman (Eds.), *Visual learning, thinking and communication* (pp. 133-189). New York: Academic Press.
- Shepard, R. N., & Cooper, L. A. (1982). *Mental images and their transformations*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

מקורות לקריאה נוספת על עבודתו של אפרים פישבין

- מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי. (2000). עלה, 26 (גיליון מיוחד המוקדש לאפרים פישבין). אוהור מתוך http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=blogcategory&id=90&Itemid=98
- ספרד, א' (1993). פסיכולוגיה של החינוך המתמטי: בין תיאוריה לבין מעשה – שיחה עם פרופסור אפרים פישבין. עלה, 13, 20-15. אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle13/alle13-2.pdf>
- פישבין, א' (1995). מודלים סמויים וחשיבה מתמטית. עלה, 16, 38-32. אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle16/alle16-6.pdf>
- פישבין, א' (2004). קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית. עלה, 32, 13-5. אוהור מתוך http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale32-pdf/ale32-2.pdf
- פישבין, א' ובלצן, מ' (2000). המושג המתמטי 'קבוצה' ו'מודל האוסף'. עלה, 26, 65-50. אוהור מתוך

http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale26-pdf/ale26-9.pdf

פישבין, א' וקדם, א' (1996). ודאות והוכחה בפיתוח החשיבה המתמטית. ע"ה, 18, 25-26. אוהור מתוך
<http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle18/alle18-4.pdf>

פישבין, א', יחיעם, ר' וכהן, ד' (1996). המושג "מספר אי-רציונלי" אצל תלמידי תיכון ופרחי הוראה. ע"ה, 19, 39-46.
 אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle19/alle19-7.pdf>

פישבין, א', תירוש, ד' וברש, א' (1998). ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית. ע"ה, 22, 12-28.
 אוהור מתוך <http://highmath.haifa.ac.il/data/alle1-26/alle22/alle22-3.pdf>



ד"ר טלי נחליאלי

ראש התכנית "הוראה ולמידה" לתואר שני במכללת לוינסקי לחינוך וראש תכנית "דלתא" להכשרת מורים מצטיינים למתמטיקה ומדעים. תחומי המחקר שלה מתמקדים בשיח המתמטי המתפתח בשיעורי המתמטיקה, וכן בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.